

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Gyúró Noémi

alkalmazott matematikus MSc, 2. évfolyam
(nockauborka@gmail.com)

**AZ ELEMI REPRODUKCIÓS SZÁM
MEGHATÁROZÁSA KÜLÖNFÉLE
RENDSZEREKBEN**

Tudományos diákköri dolgozat

Témavezetők:

Dr. Kovács Sándor, egyetemi adjunktus
György Szilvia, egyetemi tanársegéd
Numerikus Analízis Tanszék



Budapest, 2022.

Tartalomjegyzék

1. Alapvetés	3
1.1. Összefoglalás	3
1.2. Bevezetés	4
2. Az elemi reprodukciós szám meghatározása különféle rendszerekben	6
2.1. Az elemi reprodukciós szám meghatározása autonóm közönséges differenciálegyenlet-rendszerekben	6
2.2. Az elemi reprodukciós szám meghatározása autonóm közönséges differenciaegyenlet-rendszerekben	9
2.3. Az elemi reprodukciós szám meghatározása autonóm reakció-diffúzió-differenciálegyenlet-rendszerekben	11
3. Egy vertikális transzmissziót nélkülöző SIS-rendszer dinamikája	14
3.1. Az elemi reprodukciós szám egy vertikális transzmissziót nélkülöző SIS epidemiológiai modellben	14
3.2. Az elemi reprodukciós szám kiszámítása a fenti rendszer diszkrétizált változataiban	20
3.2.1. Bevezetés	20
3.2.2. Az explicit Euler-módszerrel történő diszkrétizáció	22
3.2.3. Mickens-féle nemsztenderd diszkrétizáció	27
3.3. Az elemi reprodukciós szám meghatározása diffúzió jelenlétében	31

1. fejezet

Alapvetés

1.1. Összefoglalás

Ennek a dolgozatnak a célja kettős: egyrészt megmutatjuk, hogyan lehet közönséges differenciálegyenletek, (közönséges) differenciaegyenletek, illetve reakció-diffúzió-differenciálegyenletek esetében kiszámítani az elemi reprodukciós számot, másrészt – egyéb kritériumok alkalmazáskor fellépő bonyolult számolásokat megkönnyítendő – a ráta konkrét rendszerében történő kiszámításával feltételt adunk a fázissík pozitív októansának határán lévő egyensúlyi helyzet lokálisan aszimptotikusan stabilis voltára.

A bemutatott algoritmust egy a témavezetőink által megalkotott vertikális transzmissziót nélkülöző járványterjedési modellre, annak többféle módon diszkretizált változatára, majd az abból, mint kinetikai rendszerből képzett reakció-diffúzió-rendszerre alkalmazzuk.

A folytonos esetben megmutatjuk, hogy amikor az elemi reprodukciós szám átlépi az 1 kritikus értéket forward transzkritikus bifurkáció lép fel: stabilis endemikus egyensúlyi helyzet keletkezik.

A folytonos rendszert aztán explicit Euler-, illetve nemsztenderd Mickens-féle diszkretizációknak vetjük alá. Az így keletkezett diszkrét rendszerek esetében, megmutatjuk, hogy miként kell megválasztani a lépésközt úgy, hogy a diszkretizált rendszer örökölje a folytonos rendszer dinamikai tulajdonságait: a fázistér pozitív októansa invariáns maradjon, és a megoldások a diszkretizáció után is egyenletesen korlátosak legyenek. Mindeközben az explicit Euler-féle diszkretizációval kapott rendszer esetében tetszőleges egyensúlyi helyzetben linearizált rendszer mátrixának spektrális tulajdonságait használva olyan korlátot adunk a lépésköz megválasztására, hogy az eredeti rendszer Jacobi-mátrixának Hurwitz-stabilis volta maga után vonja a diszkretizált rendszer Jacobi-mátrixának Schur-stabilitását.

Végül pedig feltételezve, hogy a járvány terjedését a populáció térbeli kiterjedése is befolyásolja, a vizsgált autonóm közönséges differenciálegyenlet-rendszert egy dif-

fúziós taggal kiegészítve a kapott reakció-diffúzió-rendszer esetében is elvégezzük a számításokat.

1.2. Bevezetés

Fertőző betegségek terjedését modellező rendszerek egyik legfontosabb jellemzője az $\mathcal{R}_0$ elemi reprodukciós szám, amely azt méri, hogy egy átlagos fertőzött hány másodlagos megbetegedést generál egy teljesen fogékony populációban (vö. [15]).

Az $\mathcal{R}_0$ kiszámításának **infektológiai haszna** abban rejlik, hogy előrevetíti, miként terjed egy fertőző kórokozó egy adott populációban, mikor várható járvány kitörése. Az $\mathcal{R}_0$ kiszámításának **matematikai haszna** pedig azzal magyarázható, hogy ha valamely autonóm közönséges differenciálegyenlet-rendszer, illetve differenciaegyenlet-rendszer vagy reakció-diffúzió-rendszer fázisterének határán lévő egyensúlyi helyzetének lokális stabilitását a linearizálós módszerrel kívánjuk megvizsgálni, akkor a kapott Jacobi-mátrix Hurwitz-, ill. Schur-stabilitásának megállapításakor szokás használni pl. a Routh-Hurwitz-kritériumot, a Linéard-Chipart-kritériumot, a Schur-Cohn- vagy Jury-kritériumot, néha pedig a Gerschgorin-köröket, illetve reakció-diffúzió-rendszer esetében Fourier-módszerrel meg kell oldani a linearizált peremérték-feladatot, ami sok esetben olyan algebrai egyenlőtlenség-rendszer megoldásához vezet, amely során hosszú bonyodalmas számolásokba ütközhetünk. Ezen kritériumok alkalmazásával egyébként a vizsgált populáció dinamikájába sem nyerhetünk betekintést.

Az $\mathcal{R}_0$ elemi reprodukciós szám értéke meghatározó szerepet tölt be a fertőző betegségek terjedésének előrejelzésében (vö. [3]). Ha $\mathcal{R}_0 < 1$, akkor egy fertőzött egyed átlagosan egynél kevesebb új fertőzött egyedet termel a fertőzési időszaka alatt, és a fertőzött populáció mérete nem növekszik. Ebben az esetben a betegségmentes egyensúlyi helyzet lokálisan aszimptotikusan stabilis, és a betegség nem tud behatolni a populációba. Az $\mathcal{R}_0 > 1$ esetben viszont minden fertőzött egyed átlagosan egynél több új fertőzést produkál. Ebben az esetben a betegségmentes egyensúlyi helyzet labilis (nem stabilis), és a populációban önfenntartó járvány tud kitörni (vö. [10]). Látható tehát, hogy az $\mathcal{R}_0$ értékének vizsgálatával a határon lévő egyensúlyi helyzet stabilitásának meghatározása lényegesen leegyszerűsödhet.

A matematikai biológiában az $\mathcal{R}_0$ az ún. következő generációs operátor spektrálsugaraként – véges dimenziós esetben a következő generációs mátrix domináns sajátértékeként – áll elő. A konkrét számítási algoritmusok bemutatását a [8], [2] és a [24] tanulmányok felhasználásával prezentáljuk.

A dolgozat felépítése a következő. A második fejezetben röviden összefoglaljuk, miként számítható az elemi reprodukciós szám értéke autonóm közönséges differenciál- és differenciaegyenlet-rendszerek, majd reakció-diffúzió-differenciálegyenlet-rendszerek esetében. A harmadik fejezetben a témavezetőink megalkotta vertikális transzmisszi-

ót nélkülöző SIS-modell (vö. [17]) kvalitatív tulajdonságainak tárgyalására kerül sor, amelynek során meghatározzuk az elemi reprodukciós számot, majd belátjuk, hogy amint ez a szám átlépi a kritikus értéket forward transzkritikus bifurkáció lép fel: stabilis endemikus egyensúlyi helyzet keletkezik. Megvizsgáljuk az elemi reprodukciós szám paraméterekre vonatkozó szenzitivitását is. Ezután a rendszert kétféle diszkretizációnak vetjük alá: explicit Euler-, ill. Mickens-féle diszkretizálási algoritmusok egy egész családjával kapott differenciaegyenlet-rendszer biológiai relevanciáját bizonyítjuk. Konkrétan korlátot adunk a lépésköz nagyságának megválasztására, hogy a fázistér pozitív oktánsa invariáns maradjon és a diszkretizációt követően a megoldások egyenletesen korlátosak legyenek. Ezután kiszámoljuk az elemi reprodukciós számot, majd ennek felhasználásával feltételt adunk a (határon lévő) betegségmentes egyensúlyi helyzet lokális stabilitására. Végül – figyelembe véve a populáció térbeli kiterjedését – a közönséges differenciálegyenlet-rendszerből, mint kinetikai rendszerből keletkező reakció-diffúzió-rendszer esetében szintén kiszámoljuk az elemi reprodukciós számot.

Az **általunk bizonyított tételek**et háttérszínben elkülönítjük a az **idézett tételek**től, aminek a forrását is megjelöljük.

Budapest, 2022. november 4.

Gyúró Noémi

2. fejezet

Az elemi reprodukciós szám meghatározása különféle rendszerekben

Ebben a fejezetben az $\mathcal{R}_0$ definícióját és kiszámítási algoritmusát tárgyaljuk autonóm közönséges differenciál- és differenciaegyenlet-rendszerek, valamint reakció-diffúzió-rendszerek esetében.

2.1. Az elemi reprodukciós szám meghatározása autonóm közönséges differenciálegyenlet-rendszerekben

A [7], ill. a [8] tanulmányokra támaszkodva elsőként azt mutatjuk meg, hogyan értelmezik, illetve számítják az elemi reprodukciós számot autonóm közönséges differenciálegyenlet-rendszerek esetében.

Tekintsünk egy heterogén populációt, ahol életkor, viselkedés, térbeli helyzet és/vagy a betegség stádiuma szerint megkülönböztethetők az egyedek, de d homogén osztályba csoportosíthatóak. Tekintsük az

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$$

vektort, ahol $u_i \geq 0$ jelenti az i -edik osztályban lévő egyedek számát. Legyen továbbá $m \in [0, d) \cap \mathbb{N}$, és az iménti vektor első m komponense feleljen meg a fertőzött egyedeknek. Ekkor a fertőző betegség terjedését modellező rendszer nem más, mint egy pozitív kezdeti feltétellel rendelkező

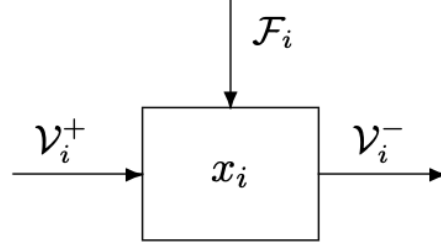
$$\dot{u}_i = f_i(\mathbf{u}) = f_i(\underbrace{u_1, \dots, u_m}_{\text{fertőzött}}, u_{m+1}, \dots, u_d) =: \mathcal{F}_i(\mathbf{u}) - \mathcal{V}_i(\mathbf{u}) \quad (i \in \{1, \dots, d\}) \quad (2.1.1)$$

dinamikai rendszer, ahol egyrészt

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_d) : (\mathbb{R}_0^+)^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{V}_i(\mathbf{u}) =: \mathcal{V}_i(\mathbf{u})^- - \mathcal{V}_i(\mathbf{u})^+,$$

másrészt pedig (vö. 2.1.1. ábra)

- $\mathcal{F}_i(\mathbf{u})$: a fertőzött egyedek i -edik osztályba való bekerülési rátája;
- $\mathcal{V}_i(\mathbf{u})^+$: az egyedek i -edik osztályba való (más okokból történő, pl. születés vagy bevándorlás általi) bekerülési rátája;
- $\mathcal{V}_i(\mathbf{u})^-$: az egyedek i -edik osztályból való (pl. halálozás vagy gyógyulás általi) kikerülési rátája.



2.1.1. ábra. A születési, bekerülési, illetve a kikerülési rátát reprezentáló, i -edik osztályhoz tartozó állapotváltozó.

Vezessük be a betegségmentes állapotok

$$\mathcal{X}_s := \{\mathbf{0} \leq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d : u_i = 0 \ (i \in \{1, \dots, m\})\}$$

halmazát, majd tegyük fel, hogy a fenti függvények minden változójukban legalább kétszer differenciálhatóak, továbbá

(F1) mivel a fenti függvények az egyedek irányított áthelyeződését reprezentálják, ezért legyenek nem-negatívak, azaz

$$\mathbf{u} \geq \mathbf{0} \quad \implies \quad \mathcal{F}_i(\mathbf{u}), \mathcal{V}_i(\mathbf{u})^-, \mathcal{V}_i(\mathbf{u})^+ \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, d\};$$

(F2) ha egy osztályban nincsen egyed, akkor az semmilyen módon ne tudjon onnan kikerülni:

$$u_i = 0 \quad \implies \quad \mathcal{V}_i(\mathbf{u})^- = 0;$$

(F3) a nem fertőzött osztályokban ne forduljon elő fertőzés:

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{u}) = 0 \quad (i > m);$$

(F4) ha a populáció fertőzésmentes volt, akkor fertőzésmentes is maradjon:

$$\mathbf{u} \in \mathcal{X}_s \quad \implies \quad \mathcal{F}_i(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{és} \quad \mathcal{V}_i(\mathbf{u})^+ = 0 \quad (i \in \{1, \dots, m\});$$

(F5) figyelmünket azokra a rendszerekre korlátozzuk, amelyekben a (2.1.1) rendszer $\mathbf{u}^*$ betegségmentes egyensúlyi helyzete¹ új fertőzés hiányában stabilis:

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{0} \quad \implies \quad \sigma(J_{\mathcal{F}}(\mathbf{u}^*)) \subset \mathbb{C}^-.$$

A fenti feltevéseket felhasználva a szerzők a [8] tanulmányban az $\mathcal{F}$ és a $\mathcal{V}$ függvények Jacobi-mátrixára a következő állítást látták be.

2.1.1. Lemma ([8]). Ha $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^d$ jelöli a (2.1.1) autonóm közönséges differenciálegyenlet-rendszer betegségmentes egyensúlyi helyzetét, és minden $i \in \{1, \dots, d\}$ indexre f_i eleget tesz a fenti feltételeknek, akkor az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{V}$ függvények $\mathbf{u}^*$ -beli Jacobi-mátrixára

$$J_{\mathcal{F}}(\mathbf{u}^*) = \begin{bmatrix} F & O \\ O & O \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad J_{\mathcal{V}}(\mathbf{u}^*) = \begin{bmatrix} V & O \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix}$$

teljesül, ahol

$$F := [\partial_j \mathcal{F}_i(\mathbf{u}^*)]_{1 \leq i, j \leq m} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad \text{és} \quad V := [\partial_j \mathcal{V}_i(\mathbf{u}^*)]_{1 \leq i, j \leq m} \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

továbbá F nem-negatív, V nem-szinguláris Metzler-mátrix (a főátlón kívüli elemek mind nem-negatívak) és a J_4 mátrix minden sajátértékének valós része pozitív.

A populációba bekerült „tipikus” fertőző egyed sorsának meghatározásához figyelembe vesszük a linearizált rendszer dinamikáját „kikapcsolt újrafertőződés” mellett, azaz az alábbi rendszerrel dolgozunk tovább:

$$\dot{\mathbf{u}} = -J_{\mathcal{V}}(\mathbf{u}^*)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*). \quad (2.1.2)$$

Az (F5) feltétel következményeként $\mathbf{u}^*$ a (2.1.2) rendszer lokálisan aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzete, ami azt jelenti, hogy (2.1.2) felhasználásával meghatározható a betegségmentes populációba bekerülő kis számú fertőzésmentes egyedek sorsa. Jelölje $\psi_i(0)$ az i -edik osztályban lévő fertőző egyedek kezdeti számát,

$$\boldsymbol{\psi}(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_m(t))$$

pedig azoknak a fertőzött egyedeknek a számát, akik t időegység után is a fertőzött osztályban maradnak. Ekkor $J_{\mathcal{V}}(\mathbf{u}^*)$ partíciójának következményeként a $\boldsymbol{\psi}$ függvényre

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -V\boldsymbol{\psi}$$

¹ $\mathbf{f}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$ ahol $\mathbf{u}^* = (0, \dots, 0, u_{m+1}^*, \dots, u_d^*)$.

teljesül, amely egyértelműen megoldható:

$$\psi(t) = e^{-Vt}\psi(0) \quad (t \in [0, +\infty)).$$

A 2.1.1. Lemma következtében V nem-szinguláris Metzler-mátrix, így invertálható és minden sajátértéke pozitív valós részű. Ennélfogva az eredetileg fertőzött egyének által okozott új fertőzések várható száma

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} F\psi(t) dt &= \int_0^{+\infty} Fe^{-Vt}\psi(0) dt = F \int_0^{+\infty} e^{-Vt}\psi(0) dt = \\ &= F [e^{-Vt}(-V^{-1})\psi(0)]_0^{+\infty} = FV^{-1}\psi(0). \end{aligned}$$

Mivel F nem-negatív, V nem-szinguláris Metzler-mátrix, ezért V^{-1} nem-negatív. A [6] könyv nyomán nevezzük az FV^{-1} mátrixot **következő generációs mátrixnak**,

$$\mathcal{R}_0 := \rho(FV^{-1})$$

spektrálsugarát (domináns sajátértékét) pedig **elemi reprodukciós számnak**.

A (2.1.1) rendszer u^* egyensúlyi helyzete lokálisan aszimptotikusan stabilis, illetve labilis, ha a $J_f(u^*)$ Jacobi-mátrix Hurwitz-stabilis, azaz minden sajátértékének valós része negatív, illetve ha $J_f(u^*)$ -nak van pozitív valós részű sajátértéke. A 2.1.1. Lemma következtében a $J_f(u^*)$ Jacobi-mátrix sajátértékei két részre oszthatók a fertőzött, illetve betegségmentes osztályoknak megfelelően. Ennek a két halmaznak az elemei nem mások, mint az $F - V$ mátrix, illetve $-J_4$ sajátértékei. A 2.1.1. Lemma ismételt alkalmazásával elmondható, hogy a $-J_4$ mátrix stabilis, így az adott egyensúlyi helyzet lokális stabilitása az $F - V$ mátrix spektrális tulajdonságainak függvénye. A [8] tanulmányban a következő állítást bizonyították be a szerzők:

2.1.1. Tétel ([8]). Ha az f függvény kielégíti az (F1)-(F5) feltételeket, akkor a (2.1.1) rendszer betegségmentes egyensúlyi helyzete

- az $\mathcal{R}_0 < 1$ esetben lokálisan aszimptotikusan stabilis;
- az $\mathcal{R}_0 > 1$ esetben pedig labilis.

2.2. Az elemi reprodukciós szám meghatározása autonóm közönséges differenciaegyenlet-rendszerekben

A [2] tanulmány felhasználásával ebben az alfejezetben azt fogjuk röviden megmutatni, hogyan számítható ki $\mathcal{R}_0$ diszkrét rendszerekben, konkrétan autonóm közönséges differenciaegyenlet-rendszerek esetében.

Legyen $d \in \mathbb{N}$ és $m \in [0, d) \cap \mathbb{N}$, majd tekintsük az

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0) \quad (2.2.1)$$

autonóm közönséges differenciaegyenlet-rendszert, ahol

$$\mathbf{f} : (\mathbb{R}_0^+)^d \rightarrow (\mathbb{R}_0^+)^d, \quad \mathbf{f} \in \mathfrak{C}^1.$$

A vektorértékű $\mathbf{f}$ függvény értékészlete az illető populáció d osztályát reprezentálja az egészségügyi állapotuknak megfelelően, tehát aszerint, hogy az egyedek egészségesek-e, veszélyeztetettek-e, illetve fertőzöttek-e vagy felgyógyultak-e (vö. [4]). Tegyük fel, hogy az egyes osztályok úgy vannak sorba rendezve, hogy az első m osztály ($0 \leq m < d$) jelöli a betegségmentes osztályokat. A folytonos esethez hasonlóan a (2.2.1) rendszer jobb oldalának Jacobi-mátrixát az alábbi módon particionáljuk:

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}^*) = \begin{bmatrix} F + T & O \\ A & C \end{bmatrix}, \quad (2.2.2)$$

ahol F és T nem-negatív $(m \times m)$ -es mátrix, O jelöli a nullmátrixot, $F + T$ irreducibilis, továbbá $\mathbf{f}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{u}^*$.

Az $\mathbf{u}^*$ betegségmentes egyensúlyi helyzet stabilitásának vizsgálatához a $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}^*)$ Jacobi-mátrix Schur-stabilitását vizsgáljuk (vö. [9]), azaz olyan feltételeket keresünk, amelyek teljesülése esetén $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}^*)$ minden sajátértéke az egységkör belsejébe esik. Mivel $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}^*)$ blokk-trianguláris ezért $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}^*)$ pontosan akkor lesz Schur-stabilis, ha

$$\rho(F + T) < 1 \quad \text{és} \quad \rho(C) < 1$$

teljesül. Ismeretes, hogy ha $\rho(T) < 1$, akkor az alábbi Neumann-sor konvergens:

$$I_m + T + T^2 + T^3 + \dots =: N \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

ahol I_m jelöli az $(m \times m)$ -es egységmátrixot. Következésképpen, ha I_0 a fertőzött egyedek kezdeti száma, akkor

$$FN I_0 = F(I_m - T)^{-1} I_0$$

jelenti a populáció élettartama alatti fertőzések összességét (vö. [18]). Az

$$FN = F(I_m - T)^{-1}$$

mátrixot szokás **következő generációs mátrix**nak nevezni, spektrálsugarát pedig **elemi reprodukciós számnak**:

$$\mathcal{R}_0 := \rho(F(I_m - T)^{-1})$$

(vö. [12]). Mivel (vö. [18])

$$\rho(F + T) < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{R}_0 < 1,$$

ezért könnyen belátható az alábbi

2.2.1. Tétel ([2]). Tegyük fel, hogy a (2.2.1) autonóm differenciaegyenlet-rendszernek pontosan egy $\mathbf{u}^*$ betegségmentes egyensúlyi helyzete van és a $J_f(\mathbf{u}^*)$ Jacobi-mátrix a (2.2.2)-ben látható módon particionálható, ahol F és T nem-negatív, $F+T$ irreducibilis és C , ill. T Schur-stabilis mátrix. Ekkor $\mathcal{R}_0 < 1$ esetén $\mathbf{u}^*$ (lokálisan) aszimptotikusan stabilis, $\mathcal{R}_0 > 1$ esetén pedig labilis.

2.3. Az elemi reprodukciós szám meghatározása autonóm reakció-diffúzió- differenciálegyenlet-rendszerekben

Végül a [24] tanulmánybeli gondolatmenetet követve reakció-diffúzió-differenciálegyenlet-rendszerek esetében vázoljuk, miként értelmezhető, illetve számítható ki az elemi reprodukciós szám.

Legyen ismét $d \in \mathbb{N}$, ill. $m \in [0, d) \cap \mathbb{N}$, majd tegyük fel, hogy az adott populáció két osztályra bontható: fertőzöttek m számú és betegségmentesek $d - m + 1$ számú osztályára:

$$1, \dots, m, \quad \text{ill.} \quad m+1, \dots, d.$$

Tegyük fel továbbá azt is, hogy a populáció egyedei a szakaszonként sima peremmel rendelkező $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ síkbeli tartományon szabadon mozoghatnak, amelynek határán keresztül nincsen migráció, azaz a rendszerünket a

$$\partial_t u_i(\mathbf{r}, t) = \mathfrak{d}_i \Delta_{\mathbf{r}} u_i(\mathbf{r}, t) + f_i(\mathbf{u}) \quad (i \in \{1, \dots, d\}, (\mathbf{r}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_0^+) \quad (2.3.1)$$

reakció-diffúzió-rendszer írja le, homogén Neumann-féle peremfeltételekkel (a tartomány határán át nincs migráció):

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad ((\mathbf{r}, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+), \quad (2.3.2)$$

és a rendszerhez nem-negatív (nem azonosan zérus) kezdeti feltételt írunk elő:

$$\mathbf{0} \neq \mathbf{u}_0(\mathbf{r}) := \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) \geq \mathbf{0} \quad ((\mathbf{r}, t) \in \overline{\Omega} \times \{0\}), \quad (2.3.3)$$

ahol u_i az i -edik osztályban lévő egyedek sűrűsége, illetve száma, $\mathfrak{d}_i > 0$ pedig az i -edik osztályban lévő egyedek diffúziós együtthatója, az f_i pedig valamely közös differenciálegyenlet-rendszer jobb oldalából származó ún. kinetikai tag i -edik komponense, amely elegendő az első alfejezetben bevezetett (F1)-(F5) feltételeknek. A $\mathbf{n}$ pedig nem más, mint a $\partial\Omega$ határ kifelé mutató normálisa. Világos, hogy a (2.1.1) rendszer

$$\mathbf{u}^* = (0, \dots, 0, u_{m+1}^*, \dots, u_d^*)$$

betegségmentes egyensúlyi helyzete egyben egyensúlyi helyzete a (2.3.1) rendszernek is.

Az $\mathbf{u}^*$ fenti alakjának megfelelően legyen

$$\mathbf{u}_I := (u_1, \dots, u_m), \quad \mathbf{u}_S := (u_{m+1}, \dots, u_d),$$

és

$$D_I := \text{diag} \{\mathfrak{d}_1, \dots, \mathfrak{d}_m\}, \quad D_S := \text{diag} \{\mathfrak{d}_{m+1}, \dots, \mathfrak{d}_d\},$$

továbbá

$$\mathbf{f}_I(\mathbf{u}) := (f_1(\mathbf{u}), \dots, f_m(\mathbf{u})), \quad \mathbf{f}_S := (f_{m+1}(\mathbf{u}), \dots, f_d(\mathbf{u})).$$

Legyen

$$C := [\partial_j f_i(\mathbf{u}^*)]_{m+1 \leq i, j \leq d} \quad \text{és} \quad f_i(\mathbf{u}) =: \mathcal{F}_i(\mathbf{u}) - \mathcal{V}_i(\mathbf{u}),$$

továbbá

$$F := [\partial_j \mathcal{F}_i(\mathbf{u}^*)] \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad \text{és} \quad V := [\partial_j \mathcal{V}_i(\mathbf{u}^*)] \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

ahol $J \in \mathbb{R}^{(d-m) \times m}$, az $\mathcal{F}$ és a $\mathcal{V}$ függvények $\mathbf{u}^*$ -ban vett Jacobi-mátrixa

$$J_{\mathcal{F}}(\mathbf{u}^*) = \begin{bmatrix} F & O \\ O & O \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad J_{\mathcal{V}}(\mathbf{u}^*) = \begin{bmatrix} V & O \\ J & -C \end{bmatrix}$$

alakú (vö. 2.1 alfejezetbeli 2.1.1. Lemma). Nyilvánvaló, hogy az (F1)-(F5) feltételek következtében F nem-negatív.

Tekintsük a

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}_S(\mathbf{r}, t) &= D_S \Delta_{\mathbf{r}} \mathbf{u}_S(\mathbf{r}, t) + C \mathbf{u}_S(\mathbf{r}, t) & ((\mathbf{r}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_0^+), \\ (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) u_i(\mathbf{r}, t) &= 0 & ((\mathbf{r}, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+) \quad (i \in \{m+1, \dots, d\}) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

és a

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}_I(\mathbf{r}, t) &= D_I \Delta_{\mathbf{r}} \mathbf{u}_I(\mathbf{r}, t) - V \mathbf{u}_I(\mathbf{r}, t) & ((\mathbf{r}, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_0^+), \\ (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) u_i(\mathbf{r}, t) &= 0 & ((\mathbf{r}, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+) \quad (i \in \{1, \dots, m\}) \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

lineáris peremérték-feladatot. Az $\mathbf{u}^*$ egyensúlyi helyzet lineáris stabilitását biztosítandó még azt is feltesszük (vö. [24]), hogy

$$(F6) \quad s(D_S \Delta_{\mathbf{r}} + C) < 0 \quad \text{és} \quad s(D_I \Delta_{\mathbf{r}} - V) < 0$$

teljesül.² Ismeretes (vö. pl. [16]) hogy a

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= D \Delta_{\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}^*) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) & ((\mathbf{r}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_0^+), \\ (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) u_i(\mathbf{r}, t) &= 0 & ((\mathbf{r}, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+) \quad (i \in \{1, \dots, d\}). \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

²Ha A valamely Banach-teret önmagába képező operátor, akkor A **spektrálabscisszáját**, ill. **spektrálsugarát** az $s(A) := \sup\{\Re(\lambda) \in \mathbb{R} : \lambda \in \sigma(A)\}$, ill. a $\rho(A) := \sup\{|\lambda| \in \mathbb{R} : \lambda \in \sigma(A)\}$ formulával értelmezzük.

linearizált rendszer aszimptotikus stabilitása elegendő feltételt szolgáltat a (2.3.1) rendszer $\mathbf{u}^*$ egyensúlyi helyzetének aszimptotikus stabilitására. A fenti jelölésekkel (2.3.6) a

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}_I(\mathbf{r}, t) &= D_I \Delta_{\mathbf{r}} \mathbf{u}_I(\mathbf{r}, t) + (F - V) \mathbf{u}_I(\mathbf{r}, t) & ((\mathbf{r}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_0^+), \\ \partial_t \mathbf{u}_S(\mathbf{r}, t) &= D_S \Delta_{\mathbf{r}} \mathbf{u}_S(\mathbf{r}, t) - J \mathbf{u}_I(\mathbf{r}, t) + C \mathbf{u}_S(\mathbf{r}, t) & ((\mathbf{r}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_0^+), \\ (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) u_i(\mathbf{r}, t) &= 0 & ((\mathbf{r}, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_0^+) \quad (i \in \{1, \dots, d\}) \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

alakba írható (vö. [24]). A

$$B := D_I \Delta_{\mathbf{r}} - V : \mathfrak{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2) \hookrightarrow \mathfrak{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$$

$$\mathcal{D}(B) = \left\{ \mathbf{v} \in \bigcap_{p \geq 1} W^{2,p}(\Omega, \mathbb{R}^2) : (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ a } \partial\Omega \text{ határon és } B\mathbf{v} \in \mathfrak{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2) \right\}$$

operátor bevezetésével a (2.3.1) rendszerre vonatkozó **elemi reprodukciós szám** az FB^{-1} operátor spektrálabscisszájaként értelmezhető:

$$\mathcal{R}_0 := \rho(FB^{-1}).$$

A (2.3.1) rendszer $\mathbf{u}^*$ egyensúlyi helyzete lokális stabilitásának eldöntéséhez igen hasznos eszközt szolgáltat az alábbi két tételben megfogalmazott állítás.

2.3.1. Tétel ([24]). Ha teljesülnek az (F1)-(F6) feltételek, akkor

1. $\mathcal{R}_0 - 1$ előjele megegyezik $s(B + F)$ előjével;
2. az $\mathcal{R}_0 < 1$ esetben $\mathbf{u}^*$ (lokálisan) aszimptotikusan stabilis egyensúlyi helyzete a (2.3.1) rendszernek.

2.3.2. Tétel ([24]). Ha teljesülnek az (F1)-(F6) feltételek, továbbá a

$$\begin{aligned} -D_I \Delta_{\mathbf{r}} \phi + V \phi &= \mu F \phi & (\text{az } \Omega \text{ tartományon}), \\ (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) \phi &= 0 & (\text{az } \partial\Omega \text{ határon}) \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

lineáris elliptikus peremérték-feladatnak pontosan egy μ_0 pozitív sajátértéke van (pozitív sajátfüggvénnyel), akkor

$$\mathcal{R}_0 = \rho(-FB^{-1}) = \rho(-B^{-1}F) = \frac{1}{\mu_0}.$$

3. fejezet

Egy vertikális transzmissziót nélkülöző SIS-rendszer dinamikája

Ebben a fejezetben egy a vertikális transzmissziót nélkülöző fertőző betegségek terjedését modellező közönséges differenciál-, differencia-, illetve reakció-diffúzió-rendszer kvalitatív tulajdonságait tárgyaljuk.

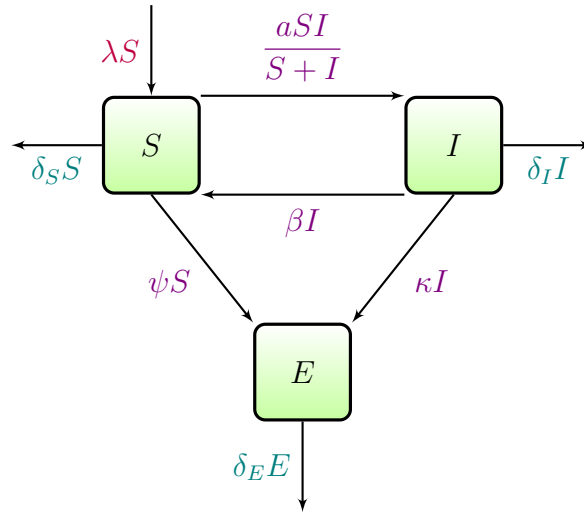
3.1. Az elemei reprodukciós szám egy vertikális transzmissziót nélkülöző SIS epidemiológiai modellben

A [17] tanulmányban témavezetőimmal az

$$\left. \begin{aligned} \dot{S} &= \lambda - \frac{aSI}{S+I} + \beta I - \psi S - \delta_S S =: f_1(S, E, I), \\ \dot{E} &= \psi S + \kappa I - \delta_E E =: f_2(S, E, I), \\ \dot{I} &= \frac{aSI}{S+I} - \kappa I - \beta I - \delta_I I =: f_3(S, E, I) \end{aligned} \right\} \quad (3.1.1)$$

SIS járvány-modell kvalitatív tulajdonságait vizsgáltuk, ahol S jelenti a fogékony, I a fertőző egyedek lélekszámát, E pedig azon egyedek számát, akiket oktattak vagy akik részt vettek valamely oltási programban. A paraméterek jelentése a következő:

- $\delta_i > 0$ jelenti az i -edik osztályba tartozó egyedek ún. halálozási rátáját ($i \in \{S, E, I\}$);
- $\lambda > 0$ jelenti a születési rátát vertikális transzmisszió nélkül, azaz minden újszülött veszélyeztetett, de nem fertőzött, és természetesen nem is oktatott;
- $a > 0$ jelenti az egy fertőzésre jutó érintkezések átlagos számával kapcsolatos rátát (a fertőzött osztályból a veszélyeztetett osztályba való transzmissziós rátát);



3.1.1. ábra. A (3.1.1) modell folyamatábrája.

- $\beta > 0$ nem más, mint annak a rátája, amellyel a felépült egyedek elveszítve a fertőzéssel szembeni immunitásukat – visszatérnek a fogékonyak osztályába,
- $\psi \geq 0$ és $\kappa > 0$ pedig a veszélyeztetettek, illetve a fertőzöttek oktatási rátáját jelenti (a veszélyeztetett, illetve a fertőzött osztályból az oktatott osztályba való transzmissziós rátát), ahol feltesszük, hogy $\kappa \leq a$ teljesül.

Mivel a (3.1.1) rendszer jobb oldala $\mathcal{C}^1$ osztályú, így a Picard-Lindelöf-tétel biztosítja a megfelelő kezdetiérték-feladat megoldásának létezését, ill. egyértelműségét. A kvalitatív tulajdonságok vizsgálatához szükséges, hogy (3.1.1) biológiailag releváns legyen, ami azt jelenti, hogy a fázistér pozitív oktánsa (pozitívan) invariáns legyen és a (3.1.1) megoldásai értelmezhetők kell, hogy legyenek a $[0, +\infty)$ intervallumon. Mindezt a témavezetőim belátták a [17] tanulmányban:

3.1.1. Tétel ([17]). A (3.1.1) rendszer pozitív kezdeti feltételű megoldásai pozitívak maradnak.

3.1.2. Tétel ([17]). A (3.1.1) rendszer pozitív kezdeti feltételt kielégítő megoldásai egyenletesen korlátosak, pontosabban a fázissík pozitív kvadránsában induló tetszőleges pálya az

$$\Omega := \left\{ (S, E, I) \in \mathbb{R}^3 : 0 < S + E + I \leq \frac{K}{\mu} \right\}$$

halmazba torkollik, ahol $K > 0$ alkalmas állandó, $0 < \mu < \min\{\delta_S, \delta_E, \delta_I\}$.

Ahhoz, hogy kiszámíthassuk a (3.1.1) rendszer esetében az elemi reprodukciós számot, a rendszert az

$$(\dot{S}, \dot{E}, \dot{I}) =: \hat{\mathcal{F}}(S, E, I) - \hat{\mathcal{G}}(S, E, I)$$

alakba írjuk, ahol

$$\hat{\mathcal{F}}(S, E, I) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{aSI}{S+I} \end{bmatrix}$$

és

$$\hat{\mathcal{G}}(S, E, I) := \begin{bmatrix} -\lambda + \frac{aSI}{S+I} - \beta I + (\psi + \delta_S)S \\ -\psi S - \kappa I + \delta_E E \\ (\kappa + \beta + \delta_I)I \end{bmatrix}.$$

Az

$$\mathfrak{E}_b := (S_b, E_b, I_b) := \left(\frac{\lambda}{\delta_S + \psi}, \frac{\lambda\psi}{\delta_E(\delta_S + \psi)}, 0 \right)$$

betegségmentes egyensúlyi helyzetben az $\hat{\mathcal{F}}$ és $\hat{\mathcal{G}}$ függvények Jacobi-mátrixa

$$D\hat{\mathcal{F}}(\mathfrak{E}_b) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad D\hat{\mathcal{G}}(\mathfrak{E}_b) := \begin{bmatrix} \psi + \delta_S & 0 & a - \beta \\ -\psi & \delta_E & -\kappa \\ 0 & 0 & \kappa + \beta + \delta_I \end{bmatrix}$$

alakú. A $D\hat{\mathcal{F}}(\mathfrak{E}_b)$ és $D\hat{\mathcal{G}}(\mathfrak{E}_b)$ mátrixokat az alábbi módon particionáljuk:

$$D\hat{\mathcal{F}}(\mathfrak{E}_b) =: \begin{bmatrix} \mathbf{O} & 0 \\ \mathbf{O} & F \end{bmatrix}, \quad D\hat{\mathcal{G}}(\mathfrak{E}_b) =: \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ \mathbf{O} & G \end{bmatrix},$$

ahol

$$F := \partial_3 \hat{\mathcal{F}}_3(\mathfrak{E}_b) = a \quad \text{és} \quad G := \partial_3 \hat{\mathcal{G}}_3(\mathfrak{E}_b) = \kappa + \beta + \delta_I.$$

Az FG^{-1} következő generációs mátrix spektrálsugara, illetve az elemi reprodukciós ráta így

$$\mathcal{R}_0 = \rho(FG^{-1}) = \frac{a}{\kappa + \beta + \delta_I} \quad (3.1.2)$$

alakú (vö. [6]).

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy $\mathcal{R}_0$ mennyire függ az egyes paraméterektől, azaz megvizsgáljuk $\mathcal{R}_0$ -nak a paraméterekre vonatkozó érzékenységet. Ha a π függő változó az x paraméter függvénye, akkor π -nek az x -re vonatkozó érzékenységet a

$$\Psi_\pi^x := \frac{\pi}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \pi}$$

formulával számítjuk (vö. pl. [20]). Így

$$\begin{aligned}
\Psi_{\lambda}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\lambda}{\mathcal{R}_0} \cdot \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \lambda} = \frac{\lambda(\kappa + \beta + \delta_I)}{a} \cdot 0 = 0, \\
\Psi_a^{\mathcal{R}_0} &= \frac{a}{\mathcal{R}_0} \cdot \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial a} = \frac{a(\kappa + \beta + \delta_I)}{a} \cdot \frac{1}{\kappa + \beta + \delta_I} = 1, \\
\Psi_{\beta}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\beta}{\mathcal{R}_0} \cdot \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \beta} = \frac{\beta(\kappa + \beta + \delta_I)}{a} \cdot \frac{-a}{(\kappa + \beta + \delta_I)^2} = \frac{-\beta}{\kappa + \beta + \delta_I}, \\
\Psi_{\psi}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\psi}{\mathcal{R}_0} \cdot \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \psi} = \frac{\psi(\kappa + \beta + \delta_I)}{a} \cdot 0 = 0, \\
\Psi_{\kappa}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\kappa}{\mathcal{R}_0} \cdot \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \kappa} = \frac{\kappa(\kappa + \beta + \delta_I)}{a} \cdot \frac{-a}{(\kappa + \beta + \delta_I)^2} = \frac{-\kappa}{\kappa + \beta + \delta_I}, \\
\Psi_{\delta_S}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\delta_S}{\mathcal{R}_0} \cdot \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \delta_S} = \frac{\delta_S(\kappa + \beta + \delta_I)}{a} \cdot 0 = 0, \\
\Psi_{\delta_E}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\delta_E}{\mathcal{R}_0} \cdot \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \delta_E} = \frac{\delta_E(\kappa + \beta + \delta_I)}{a} \cdot 0 = 0, \\
\Psi_{\delta_I}^{\mathcal{R}_0} &= \frac{\delta_I}{\mathcal{R}_0} \cdot \frac{\partial \mathcal{R}_0}{\partial \delta_I} = \frac{\delta_I(\kappa + \beta + \delta_I)}{a} \cdot \frac{-a}{(\kappa + \beta + \delta_I)^2} = \frac{-\delta_I}{\kappa + \beta + \delta_I}.
\end{aligned}$$

A (3.1.1) rendszer esetében az elemi reprodukciós szám paraméterekre vonatkozó érzékenysége kapcsán, illetve (3.1.2) alapján az alábbi kijelentések tehetők:

- $\Psi_a^{\mathcal{R}_0} = 1$, ami azt jelenti, hogy az a paraméter 1%-kal történő növekedése az $\mathcal{R}_0$ szám 1% történő növekedését vonja maga után;
- $\Psi_{\psi}^{\mathcal{R}_0} = 0$, $\Psi_{\delta_S}^{\mathcal{R}_0} = 0$ és $\Psi_{\delta_E}^{\mathcal{R}_0} = 0$, ami azt jelenti, hogy $\mathcal{R}_0$ nem függ a ψ , a δ_S és a δ_E paraméterektől;
- $\Psi_{\beta}^{\mathcal{R}_0} < 0$, $\Psi_{\kappa}^{\mathcal{R}_0} < 0$ és $\Psi_{\delta_I}^{\mathcal{R}_0} < 0$, azaz a β , κ és a δ_I paraméterek növekedésével $\mathcal{R}_0$ értéke csökken.

A 2.1.1. Tétel fényében az $\mathfrak{E}_b$ betegségmentes egyensúlyi helyzet stabilitását illetően az alábbiak láthatók be.

3.1.3. Tétel. Az $\mathfrak{E}_b$ betegségmentes egyensúlyi helyzet lokálisan aszimptotikusan stabilis, illetve labilis, ha

$$\kappa < a - \beta - \delta_I, \quad \text{ill.} \quad \kappa > a - \beta - \delta_I$$

teljesül.

Bizonyítás. A (3.1.2) formula ismeretében nyilvánvaló, hogy

$$\mathcal{R}_0 < 1 \iff a < \kappa + \beta + \delta_I \iff \kappa > a - \beta - \delta_I. \quad \blacksquare$$

A

$$\kappa > a - \beta - \delta_I$$

feltétel ismeretében elmondható, hogy a fertőzött egyedek oktatása a betegségmentes egyensúlyi helyzetet stabilizálja, míg a veszélyeztetettek esetében ez nem mondható el: oktatásuk hatástalan.

A 3.1.3. Tételbeli állításból jól látszik, hogy az $\mathcal{R}_0$ elemi reprodukciós szám küszöbértékként viselkedik a modell esetében. Felmerül a kérdés, hogy mi a helyzet akkor, ha az $\mathcal{R}_0$ szám 1-hez közeli értéket vesz fel. Ehhez a [8] tanulmánybeli egyik tételt használjuk fel, amit a 3.1.4. Tételben ismertetünk.

Tekintsük az

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \kappa) \tag{3.1.3}$$

elsőrendű autonóm közönséges differenciálegyenlet-rendszert, ahol κ játssza a bifurkációs paraméter szerepét, amelyről feltesszük, hogy valamely κ^* kritikus értéke esetén a $\kappa > \kappa^*$ esetben $\mathcal{R}_0 < 1$, illetve $\kappa < \kappa^*$ esetén $\mathcal{R}_0 > 1$. Feltesszük, hogy az $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvényre teljesülnek a 2.1. alfejezetbeli (F1)-(F5) feltételek, továbbá $\mathbf{f}$ legyen legalább kétszer folytonosan differenciálható. A κ paraméter tetszőleges értéke esetén legyen $\mathbf{u}^*$ a (3.1.3) rendszer egyensúlyi helyzete: $\mathbf{f}(\mathbf{u}^*, \kappa) = \mathbf{0}$, és tegyük fel, hogy $\mathbf{u}^*$ stabilitást vált, ha a κ paraméter keresztezi a κ^* kritikus értéket. Tegyük fel továbbá, hogy az $\mathfrak{A} := \partial_1 \mathbf{f}(\mathbf{u}^*, \kappa^*)$ mátrix zérus sajátértékéhez tartozó sajátaltér egydimenziós, majd jelölje $\mathbf{q}$ és $\mathbf{p}$ az $\mathfrak{A}$ mátrix megfelelő jobb és bal oldali nullvektorát (a zérus sajátértékéhez tartozó jobb és bal oldali sajátvektorát), amelyekre a

$$\mathbf{p}^T \mathbf{q} \equiv \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 1$$

feltétel teljesülését írjuk elő. A $\mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\tilde{\mathbf{B}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvények bevezetésével értelmezzük a

$$\mu := \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \rangle}{2}, \quad \nu := \langle \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) \rangle$$

számokat, ahol

$$B_i(\mathbf{u}, \mathbf{y}) := \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{\xi}, \kappa^*)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \bigg|_{\boldsymbol{\xi}=\mathfrak{E}_b} x_j y_k \quad (i \in \{1, 2, 3\}),$$

$$\tilde{B}_i(\mathbf{u}) := \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 f_i(\boldsymbol{\xi}, \kappa^*)}{\partial \xi_j \partial \kappa} \bigg|_{\boldsymbol{\xi}=\mathfrak{E}_b} x_j \quad (i \in \{1,2,3\}).$$

3.1.4. Tétel ([8]). Ha $\nu \neq 0$ és

1. $\mu < 0$, akkor van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $\kappa^* > \kappa > \delta$ esetén a (3.1.3) rendszernek van a lokálisan aszimptotikusan stabilis endemikus egyensúlyi helyzete;
2. $\mu > 0$, akkor van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $\kappa^* < \kappa < \delta$ esetén a (3.1.3) rendszernek van labilis endemikus egyensúlyi helyzete.

Mivel $\mathcal{R}_0$ -at nem szokás bifurkációs paraméternek tekinteni (vö. [8]), ezért a (3.1.1) rendszer κ paraméterét tekintjük bifurkációs paraméternek, ahol az $\mathcal{R}_0 = 1$ értéknek megfelelő kritikus érték: $\kappa^* := a - \beta - \delta_I$. Világos, hogy

$$\kappa \begin{cases} < \kappa^* & \iff \mathcal{R}_0 > 1, \\ = \kappa^* & \iff \mathcal{R}_0 = 1, \\ > \kappa^* & \iff \mathcal{R}_0 < 1. \end{cases}$$

Jelölje $\mathfrak{A}$ a (3.1.1) rendszer jobb oldalának a betegségmentes $\mathfrak{E}_b$ egyensúlyi helyzetben, illetve a κ^* kritikus értéknél vett Jacobi-mátrixát, azaz legyen

$$\mathfrak{A} := \begin{bmatrix} -\psi - \delta_S & 0 & -a + \beta \\ \psi & -\delta_E & a - \beta - \delta_I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Látható, hogy $\mathfrak{A}$ zérus sajátértékéhez tartozó sajátaltère egydimenziós, és a másik két sajátérték negatív valós részű. Némi számolással azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{q} := \begin{bmatrix} (\beta - a)/(\delta_S + \psi) \\ -(\delta_S(\beta - a) + \delta_I(\delta_S + \psi))/(\delta_E(\delta_S + \psi)) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olyan jobb és bal oldali nullvektorai az $\mathfrak{A}$ mátrixnak, amelyre

$$\mathbf{p}^T \mathbf{q} \equiv \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 1$$

teljesül. A $\mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\tilde{\mathbf{B}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvények az alábbi módon számíthatók:

$$B_i(\mathbf{u}, \mathbf{y}) := \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial^2 F_i(\boldsymbol{\xi}, \kappa^*)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \bigg|_{\boldsymbol{\xi}=\mathfrak{E}_b} x_j y_k \quad (i \in \{1,2,3\}),$$

$$\tilde{B}_i(\mathbf{u}) := \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 F_i(\boldsymbol{\xi}, \kappa^*)}{\partial \xi_j \partial \kappa} \bigg|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\mathfrak{E}}_b} x_j \quad (i \in \{1,2,3\}),$$

ahol a (3.1.1) jobb oldalára $(f_1, f_2, f_3)(S, E, I)$ helyett a $(F_1, F_2, F_3)(S, E, I, \kappa)$ jelölést használjuk a κ bifurkáció paramétertől való függést hangsúlyozandó. Mivel $p_1 = 0 = p_2$, ezért F_1 és F_2 deriváltjai viszonylag könnyen meghatározhatók. A F_3 minden másodrendű deriváltja zérus, kivéve az alábbiakat:

$$\frac{\partial^2 F_3(\boldsymbol{\mathfrak{E}}_b, \kappa^*)}{\partial I^2} = -\frac{2aS^2}{(S+I)^3} = -2a(\delta_S + \psi), \quad \frac{\partial^2 F_3(\boldsymbol{\mathfrak{E}}_b, \kappa^*)}{\partial I \partial \kappa} = -1.$$

Ennélfogva

$$\mu = -\frac{a(\delta_S + \psi)}{\lambda} \cdot q_3^2 = -\frac{a(\delta_S + \psi)}{\lambda} < 0 \quad \text{és} \quad \nu = -1 \neq 0.$$

Így a 3.1.2. Tétel következtében van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $1 < \mathcal{R}_0 < \delta$ esetén a (3.1.1) rendszernek legalább egy lokálisan aszimptotikusan stabilis endemikus egyensúlyi helyzete van, azaz forward transzkritikus bifurkáció lép fel, ami azt jelenti, hogy amint a bifurkációs paraméter átlépi a kritikus értéket, a határon lévő betegségmentes egyensúlyi helyzet elveszti stabilitását, és „átadja azt a keletkező endemikus egyensúlyi helyzetnek” (vö. [5]).

Az alábbi tételben összefoglaljuk a fentebb igazoltakat.

3.1.5. Tétel. Ha

1. $\kappa > \kappa^*$, akkor a (3.1.1) rendszernek pontosan egy $\boldsymbol{\mathfrak{E}}_b$ betegségmentes egyensúlyi helyzete van a fázistér $[S, E, I]$ pozitív oktánsának határán, amely lokálisan aszimptotikusan stabilis;
2. a κ^* számra $\kappa^* \geq \kappa$ teljesül, akkor az $\boldsymbol{\mathfrak{E}}_b$ betegségmentes egyensúlyi helyzetből egy új $\boldsymbol{\mathfrak{E}}_e$ endemikus egyensúlyi helyzet bifurkálódik (amint κ keresztezi a κ^* értéket), továbbá $\boldsymbol{\mathfrak{E}}_b$ elveszti stabilitását $\kappa^* > \kappa$ esetén.

3.2. Az elemei reprodukciós szám kiszámítása a fenti rendszer diszkrétizált változataiban

3.2.1. Bevezetés

Differenciálegyenletek megoldásának közelítésére számos numerikus módszer létezik. Az egyik legismertebb és legegyszerűbb az explicit Euler-módszer, amikor is a

(2.1.1)-beli $\mathbf{u}$ derivált közelítésére az

$$\frac{\mathbf{u}(t+h) - \mathbf{u}(t)}{h}$$

hányadost használják, ahol $h > 0$ a lépésköz. Ezzel a helyettesítéssel (2.1.1) a következő alakú:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + hf(\mathbf{x}_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0). \quad (3.2.1)$$

Világos, hogy a (2.1.1) és a (3.2.1) rendszer $\mathbf{u}^*$ egyensúlyi helyzetei megegyeznek. A (2.1.1) rendszer esetében az egyensúlyi helyzetet az $\mathbf{f}$ leképezés zérushelyeként, a (3.2.1) rendszer esetében pedig a $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + hf(\mathbf{x})$ leképezés fixpontjaként kapjuk meg:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{0} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{F}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{u}^* + h\mathbf{f}(\mathbf{u}^*).$$

Látható, hogy az egyensúlyi helyzetben linearizált jobb oldalak esetén

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{u}^*) = I_d + hJ_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}^*),$$

ahol I_d jelöli a $(d \times d)$ -es egységmátrixot. Következésképpen (vö. [14])

- a (2.1.1) rendszer $\mathbf{u}^*$ egyensúlyi helyzete lokálisan aszimptotikusan stabilis, ha $s(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}^*)) < 0$, és
- a (3.2.1) rendszer $\mathbf{u}^*$ egyensúlyi helyzete lokálisan aszimptotikusan stabilis, ha $\rho(J_{\mathbf{F}}(\mathbf{u}^*)) < 1$.

Sok esetben a (3.2.1) rendszer nem örökli a (2.1.1) rendszer dinamikai tulajdonságait (vö. [1]), diszkretizációval több szokatlan jelenségnek lehetünk tanúi. Az alábbiakban három példán illusztráljuk ezt dolgot. Az első példa az

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^2$$

logisztikus egyenlet diszkretizációjával kapott

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

dinamikai rendszer, amely az eredetitől markánsan eltérő kvalitatív tulajdonságokat mutat: perióduskettőző bifurkációval kaotikus viselkedés tapasztalható (ill. bizonyítható) benne. Második példaként az

$$\dot{x} = -x^3,$$

differenciálegyenlettel foglalkozunk. Az explicit Euler-módszerrel diszkretizálva az

$$x_{n+1} = x_n - hx_n^3 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

differenciaegyenletet kapjuk, amely 2-periodikus megoldással bír:

$$\varphi_n := (-1)^n \sqrt{\frac{2}{h}} \quad (n \in \mathbb{N}_0, 0 < h \in \mathbb{R})$$

(vö. [13]). Az

$$\dot{x} = f(x) := 2x(1 - x)$$

logisztikus differenciálegyenletből a módosított Euler-módszerrel (vö. [11]) történő diszkretizációjával az

$$x_{n+1} = x_n + hf \left(x_n + \frac{h}{2} f(x_n) \right)$$

differenciaegyenletet kapjuk. Belátható, hogy míg a folytonos esetben a rendszernek két egyensúlyi helyzete van, a diszkretizációval kapott rendszernek már négy egyensúlyi helyzete is létezik.

Mickens olyan nemsztenderd diszkretizációs eljárást dolgozott ki (vö. [19]), amelyről bebizonyosodott, hogy a lépésközt tett bizonyos feltételek mellett a folytonos rendszer dinamikai tulajdonságait képes megőrizni, ezért igen hasznosnak mutatkozik differenciálegyenletek numerikus vizsgálata során (vö. [1]). Ezt a módszert a következőképpen alkalmazzuk. A (2.1.1) rendszerben az $\dot{u}$ deriváltat az

$$\frac{u(t + \phi_1(h)) - x(u)}{\phi_2(h)}$$

hányadossal helyettesítjük, ahol $h > 0$ a lépésköz,

$$0 < \phi_i(h) = h + \mathcal{O}(h^2) \quad (h \rightarrow 0) \quad (i \in \{1, 2\})$$

(vö. [23]). Ilyen φ függvényre számos példa ismert:

$$\phi_i(h) = \begin{cases} h, \\ \sin(h), \\ e^h - 1, \\ 1 - e^{-h}, \\ \frac{1 - e^{-\lambda h}}{\lambda}, (\lambda > 0). \end{cases}$$

Ezzel a helyettesítéssel a (2.1.1) rendszer

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \varphi(h) f^M(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}) \quad (n \in \mathbb{N}_0) \quad (3.2.2)$$

alakú.

3.2.2. Az explicit Euler-módszerrel történő diszkretizáció

A (3.1.1) rendszert ez explicit Euler-módszerrel diszkretizálva az

$$\left. \begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + h \left(\lambda - \frac{aS_n I_n}{S_n + I_n} + \beta I_n - \psi S_n - \delta_S S_n \right) =: f_1^{eE}(S_n, E_n, I_n), \\ E_{n+1} &= E_n + h (\psi S_n + \kappa I_n - \delta_E E_n) =: f_2^{eE}(S_n, E_n, I_n), \\ I_{n+1} &= I_n + h \left(\frac{aS_n I_n}{S_n + I_n} - \kappa I_n - \beta I_n - \delta_I I_n \right) =: f_3^{eE}(S_n, E_n, I_n) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.3)$$

differentiaegyenlet-rendszert kapjuk. A folytonos esethez hasonlóan, mielőtt kiszámítanánk az elemi reprodukciós számot, megmutatjuk a (3.2.3) rendszer megoldásainak nem-negativitását és egyenletes korlátos voltát.

3.2.2.1. Tétel. Tegyük fel, hogy a h lépésköze

$$h < h^* := \min \left\{ \frac{1}{a + \psi + \delta_S}, \frac{1}{\delta_E}, \frac{1}{\kappa + \beta + \delta_I} \right\}$$

teljesül. Ekkor

1. az $S_0, E_0, I_0 > 0$ kezdeti feltételek esetén a megoldásokra tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $S_n, E_n, I_n > 0$;
2. az $I_0 = 0$ és az $S_0, E_0 > 0$ esetben bármely $n \in \mathbb{N}$ indexre $S_n, E_n > 0$ és $I_n = 0$.

Bizonyítás.

1. Teljes indukciót használva tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ indexre $S_n, E_n, I_n > 0$. Ekkor,

- a $\lambda + \beta I_n$ pozitivitása következtében elegendő azt megmutatni, hogy

$$S_n + h \left(-\frac{aS_n I_n}{S_n + I_n} - \psi S_n - \delta_S S_n \right) = S_n \left\{ 1 - h \left(\frac{aI_n}{S_n + I_n} + \psi + \delta_S \right) \right\} > 0,$$

azaz

$$0 < 1 - h \left(\frac{aI_n}{S_n + I_n} + \psi + \delta_S \right) < 1 - h(a + \psi + \delta_S).$$

Így, ha $h < h^*$, akkor f_1^{eE} pozitivitása nyilvánvaló.

- a $\psi S_n + \kappa I_n$ pozitivitása következtében elegendő azt megmutatni, hogy

$$E_n \{1 - h\delta_E\} > 0, \quad \text{azaz} \quad 1 - h\delta_E > 0,$$

ami a $h < h^*$ esetben nyilvánvalóan igaz, így $f_2^{eE}(S_n, E_n, I_n) > 0$.

- az $\frac{aS_n I_n}{S_n + I_n}$ pozitivitása következtében elegendő azt megmutatni, hogy

$$I_n \{1 - h(\kappa + \beta + \delta_I)\} > 0, \quad \text{azaz} \quad 1 - h(\kappa + \beta + \delta_I) > 0.$$

Ezért $h < h^*$ esetén $f_3^{eE}(S_n, E_n, I_n) > 0$.

2. Indukciót használva látható, hogy ez az állítás a fentiek triviális következménye. ■

3.2.2.2. Tétel. Ha a h lépésköze

$$h < \frac{1}{\delta}, \quad \text{ahol} \quad \delta := \min\{\delta_S, \delta_E, \delta_I\},$$

akkor a 3.1.2. Tételben definiált Ω halmaz pozitívan invariáns.

Bizonyítás. Egy [17]-beli ötletet felhasználva képezzük (3.2.3) jobb oldalának összegét. Ekkor a

$$W_n := S_n + E_n + I_n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

sorozatra

$$W_{n+1} = W_n + h(\lambda - \delta_S S_n - \delta_E E_n - \delta_I I_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

teljesül. Az iménti becslés jobb oldala tovább becsülhető:

$$W_{n+1} = W_n + h(\lambda - \delta_S S_n - \delta_E E_n - \delta_I I_n) \leq W_n + h\lambda - h\delta W_n = h\lambda + W_n(1 - h\delta).$$

Ez pedig nem más, mint egy **elsőrendű lineáris differencia-egyenlőtlenség**. Teljes indukciót használva vagy egy [21]-beli (szintén teljes indukcióval bizonyítható) formulába helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$W_{n+1} \leq h\lambda + (h\lambda + W_{n-1}(1 - h\delta))(1 - h\delta) = h\lambda + h\lambda(1 - h\delta) + W_{n-1}(1 - h\delta)^2 \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Így $0 < h\delta < 1$ következtében

$$0 < \sum_{k=1}^n (1 - h\delta)^k = \frac{1 - (1 - h\delta)^{n+1}}{1 - (1 - h\delta)} < 1 \quad \text{és} \quad 0 < (1 - h\delta)^{n-1} < 1.$$

Minden azt jelenti, hogy a $h < \frac{1}{\delta}$ feltétel a

$$W_{n+1} \leq h\lambda + W_0 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

egyenlőtlenség fennállását vonja maga után. ■

Könnyen belátható, hogy a (3.1.1) rendszer $\mathfrak{E}_b$ egyensúlyi helyzete a (3.2.3) diszkrét rendszernek is egyensúlyi helyzete. Az $\mathfrak{E}_b$ egyensúlyi helyzetben linearizálva a diszkrét rendszert a Jacobi-mátrix

$$J_F(\mathfrak{E}_b) := \begin{bmatrix} 1 - h(\kappa + \beta + \delta_I - a) & 0 & 0 \\ h(\beta - a) & 1 - h(\psi + \delta_S) & 0 \\ h\kappa & h\psi & 1 - h\delta_E \end{bmatrix}$$

alakú, ahol

$$F(S_n, E_n, I_n) := (S_n, E_n, I_n) + h\mathbf{f}(S_n, E_n, I_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

A (3.2.3) rendszer $\mathfrak{E}_b$ egyensúlyi helyzetének stabilitására a $J_F(\mathfrak{E}_b)$ Jacobi-mátrix Schur-stabilitása szolgálatat elegendő feltételt. A $J_F(\mathfrak{E}_b)$ mátrix pontosan akkor Schur-stabilis, ha

$$\begin{aligned} -1 < 1 - h(\kappa + \beta + \delta_I - a) < 1 &\iff -2 < -h(\kappa + \beta + \delta_I - a) < 0, \\ -1 < 1 - h(\psi + \delta_S) < 1 &\iff -2 < -h(\psi + \delta_S) < 0, \\ -1 < 1 - h\delta_E < 1 &\iff -2 < -h\delta_E < 0, \end{aligned}$$

hiszen $J_F(\mathfrak{E}_b)$ alsó háromszögmátrix, így sajátértékei a főátló elemei. Nem nehéz belátni, hogy ha $h < \min\{h^*, 1/\delta\}$ és

$$\kappa + \beta + \delta_I - a > 0 \iff \kappa > a - \beta - \delta_I, \quad (3.2.4)$$

akkor teljesül a fenti stabilitási kritérium. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha kiszámoljuk a (3.2.3) rendszer esetében az elemi reprodukciós számot. A $J_F(\mathfrak{E}_b)$ mátrixot a 2.2 alfejezetben ismertetett módon particionálva az ottani F és T mátrixok

$$F = \begin{bmatrix} ah & 0 \\ h(\beta - a) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad T = \begin{bmatrix} 1 - h(\kappa + \beta + \delta_I) & 0 \\ 0 & 1 - h(\psi + \delta_S) \end{bmatrix}$$

alakúak lesznek. Így, ha $\beta > a$ és $h < h^*$ akkor F és T nem-negatív, ezért (3.2.4) következményeként azt kapjuk, hogy a (3.2.3) rendszerre vonatkozó elemi reprodukciós szám az alábbi módon számítható:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0 &= \rho(F \cdot (I_2 - T)^{-1}) = \rho \left(F \cdot \begin{bmatrix} h(\kappa + \beta + \delta_I) & 0 \\ 0 & h(\psi + \delta_S) \end{bmatrix}^{-1} \right) = \\ &= \rho \left(\begin{bmatrix} ah & 0 \\ h(\beta - a) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/h(\kappa + \beta + \delta_I) & 0 \\ 0 & 1/h(\psi + \delta_S) \end{bmatrix} \right) = \\ &= \rho \left(\begin{bmatrix} \frac{a}{\kappa + \beta + \delta_I} & 0 \\ \frac{\beta - a}{\kappa + \beta + \delta_I} & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{a}{\kappa + \beta + \delta_I}. \end{aligned}$$

Így kétszer is beláttuk az alábbi tételben megfogalmazott állítást.

3.2.2.3. Tétel. Ha $h < \min\{h^*, 1/\delta\}$, akkor

- az

$$\mathcal{R}_0 < 1 \iff \kappa > a - \beta - \delta_I$$

esetben a (3.2.3) rendszer $\mathfrak{E}_b$ egyensúlyi helyzete lokálisan aszimptotikusan stabilis;

- az $\mathcal{R}_0 > 1$ esetben a (3.2.3) rendszer $\mathfrak{E}_b$ egyensúlyi helyzete labilis.

Nem korlátozódva a határon lévő (epidemiológiai rendszerekben betegségmentes egyensúlyi helyzetre) belátjuk, hogy igaz az alábbi

3.2.2.4. Tétel. Ha $d \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $B := I_d + hA$, továbbá teljesül a

$$\lambda \in \sigma(A) \quad \text{és a} \quad h < \frac{-\max^2(\Im(\lambda)) - 2s(A)}{s^2(A)}$$

feltétel, akkor az $s(A) < 0$ egyenlőtlenség maga után vonja a $\rho(B) < 1$ egyenlőtlenség fennállását.

Bizonyítás. Amennyiben a h lépésköz eleget tesz a

$$h < \frac{-\max^2(\Im(\lambda)) - 2s(A)}{s^2(A)} = \frac{-\max^2(\Im(\lambda)) - 2\max \Re(\lambda)}{\max^2 \Re(\lambda)}$$

feltételnek, akkor az A mátrix minden $\lambda \in \sigma(A)$ sajátértékére

- igaz, hogy

$$h < \frac{-(\Im^2(\lambda_i)) - 2\Re(\lambda)}{\Re^2(\lambda)};$$

- $1 + h\lambda$ sajátértéke a B mátrixnak;
- igaz az alábbi implikációlánc:

$$\Re^2(\lambda)h + \Im^2(\lambda) + 2\Re(\lambda) < 0$$

$$\Downarrow$$

$$h \{ \Re^2(\lambda)h + \Im^2(\lambda) + 2\Re(\lambda) \} < 0$$

$$\Downarrow$$

$$2h\Re(\lambda) + h^2\Re^2(\lambda) + h\Im^2(\lambda) < 0$$

$$\Downarrow$$

$$1 + 2h\Re(\lambda) + h^2\Re^2(\lambda) + h\Im^2(\lambda) < 1$$

$$\Downarrow$$

$$(1 + h\Re(\lambda))^2 + h\Im^2(\lambda) < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{(1 + h\Re(\lambda))^2 + h\Im^2(\lambda)} < 1$$

$$\Downarrow$$

$$|1 + h\lambda| = \sqrt{(1 + h\Re(\lambda))^2 + h\Im^2(\lambda)} < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\max |1 + h\lambda| < 1. \quad \blacksquare$$

A fenti állítás megfordítását az alábbiakban fogalmazzuk meg.

A

$$h < \frac{-\max^2(\Im(\lambda)) - 2s(J_f(\mathfrak{E}_b))}{s^2(J_f(\mathfrak{E}_b))} \quad (\lambda \in \sigma(J_f(\mathfrak{E}_b)))$$

feltétel teljesülése esetén a diszkretizált rendszer $\mathfrak{E}_b$ egyensúlyi helyzete ugyanolyan stabilitási tulajdonságokkal rendelkezik, mint a folytonos rendszer ugyanolyan egyensúlyi helyzete.

3.2.2.5. Tétel. Legyen $d \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, ill. $B := I_d + hA$. Ekkor a h lépésköz megválasztásától függetlenül igaz az

$$s(A) > 0 \quad \implies \quad \rho(B) > 1$$

implikáció.

Bizonyítás. Ha $s(A) > 0$, akkor A -nak van olyan $\lambda \in \sigma(A)$ sajátértéke, amelyre $\Re(\lambda) > 0$. Következésképpen igaz az alábbi implikációlánc:

$$\Re^2(\lambda)h + \Im^2(\lambda) + 2\Re(\lambda) > 0$$

$$\Downarrow$$

$$1 + 2h\Re(\lambda) + h^2\Re^2(\lambda) + h\Im^2(\lambda) > 1$$

$$\Downarrow$$

$$|1 + h\lambda| > 1,$$

azaz $\rho(B) > 1$. ■

3.2.3. Mickens-féle nemsztenderd diszkretizáció

A Mickens-féle nemsztenderd diszkretizációval (vö. [19]) a (3.1.1) autonóm közönséges differenciálegyenlet-rendszerből az

$$\left. \begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \varphi(h) \left(\lambda - \frac{aS_{n+1}I_n}{S_n + I_n} + \beta I_n - \psi S_n - \delta_S S_n \right) =: f_1^M(S_n, S_{n+1}, E_n, I_n), \\ E_{n+1} &= E_n + \varphi(h) (\psi S_n + \kappa I_n - \delta_E E_n) =: f_2^M(S_n, S_{n+1}, E_n, I_n), \\ I_{n+1} &= I_n + \varphi(h) \left(\frac{aS_{n+1}I_n}{S_n + I_n} - \kappa I_n - \beta I_n - \delta_I I_n \right) =: f_3^M(S_n, S_{n+1}, E_n, I_n) \end{aligned} \right\} \quad (3.2.5)$$

differenceciaegyenlet-rendszert kapjuk, ahol a φ függvény a 3.2.1 alfejezetben ismerttetett tulajdonságokkal bír.

Hasonlóan az explicit Euler-módszerrel kapott differenceciaegyenlet-rendszer esetéhez itt is meg kell mutatni (3.2.5) megoldásainak nem-negativitását és egyenletes korlátos voltát.

3.2.3.1. Tétel. Ha fennáll a

$$\varphi(h) < h^{**} := \min \left\{ \frac{1}{\psi + \delta_S}, \frac{1}{\delta_E}, \frac{1}{\kappa + \beta + \delta_I} \right\}$$

egyenlőtlenség, úgy

1. az $S_0, E_0, I_0 > 0$ kezdeti értékek esetén tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ indexre $S_n, E_n, I_n > 0$;
2. $I_0 = 0$, illetve $S_0, E_0 > 0$ esetén, ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $S_n, E_n > 0$ és $I_n = 0$.

Bizonyítás.

1. Teljes indukciót használva tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ indexre $S_n, E_n, I_n > 0$. Ekkor

- az első egyenletet az alábbi módon alakíthatjuk:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \varphi(h) \left(\lambda - \frac{aS_{n+1}I_n}{S_n + I_n} + \beta I_n - \psi S_n - \delta_S S_n \right) \\ &\Downarrow \\ S_{n+1} \left(1 + \frac{aI_n \varphi(h)}{S_n + I_n} \right) &= S_n + \varphi(h) (\lambda + \beta I_n - \psi S_n - \delta_S S_n) \\ &\Downarrow \\ S_{n+1} &= \frac{(S_n + \varphi(h) (\lambda + \beta I_n - \psi S_n - \delta_S S_n)) (S_n + I_n)}{S_n + I_n + aI_n \varphi(h)} =: f_1^M(S_n, E_n, I_n). \end{aligned}$$

Mivel az $S_n + I_n + aI_n \varphi(h)$ nevező pozitív és $S_n + I_n > 0$, elegendő megmutatni, hogy

$$S_n + \varphi(h) (\lambda + \beta I_n - \psi S_n - \delta_S S_n) > 0$$

teljesül. Az explicit Euler-módszernél tárgyaltakhoz hasonlóan a

$$\varphi(h) < \frac{1}{\psi + \delta_S}$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie.

- a $\psi S_n + \kappa I_n$ pozitivitása következtében elegendő megmutatni, hogy

$$E_n \{1 - \varphi(h) \delta_E\} > 0, \quad \text{azaz} \quad 1 - \varphi(h) \delta_E > 0$$

ami $\varphi(h) < h^{**}$ esetén nyilvánvalóan teljesül, így $f_2^M(S_n, S_{n+1}, E_n, I_n) > 0$.

- az $\frac{aS_{n+1}I_n}{S_n + I_n}$ pozitivitása következtében elegendő megmutatni, hogy

$$I_n \{1 - \varphi(h)(\kappa + \beta + \delta_I)\} > 0, \quad \text{azaz} \quad 1 - \varphi(h)(\kappa + \beta + \delta_I) > 0$$

teljesül. Ezért $\varphi(h) < h^{**}$ következtében $f_3^M(S_n, S_{n+1}, E_n, I_n) > 0$.

2. Ez az állítás a fentiek és a rendszer alakjának felhasználásával teljes indukcióval könnyen belátható. ■

3.2.3.2. Tétel. A

$$\varphi(h) < \frac{1}{\delta}, \quad \text{ahol} \quad \delta := \min\{\delta_S, \delta_E, \delta_I\}$$

feltétel fennállása esetén a 3.1.2. Tételbeli Ω halmaz pozitívan invariáns.

Bizonyítás. A 3.2.2.2. Tétel bizonyításában leírtakhoz hasonlóan legyen ismét

$$W_n := S_n + E_n + I_n \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$W_{n+1} = W_n + \varphi(h)(\lambda - \delta_S S_n - \delta_E E_n - \delta_I I_n) \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Az iménti jobb oldalt tovább becslülve

$$W_{n+1} = W_n + \varphi(h)(\lambda - \delta_S S_n - \delta_E E_n - \delta_I I_n) \leq W_n + \varphi(h)\lambda - h\delta W_n = \varphi(h)\lambda + W_n(1 - \varphi(h)\delta)$$

adódik. Ez pedig nem más, mint egy **elsőrendű lineáris differencia-egyenlőtlenség**. Teljes indukciót használva vagy egy [21]-beli (szintén teljes indukcióval bizonyítható) formulába helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} W_{n+1} &\leq \varphi(h)\lambda + (\varphi(h)\lambda + W_{n-1}(1 - \varphi(h)\delta))(1 - \varphi(h)\delta) = \\ &= \varphi(h)\lambda + \varphi(h)\lambda(1 - \varphi(h)\delta) + W_{n-1}(1 - \varphi(h)\delta)^2 \quad (n \in \mathbb{N}_0). \end{aligned}$$

Mivel $0 < \varphi(h)\delta < 1$, ezért

$$0 < \sum_{k=1}^n (1 - \varphi(h)\delta)^k = \frac{1 - (1 - \varphi(h)\delta)^{n+1}}{1 - (1 - \varphi(h)\delta)} < 1 \quad \text{és} \quad 0 < (1 - \varphi(h)\delta)^{n+1} < 1.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\varphi(h) < \frac{1}{\delta}$ feltételből

$$W_{n+1} \leq \varphi(h)\lambda + W_0 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

következik, aminek fényében az állítás bizonyítottnak tekinthető. ■

A (3.1.1), illetve a (3.2.5) rendszer betegségmentes egyensúlyi helyzetét illetően az alábbi állítást fogjuk belátni.

3.2.3.1. Lemma. A (3.1.1) rendszer $\mathfrak{E}_b$ betegségmentes egyensúlyi helyzete a (3.2.5) rendszernek is egyensúlyi helyzete.

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{E}_b$ a (3.1.1) rendszer betegségmentes egyensúlyi helyzete, akkor annak harmadik komponense zérus. Ennélfogva a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$S_n = S_n + \varphi(h) (\lambda - \psi S_n - \delta_S S_n), \quad E_n = E_n + \varphi(h) (\psi S_n - \delta_E E_n).$$

A megoldás ugyanaz lesz, mint a folytonos esetben:

$$[\mathfrak{E}_b]_1 = \frac{\lambda}{\psi + \delta_S}, \quad [\mathfrak{E}_b]_2 = \frac{\psi \lambda}{\delta_E (\psi + \delta_S)}. \quad \blacksquare$$

Az $\mathfrak{E}_b$ egyensúlyi helyzetben linearizálva a Jacobi-mátrix nem más, mint $J_{fM}(\mathfrak{E}_b) :=$

$$\begin{bmatrix} 1 - \varphi(h)(\kappa + \beta + \delta_I - a) & 0 & 0 \\ \varphi^3(h)(\delta_S a) + \varphi^2(h)\lambda(a - a\psi) + \varphi(h)\lambda(\beta - a) & 1 - \varphi(h)(\psi + \delta_S) & 0 \\ \varphi(h)\kappa & \varphi(h)\psi & 1 - \varphi(h)\delta_E \end{bmatrix}.$$

Ahhoz, hogy a (3.2.5) rendszer $\mathfrak{E}_b$ egyensúlyi helyzetének stabilitását eldönthessük, megvizsgáljuk a $J_{fM}(\mathfrak{E}_b)$ Jacobi-mátrix Schur-stabilitását. Világos, hogy $J_{fM}(\mathfrak{E}_b)$ pontosan akkor Schur-stabilis, ha

$$\begin{aligned} -1 < 1 - \varphi(h)(\kappa + \beta + \delta_I - a) < 1 &\iff -2 < -\varphi(h)(\kappa + \beta + \delta_I - a) < 0, \\ -1 < 1 - \varphi(h)(\psi + \delta_S) < 1 &\iff -2 < -\varphi(h)(\psi + \delta_S) < 0, \\ -1 < 1 - \varphi(h)\delta_E < 1 &\iff -2 < -\varphi(h)\delta_E < 0 \end{aligned}$$

teljesül, hiszen $J_{fM}(\mathfrak{E}_b)$ alsó háromszög-mátrix, melynek sajátértékei a főátló elemei. Látható, ha $\varphi(h) < \min\{h^{**}, 1/\delta\}$ és

$$\kappa + \beta + \delta_I - a > 0 \iff \kappa > a - \beta - \delta_I, \quad (3.2.6)$$

akkor teljesül ez a feltétel. Ugyanerre az eredményre jutunk, ha kiszámítjuk a (3.2.5) rendszerre vonatkozó elemi reprodukciós számot. A $J_{fM}(\mathfrak{E}_b)$ Jacobi-mátrixnak a 2.2. alfejezetben ismertetett partíciójával látható, hogy

$$F = \begin{bmatrix} a\varphi(h) & 0 \\ \varphi^3(h)(\delta_S a) + \varphi^2(h)\lambda(a - a\psi) + \varphi(h)\lambda(\beta - a) & 0 \end{bmatrix}$$

és

$$T = \begin{bmatrix} 1 - \varphi(h)(\kappa + \beta + \delta_I) & 0 \\ 0 & 1 - \varphi(h)(\psi + \delta_S) \end{bmatrix}.$$

Így a $\varphi(h) < h^{**}$ feltétel teljesülése esetén F és T nem-negatív, így a (3.2.6) feltétel következtében elmondható, hogy a (3.2.3) rendszerre vonatkozó elemi reprodukciós szám az alábbi módon határozható meg:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_0 &= \rho(F \cdot (I_2 - T)^{-1}) = \rho \left(F \cdot \begin{bmatrix} \varphi(h)(\kappa + \beta + \delta_I) & 0 \\ 0 & \varphi(h)(\psi + \delta_S) \end{bmatrix}^{-1} \right) = \\ &= \rho \left(F \cdot \begin{bmatrix} 1/\varphi(h)(\kappa + \beta + \delta_I) & 0 \\ 0 & 1/\varphi(h)(\psi + \delta_S) \end{bmatrix} \right) = \\ &= \rho \left(\begin{bmatrix} \frac{a}{\kappa + \beta + \delta_I} & 0 \\ \frac{\varphi^2(h)(\delta_S a) + \varphi(h)\lambda(a - a\psi) + \lambda(\beta - a)}{\kappa + \beta + \delta_I} & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{a}{\kappa + \beta + \delta_I}.\end{aligned}$$

Így kétszer is beláttuk az alábbi állítást.

3.2.3.3. Tétel. Ha $\varphi(h) < \min\{h^{**}, 1/\delta\}$, akkor

- az

$$\mathcal{R}_0 < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \kappa > a - \beta - \delta_I$$

esetben a (3.2.5) rendszer $\mathfrak{E}_b$ egyensúlyi helyzete lokálisan aszimptotikusan stabilis;

- az $\mathcal{R}_0 > 1$ esetben a (3.2.5) rendszer $\mathfrak{E}_b$ egyensúlyi helyzete nem stabilis.

3.3. Az elemi reprodukciós szám meghatározása diffúzió jelenlétében

Ha a (2.3.1) rendszerbe diffúziós tagot is beépítünk, akkor a rendszer nem más, mint

$$\begin{aligned}\partial_t S(\mathbf{r}, t) &= \mathfrak{D}_S \Delta_{\mathbf{r}} S(\mathbf{r}, t) + f_1(S, E, I), \\ \partial_t E(\mathbf{r}, t) &= \mathfrak{D}_E \Delta_{\mathbf{r}} E(\mathbf{r}, t) + f_2(S, E, I), \\ \partial_t I(\mathbf{r}, t) &= \mathfrak{D}_I \Delta_{\mathbf{r}} I(\mathbf{r}, t) + f_3(S, E, I)\end{aligned} \quad (\mathbf{r}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_0^+, \quad (3.3.1)$$

ahol $f_i(S, E, I)$ ugyanolyan alakú, mint (3.1.1)-ben. Az $\mathfrak{E}_b$ betegségmentes egyensúlyi helyzetben linearizálva a

$$\begin{aligned}\partial_t S(\mathbf{r}, t) &= \mathfrak{D}_S \Delta_{\mathbf{r}} S(\mathbf{r}, t) - (\psi + \delta_S)S + (\beta - a)I, \\ \partial_t E(\mathbf{r}, t) &= \mathfrak{D}_E \Delta_{\mathbf{r}} E(\mathbf{r}, t) + \psi S - \delta_E E + \kappa I, \\ \partial_t I(\mathbf{r}, t) &= \mathfrak{D}_I \Delta_{\mathbf{r}} I(\mathbf{r}, t) + (a - \kappa - \beta - \delta_I)E\end{aligned} \quad (\mathbf{r}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_0^+ \quad (3.3.2)$$

lineáris rendszert kapjuk. Ebben az esetben a (2.3) alfejezetben bevezetett mátrixok

$$C = \begin{bmatrix} -\psi - \delta_S & 0 \\ \psi & -\delta_E \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad J = \begin{bmatrix} a - \beta \\ -\kappa \end{bmatrix}$$

alakúak, illetve

$$F = a \quad \text{és} \quad V = \kappa + \beta + \delta_I.$$

Így a 2.3.2. Tétel értelmében a (2.3.8) sajátérték-feladatot kell megoldanunk. Az egyszerűség kedvéért az $\Omega = (0,1)$ egydimenziós tartományra szorítkozunk, és homogén Neumann-feltételek teljesülését írjuk elő, azaz a

$$\phi'' = \frac{\mu a - (\kappa + \beta + \delta_I)}{\mathfrak{d}_I} \cdot \phi \quad (\text{a } (0,1) \text{ intervallumon}), \quad \phi'(0) = 0 = \phi'(1) \quad (3.3.3)$$

peremérték-feladatot kell megoldanunk. Kisebb számolás után látható, hogy (3.3.3) megoldása

$$\phi(x) = \cos(\sqrt{\lambda}x) \quad (x \in [0,1])$$

alakú, ahol

$$\lambda = \frac{\kappa + \beta + \delta_I - \mu a}{\mathfrak{d}_I},$$

feltéve, hogy

$$\sqrt{\lambda} = k\pi \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

A megfelelő sajátértékekre

$$\lambda_k = (k\pi)^2 \quad \longleftrightarrow \quad \mu_k = \frac{\kappa + \beta + \delta_I - k\pi\mathfrak{d}_I}{a}.$$

Így a 2.3.2. Tétel következtében

$$\mathcal{R}_0 = \frac{1}{\mu_0} = \frac{a}{\kappa + \beta + \delta_I}.$$

Megállapíthatjuk, hogy diffúzió bevezetésével az $\mathcal{R}_0$ elemi reprodukciós szám ugyanolyan alakú lett, ami arra enged következtetni, hogy diffúzió jelenléte nem befolyásolja döntően a járvány terjedését.

Irodalomjegyzék

- [1] AL-KAHBY, H.; DANNAN, F. ; ELAYDI, S.: *Non-standard discretization methods for some biological models*, Applications of nonstandard finite difference schemes (Atlanta, GA, 1999), 155–180.
- [2] ALLEN, LINDA J. S.; VAN DEN DRIESSCHE, P.: *The basic reproduction number in some discrete-time epidemic models*, J. Difference Equ. Appl. **14**(10-11) (2008), 1127–1147.
- [3] BULAI, I. M.: *Modeling COVID-19 considering asymptomatic cases and avoided contacts*, in: Trends in biomathematics: chaos and control in epidemics, ecosystems, and cells (ed. R. Mondaini), (Springer 2021), 169–182.
- [4] CAPASSO, V.: *Mathematical structures of epidemic systems*, with a foreword by Simon A. Levin. Corrected reprint of the 1993 original. Lecture Notes in Biomathematics, 97. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [5] CASTILLO-CHAVEZ, C.; COOKE, K.; HUANG, W. AND LEVIN, S. A.: *On the role of long incubation periods in the dynamics of acquired immunodeficiency syndrome (AIDS). I: Single population models*, J. Math. Biol., **27**(4), (1989), 373–398.
- [6] DIEKMANN, O.; HEESTERBEEK, J. A. P.; METZ, J. A. J.: *On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations*, J. Math. Biol. **28**(4) (1990), 365–382.
- [7] DIEKMANN, O.; HEESTERBEEK, J. A. P.: *Mathematical epidemiology of infectious diseases*, Wiley series in mathematical and computational biology, Wiley, West Sussex, England, 2000.
- [8] VAN DEN DRIESSCHE, P.; WATMOUGH, J.: *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission*, Math. Biosci. **180** (2002), 29–48.
- [9] ELAYDI, S.: *An introduction to difference equations*, Third edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2005.

- [10] HETHCOTE, H. W.; VAN ARK, J. W.: *Epidemiological models for heterogeneous populations: Proportionate mixing, parameter estimation, and immunization programs*, Math. Biosci. **84** (1987), 85–118.
- [11] GRIFFITHS, D. F.; HIGHAM, D. J.: *Numerical methods for ordinary differential equations. Initial value problems*, Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2010.
- [12] HETHCOTE, H. W.: *The mathematics of infectious diseases*, SIAM Rev. **42**(4) (2000), 599–653.
- [13] HUMPHRIES, A. R.: *Spurious solutions of numerical methods for initial value problems*, IMA J. Numer. Anal. **13**(2) (1993), 263–290.
- [14] KELLEY, C. T.: *Iterative methods for linear and nonlinear equations*, With separately available software. Frontiers in Applied Mathematics, 16. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1995.
- [15] KNIPL, H. D.: *Járványterjedés modellezése transzportációs hálózatokon*, Doktori értekezés, Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet, Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola, 2014.
- [16] KOVÁCS, S.: *Turing bifurcation in a system with cross diffusion*, Nonlinear Anal. **59**(4) (2004), 567–581.
- [17] KOVÁCS, S.; GYÖRGY, SZ.; GYÚRÓ, N.: *Dynamics of an SIS epidemic model with no vertical transmission (közlésre elfogadva)* In: Trends in Biomathematics: Selected Works from the 22th BIOMAT Consortium Lectures, Rio de Janeiro, Brazil, 2022 Cham, Switzerland: Springer International Publishing.
- [18] LI, CHI KWONG; SCHNEIDER, H.: *Applications of Perron-Frobenius theory to population dynamics.*, J. Math. Biol. **44**(5) (2002), 450–462.
- [19] MICKENS, R. E.: *Nonstandard finite difference models of differential equations*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1994.
- [20] NDIONE, A. B.; MENDY, A.; ONANA, C. A.: *Economic development process: a compartmental analysis of a model with two delays*, in: Trends in biomathematics: chaos and control in epidemics, ecosystems, and cells (ed. R. Mondaini), (Springer 2021), 355–390.
- [21] PACHPATTE, B. G.: *Inequalities for finite difference equations*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 247. Marcel Dekker, Inc., New York, 2002.

- [22] PERASSO, A.: *An introduction to the basic reproduction number in mathematical epidemiology*, CIMPA School on Mathematical Models in Biology and Medicine, 123–138, ESAIM Proc. Surveys, 62, EDP Sci., Les Ulis, 2018.
- [23] SOMOGYI C. K.: *Numerical methods for differential equations* [in Hungarian], Bachelor thesis, Eötvös Loránd University, 2014.
- [24] WANG, W.; ZHAO, X. Q.: *Basic reproduction numbers for reaction-diffusion epidemic models*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. **11**(4) (2012), 1652–1673.