

TOPOLOGIKUS CSOPORTOK GENERIKUS TULAJDONSÁGAI

ANETT KOCSIS

KIVONAT. Toplogikus csoportok Baire-kategória értelmében generikus tulajdonságait vizsgáljuk.

Először a megszámlálható diszkrét csoportok esetével foglalkozunk. Kiterjesztjük B. H. Neumann, H. Simmons és A. Macintyre algebrailag zárt csoportokról és a szóproblémáról szóló klasszikus eredményét. I. Goldbring, S. E. Kunnawalkam és Y. Lodha megmutatta, hogy a megszámlálható diszkrét csoportok terében minden izomorfiaosztály első kategóriájú. Ezzel szemben mi belátjuk, hogy a megszámlálható diszkrét Abel-csoportok terében létezik egy generikus izomorfiaosztály.

Ezután rátérünk a kompakt metrizálható Abel-csoportok esetére. Pontrjagin-dualitást használva megmutatjuk, hogy a kompakt metrizálható Abel-csoportok terében van generikus izomorfiaosztály. Tárgyaljuk az összefüggéseket a megszámlálható diszkrét esetel.

Végezetül kompakt metrizálható csoportokat vizsgálunk. Bizonyítjuk, hogy az általános kompakt metrizálható csoport nem összefüggő és nem is totálisan összefüggéstelen.

TARTALOMJEGYZÉK

1. Bevezetés	2
2. Előismeretek	3
2.1. A kompakt részcsoporthoz tere	3
2.2. Baire kategória	4
3. Megszámlálhatóan végtelen diszkrét csoportok	5
3.1. A csoportszorzótáblák tere	5
3.2. Abel-csoportok	6
4. Kompakt metrizálható Abel-csoportok	9
4.1. Pontrjagin-dualitás	9
4.2. A kompakt metrizálható Abel-csoportok tere	9
4.3. A reziduális izomorfiaosztály	11

4.4. Még néhány szó a megszámlálható Abel-csoportokról	14
5. Kompakt metrizálható csoportok	16
5.1. A kompakt metrizálható csoportok tere	16
5.2. Az $SU(n)$ csoport közelítése	17
5.3. Generikus topológiai tulajdonságok	17
6. Kérdések	18
Hivatkozások	19

1. BEVEZETÉS

Ez a TDK dolgozat az [5] dolgozat alapján készült. Ezúton szeretnék köszönetet mondani társszerzőimnek (Elekes M., Gehér B., Kanalas K., Kátay T., Keleti T.), hogy bekapcsolódhattam a kutatásba. Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Elekes Mártonnak a sok segítséget és tanácsot. A tételek bizonyításait csak a 4-es szakaszban (ahol kompakt metrizálható Abel-csoportokat vizsgálunk) mutatom be, mert ott volt a legnagyobb hozzájárulásom. A további részekben a tételeket nagyrészt bizonyítás nélkül mondom ki.

Minden topologikus csoportról feltesszük a továbbiakban, hogy Hausdorff.

Motiváció. A Baire-kategória értelemben vett generikus tulajdonságok vizsgálata a matematika sok területén belül elterjedt. Nagy irodalma van például a generikus folytonos függvény viselkedésének.

Nemrég E. Akin, M. Hurley és J. A. Kennedy [1] kompakt terek generikus homeomorfizmusait vizsgálták. A. Kechris és C. Rosendal [15] homogén megszámlálható struktúrák automorfizmuscsoportjait tanulmányozták. Karakterizálták, hogy mely automorfizmus csoportok hatásainak lesznek generikus konjugáltosztályai.

M. Doucha és M. Malicki [3] diszkrét megszámlálható csoportok lengyel csoportokba vett generikus reprezentációját vizsgálták. I. Goldbring, S. E. Kunnawalkam és Y. Lodha [9] megszámlálható csoportok generikus algebrai tulajdonságairól hoztak ki számos szép eredményt. Az ő megközelítésük lényegében ekvivalens azzal, amit ebben a dolgozatban a 3-as szekcióban mutatok be.

Fő cél. A dolgozat fő iránya generikus tulajdonságok feltárása topologikus csoportok terében.

Struktúra.

A lengyel csoportok tanulmányozása a leíró halmazelmélet egyik jól megalapozott ága, melynek a lokálisan kompakt lengyel csoportok fontos alosztályát képezik. A

klasszikus szövegekben megszokott módon figyelmünket a két leginkább tanulmányozott alosztályra korlátozzuk: a megszámlálható diszkrét csoportokra és a kompakt csoportokra.

Elsőként, megszámlálhatóan végtelen diszkrét csoportok generikus tulajdonságait mutatjuk be. A teret csoportszorzótáblák természetes topologizációjával kapjuk.

Ezután kompakt metrizable Abel-csoportokra térünk át, itt egy univerzális kompakt Abel-csoport kompakt részcsoportjait a Hausdorff metrikával ellátva kapjuk a tereinket. Ezt a teret $\mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ -vel jelöljük, és a kompakt metrizable Abel-csoportok tereként fogunk rá hivatkozni. Ez a koncepció korábban is szerepelt a matematikán belül: [6]-ban vezették be a G kompakt csoport kompakt részcsoportjainak terét, ennek tulajdonságairól pedig [6]-ban és [7]-ben írtak.

Végül pedig az 5-ös szekcióban, hasonló eszközökkel, mint a kompakt Abel-csoportok esetén definiáljuk kompakt metrizable csoportok egy terét (a $\prod_{n=1}^{\infty} SU(n)$ univerzális kompakt metrizable csoport segítségével).

1.1. Jelölés. Legyen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$.

1.2. Jelölés. Legyen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy topologikus csoport. Ezután legyen

$$\pi_{[n]} : \prod_{k \in \mathbb{N}} X_k \rightarrow \prod_{k \in \mathbb{N}} X_k, \quad (x(1), x(2), \dots) \mapsto (x(1), \dots, x(n), 1_{X_{n+1}}, 1_{X_{n+2}}, \dots),$$

és

$$\pi_n : \prod_{k \in \mathbb{N}} X_k \rightarrow X_n, \quad (x(1), x(2), \dots) \mapsto x(n).$$

Vegyük észre, hogy a π_n leképezések szürjektív homomorfizmusok továbbá hogy a $\pi_{[n]}$ leképezések képtere kanonikus izomorfizmusba állítható $\prod_{k=1}^n X_k$ -val.

2. ELŐISMERETEK

2.1. A KOMPAKT RÉSZCSOPORTOK TERE

Egy X topologikus térre jelölje $\mathcal{K}(X)$ az X nemüres kompakt részhalmozait. Ez egy topologikus tér, ellátva a Vietoris topológiával, ahol a következő halmazok alkotnak bázist:

$$(\star) \quad \{K \in \mathcal{K}(X) : K \subseteq U, K \cap V_1 \neq \emptyset, \dots, K \cap V_n \neq \emptyset\},$$

ahol $U, V_1, \dots, V_n$ nyílt halmazok X -ben.

Ha (X, d) metrikus tér, akkor $\mathcal{K}(X)$ szintén metrikus a Hausdorff metrikával ellátva:

$$d_H(K, L) := \inf\{\varepsilon > 0 : K_\varepsilon \supseteq L, L_\varepsilon \supseteq K\},$$

ahol A_ε az A halmaz ε -környezetét jelöli. Ismert, hogy a Hausdorff metrika a Vietoris topológiát indukálja. Az is jól ismert, hogy $(\mathcal{K}(X), d_H)$ az eredeti (X, d) metrikus tér számos tulajdonságát örökli. Például, ha X kompakt, akkor ha $\mathcal{K}(X)$ is kompakt lesz. ([14, Subsection 4.F]).

Szükségünk lesz a következő közismert lemmára.

2.1. Lemma. *Legyenek X, Y topologikus terek. Egy $f : X \rightarrow Y$ folytonos függvény a következő folytonos leképezést indukálja:*

$$\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y), \quad K \mapsto f(K).$$

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy a bázisnyíltak ősei $(\star)$ alakban írhatók fel. $\square$

Most rátérünk a topologikus csoportok esetére.

2.2. Állítás. *Legyen G egy topologikus csoport, ekkor a következő halmaz zárt $\mathcal{K}(G)$ -ben:*

$$\mathcal{S}(G) := \{K \in \mathcal{K}(G) : K \text{ részcsoportha } G\text{-nek}\}$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy

$$\mathcal{S}(G) = \{K \in \mathcal{K}(G) : K \cdot K^{-1} = K\}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez valóban zárt halmaz. (A 2.1-es lemma alapján.) $\square$

2.3. Definíció. A fent definiált $\mathcal{S}(G)$ topologikus teret G kompakt részcsoporthainak terének nevezzük. Vegyük észre, hogy ha G kompakt metrizálható, akkor $\mathcal{S}(G)$ szintén kompakt metrizálható lesz.

Szükségünk lesz a következő jól ismert állításra, amely [12, 1.6-os tétel] egy speciális esete.

2.4. Tétel. *Legyenek G és H kompakt csoportok. Ha $\varphi : G \rightarrow H$ szürjektív és folytonos homomorfizmus, akkor egyben nyílt is.*

2.2. BAIRE KATEGÓRIA

Ebben a szekcióban ismert tételeket és jelöléseket közlünk, melyek mind megtalálhatóak [14]-ben.

2.5. Definíció. Egy (X, τ) topologikus teret *lengyel térnek* nevezünk, ha szeparábilis és teljesen metrizálható (vagyis létezik egy olyan d teljes metrika az X -en, ami a τ topológiát indukálja).

Világos, hogy a megszámlálható diszkrét terek lengyel terek. Speciálisan $2 = \{0, 1\}$ és $\mathbb{N}$ a diszkrét topológiával ellátva lengyelek. A következő állítások jól ismertek:

2.6. Állítás. *Lengyel terek megszámlálható szorzata lengyel. Speciálisan, 2^A és $\mathbb{N}^A$ lengyel terek bármely A megszámlálható halmazra.*

2.7. Definíció. Egy topologikus tér egy részhalmaza

- **sehol sem sűrű**, ha a lezártjának üres a belseje,
- **első kategóriájú**, ha megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniója,
- **második kategóriájú**, ha nem első kategóriájú,
- **reziduális, avagy generikus**, ha a komplementere első kategóriájú.

2.8. Definíció. Az X topologikus tér **Baire**, ha minden nemüres nyílt halmaz második kategóriájú.

2.9. Tétel (Baire kategória-tétel). *Minden teljesen metrizálható topológikus tér Baire.*

Mivel a lengyel terek teljesen metrizálhatóak, így alkalmazhatjuk rájuk a Baire kategória-tételt.

Emlékeztetünk, hogy az X topológikus tér egy részhalmaza G_δ , ha nyílt halmazok megszámlálható metszete. A következő jól ismert tétel karakterizálja, hogy lengyel terek mely részhalmazai lengyelek.

2.10. Tétel. *Egy lengyel tér egy részhalmaza pontosan akkor lengyel, ha G_δ . Speciálisan, a zárt alterek lengyelek.*

Könnyű belátni a következőt:

2.11. Állítás. *Egy Baire tér egy részhalmaza pontosan akkor reziduális, ha tartalmaz sűrű G_δ halmazt.*

2.12. Észrevétel. A 2.11-es állítás azonnali következménye, hogy egy Baire tér egy F_σ halmaza pontosan akkor második kategóriájú, ha nemüres a belseje.

3. MEGSZÁMLÁLHATÓAN VÉGTELEN DISZKRÉT CSOPORTOK

Ebben a szekcióban összefoglalom Elekes M., Gehér B., Kanalas K., Kátay T. és Keleti T. eredményeit. Mindez részletesebben kifejtve megtalálható [5] 3-as szekciójában. Néhány tételt azért idézünk, mert motiválja az [5]-ben vizsgált kérdéseket, néhányra pedig szeretnénk hivatkozni a későbbiekben.

3.1. A CSOPORTSZORZÓTÁBLÁK TERE

A 2.6-os állítás alapján $\mathbb{N}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, vagyis a természetes számokat tartalmazó végtelen számtáblázatok tere lengyel. Nyíltzárt bázisát adja a térnek a következő:

$$(1) \quad \left\{ G \in \mathbb{N}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} : G(n_1, m_1) = k_1, \dots, G(n_l, m_l) = k_l \right\},$$

ahol $n_i, m_i, k_i \in \mathbb{N}$, $(i = 1, \dots, l)$. A következő részhalmazt fogjuk vizsgálni:

$$\mathcal{G} := \left\{ G \in \mathbb{N}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} : G \text{ egy csoportszorzótábla, és } 1 \text{ az egységelem} \right\}.$$

A Baire kategória-tételt szeretnénk alkalmazni (2.9-es tétel) a $\mathcal{G}$ térben. A 2.10-es állítás miatt elég belátnunk, hogy $\mathcal{G}$ az $\mathbb{N}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ -nek G_δ részhalmaza. Ennek bizonyítása egy könnyű számolás (lásd [4, 3.1-es állítás]).

$\tilde{G}$ -val jelöljük azt a csoportot, amelynek alaphalmaza a természetes számok, és G a csoportszorzótáblája.

3.1. Megjegyzés. Amikor $\mathcal{G}$ -beli elemekkel dolgozunk, a csoportelméletben használatos rövidítéseket fogjuk használni. Például a torziócsoportokat a következőképp definiáljuk

$$\{ G \in \mathcal{G} : \forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} \ n^k = 1 \},$$

a talán kicsit formálisabb, ám megértést kevésbé segítő

$$\{G \in \mathcal{G} : \forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} \underbrace{G(G(\dots G(G(n, n), n), \dots, n), n)}_{k\text{-szor}} = 1\}$$

helyett.

3.2. Megjegyzés. Az inverzképzésnél is a szokásos rövidítésekkel élünk. Legyenek $n, m, k \in \mathbb{N}$. Ekkor például $nm^{-1} = k$ -val rövidítjük a következőt: $\forall x (mx = 1 \implies nx = k)$. Világos, hogy ez $\mathcal{G}$ egy zárt részhalmazát jelöli. Azonban a csoportaxiómák miatt a fenti ekvivalens a következő állítással $\exists x (mx = 1 \wedge nx = k)$, ami pedig nyílt részhalmazzal definiál. Vagyis $nm^{-1} = k$ nyíltzárt halmazzal definiál.

3.3. Észrevétel. $\mathbb{N}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ fent említett standard nyíltzárt bázisa (1) megadja $\mathcal{G}$ egy nyíltzárt bázisát: a következő alakú halmazok

$$(2) \quad \{G \in \mathcal{G} : \forall i \leq l (n_i \cdot m_i = k_i)\},$$

ahol $l \in \mathbb{N}$ és $n_i, m_i, k_i \in \mathbb{N}$ minden $i \leq l$ esetén bázist alkotnak. A későbbiekben azonban hasznosabb lesz számunkra egy másik bázisa $\mathcal{G}$ -nek.

3.4. Állítás. Álljanak az $\{U_1, \dots, U_k\}$ és $\{V_1, \dots, V_l\}$ halmazok az $x_1, \dots, x_n$ karakterekből képzett véges szavakból. Ekkor tetszőleges $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_l \in \mathbb{N}$ esetén a következő halmaz

$$(3) \quad \left\{ G \in \mathcal{G} : \bigwedge_{i=1}^k U_i(a_1, \dots, a_n) = b_i \wedge \bigwedge_{j=1}^l V_j(a_1, \dots, a_n) \neq c_j \right\}$$

nyíltzárt. Emellett az ilyen alakú halmazok $\mathcal{G}$ egy nyíltzárt bázisát adják meg.

Bizonyítás. Ez a halmazcsalád a fenti (2) bázis kiterjesztése, így elég belátni, hogy nyíltzártak az elemei. Mivel a nyíltzárt halmazok algebraát alkotnak, így feltehető, hogy egyetlen W szó és egyenlőség esete van. A bizonyítást a W szó hosszára vett indukcióval, és 3.2-es megjegyzésben hasonló gondolatmenettel kapjuk. $\square$

3.5. Jelölés. Ha $\mathcal{B}$ egy $\{G \in \mathcal{G} : \forall i, j \leq k (i \cdot j = m_{i,j})\}$ alakú bázisnyíltzárt halmaz, ahol $k \in \mathbb{N}$ és $m_{i,j} \in \mathbb{N}$ minden $i, j \leq k$ esetén, akkor legyen $\text{supp } \mathcal{B} := \{1, \dots, k\} \cup \{m_{i,j} : i, j \leq k\}$.

3.6. Észrevétel. Egy fontos észrevétel, hogy a permutációk homeomorfizmusokat indukálnak. Legyen $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ egy 1-et fixen tartó bijekció. Ekkor az általa indukált $h_\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ homeomorfizmus alatt a következőt értjük. Intuitívan $h_\varphi(G)$ -t G struktúrájának φ -vel való átrendezésével fogjuk definiálni. Precízebben, bármely $G \in \mathcal{G}$ esetén a $h_\varphi(G)$ csoportszorzótáblát a következő egyenlettel definiáljuk: $i \cdot j := \varphi(G(\varphi^{-1}(i), \varphi^{-1}(j)))$ minden $i, j \in \mathbb{N}$ esetén. Vagyis φ egy $\tilde{G}$ és $\widetilde{h_\varphi(G)}$ közötti izomorfizmus. Könnyű belátni, hogy h_φ valóban homomorfizmus.

3.2. ABEL-CSOPORTOK

Ebben a szekcióban belátjuk, hogy létezik a generikus megszámlálhatóan végtelen Abel-csoport. Vagyis belátjuk, hogy van reziduális izomorfiaosztály az $\mathcal{A} := \{G \in \mathcal{G} : \tilde{G} \text{ Abel-csoport}\}$ részhalmazon belül. Nem térünk át az additív jelölésre.

Elsőként vegyük észre, hogy

$$\mathcal{A} = \{G \in \mathcal{G} : \forall n, k (nkn^{-1}k^{-1} = 1)\} = \bigcap_{n,k \in \mathbb{N}} \{G \in \mathcal{G} : nkn^{-1}k^{-1} = 1\}$$

$\mathcal{G}$ -nek zárt részhalmaza, vagyis lengyel tér.

3.7. Megjegyzés. Könnyű belátni, hogy $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$ belseje üres, következésképp sehol sem sűrű. Így valamely $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{G}$ -ben első kategóriájú tulajdonság esetén $\mathcal{P} \cap \mathcal{A}$ lehet reziduális $\mathcal{A}$ -n belül.

A következő állítás jól ismert (lásd [8, 4-es fejezet, 3.1-es tétel]).

3.8. Tétel. Minden osztható Abel-csoport a következőként írható fel:

$$\left(\bigoplus_{p \in \mathbf{P}} \mathbb{Z}[p^\infty]^{(I_p)} \right) \oplus \mathbb{Q}^{(I)},$$

ahol $\mathbf{P}$ a prímszámokat jelöli, $\mathbb{Z}[p^\infty]$ a jól ismert Prüfer p -csoport, I és I_p tetszőleges indexhalmazok, továbbá bármely G csoportra és J indexhalmazra $G^{(J)}$ -nel jelöljük a $\bigoplus_{j \in J} G$ direkt összeget.

Legyen $A \in \mathcal{G}$ olyan, melyre

$$\tilde{A} \cong \bigoplus_{p \in \mathbf{P}} \mathbb{Z}[p^\infty]^{(\mathbb{N})}.$$

3.9. Megjegyzés. Egy másik jól ismert állítás szerint minden Abel-csoport beágyazható egy osztható Abel-csoportba (lásd [8, 4-es fejezet, 1.4-es tétel]). Vagyis a 3.8-as tétel értelmében minden megszámlálható Abel-torziócsoporthoz beágyazható $\tilde{A}$ -ba.

3.10. Megjegyzés. Ha G egy osztható Abel-torziócsoporthoz, akkor felírható a 3.8-as tételben kimondott formában. Ha minden véges Abel-csoport beágyazható G -be, akkor I_p minden $p \in \mathbf{P}$ esetén végtelen kell legyen, mivel G -nek végtelen sok p -edrendű elemet kell tartalmaznia minden p prímszámra. Ha G megszámlálható, akkor I_p megszámlálható minden p -re. Tehát $\tilde{A}$ az izomorfia erejéig egyetlen megszámlálható, osztható Abel-torziócsoporthoz, amely minden véges Abel-csoportot tartalmaz (izomorfia erejéig).

3.11. Állítás. A következő halmazok G_δ részhalmazát alkotják $\mathcal{A}$ -nak.

$$\mathcal{D} := \{G \in \mathcal{A} : \tilde{G} \text{ osztható}\}, \quad \mathcal{T} := \{G \in \mathcal{A} : \tilde{G} \text{ torziócsoporthoz}\}$$

és

$$\mathcal{F} := \{G \in \mathcal{A} : \text{minden véges Abel-csoport beágyazható } \tilde{G}\text{-ba}\}$$

Bizonyítás. Definíció szerint:

$$\mathcal{D} = \{G \in \mathcal{A} : \forall n, k \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} (m^k = n)\} = \bigcap_{n,k \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \underbrace{\{G \in \mathcal{A} : m^k = n\}}_{\text{nyíltzárt}},$$

ami nyilván G_δ halmaz $\mathcal{A}$ -ban. Újra a definíciót alkalmazva,

$$\mathcal{T} = \{G \in \mathcal{A} : \forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} (n^k = 1)\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\{G \in \mathcal{A} : n^k = 1\}}_{\text{nyíltzárt}},$$

ami szintén G_δ része $\mathcal{A}$ -nak. Vegyük észre, hogy megszámlálhatóan végtelen sok véges Abel-csoport létezik, így elég megmutatni, hogy bármely lerögzített H véges Abel-csoport esetén $\mathcal{E}_H := \{G \in \mathcal{A} : H \text{ beágyazható } \tilde{G}\text{-ba}\}$ halmaz G_δ . Legyenek H elemei $\{h_1, \dots, h_n\}$. Bármely $G \in \mathcal{A}$ esetén H pontosan akkor ágyazható be $\tilde{G}$ -ba, ha léteznek páronként diszjunkt $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{N}$ számok, melyekre ha H -ban teljesül, hogy $h_i \cdot h_j = h_l$, akkor $\tilde{G}$ -ben teljesül, hogy $g_i \cdot g_j = g_l$ minden $i, j, l \leq n$ esetén. Vagyis,

$$\mathcal{E}_H \cap \mathcal{A} = \bigcup_{\substack{g_1, \dots, g_n \in \mathbb{N} \\ \text{páronként különböz} \circ}} \bigcap_{\substack{h_i, h_j, h_l \in H, \\ h_i \cdot h_j = h_l}} \{G \in \mathcal{A} : g_i \cdot g_j = g_l\},$$

ami nyílt $\mathcal{A}$ -ban. □

A 3.10-es megjegyzés alapján tudjuk, hogy az $\mathcal{I}_A := \{G \in \mathcal{G} : \tilde{G} \cong \tilde{A}\}$ izomorfiaosztály felírható, mint $\mathcal{A} \cap \mathcal{D} \cap \mathcal{T} \cap \mathcal{F}$, ami G_δ része $\mathcal{A}$ -nak. Most megmutatjuk, hogy sűrű része $\mathcal{A}$ -nak.

3.12. Állítás. *Az $\mathcal{I}_A$ izomorfiaosztály sűrű $\mathcal{A}$ -ban.*

Bizonyítás. Rögzítsünk le egy tetszőleges nemüres nyíltzárt báziselemet: $\mathcal{B} = \{G \in \mathcal{A} : \forall i, j \leq k (i \cdot j = m_{i,j})\}$, ahol $k \in \mathbb{N}$ és $m_{i,j} \in \mathbb{N}$ minden $i, j \leq k$. Válasszunk egy tetszőleges $H \in \mathcal{B}$ csoportszorzótáblát, és egy K osztható Abel-csoportot egy $\varphi : \tilde{H} \hookrightarrow K$ beágyazással; ilyen K létezését a 3.9-es megjegyzés biztosítja. Nyilván K választható megszámlálhatóan. Legyen K a következő alakú:

$$\left(\bigoplus_{p \in \mathbf{P}} \mathbb{Z}[p^\infty]^{(I_{K,p})} \right) \oplus \mathbb{Q}^{(I_K)}.$$

Vegyük a $\varphi(\text{supp } \mathcal{B}) \subseteq K$ véges halmazt (3.5). Minden $x \in \varphi(\text{supp } \mathcal{B})$ -nek véges sok nemnulla x_i koordinátája van ($i \in I_K$). Legyen n olyan természetes szám, amely nagyobb, mint $2 \cdot \max\{|x_i| : x \in \varphi(\text{supp } \mathcal{B}), i \in I_K\}$. Legyen N az a részcsoportha K -nak, amelyet a $((0, 0, \dots), (0, \dots, 0, \underset{\text{rth}}{n}, 0, \dots))$ alakú elemek generálnak minden $r \in I_K$ -ra.

Legyen $\psi : K \rightarrow K/N$ a faktorleképzés. Világos, hogy K/N a következő lesz:

$$\left(\bigoplus_{p \in \mathbf{P}} \mathbb{Z}[p^\infty]^{(I_{K,p})} \right) \oplus (\mathbb{Q}/n\mathbb{Z})^{(I_K)}.$$

Ez egy megszámlálható Abel-torziócsoportha, vagyis van egy $\nu : K/N \hookrightarrow \tilde{A}$ beágyazás a 3.9-es megjegyzés miatt. Vegyük észre, hogy $\nu \circ \psi \circ \varphi : \tilde{H} \rightarrow \tilde{A}$ egy olyan homomorfizmus, amely n és N választása miatt injektív a $\text{supp } \mathcal{B} \subseteq \tilde{H}$ halmazon. Vagyis létezik egy olyan $\vartheta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijekció, ami kiterjeszti a véges $(\nu \circ \psi \circ \varphi|_{\text{supp } \mathcal{B}})^{-1}$ bijekciót. Egy ilyen ϑ -t véve teljesül, hogy $h_\vartheta(A) \in \mathcal{B}$, hiszen H és $h_\vartheta(A)$ megegyeznek a $\{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, k\}$ halmazon (ahol h_ϑ a 3.6-os megfigyelésben bevezetett indukált homeomorfizmus). Mivel $\widetilde{h_\vartheta(A)} \cong \tilde{A}$, megállapíthatjuk, hogy $\mathcal{I}_A$ sűrű $\mathcal{A}$ -ban. □

3.13. Következmény. *Az $\mathcal{I}_A$ izomorfiaosztály reziduális $\mathcal{A}$ -ban.*

4. KOMPAKT METRIZÁLHATÓ ABEL-CSOPORTOK

4.1. PONTRJAGIN-DUALITÁS

Emlékeztetjük az olvasót a Pontrjagin-dualitás definíciójára és néhány alapvető tulajdonságára. Jelöljük a kör csoportot $\mathbb{T}$ -pal. Egy G lokálisan kompakt Abel-csoport (innenről LKA csoport) Pontrjagin-duálisát $\hat{G}$ -vel jelöljük, és a $\chi : G \rightarrow \mathbb{T}$ folytonos csoporthomomorfizmusok halmazát értjük alatta, ellátva a pontonkénti szorzás művelettel és a kompakt-nyílt topológiával. Ekkor $\hat{G}$ szintén LKA csoport lesz (lásd [18, 1. fejezet]). Emlékeztetünk a következőre:

4.1. Tétel (Pontrjagin-dualitás tétele). *Legyen G LKA csoport, ekkor a duálisának duálisa, vagyis $\hat{\hat{G}}$ kanonikusan izomorf G -vel.*

Hogy későbbiekben tudjunk rájuk hivatkozni, felsoroljuk a Pontrjagin-dualitás néhány tulajdonságát.

4.2. Állítás. *Legyen G LKA csoport, ekkor teljesülnek a következők:*

(1) *Egy A LKA csoport beágyazható G -be $\iff \hat{A}$ faktora $\hat{G}$ -nek. [18, Theorem 2.1.2.]*

(2) *$(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ kompakt csoportok egy sorozatára tudjuk a következőt: $\widehat{\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i} = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \hat{A}_i$. [18, Theorem 2.2.3.]*

(3) *G kompakt $\iff \hat{G}$ diszkrét. [18, Theorem 1.2.5.]*

(4) *G véges $\iff \hat{G}$ véges. (A (3)-as állításból és a Pontrjagin-dualitás tételből világos.)*

(5) *G kompakt metrizálható $\iff \hat{G}$ diszkrét és megszámlálható. [16, 96. oldalon található következmény]*

(6) *G kompakt és torziómentes $\iff \hat{G}$ diszkrét és osztható. [16, Theorem 31.]*

(7) *G kompakt és totálisan összefüggéstelen $\iff \hat{G}$ diszkrét torziócsoport. [16, 99. oldalon lévő következmény]*

(8) *A $\mathbb{T}$ duálisa $\mathbb{Z}$. [18, 12-13. oldal]*

4.2. A KOMPAKT METRIZÁLHATÓ ABEL-CSOPORTOK TERE

$\mathbb{T}$ -t úgy tekintjük, mint az $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ additív csoportot, vagyis a valós számokat modulo 1, és a szokásos $d_{\mathbb{T}}$ metrikát használjuk. Világos, hogy a kör csoport kompakt metrizálható Abel-csoport (innenről KMA csoport). Jelölje $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ a $\mathbb{T}$ megszámlálhatóan végtelen direkt szorzatát saját magával. Ez persze ismét egy KMA csoport, továbbá minden zárt részcsoportha $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ -nek szintén KMA csoport. $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ -n a következő metrikát tekintjük:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_{\mathbb{T}}(x(n), y(n)).$$

Megjegyezzük, hogy a 4.2-es állítás (2) és (8) pontjai szerint a $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ duálisa $F := \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$. Az (1) pont szerint egy G KMA csoport akkor és csak akkor ágyazható be $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ -be, ha a megszámlálható diszkrét Abel-csoport $\hat{G}$ az F egy faktorcsoportha. Mivel F a megszámlálhatóan végtelen sok elem által generált szabad Abel-csoport, így minden megszámlálható diszkrét Abel-csoport F hányadosa, tehát minden KMA-csoport beágyazható $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ -be. Másképp mondva, minden KMA csoport izomorf (mint topologikus csoport) a $\mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ valamely elemével (2.3-as definíció).

Így $(\mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}), d_H)$ -t tekinthetjük a KMA csoportok terének (itt d_H a d által indukált Hausdorff-metrika). Egy hasznos észrevételt teszünk a $\mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ -beli véges csoportokról.

4.3. Definíció. Egy $G \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ csoportra G **tartóját** a következőképp definiáljuk

$$\text{supp}(G) := \{n \in \mathbb{N} : \exists g \in G (g(n) \neq 0)\}.$$

4.4. Jelölés. Jelölje $\mathcal{F}$ a véges tartójú véges csoportok halmazát $\mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ -ben.

4.5. Állítás. $\mathcal{F}$ sűrű $\mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ -ben.

Bizonyítás. Rögzítsünk le egy $\varepsilon > 0$ számot és $K \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ csoportot. Mivel $\pi_{[n]}(K) \xrightarrow{d_H} K$ (ahogy $n \rightarrow \infty$, 1.2-es jelölés), feltehető, hogy $K \leq \mathbb{T}^N \times \{0\} \times \{0\} \times \dots$ valamely $N \in \mathbb{N}$ esetén. Azért, hogy a jelöléseink könnyebben érthetőek legyenek, $\mathbb{T}^N$ -et írunk, a formálisabb, de kissé bonyolultabb $\mathbb{T}^N \times \{0\} \times \{0\} \times \dots$ helyett. A következő metrikát használjuk: $d_{\mathbb{T}^N}(x, y) := \sum_{i=1}^N d_{\mathbb{T}}(x(i), y(i))$.

Legyen $x_1, x_2, \dots, x_k$ egy véges $\frac{\varepsilon}{2}$ -háló K -ban, és rögzítsünk egy M természetes számot, melyre $M > \frac{2Nk}{\varepsilon}$.

Szükségünk lesz a Dirichlet-féle approximációs tétel szimultán változatára. [19, 27-es oldal].

4.6. Tétel. Legyenek $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ valós számok, és legyen Q egy pozitív egész. Ekkor létezik $p_1, \dots, p_d, q \in \mathbb{Z}$, $1 \leq q \leq Q^d$ úgy, hogy $|\alpha_i - \frac{p_i}{q}| \leq \frac{1}{qQ}$ minden $1 \leq i \leq d$ -re.

Ezt a tételt alkalmazzuk az $d = kN$ és $Q = M$ helyettesítéssel az

$$x_1(1), \dots, x_1(N), \dots, x_k(1), \dots, x_k(N)$$

valós számokra. Így kapjuk a $p_1^1, \dots, p_N^1, \dots, p_1^k, \dots, p_N^k$ és q egészeket, amelyre $1 \leq q \leq M^{kN}$, továbbá

$$\left| x_i(j) - \frac{p_j^i}{q} \right| \leq \frac{1}{qM} < \frac{\varepsilon}{2qkN}.$$

Az utolsó egyenlőtlenség az M -re vonatkozó feltevésünkből következik.

Eszerint a körön teljesül, hogy $d_{\mathbb{T}}\left(x_i(j), \frac{p_j^i}{q}\right) < \frac{\varepsilon}{2qkN}$ minden $1 \leq i \leq k$ és $1 \leq j \leq N$ esetén. Legyen L a generált részcsoportha $\left\langle \left(\frac{p_1^1}{q}, \dots, \frac{p_N^1}{q}\right), \dots, \left(\frac{p_1^k}{q}, \dots, \frac{p_N^k}{q}\right) \right\rangle \leq \mathbb{T}^N$. Vegyük észre, hogy L véges.

Azt állítjuk, hogy $d_H(L, K) < \varepsilon$. Elsőként belátjuk, hogy $L_\varepsilon \supseteq K$ (L_ε az L halmaz ε -környezete). Ez valóban igaz, hiszen $x_1, x_2, \dots, x_k$ a K -ban egy $\frac{\varepsilon}{2}$ -háló volt, és

$$d_{\mathbb{T}^N} \left(x_i, \left(\frac{p_1^i}{q}, \dots, \frac{p_N^i}{q} \right) \right) = \sum_{j=1}^N d_{\mathbb{T}} \left(x_i(j), \frac{p_j^i}{q} \right) < \frac{\varepsilon}{2qkN} \cdot N = \frac{\varepsilon}{2qk} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$K_\varepsilon \supseteq L$ megmutatásához vegyük észre, hogy L minden eleme a következőképp írható:

$$\sum_{i=1}^k l_i \cdot \left(\frac{p_1^i}{q}, \dots, \frac{p_N^i}{q} \right),$$

ahol $l_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq l_i < q$ minden $1 \leq i \leq k$ -re, így

$$d_{\mathbb{T}^N} \left(\sum_{i=1}^k l_i x_i, \sum_{i=1}^k l_i \cdot \left(\frac{p_1^i}{q}, \dots, \frac{p_N^i}{q} \right) \right) \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^N l_i \cdot d_{\mathbb{T}} \left(x_i(j), \frac{p_j^i}{q} \right) < k \cdot N \cdot q \cdot \frac{\varepsilon}{2qkN} = \frac{\varepsilon}{2},$$

vagyis az állítás teljesül, hiszen $\sum_{i=1}^k l_i x_i \in K$. $\square$

4.3. A REZIDUÁLIS IZOMORFIAOSZTÁLY

4.7. Tétel. *Létezik a generikus kompakt metrizálható Abel-csoport. Vagyis létezik egy reziduális izomorfiaosztály $\mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ -ben. Nevezetesen, ez az izomorfiaosztály a*

$$Z = \prod_{p \in \mathbf{P}} (Z_p)^{\mathbb{N}},$$

ahol $\mathbf{P}$ a prímszámok halmaza, Z_p pedig a p -adikus egész számok csoportja.

4.8. Megjegyzés. A 3.10-es megjegyzésben megmutattuk, hogy $\tilde{A} = \bigoplus_{p \in \mathbf{P}} \mathbb{Z}[p^\infty]^{(\mathbb{N})}$ az izomorfizmus erejéig egyetlen megszámlálható Abel-csoport, ami osztható, torziócsoport és minden véges Abel-csoportot tartalmaz izomorfia erejéig. Jól ismert, hogy Z_p , a p -adikus egészek additív csoportja éppen $\mathbb{Z}[p^\infty]$ Pontrjagin-duálisa (lásd [11, 25.2]); vagyis a 4.2-es állítás (2)-es pontjából következik, hogy Z éppen $\tilde{A}$ Pontrjagin-duálisa. Vagyis a 4.2-es állítás (1), (4), (6) és (7)-es pontja alapján Z az (izomorfia erejéig) egyetlen KMA csoport, amelyre igaz, hogy torziómentes, totálisan összefüggéstelen és minden véges Abel-csoport előáll faktoraként.

Így a 4.7 tétel bizonyításához elegendő annak ellenőrzése, hogy ez a három tulajdonság teljesül-e a generikus $K \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ -re, amit a következő három lemmában teszünk meg.

4.9. Lemma. *A generikus $K \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ esetén minden véges Abel-csoport előáll mint K faktora.*

Bizonyítás. Legyen

$$\mathcal{B}_1 := \{K \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}) : \text{minden } A \text{ véges Abel-csoport előáll } K \text{ faktoraként}\}.$$

Emlékeztetünk, hogy minden kompakt csoport esetén a csoport faktorai és folytonos homomorf képei megegyeznek, így

$$\mathcal{B}_1 = \bigcap_{A \text{ véges Abel-csoport}} \{K \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}) : \exists \varphi : K \rightarrow A \text{ folytonos szürjektív homomorfizmus}\}.$$

Mivel megszámlálható sok véges Abel-csoport létezik izomoria erejéig, így elegendő belátni, hogy egy rögzített véges A Abel-csoportra a következő részhalmaza $\mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ -nek sűrű nyílt:

$$\mathcal{B}_A := \{K \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}) : \exists \varphi : K \rightarrow A \text{ folytonos szürjektív homomorfizmus}\}.$$

1. állítás $\mathcal{B}_A$ nyílt $\mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ -ben.

Legyen $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ az A elemeinek egy felsorolása. Egy rögzített $K \in \mathcal{B}_A$ esetén legyen $\varphi : K \rightarrow A$ egy folytonos szürjektív homomorfizmus és legyen $H := \text{Ker } \varphi$. Ekkor vegyük a következő partíciót: $K = \bigcup_{i=1}^n (k_i + H)$, ahol $k_i \in K$ és $\varphi(k_i) = a_i$. Vegyük észre, hogy $k_i + H$ kompakt minden i esetén, és legyen

$$\delta := \min\{\text{dist}(k_i + H, k_j + H) : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\} > 0.$$

Azt állítjuk, hogy $B_{d_H}(K, \frac{\delta}{4}) \subseteq \mathcal{B}_A$. Elegendő belátni, hogy bármely $L \in B_{d_H}(K, \frac{\delta}{4})$ -hoz találhatunk egy $\psi : L \rightarrow A$ folytonos szürjektív homomorfizmust. Legyen $L_i := L \cap (k_i + H)_{\frac{\delta}{4}}$, ekkor δ választása miatt $\bigcup_{i=1}^n L_i$ megadja L egy partícióját nemüres diszjunkt nyílt halmazokra. Definíáljuk ψ -t a következőképpen: $\psi(x) = a_i$ pontosan akkor, ha $x \in L_i$. ψ folytonosságát könnyű leellenőrizni, a szürjektivitás pedig következik abból, hogy minden L_i nemüres. Elegendő tehát megmutatni, hogy ψ homomorfizmus.

Vegyük tetszőleges $l_i \in L_i$ és $l_j \in L_j$ elemeket. Ekkor létezik $x_i \in k_i + H$ és $x_j \in k_j + H$, melyre $d_{\mathbb{T}^{\mathbb{N}}}(x_i, l_i) < \frac{\delta}{4}$, $d_{\mathbb{T}^{\mathbb{N}}}(x_j, l_j) < \frac{\delta}{4}$, $\psi(l_i) = \varphi(x_i) = a_i$ és $\psi(l_j) = \varphi(x_j) = a_j$. Vegyük észre, hogy

$$d_{\mathbb{T}^{\mathbb{N}}}(x_i + x_j, l_i + l_j) \leq d_{\mathbb{T}^{\mathbb{N}}}(x_i + x_j, x_i + l_j) + d_{\mathbb{T}^{\mathbb{N}}}(x_i + l_j, l_i + l_j) = d_{\mathbb{T}^{\mathbb{N}}}(x_j, l_j) + d_{\mathbb{T}^{\mathbb{N}}}(x_i, l_i) < \frac{\delta}{2},$$

következésképp $l_i + l_j \in (x_i + x_j + H)_{\frac{\delta}{2}}$. Mivel $L \subseteq K_{\frac{\delta}{4}}$, így δ választása miatt következik, hogy $l_i + l_j \in (x_i + x_j + H)_{\frac{\delta}{4}}$. Így a ψ definícióját használva kapjuk, hogy $\psi(l_i + l_j) = \varphi(x_i + x_j) = a_i + a_j$. Következésképp ψ homomorfizmus, így az 1-es Lemma bizonyítását befejeztük.

2. állítás $\mathcal{B}_A$ sűrű $\mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ -ben.

A 4.5-ös állítás alapján elegendő $\mathcal{F}$ elemeit megközelíteni $\mathcal{B}_A$ -beli elemekkel. Rögzítsünk egy tetszőleges $F \in \mathcal{F}$ csoportot, és $\varepsilon > 0$ -t. Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, melyre $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$ és $\{1, \dots, N\} \supseteq \text{supp}(F)$. Mivel A KMA csoport, létezik

$$\varphi : A \hookrightarrow \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_{N\text{-szer}} \times \mathbb{T} \times \mathbb{T} \dots$$

beágyazása. Az a H részcsoportha $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ -nek, amely F és $\varphi(A)$ által generált, izomorf lesz $F \times A$ -val. Vagyis létezik természetes $H \rightarrow A$ folytonos szürjektív homomorfizmus, valamint $d_H(H, F) < \varepsilon$, hiszen $\pi_{[N]}(H) = \pi_{[N]}(F)$ és $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$. $\square$

4.10. Lemma. A generikus $K \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ torziómentes.

Bizonyítás. Legyen

$$\mathcal{B}_2 := \{K \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}) : K \text{ torziómentes}\}.$$

Megmutatjuk, hogy $\mathcal{B}_2$ sűrű G_δ részhalmaza $\mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ -nek.

Állítás $\mathcal{B}_2$ G_δ részhalmaza $\mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ -nek.

Legyen $f_n : \mathbb{T}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ as $f_n : x \mapsto n \cdot x$. Világos, hogy f_n folytonos, és

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 &= \left\{ K \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}) : \forall n, k \in \mathbb{N} \left(0 \notin f_n \left[K \setminus B\left(0, \frac{1}{k}\right) \right] \right) \right\} = \\ &= \underbrace{\bigcap_{n,k \in \mathbb{N}} \left\{ K \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}) : \underbrace{K \cap B\left(0, \frac{1}{k}\right)^c \cap f_n^{-1}(\{0\})}_{\text{zárt}} = \emptyset \right\}}_{\text{nyílt}}. \end{aligned}$$

Lemma 2. $\mathcal{B}_2$ sűrű részhalmaza $\mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ -nek.

Ismét a 4.5-ös állítás miatt elegendő $\mathcal{F}$ elemeit megközelíteni. Rögzítsünk le egy tetszőleges $F \in \mathcal{F}$ csoportot és $\varepsilon > 0$ számot. Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$ és $\{1, \dots, N\} \supseteq \text{supp}(F)$. A 4.7-es tételnél látottakhoz hasonlóan, legyen $Z = \prod_{p \in P} (Z_p)^{\mathbb{N}}$. Ez egy torziócsoporthoz (4.8-as megjegyzés). Mivel Z KMA csoport, létezik egy

$$\varphi : Z \hookrightarrow \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_{N\text{-szer}} \times \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \dots$$

beágyazás. Amint már a 4.8-as megjegyzésben is láttuk, minden véges Abel-csoport előáll, mint Z faktora. Mivel Z és $\varphi(Z)$ izomorfak, létezik egy $\theta : \varphi(Z) \rightarrow F$ folytonos szürjektív homomorfizmus. Vegyük most a következő leképezést:

$$\Phi : F \times \varphi(Z) \rightarrow F \times F, \quad \Phi(f, x) := (f, \theta(x)).$$

(Precízebben, $F \times \varphi(Z)$ helyett azt a részcsoporthoz vesszük $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ -ben, amelyet F és $\varphi(Z)$ generálnak, akár csak a 4.9-es lemma bizonyításának végén. A jelölések egyszerűsítése végett az előbbi jelöléssel dolgozunk.) Világos, hogy Φ folytonos szürjektív homomorfizmus. Az $\tilde{F} = \{(f, f) : f \in F\} \leq F \times F$ diagonális részcsoporthoz tekintve kapjuk a $K := \Phi^{-1}(\tilde{F}) \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ csoportot. Azt állítjuk, hogy K torziómentes, és $d_H(K, F) < \varepsilon$.

Tegyük fel, hogy $(f, x) \in K \setminus \{(0, 0)\}$ (ahol $f \in F$ és $x \in \varphi(Z)$) és $n(f, x) = (nf, nx) = (0, 0)$ valamely $n \in \mathbb{N}$ -re. Mivel $x \in \varphi(Z)$, és $\varphi(Z)$ torziómentes, kapjuk, hogy $x = 0$. Másrészt $(f, x) \in K$ miatt $\theta(x) = f$, vagyis $f = 0$. Így K valóban torziómentes.

Vegyük észre, hogy $\pi_{[N]}(K) = \pi_{[N]}(F)$, tehát $d_H(F, K) < \varepsilon$. Ezzel a 2. lemma bizonyítását befejeztük. $\square$

4.11. Lemma. A generikus $K \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ totálisan összefüggéstelen.

Bizonyítás. Legyen

$$\mathcal{B}_3 := \{K \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}) : K \text{ totálisan összefüggéstelen}\}.$$

Azt kell megmutatni, hogy generikus $K \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ esetén $\{0\}$ az összefüggőségi komponens. Vegyük észre, hogy bármely $\varphi : K \rightarrow F$ véges Abel-csoportba menő folytonos

homomorfizmus esetén az egységelem összefüggőségi komponense része $\text{Ker } \varphi$ -nek. Legyen

$$\mathcal{B}'_3 := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{ K \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}) : \begin{array}{l} \text{létezik egy } F_n \text{ véges Abel-csoport és egy folytonos} \\ \varphi_n : K \rightarrow F_n \text{ homomorfizmus, melyre } \text{diam}(\text{Ker}(\varphi_n)) < \frac{1}{n} \end{array} \right\}}_{U_n}.$$

Mivel $\mathcal{B}'_3 \subseteq \mathcal{B}_3$, így elegendő megmutatni, hogy $\mathcal{B}'_3$ sűrű G_δ részhalmaza $\mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ -nek. A sűrűség azonnal adódik a 4.5-ös állításból, hiszen minden véges csoport eleme $\mathcal{B}'_3$ -nek.

Állítás. Az U_n halmazok nyíltak.

Vegyünk egy tetszőleges $K \in U_n$ halmazt. Rögzítsünk egy véges F_n Abel-csoportot és egy $\varphi_n : K \rightarrow F_n$ folytonos homomorfizmust, melyre $\text{diam}(\text{Ker}(\varphi_n)) < \frac{1}{n}$. A 4.9-es lemma 1-es allemájának bizonyításában látottakhoz hasonlóan, bármely $\varepsilon > 0$ esetén egy K -hoz elegendően közeli $L \in \mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ csoportot választva, φ_n indukál egy $\psi_n : L \rightarrow F_n$ folytonos homomorfizmust, melyre $\text{Ker}(\psi_n) \subseteq (\text{Ker}(\varphi_n))_\varepsilon$. Ekkor $\varepsilon := \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \text{diam}(\text{Ker}(\varphi_n)) \right)$ tanúsítja, hogy U_n nyílt. $\square$

4.4. MÉG NÉHÁNY SZÓ A MEGSZÁMLÁLHATÓ ABEL-CSOPORTOKRÓL

A 3.2-es szekcióban bevezettük a megszámlálhatóan végtelen Abel-csoportok $\mathcal{A}$ lengyel terét. Most egy másfajta megközelítést mutatunk be, és tárgyaljuk az $\mathcal{A}$ és az $\mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ térrel való kapcsolatát. Ahogy a 3.2-es szekcióban, itt sem használunk additív jelölést az $\mathcal{A}$ elemeiben.

4.12. Jelölés. Emlékeztetünk arra, hogy $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ a $\mathbb{Z}$ önmagával vett megszámlálhatóan végtelen direkt összege. Jelölje $\mathcal{A}'$ $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ részcsoporthainak halmazát a $2^{\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}}$ Cantor-térből örökölt altér topológiával ellátva.

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathcal{A}'$ zárt része $2^{\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}}$ -nak, következésképp $\mathcal{A}'$ lengyel. (v.ö. [9, 16-17. oldal].) Mivel minden megszámlálható Abel-csoport faktora $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ -nek, így $\mathcal{A}'$ segítségével definiálhatjuk, hogy mit értünk megszámlálható Abel-csoportok generikus tulajdonságán:

4.13. Definíció. Egy $\mathcal{P}$ csoporttulajdonság $\mathcal{A}'$ -**generikus**, ha

$$\{H \in \mathcal{A}' : \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}/H \text{ rendelkezik a } \mathcal{P} \text{ tulajdonsággal}\}$$

reziduális halmazt alkot $\mathcal{A}'$ -ben. (Ahol megszámlálható Abel-csoportok $\mathcal{P}$ csoporttulajdonsága alatt $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ faktorainak egy izomorfia-invariáns részhalmazát értjük.)

A következő tétel a [6, 14-es tétel] egy speciális esete.

4.14. Tétel (Fisher–Gartside). *Létezik kanonikus homeomorfizmus $\mathcal{A}'$ és $\mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ között.*

A bizonyítás vázlata.

4.15. Jelölés. Legyen H egy rögzített lokálisan kompakt Abel-csoport, továbbá legyen $\widehat{H}$ a Pontrjagin-duálisa. Legyen G zárt részcsoportha H -nak, ekkor G **annihilátorát** a következőképpen definiáljuk:

$$\text{Ann}(G) := \{\chi \in \widehat{H} : \forall a \in G (\chi(a) = 0)\}.$$

Vegyük észre, hogy $\text{Ann}(G)$ $\widehat{H}$ részcsoportha.

Mivel bármely G KMA csoport beágyazható a $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ -be, ezért G annihilátora a $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ egy részcsoportha, azaz $\text{Ann}(G) \in \mathcal{A}'$. Így a kanonikus leképezés, amely egyben homeomorfizmus is lesz $\mathcal{A}'$ és $\mathcal{S}(\mathbb{T}^{\mathbb{N}})$ között, maga Ann . $\square$

Jól ismert, hogy egy $G \leq \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ részcsoporth esetén a $\widehat{G}$ és $\widehat{\mathbb{T}^{\mathbb{N}}} / \text{Ann}(G)$ izomorf (lásd [18, 2.1.2.-es tétel]). Következésképp a $\bigoplus_{p \in P} \mathbb{Z}[p^{\infty}]^{(\mathbb{N})}$ csoporttal való izomorfia (amely a 4.7-es tételben szereplő Z duálisa) $\mathcal{A}'$ -generikus. Emlékezzünk vissza azonban, hogy ennek a csoportnak az izomorfiaosztálya $\mathcal{A}$ -ban is reziduális. Természetes kérdés, hogy van-e olyan egyszerű topológiai kapcsolat $\mathcal{A}$ és $\mathcal{A}'$ között, amely megmagyarázza ezt a jelenséget.

4.16. Jelölés. Bármely $x \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ esetén legyen

$$\text{supp}(x) := \{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}.$$

4.17. Jelölés. Legyen e_i a $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ következő eleme: $e_i(k) = 1$ ha $k = i$ és $e_i(k) = 0$ egyébként.

Megmutatjuk, hogy $\mathcal{A}$ természetesen beágyazható $\mathcal{A}'$ -ba. Vegyünk egy tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ elemet. Vegyük észre, hogy $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ elemei éppen a véges tartójú $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ függvények. Legyen

$$\Phi(A) := \left\{ x \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} : \prod_{n \in \mathbb{N}} n^{x(n)} = 1 \text{ holds in } \tilde{A} \right\}.$$

Világos, hogy $\Phi(A)$ $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ részcsoportha, tehát $\Phi(A) \in \mathcal{A}'$.

4.18. Állítás. $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ beágyazás.

Bizonyítás. Injektivitás. Vegyünk $A, B \in \mathcal{A}$ különböző elemeket. Az eredeti jelölésekkel élve (melyket 3.1-es szekcióban vezettünk be) ez azt jelenti, hogy léteznek $k, l, m \in \mathbb{N}$, melyekre $m = A(k, l) \neq B(k, l)$. Ekkor Φ definíciója miatt $e_k + e_l - e_m \in \Phi(A)$ és $e_k + e_l - e_m \notin \Phi(B)$.

Folytonosság és nyílt leképezés. Vegyük a következő alakú halmazokat:

$$U_x = \{A' \in \mathcal{A}' : x \in A'\} \quad \text{and} \quad V_x = \{A' \in \mathcal{A}' : x \notin A'\},$$

ahol $x \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$. Ezek $\mathcal{A}'$ egy szubbázisát alkotják. Ismét Φ definívióját használva kapjuk, hogy

$$\Phi^{-1}(U_x) = \left\{ A \in \mathcal{A} : \prod_{n \in \mathbb{N}} n^{x(n)} = 1 \text{ in } \tilde{A} \right\},$$

és

$$\Phi^{-1}(V_x) = \left\{ A \in \mathcal{A} : \prod_{n \in \mathbb{N}} n^{x(n)} \neq 1 \text{ in } \tilde{A} \right\}.$$

A 3.4 tétel szerint ezek a halmazok nyíltak, tehát Φ folytonos. Ismét a 3.4 tétel szerint a $\{\Phi^{-1}(U_x) : x \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}\}$ halmaz $\mathcal{A}$ szubbázisa. Így $\Phi(\Phi^{-1}(U_x)) = U_x \cap \Phi(\mathcal{A})$ és Φ injektivitása azt mutatja, hogy Φ nyílt (természetesen megszorítva az értékkészletére).

□

4.19. Állítás. $\Phi(\mathcal{A})$ sehol sem sűrű $\mathcal{A}'$ -ben.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $e_i \notin A'$ ha $i \geq 2$ és $A' \in \Phi(\mathcal{A})$, következésképp $\Phi(\mathcal{A}) \subset \bigcap_{i=2}^{\infty} V_{e_i}$. Elegendő tehát belátni, hogy $\bigcup_{i=2}^{\infty} U_{e_i}$ sűrű $\mathcal{A}'$ -ben. Vegyünk egy tetszőleges nemüres nyíltzárt $U := U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_n} \cap V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_k}$ halmazt $\mathcal{A}'$ -ben. Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, melyre $N \notin (\bigcup_{i=1}^n \text{supp}(x_i)) \cup (\bigcup_{j=1}^k \text{supp}(y_j)) \cup \{1\}$. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy $U \cap U_{e_N} \neq \emptyset$. □

Összegzés. A két megközelítés ($\mathcal{A}$ és $\mathcal{A}'$) ugyanazt a reziduális izomorfiaosztályt adja: a $\bigoplus_{p \in P} \mathbb{Z}[p^{\infty}]^{(\mathbb{N})}$ osztályát. Bár létezik egy $\Phi : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}'$ természetes beágyazás, ez nem magyarázza az egybeesést, mivel $\Phi(\mathcal{A})$ sehol sem sűrű $\mathcal{A}'$ -ben.

5. KOMPAKT METRIZÁLHATÓ CSOPORTOK

Ebben a szekcióban a kompakt metrizálható csoportokkal kapcsolatos eredményeinket mutatjuk be. Kevésbé tiszta képet látunk, mint az Abel esetben: mind összefüggőség, mind torzió tekintetében a generikus csoport heterogén viselkedést mutat.

5.1. A KOMPAKT METRIZÁLHATÓ CSOPORTOK TERE

Jól ismert, hogy minden kompakt csoport beágyazható egy $\prod_{j \in J} U(n_j)$ direkt szorzatba, ahol $U(n_j)$ unitér csoportot jelöl, [13, 2.29. Következmény]. Ez azon múlik, hogy a kompakt csoportok esetén az unitér reprezentációk szeparálják a pontokat. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha G metrizálható, akkor már megszámlálható sok reprezentációja is szeparálja a pontjait, ezért minden kompakt metrizálható csoport beágyazható megszámlálható sok unitér csoport direkt szorzatába.

Figyeljük meg továbbá, hogy $U(n)$ beágyazható az $SU(k)$ speciális unitér csoportba, ha $k > n$. Tehát valójában minden kompakt metrizálható csoport beágyazható a $\mathbb{S}\mathbb{U} := \prod_{n=1}^{\infty} SU(n)$ csoportba.

Legyen most minden $n \in \mathbb{N}$ -re d_n egy olyan biinvariáns metrika $SU(n)$ -en, amelyre $d_n \leq 1$. Az $\mathbb{S}\mathbb{U}$ téren a $d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x(n), y(n))$ metrikát fogjuk használni. Az $\mathcal{S}(SU(n))$ téren a d_n által indukált $d_{n,H}$ Hausdorff-metrikát fogjuk használni, az $\mathcal{S}(\mathbb{S}\mathbb{U})$ téren pedig a d által indukált d_H Hausdorff-metrikát.

Világos, hogy $\mathbb{S}\mathbb{U}$ -nak minden zárt részcsoportha egy kompakt metrizálható csoport. Tehát a $(\mathcal{S}(\mathbb{S}\mathbb{U}), d_H)$ teret tekinthetjük a **kompakt metrizálható csoportok terének**.

5.1. Észrevétel. Legyen $G \in \mathcal{S}(\mathbb{S}\mathbb{U})$ és $G_n \in \mathcal{S}(\mathbb{S}\mathbb{U})$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re. Figyeljük meg, hogy ha $\pi_{[n]}(G_n) = \pi_{[n]}(G)$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ -re, akkor $G_n \xrightarrow{d_H} G$.

5.2. Az $SU(n)$ CSOPORT KÖZELÍTÉSE

Ebben a szekcióban bizonyítás nélkül közöljük az eredményeinket

5.2. Lemma. *Az $SU(n)$ csoportot nem lehet saját valódi zárt részcsoportjaival közelíteni. Más-képp fogalmazva: az $SU(n)$ csoport izolált pontja az $\mathcal{S}(SU(n))$ térnek.*

Bár számunkra most a 5.2. Lemma elégséges, természetesen adódnak a következő kérdések:

5.3. Kérdés. Mely kompakt Lie-csoportok közelíthetők valódi zárt részcsoportjaikkal Haudorff-metrikában?

Vagy még általánosabban:

5.4. Kérdés. Legyen G egy Lie-csoport. Mely kompakt K részcsoportjait lehet közelíteni K -hoz nem konjugált kompakt részcsoportokkal? (Könnyű meggondolni, hogy ha G egy kompakt összefüggő Lie-csoport, akkor minden nem normálosztó kompakt részcsoportja közelíthető a saját konjugáltjaival.)

5.5. Megjegyzés. A 5.4. Kérdés a közelmúltban megválaszolásra került, lásd [2].

5.3. GENERIKUS TOPOLÓGIAI TULAJDONSÁGOK

Használni fogjuk a következő jól ismert tételeket.

5.6. Tétel. [10, II. fejezet, B.5. Feladat] *Minden Lie-csoport rendelkezik az úgy nevezett "no small subcsoporth" tulajdonsággal. Avagy, ha G egy Lie-csoport, akkor létezik az egységelemnek egy U környezete, hogy az nem tartalmaz nemtriviális részcsoportot.*

5.7. Tétel. [13, 1.34. Tétel] *Egy lokálisan kompakt G csoportra a következő állítások ekvivalensek:*

(1) *A csoport G totálisan összefüggéstelen.*

(2) *G egységeleme rendelkezik kompakt-nyílt részcsoportokból álló környezetbázissal.*

Ezen eredményeket felhasználva sikerült belátni a most következő lemmákat és tételeket.

5.8. Lemma. *Ha $G \in \mathcal{S}(\mathbb{S}\mathbb{U})$ totálisan összefüggéstelen, akkor $\pi_n(G)$ véges csoport minden $n \in \mathbb{N}$ -re.*

5.9. Tétel. *Generikus $G \in \mathcal{S}(\mathbb{S}\mathbb{U})$ -ra végtelen sok $n \in \mathbb{N}$ esetén a vetület teljes, azaz $\pi_n(G) = SU(n)$.*

5.10. Következmény. *A totálisan összefüggéstelen csoportok egy első kategóriájú halmazt alkotnak $\mathcal{S}(\mathbb{S}\mathbb{U})$ -ban.*

Az előző következménynél azonban több is igaz, nevezetesen:

5.11. Tétel. *A totálisan összefüggéstelen csoportok sehol sem sűrű halmazt alkotnak $\mathcal{S}(\mathbb{S}\mathbb{U})$ -ban.*

Egy másik következménye a 5.9-es tételnek:

5.12. Következmény. *Generikus $G \in \mathcal{S}(\mathbb{S}\mathbb{U})$ -ra G° nemtriviális.*

Egy természetes kérdés topologikus csoportok esetén, hogy megértsük a G/G° csoportot mind algebrailag és topológialag. Ez utóbbira válaszol a következő tétel:

5.13. Tétel. *Generikus $G \in \mathcal{S}(\mathbb{S}\mathbb{U})$ -re a faktorcsoport G/G° homeomorf a Cantor halmazzal.*

5.14. Megjegyzés. Felhasználva a 5.12-es következményt, valamint a 5.13-as tételt, azonnal láthatjuk, hogy a generikus $G \in \mathcal{S}(\mathbb{S}\mathbb{U})$ nem egyszerű.

5.15. Következmény. *Generikus $G \in \mathcal{S}(\mathbb{S}\mathbb{U})$ esetén a csoport homeomorf $G^\circ \times C$ -vel, ahol C a Cantor halmazt jelöli.*

Bizonyítás. Használjuk [13, 10.38. Következmény]-t, ami azt mondja ki, hogy minden kompakt G csoport esetén $G^\circ \times (G/G^\circ)$ homeomorf G -hez, így a következmény állítása azonnal következik a 5.13-as tételből. $\square$

Végezetül az alábbi eredménnyel zárjuk ezt a szekciót:

5.16. Tétel. *Generikus $G \in \mathcal{S}(\mathbb{S}\mathbb{U})$ -re az egységelem összefüggőségi komponense G° nem Lie csoport.*

Összefoglalva korábbi eredményeinket egy tételben az alábbiakat mondhatjuk:

5.17. Tétel. *Generikus $G \in \mathcal{S}(\mathbb{S}\mathbb{U})$ homeomorf $G^\circ \times C$ -vel, ahol C a Cantor halmazt jelöli és G° nemtriviális összefüggő csoport, de nem Lie-csoport.*

6. KÉRDÉSEK

A 4.13-as definíció általánosításaként bevezethetjük megszámlálható Abel-csoportok körében a következő definíciót. Jelölje F_∞ a megszámlálhatóan végtelen sok elem által generált szabad csoportot. Könnyen igazolható, hogy az $\mathcal{N} := \{A \subseteq F_\infty : A \triangleleft F_\infty\}$ részhalmaz zárt 2^{F_∞} -ben. Akkor mondjuk, hogy egy csoporttulajdonság $\mathcal{N}$ -generikus, ha a következő $\{N \in \mathcal{N} : F_\infty/N \text{ rendelkezik a } \mathcal{P} \text{ tulajdonsággal}\}$ halmaz reziduális $\mathcal{N}$ -ben.

6.1. Probléma. Érdekes lenne tanulmányozni az $\mathcal{N}$ -generikusságot, és feltárni a kapcsolatát a 3-as szakasz eredményeivel.

Az Abel esetre vonatkozó részeredményeket a 4.4-es szekcióban közöljük. A fent leírt generikusságfogalmat mások is bevezették (lásd: [17] és [9, 16 oldal].)

Bár vannak eredményeink a generikus kompakt metrizálható csoport szerkezetére vonatkozóan, sok alapvető kérdés nyitva maradt.

6.2. Kérdés. Van-e $\mathcal{S}(\mathbb{S}\mathbb{U})$ -nek tipikus izomorfiaosztálya?

Olyan problémákat is javasolunk, amelyek hozzáférhetőbbnek tűnnek.

6.3. Probléma. Írjuk le G° -t homeomorfizmus erejéig a reziduális $G \in \mathcal{S}(\mathbb{S}\mathbb{U})$ -re, ha lehetséges.

6.4. Kérdés. Mit mondhatunk $\mathcal{S}(\mathbb{S}\mathbb{U})$ generikus algebrai tulajdonságairól?

HIVATKOZÁSOK

- [1] AKIN, E., HURLEY, M., AND KENNEDY, J. A. Dynamics of topologically generic homeomorphisms. *Memoirs of the American Mathematical Society* 164, 783 (2003).
- [2] CSIKÓS, B., KÁTAY, T., KOCSIS, A., AND PÁLFY, M. Compact Lie groups isolated up to conjugacy. *arXiv:2209.15389* (2022).
- [3] DOUCHA, M., AND MALICKI, M. Generic representations of countable groups. *Transactions of the American Mathematical Society* 372, 11 (2017), 8249–8277.
- [4] ELEKES, M., GEHÉR, B., KANALAS, K., KÁTAY, T., AND KELETI, T. Generic countably infinite groups. *arXiv:2110.15902* (2021).
- [5] ELEKES, M., GEHÉR, B., KÁTAY, T., KELETI, T., KOCSIS, A., AND PÁLFY, M. Generic properties of topological groups. *arXiv preprint arXiv:2210.03034* (2022).
- [6] FISHER, S., AND GARTSIDE, P. M. On the space of subgroups of a compact group I. *Topology and its applications* 156, 5 (2009), 862–871.
- [7] FISHER, S., AND GARTSIDE, P. M. On the space of subgroups of a compact group II. *Topology and its applications* 156, 5 (2009), 855–861.
- [8] FUCHS, L. *Abelian Groups*. Springer, Switzerland, 2015.
- [9] GOLDBRING, I., LODHA, Y., AND KUNNAWALKAM, S. E. Generic algebraic properties in spaces of enumerated groups. *arXiv:2006.14048 [v4]* (2021).
- [10] HELGASON, S. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Academic Press, New York, 1978.
- [11] HEWITT, E., AND ROSS, K. A. *Abstract Harmonic Analysis*, vol. 1. Springer, Berlin, 1997.
- [12] HOFMANN, K. H., AND MORRIS, S. A. Open mapping theorem for topological groups, 2009.
- [13] HOFMANN, K. H., AND MORRIS, S. A. *The structure of compact groups*. de Gruyter, 2020.
- [14] KECHRIS, A. S. *Classical descriptive set theory*. Springer, New York, 2012.
- [15] KECHRIS, A. S., AND ROSENDAL, C. Turbulence, amalgamation, and generic automorphisms of homogeneous structures. *Proceedings of the London Mathematical Society* 94, 2 (2007), 302–350.
- [16] MORRIS, S. A. *Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1977.
- [17] OSIN, D. A topological zero-one law and elementary equivalence of finitely generated groups. *Annals of Pure and Applied Logic* 172, 3 (2021).
- [18] RUDIN, W. *Fourier Analysis on Groups*. Interscience Publishers, Netherlands, 1962.
- [19] SCHMIDT, W. M. *Diophantine Approximation*. Springer, Berlin, 1980.

EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITY, INSTITUTE OF MATHEMATICS, PÁZMÁNY P. SÉTÁNY 1/C, 1117 BUDAPEST, HUNGARY

Email address: sakkboszi@gmail.com