

Saját eredmény a *Számtani sorozatokat nem tartalmazó halmazok* c. TDK-dolgozatomban

Füredi Erik

2023. 01. 03.

Jelölje $r_k(\mathbb{Z}_m^n)$ a $\mathbb{Z}_m^n$ csoport legnagyobb, k hosszú számtani sorozatot nem tartalmazó részhalmazainak elemszámát. A pályamunka $r_k(\mathbb{Z}_m^n)$ értékével foglalkozik olyan speciális esetekben, ahol $m = p$ páratlan prímszám. Mivel $\mathbb{Z}_p^n$ izomorf $AG(n, p)$ -vel, így ennek egyes speciális esetei az aritmetikai kombinatorika mellett a véges geometriában is vizsgált kérdések.

A témával 2022 júliusában, egy ELTE-n szervezett REU-n kezdtem el foglalkozni, három egyetemista csapattársammal együtt. Saját eredményeim egy részét az ottani időszakban értem el, más részét később. Az általam elért új eredmények:

- Bebizonyítottam, hogy $r_p(\mathbb{Z}_p^3) \leq p^3 - 2p^2 + p - \frac{1}{2} + \frac{4p-2-\sqrt{8p^6-20p^5+17p^4-12p^3+20p^2-16p+4}}{2p^2}$ (5. tétel), ennek következménye, hogy $r_p(\mathbb{Z}_p^3) < p^3 - 2p^2 - (\sqrt{2} - 1)p + 2$ (5.a tétel). A bizonyítás során az ismert $r_p(\mathbb{Z}_p^2) = (p-1)^2$ állítást használtam kettős leszámlálásnál párhuzamos affin síkokon lévő pontok eloszlását nézve $\mathbb{Z}_p^3$ -ben.
- Az 5. tételt általánosítottam $r_k(\mathbb{Z}_p^{n+1})$ becslésére $r_k(\mathbb{Z}_p^n)$ ismeretében, beláttam, hogy $r_k(\mathbb{Z}_p^{n+1}) \leq p(r_k(\mathbb{Z}_p^n)) - \frac{r_k(\mathbb{Z}_p^n)}{p^n} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4r_k(\mathbb{Z}_p^n)^2 + p^{2n} - 4r_k(\mathbb{Z}_p^n)p^n - 4r_k(\mathbb{Z}_p^n)^2p^{n+1} + 4r_k(\mathbb{Z}_p^n)p^{2n+1}}}{2p^n}$, ahol $3 \leq k \leq p$ (6. tétel). Ennek bizonyítása is hasonlóan, kettős leszámlálással, párhuzamos hipersíkokat vizsgálva történt.
- Igazoltam, hogy $r_5(\mathbb{Z}_5^3) < 74$ és $r_7(\mathbb{Z}_7^3) < 243$ (3. és 4. becslések), ezek 1-gyel jobbák az 5. tétel alkalmazásával nyert becsléseknél. Itt is a síkonkénti ponteloszlással foglalkoztam $p-1$ pontú egyeneseket tartalmazó síkoknál a sík-egyenes tartalmazásokat a síkok pontjainak száma szerint csoportosítva, jelentős esetvizsgálattal.
- REU-s csapattársam, Kovács Benedek $r_p(\mathbb{Z}_p^3)$ -re vonatkozó alsó becslésén aprót javítottam $r_p(\mathbb{Z}_p^3) \geq (p-1)^3 + p - 2\sqrt{p} + O(1)$ -ről, ahol a hibetag negatívna tűnt, $r_p(\mathbb{Z}_p^3) > (p-1)^3 + p - 2\sqrt{p}$ -re. Itt csak a befejező számolást pontosítottam, azt használtam, hogy $\lfloor \sqrt{p} \rfloor + \lfloor \frac{p}{\lfloor \sqrt{p} \rfloor} \rfloor < 2\sqrt{p}$ teljesül minden $5 \leq p$ prímszámra (4. tétel utolsó bekezdése).