

TDK-dolgozat

Szerző: Mészáros Botond

Fogadó felsőoktatási intézet és tanszék:
ELTE-IK Komputeralgebra Tanszék

*Nemlineáris leképezések diagramjainak
kiegészítése és alkalmazása*

Szerző: *Mészáros Botond,*
ELTE-TTK Matematika MSc. 1. év

Témavezető: *Dr. Burcsi Péter,*
ELTE-IK Komputeralgebra Tanszék, docens

Dolgozat elkészültének ideje: 2023.05.18.

Tartalomjegyzék

Absztrakt	1
1. Bevezetes	2
1.1. Kommutatív diagramok és kiegészítései	3
1.2. A dolgozat fő eredményeinek összefoglalása	5
2. Pontozott Euklideszi terek közötti leképezésdiagramok kiegészítése	6
2.1. Euklideszi terek közötti leképezések Jet-ei	6
2.2. Pontozott Euklideszi terek közötti leképezési diagramok kiegészítése	8
3. Euklideszi terekbe ágyazható differenciálható sokaságok	13
3.1. Topologikus terek, topologikus és differenciálható sokaságok	13
3.2. A feladat megoldása Euklideszi térbe beágyazható differenciálható sokaságokra .	21
4. A módszer következményei, lehetséges alkalmazásai	26
4.1. Nemlineáris leképezések pszeudoinvertálása	26
4.2. Modellek invariáns transzformációinak keresése	30
4.3. Egzakt sorok szerepe	32
Összefoglalás	32
Köszönet	33
Hivatkozások	34

Absztrakt

Az elmúlt 4 évben azon dolgoztam, hogy megértsem, miként lehet összetett feladatokra optimális megoldásokat találni. A kérdés fontosságát alátámasztja, hogy napjaink modellezési feladatainak egyik fő kihívása megtalálni az egyensúlyt a kifinomult, rendkívüli általánosítási képességekkel rendelkező nemlineáris módszerek és a rendelkezésre álló korlátos számítási idő és kapacitás között.

Jelen dolgozatomban azt vizsgáltam, miként lehet adott feladatokra adott megoldásokból ezekkel ekvivalens, de számítási szempontból talán optimálisabb egyéb megoldásokat találni, ha a feladatot modellezni lehet lokálisan Euklideszi terekben végzett műveletek sorozatával. Ehhez kommutatív leképezési diagramok kiegészítésének lehetőségét vizsgáltam, különösen nagy hangsúlyt fektetve arra, hogy a kiegészítés létezésének bizonyítása konstruktív legyen. Így nem csak megoldások létezésének feltételeit tudtam belátni, de a megoldás megkonstruálására is eljárást adtam. Kitértem a megoldások létezése mellett azok egyértelműségének kérdésére is, illetve vizsgáltam különböző megoldások *superponálhatóságát* abban az értelemben, hogy meg lehet adni olyan kiterjesztést, amely a megadott sokaságok azon részein, ahol a kiterjesztés elvégezhető, megegyezik a lokális kiterjesztésekkel.

A dolgozat második felében vizsgáltam a módszer felhasználásának lehetőségét. Bevezettem egy új típusú, gyengébb nemlineáris pszeudoinverz fogalmat, mely speciális esetben visszaadja a megszokott általánosított inverzet, ugyanakkor elég sok esetben analitikusan is megkonstruálható ahhoz, hogy egy általánosított pszeudoinverzre következtetni lehessen belőle. Emellett kitértem arra a kérdésre, hogy miként kapcsolódik a dolgozat tartalma modellek invariáns transzformációinak kereséséhez, és az ilyen invariáns transzformációk meglétét hogyan láthatjuk előre az egyes leképezési diagramokhoz rendelt adott rendű Jet-diagramokban megjelenő egzakt sorokból.

Az elért eredmények újszerűek, a lehetséges felhasználások tanulmányozása új eszközöket jelenthet olyan összetett modellek mélyebb megértésében, melyek nemlinearitásukból kifolyólag csak nehezen vizsgálhatóak, kezelhetőek. Reményeim szerint a keretrendszer a jövőben alkalmazást nyerhet összetett modellek analitikus és numerikus tanulmányozásában.

1. Bevezetes

A megválaszolatlan kérdések idejét éljük. Napjaink tudományos, társadalmi, pénzügyi kihívásai egyre bonyolultabb feladatok megoldására kényszerítenek bennünket. A modern ember természeti és társadalmi aktivitásaiból fakadóan minden valószínűség szerint hosszú idő óta először kell olyan drasztikus átalakulásokkal szembenézzünk, melyek eddig nem létező problémák tömegeit hozzák magukkal. Az újonnan azonosított kihívások és veszélyek megértése és leírása még várat magára, miközben az új technológiai megoldások (gondoljunk csak a *harmadik kvantumforradalomra*), a gazdasági növekedéshez szükséges folytonos fejlődés, az eddig megközelíthetetlennek hitt, ámde megoldást sürgető problémák arra ösztönöznek, hogy a már létező megoldásainkat is felülvizsgáljuk.

Ugyanakkor, egyben a megválaszolható kérdések idejét is éljük: 21. században rendelkezésünkre álló numerikus számításokat lehetővé tevő felszerelések, magas szintű matematikai absztrakció és különböző tudományos keretrendszerek jó alapot biztosítanak ahhoz, hogy legalább a legégetőbb kérdésekre időben megfelelő megoldást találjuk. Rengeteg problémát és arra adható megoldást ismerünk, melyeket fel tudunk használni még összetettebb feladatok hatékony megoldásához.

A legegyszerűbb problémák megoldásától kezdve a legösszetettebbekig gyakran jelentős segítséget jelent, ha adott problémákról struktúráltan próbálunk gondolkodni. Ehhez sok szempontból természetes lehetőséget teremt, ha adott feladatot matematikailag próbálunk modellezni. Gyakran a valós feladatok meghatározó paramétereit leképezzük egy adott struktúrával rendelkező absztrakt térbe, azokon transzformációkat végzünk, melyek eredményeit új, más struktúrával rendelkező terek paramétereinek feleltetjük meg, és a folyamatot ismétljük, ameddig el nem érünk a feladat közvetlen megoldásához vagy pedig egy már másik, ismert megoldású feladattal ekvivalens problémára sikerül visszavezetnünk a kérdést. Ilyen értelemben, a kérdések megválaszolásában két fő módszerünk van: egyrészt, megpróbálhatjuk közvetlenül megoldani a feladatot, ami egyszerű feladat esetében magas hatásfokkal elvégezhető. Ugyanakkor, az egyszerű feladatok megoldásait összegyűjthetjük és használhatjuk arra, hogy összetettebb, kevésbé egyértelmű megoldással rendelkező feladatok megoldásait ezekből megalkossuk. Ameddig jellemzően egyszerű feladatokkal foglalkozunk, az utóbbi stratégia többnyire jelentéktelen, ám, amint egyre bonyolultabb problémákat kell megoldanunk, a deduktív módszer válik praktikusnak is alkalmazhatóvá.

Olyan kérdések esetében, melyek jellemző, releváns paramétereinek száma *nagy*, érdemes kvantitatív módszerekhez fordulni még kvalitatív megállapítások megtételéhez is. Ehhez jelent nagy segítséget a számítógépek megnövekedett számítási képessége, ugyanakkor emiatt feladatainkat át kell fogalmaznunk olyan formában, mely már numerikusan vizsgálható. Így összetett (megoldását tekintve elemi lépések hosszú sorozatából álló, leírását tekintve nagyszámú paramétert igénylő) feladatok megoldása során a leggyakrabban matematikai modellezést kell alkalmaznunk. Az alkalmazható matematikai eszközök és módszerek széles skálája adott, és sokszor adott feladatra több, nem nyilvánvaló megoldás is létezik. Az azonban, hogy ugyanazon feladat közös és eredmény szempontjából azonos megoldását adják, nagyon hasznos ismereteket

jelent a feladatot tekintve. Ugyanis, amikor már rendelkezünk néhány különböző megoldással, relevánssá válik annak a kérdésnek az eldöntése, hogy ezekből tudunk-e új megoldásokat kreálni, még ha csak az eredeti feladat megszorításaira is. Ez azért fontos, mert ha célunk, hogy megtaláljuk a valamilyen szempontrendszer alapján legoptimálisabb megoldást, fontos feladatunk az további következtetések levonása és az alternatív lehetőségek felderítése. Egyrészt, ha adott megoldásokból nem lehet további megoldásokra következtetni, racionális a meglévő megoldások közül kiválasztani az optimálisat. Azonban, ha adott megoldások halmazából kiindulva meg tudunk kreálni más megoldásokat, érdemes lehet előbb elkészíteni ezek legnagyobb olyan halmazát, melyek még egymással eredményszolgáltatás szempontjából (legalábbis elviekben) ekvivalensek, majd azok között megkeresni az optimálisat.

A következő alfejezetek lehetőséget teremtenek arra, hogy a fentiekben felvázolt elképzeléseket formálisan leírjuk, és értelmezzük, mit jelent *meglévő megoldásokból új megoldásokat alkotni*. A dolgozat egyik fő célja megválaszolni azt a kérdést, hogy az ily' módon formalizált módszerek milyen feltételek mellett valósíthatóak meg, ha a modellezés során (lokálisan) Euklideszi terekben akarjuk reprezentálni a vizsgált feladat lényeges paramétereit, és ezek közötti leképezések sorozataként értelmezzük a feladat megoldását.

1.1. Kommutatív diagramok és kiegészítései

Amikor arról beszélünk, hogy egy problémára adott megoldást terek közötti leképezések sorozatával azonosítunk, anélkül, hogy nagy általánosságban specifikálni szeretnénk azokat a konkrét tereket, amelyben a rendelkezésre álló feladat paramétereit reprezentálni szeretnénk¹, hasznos, ha reprezentálni tudjuk a *valamilyen struktúrájú tér* fogalmát. Az a tény, hogy összetett feladat egy megoldását adott struktúrával rendelkező terek közötti leképezések sorozataként érdemes értelmezni, önmagában talán nem indokolná a kategória fogalmának bevezetését (kategóriaelméletről remek összefoglalót ad [1], [2], [3]). Ahhoz viszont, hogy le tudjam írni, mit értek az alatt, amikor megpróbálunk már meglévő megoldásokat felhasználni új, helyes megoldások megkonstruálására, szükségesnek és helyesnek éreztem a kategória fogalmának bevezetését. Ez részben hozzásegít a (kommutatív) leképezési diagramok fogalmának természetes bevezetéséhez, másrészt segít kommutatív leképezési diagram kiegészítésének természetes definiálásában.

Ennek az alfejezetnek tehát a fő célja definiálni a (kommutatív) leképezési diagram fogalmát és annak kiegészítését. Azonban, a dolgozat további részében egyszerűsíteni fogok a formalizmuson annak érdekében, hogy az általam elért eredmények absztrakciójuknak megfelelően, semmiképp sem az indokoltnál látszólag bonyolultabb módon kerüljenek prezentálásra.

1. Definíció. [Kategória]

A C kategória a következők összessége:

1. Az objektumok $ob(C)$ osztálya;

¹Gyakran ez a helyzet: ha előre tudnánk, milyen terekben *érdemes* reprezentálni a megoldás lépéseit, messze nem lenne ekkora kihívás megoldani adott feladatokat, nyitott kérdéseket. Emellett, el is várható, hogy ha létező megoldásoknál hatékonyabb megoldásokat keresünk, ne korlátozzuk le magunk a kezdetektől fogva valamilyen (majdhogynem) véletlenszerűen választott struktúra mellett (noha végül, a numerikus számítások elvégzése végett érdemes lokálisan Euklideszi terekkel megfogalmazni a megoldást).

2. A morfizmusok $\text{Hom}(A, B)$ halmaza minden (A, B) objektumpárhoz;
3. Minden A, B, C objektumhármassal mellett egy $\text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$ kompozíciós művelet, mely minden $\forall f \in \text{Hom}(A, B), g \in \text{Hom}(B, C)$ leképezéspárhoz a gf leképezést rendeli,

amelyek kielégítik a következő axiómákat:

- (a) Minden A, B objektum mellett, minden $f \in \text{Hom}(A, B)$ morfizmusnak létezik egy egyértelmű forrásobjektuma, nevezetesen $\text{dom} f = A$, és egy egyértelmű célobjektuma, nevezetesen $\text{targ} f = B$;
- (b) Minden A, B objektum mellett léteznek az $\text{id}_A \in \text{Hom}(A, A)$ és $\text{id}_B \in \text{Hom}(B, B)$ identitásmorfizmusok, úgy, hogy minden $f \in \text{Hom}(A, B)$ leképezésre $f \text{id}_A = \text{id}_B f = f$ teljesül;
- (c) A kompozíciós művelet asszociatív.

2. Definíció. [Leképezési diagramok]

Leképezési diagram alatt egy olyan irányított $\mathcal{D} = (V, E)$ gráfot értünk, melynek csúcsai egy adott kategória objektumai, az irányított élek pedig rögzített morfizmusok.

Megjegyzés. Fontos megjegyezni, hogy minden leképezési diagramok bizonyos értelemben algoritmusokat kódol az adott csúcsok közötti irányított utak révén. A leképezési diagramok alkalmazásának egy előnye, hogy nem kell feltétlenül specifikálni a megjelenő tereket (ez lényegesen növeli az eképp kapott megoldások általánosítási képességét), elég csak a kategóriát megadni, amelyben szerepelnek. A dolgozatomból szempontjából a kommutatív leképezési diagramok játszanak fontos szerepet.

3. Definíció. [Kommutatív diagramok]

Egy olyan $\mathcal{K}$ leképezési diagramot, melyben minden azonos kezdő- és végponttal rendelkező irányított út menti leképezéssorozat kompozíciója azonos eredményt ad, kommutatív leképezési diagramnak vagy egyszerűen kommutatív diagramnak nevezünk.

Megjegyzés. Ha egy kommutatív leképezési diagramban két csúcspontot két különböző irányított út is összeköt, akkor ezek értelmezhetők, mint egy adott feladat (aminek a bemenete leképezhető a kiinduló csúcspont terébe, kimenete pedig a második csúcspont által reprezentált térbe) két különböző megoldásának megvalósításai.

Megjegyzés. A kommutatív leképezési diagramok egyik legnagyobb jelentősége számítási szempontból, hogy azt fejezik ki, miképp lehet *ugyanazt* a feladatot több módszerrel is megoldani. Ha adott egy kommutatív leképezési diagram, és sikerül abban egy új élt elhelyeznünk úgy, hogy az így kapott, kiegészített diagram továbbra is kommutatív, akkor sikerült (legalább egy) feladatra alternatív megoldást találni. Noha a szolgáltatott eredmény szempontjából minden ilyen leképezéssorozat ekvivalens, az egyes alkotó leképezések implementálhatósága, memória- és időkomplexitása, analitikus és/vagy numerikus kezelhetősége jelentősen változhat.

4. Definíció. [Kommutatív diagram kiegészítése]

A $\mathcal{K} = (V, E)$ kommutatív diagram kiegészítése alatt olyan $\mathcal{K}' = (V', E')$ kommutatív diagramot értünk, melynek csúcsai és élei is tartalmazzák az eredeti diagram csúcsait és éleit: $V \subseteq V'$, $E \subseteq E'$.

Ha tehát adott egy feladat, amit meg kell oldanom, az matematikailag egy $\mathcal{K}$ kommutatív leképezési diagram előállításaként képzelhető el². Ha ismerek néhány megoldást a feladatra, és abból szeretnék új megoldásokat generálni, az a $\mathcal{K}$ diagram egy $\mathcal{K}'$ kiegészítésének felel meg.

1.2. A dolgozat fő eredményeinek összefoglalása

Jelen dolgozat fő célja módszert mutatni arra, hogy lokálisan Euklideszi terekkel modellezet problémák megoldását hogyan lehet kommutatív leképezési diagramok kiegészítésének kérdésére visszavezetni. A dolgozat ezen, első fejezetében egy rövid bevezetőt adtam a vizsgált probléma keretbe helyezése érdekében, rávilágítva arra, mennyire természetes a probléma ilyen megfogalmazása.

A dolgozat második fejezete főképp bevezető és emlékeztető jellegű. Röviden összefoglalom előző éves TDK munkám eredményeit, melyekre e munkában építék. Előbb felelevenítem az Euklideszi terek közötti leképezések Jet-einek definícióját, majd összegzem az Euklideszi terek között kommutatív leképezési diagramok kiegészíthetőségéről szóló tételeket. Külön kitérek a megoldás konvergenciájára és hibát becslök, illetve megmutatom, hogy sima leképezések esetén a feladat egzaktul megoldható. Röviden kitérek a módszer alkalmazásainak számítási szempontból előnyös voltára, illetve arra az esetre, ha a megjelenő leképezéseket közbülső terek beiktatásával simának tekinthetem.

A dolgozat harmadik fejezete már az idei munkám egy jelentős részét foglalja össze. A tavalyi munkám általánosítása található arra az esetre, ha Euklideszi terekbe ágyazható sokaságok közötti megoldásokat vizsgálunk. Külön tárgyalom a csak véges rendben differenciálható és a sima leképezések esetét. Kitérek a megkonstruált megoldások létezésének és egyértelműségének kérdésére. Megmutatom, hogy noha lokális analízisbeli eszközöket használok fel, az eredményeket a sokaságok és a leképezések globálisan is meghatározzák, és a megadott sokaságok azon részein, ahol a kiterjesztés elvégezhető, szuperponálni lehet a megfelelő megoldásokat.

A dolgozat negyedik fejezetében röviden kitérek a megoldás felhasználásainak kérdéseire. A nyilvánvaló felhasználások mellett (adott feladatra ismert megoldások mellett a lehető legtöbb ekvivalens megoldás megkonstruálása után kiválaszthatjuk az optimálisat), mint kiderül, a dolgozatban szereplő megoldások alternatív módszert adhatnak egyes nemlineáris leképezések pszeudoinverzeinek megtalálásához. Emellett, kitérünk arra, miként dönthetjük el a vázolt módszerekkel, ha egy modell invariáns a bemenetei bizonyos transzformációira, és ilyen invariáns transzformációk meglétét hogyan láthatjuk előre az egyes leképezési diagramokhoz rendelt adott rendű Jet-diagramokban megjelenő egzakt sorokkal.

Végezetül, a dolgozat eredményeit összefoglalom és köszönetet mondok azoknak a személyeknek, közösségeknek és szervezeteknek, akik támogattak e munkámban.

²Az a leképezési diagram, mely egyetlen megoldást valósít meg, mindig tekinthető kommutatívnak

2. Pontozott Euklideszi terek közötti leképezésvdiagrammok kiegészítése

Amikor egy, számítógépen is futtatható algoritmust tervezünk egy feladat megoldására, érdemes törekedni arra, hogy a feladat paramétereit végső soron (lokálisan) Euklideszi terekben reprezentáljuk, esetleg valamilyen többletstruktúrával. Emiatt ennek a fejezetnek a célja pontos konstrukciót adni arra, hogy az 1-es leképezési diagram mikor egészíthető ki egy γ leképezéssel kommutatív diagrammá, ha a leképezések pontozott Euklideszi terek között értelmezettek.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N} & \xrightarrow{\Gamma \in \mathcal{C}^k} & \mathcal{P} \\ \downarrow \phi \in \mathcal{C}^k & & \downarrow \psi \in \mathcal{C}^k \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\gamma \in \mathcal{C}^k} & \mathcal{Q} \end{array}$$

1. ábra. Sima sokaságok közötti leképezési diagram
kiegészítése kommutatív diagrammá

2.1. Euklideszi terek közötti leképezések Jet-ei

E fejezet célja $\mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \ni f$ leképezések adott $\mathbb{R}^n \ni p$ pontban értelmezett Jet-einek bevezetése. Azon túl, hogy a Jet-ek az Euklideszi terek gazdag belső struktúrájából fakadó számos izomorfizmus eredményeként összemosott koncepció fogalmi szétválasztására alkalmasak, a későbbiekben világosabb tárgyalást tesznek majd lehetővé előző éves eredményeim prezentálása szempontjából.

5. Definíció. $[\mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)]$ vektortér $\{0, \dots, k\} \ni r$ -ed rendű $\mathbb{R}^n \ni p$ -beli Jet-tere]

Legyen $p \in \mathbb{R}^n$ és $\mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a p pontban $k \in \mathbb{N}$ rendben folytonosan differenciálható függvények vektortere. Vezessük be az $\sim_p^r \subseteq \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $r \in \{0, \dots, k\}$ ekvivalenciarelációt, melyre $f \sim_p^r g \iff f^{(i)}(p) = g^{(i)}(p) \forall i \in \{0, \dots, r\}$. A $\mathcal{J}_p^{k,r}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) / \sim_p^r$ faktorteret a $\mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vektortér $\mathbb{R}^n \ni p$ -beli $\{0, \dots, k\} \ni r$ -ed rendű Jet-terének nevezzük. Ha $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$, akkor az egyszerűbb $\mathcal{J}_p^{k,r}(\mathbb{R}^n)$ jelölést használjuk, illetve, ha $r = k$, akkor a jelölésből elhagyjuk a második k -t: $\mathcal{J}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

6. Definíció. $[f \in \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)]$ leképezés $\mathbb{R}^n \ni p$ -beli $\{0, \dots, k\} \ni r$ -ed rendű Jet-jel]

A $J_p^{k,r} : \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{J}_p^{k,r}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $J_p^{k,r} f := J_p^{k,r}(f) = [f]_{\sim_p^r}$ leképezést az $f \in \mathcal{C}_p^k$ függvény p -beli r -ed rendű Jet-jének nevezzük. Ha $r = k$, akkor a jelölésből elhagyjuk a második k -t: J_p^k .

Megjegyzés. A $\mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ sima, illetve $\mathcal{C}_p^\omega(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ típusú, analitikus leképezések esetében a jelölésekben kiírjuk az ∞ -t, illetve ω -t. Jelölésben tehát a $\sim_p^\infty \subseteq \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ekvivalenciarelációt, $\mathcal{J}_p^{\infty,r}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ Jet-teret és a $J_p^{\infty,r} : \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{J}_p^{\infty,r}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $J_p^{\infty,r} f := J_p^{\infty,r}(f) = [f]_{\sim_p^\infty}$ Jet-hozzárendelést, illetve $\sim_p^\omega \subseteq \mathcal{C}_p^\omega(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{C}_p^\omega(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ekvivalenciarelációt, $\mathcal{J}_p^{\omega,r}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ Jet-teret és a $J_p^{\omega,r} : \mathcal{C}_p^\omega(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{J}_p^{\omega,r}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $J_p^{\omega,r} f := J_p^{\omega,r}(f) = [f]_{\sim_p^\omega}$ Jet-hozzárendelést használjuk. A $\mathcal{J}_p^{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ és $J_p^{\infty,\infty}$ helyett egyszerűen a $\mathcal{J}_p^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Jet-tér jelölést és J_p^∞ Jet-hozzárendelést, illetve a $\mathcal{J}_p^{\omega,\omega}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ és $J_p^{\omega,\omega}$ helyett egyszerűen a $\mathcal{J}_p^\omega(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ Jet-tér jelölést és J_p^ω Jet-hozzárendelést használjuk.

7. Állítás. [Jet-hozzárendelés és Taylor-sor kapcsolata]

Euklideszi terek közötti leképezések esetében egy $f \in \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ függvényhez rendelt $J_p^{k,r} f$ r -Jet az f függvény $p \in \mathbb{R}^n$ pontbeli r -ed rendű közelítő Taylor-polinomjának feleltethető meg.

8. Definíció. [Pontozott Euklideszi terek és ezek közötti leképezések]

Az $(\mathbb{R}^n, p)$ párt, ahol $p \in \mathbb{R}^n$, pontozott Euklideszi térnek nevezzük. Ha $(\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q)$ két pontozott Euklideszi tér, az ezek közötti $f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, q)$ leképezésektől elvárjuk, hogy $f(p) = q$ teljesüljön.

9. Definíció. [Pontozott Euklideszi terek közötti leképezések Jet-tere]

A $\mathcal{J}_{p,q}^{k,r}((\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q)) = \mathcal{C}_p^k((\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q)) / \sim_p^r$ teret a két pontozott Euklideszi tér közötti k -ad rendben folytonosan differenciálható leképezések $\{0, \dots, k\} \ni r$ -ed rendű Jet-terének nevezzük. Egy $\mathcal{C}_p^k((\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q)) \ni f$ leképezéshez tartozó $\{0, \dots, k\} \ni r$ -ed rendű Jet hozzárendelést $J_{p,q}^{k,r}$ -ként jelölünk, tehát $J_{p,q}^{k,r} : \mathcal{C}_p^k((\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q)) \rightarrow \mathcal{J}_{p,q}^{k,r}((\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q))$, $J_{p,q}^{k,r} f = J_{p,q}^{k,r}(f) := [f]_{\sim_p^r}$.

Megjegyzés. Az origót origóba képező leképezések $\mathcal{J}_{0,0}^{k,r}((\mathbb{R}^n, 0), (\mathbb{R}^m, 0))$ Jet-terének jelölésekor, ha nem okoz félreértést, nem írjuk ki a második, $q = 0$ tagot.

10. Állítás. [A Jet-hozzárendelés jól definiált művelet]

A $J_p^{k,r} : \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{J}_p^{k,r}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ és $J_{p,q}^{k,r} : \mathcal{C}_p^k((\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q)) \rightarrow \mathcal{J}_{p,q}^{k,r}((\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q))$ leképezések jól definiáltak.

11. Definíció. [Jet-ek kompozíciója]

Legyen $(\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q)$ és $(\mathbb{R}^o, s)$ három pontozott Euklideszi tér, $k, l, r, v \in \mathbb{N}$, $r \leq k, v \leq l$ és $u = \min\{k, l\}$. A $\star_{p,s}^{u,z} : \mathcal{J}_{q,s}^{u,z}((\mathbb{R}^m, q), (\mathbb{R}^o, s)) \times \mathcal{J}_{p,q}^{u,z}((\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q)) \rightarrow \mathcal{J}_{p,s}^{u,z}((\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^o, s))$, $\star_{p,s}^{u,z}(J_{q,s}^{u,z} g, J_{p,q}^{u,z} f) := J_{p,s}^{u,z}(f \circ g)$ művelet jól definiált minden $z \in \{0, \dots, u\}$ értékre, ezt a műveletet pedig a megfelelő Jet-ek *kompozíciójának* nevezzük.

12. Tétel. [Euklideszi terek közötti leképezések Jet-ekvivalenciájának kapcsolata a leképezések egyenlőségével]

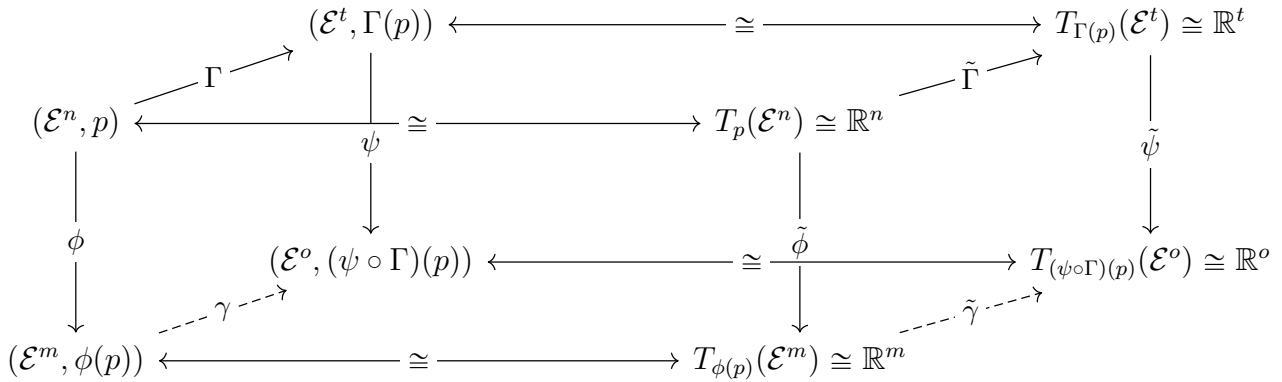
Legyen $(\mathbb{R}^n, p)$ és $(\mathbb{R}^m, q)$ két Euklideszi tér és $f, g \in \mathcal{C}^\omega((\mathbb{R}^n, p), (\mathbb{R}^m, q))$ két sima és analitikus leképezés. Ekkor a $J_p^\infty f = J_p^\infty g$ teljesülése ekvivalens azzal, hogy $f = g$ a $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ tartományon.

Bizonyítás. A 7-es állítás értelmében a $J_p^\infty f = J_p^\infty g$ feltétel ekvivalens azzal, hogy a két függvény Taylor-sora megegyezik. Mivel mindkét függvény sima és analitikus, így a Taylor-sorok előállítják az adott leképezést azok értelmezési tartományán, ahol a két függvény egyenlő. ■

2.2. Pontozott Euklideszi terek közötti leképezési diagramok kiegészítése

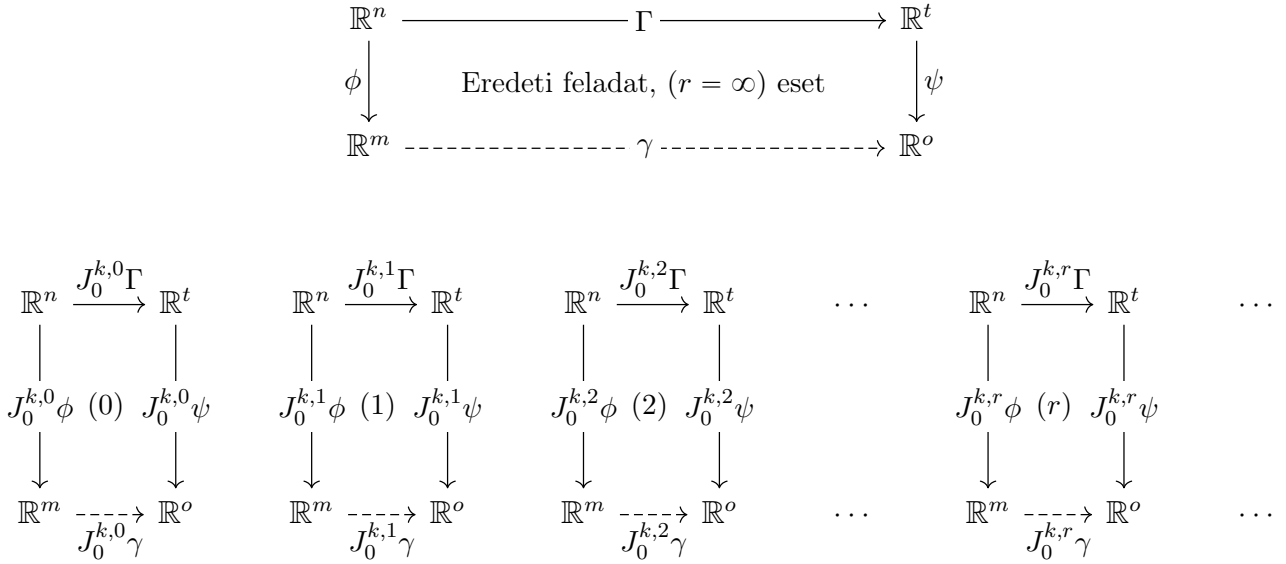
Ebben a fejezetben összefoglalom az előző éves TDK munkám fő eredményeit, melyek lehetőséget adnak Euklideszi terek közötti leképezések diagramjának kommutatív diagrammá való kiegészítésére. Ezekre a tételekre szükségem lesz a dolgozat további részeiben.

Tegyük fel, hogy adva vannak $\mathcal{E}^n \cong \mathbb{R}^n, \mathcal{E}^m \cong \mathbb{R}^m, \mathcal{E}^o \cong \mathbb{R}^o, \mathcal{E}^t \cong \mathbb{R}^t$ Euklideszi terek és három leképezés: $\phi \in \mathcal{C}^k(\mathcal{E}^n, \mathcal{E}^m), \Gamma \in \mathcal{C}^k(\mathcal{E}^n, \mathcal{E}^t), \psi \in \mathcal{C}^k(\mathcal{E}^t, \mathcal{E}^o)$, melyek mellett szeretnénk megkonstruálni egy olyan $\gamma \in \mathcal{C}^k(\mathcal{E}^m, \mathcal{E}^o)$ leképezést, melyre $\gamma \circ \phi = \psi \circ \Gamma$ teljesül. Ennél gyengébb követelmény, hogy valamely $p \in \mathcal{E}^n$ pontra centrált $p \in U \subseteq \mathcal{E}^n$ nyílt halmaz minden $U \ni q$ pontjára teljesüljön a $(\gamma \circ \phi)(q) = (\psi \circ \Gamma)(q)$ összefüggés. Az előző TDK dolgozatomban megadtam egy eljárást, amivel adott $p \in \mathbb{R}^n$ pontra e gyengébb feltétel kielégíthető. Tekintsünk ugyanis egy $\mathcal{E}^n \ni p$ pontot és ennek $p \in U$ környezetét. Mivel Euklideszi térről beszélünk, az U környezet elemei bijekcióba állíthatóak a p -pontba eltolt $T_p(\mathcal{E}^n) \approx \mathbb{R}^n$ érintőtér vektoraival, mely megfeleltetés indukál három, $\tilde{\phi} \in \mathcal{C}^k(T_p(\mathcal{E}^n), T_{\phi(p)}(\mathcal{E}^m)), \tilde{\Gamma} \in \mathcal{C}^k(T_p(\mathcal{E}^n), T_{\Gamma(p)}(\mathcal{E}^t))$ és $\tilde{\psi} \in \mathcal{C}^k(T_{\Gamma(p)}(\mathcal{E}^t), T_{(\psi \circ \Gamma)(p)}(\mathcal{E}^o))$ leképezést a megfelelő érintőtér között. Így ha a feladatot immár nem pontozott Euklideszi terekben oldjuk meg, majd a megoldást leszorítjuk az U környezet képére, azt azonosítani tudjuk az eredeti, pontozott terek közötti leképezési diagram kiegészítésével az U környezetben. Az módszer lényegét a 2-es diagram szemlélteti.



2. ábra. Pontozott Euklideszi terek közötti leképezési diagram
megfeleltetése érintőtér közötti leképezési diagramnak

Felmerül a kérdés, miként oldjuk meg a feladatot Euklideszi terek közötti leképezési diagramok esetében. Egy lehetséges módszer, ha a 2-es diagram kommutativitása helyett a $\gamma \circ \phi$ és $\psi \circ \Gamma$ komponált leképezések növekvő rendű Jet-ekivalenciáját tekintjük, ahogy azt a 3-as diagram szemlélteti. Ezen az egyes leképezések kompozíciója helyett a Jet-ekre vonatkozó $\star$ kompozíció jelenik meg. Az (r) -ed rendű diagram azt fejezi ki, hogy a keresett γ leképezést az ismert ϕ -vel komponálva r -ed rendben azonos eredményt kapunk, mintha a ψ leképezést komponáltuk volna Γ -val. Ezek az elemi, (r) -ed rendű diagramok a $(0), (1), \dots, (r-1)$ rendű diagramok megoldásai ismeretében mind megoldhatóak.



3. ábra. Euklideszi vektorterek közötti leképezési diagramnak megfelelő közelítő diagramsorozat $\mathcal{C}^k$ -rendű leképezésekre

Előző TDK dolgozatomban legfontosabb tétele a következő:

13. Tétel. [Euklideszi terek közötti $\mathcal{C}^k$ diagramok kiegészítése kommutatív diagrammá]

Legyen $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^t, \mathbb{R}^o$ négy Euklideszi tér, $\phi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\Gamma \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^t)$ és $\psi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^t, \mathbb{R}^o)$ három, az origót rögzítő leképezés. Ekkor minden $\gamma \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^o)$, $\sum_{i=0}^k \gamma^{(i)} \sim_0^k \gamma$ leképezésre teljesül, hogy $J_0^k(\gamma \circ \phi) = J_0^k(\psi \circ \Gamma)$, ahol

$$\gamma_0^{(i)} = \left[\sum_{s=0}^j \psi_0^{(s)} \left(\sum_{\Xi \in P_0(s,i)} \Gamma_0^{(\otimes \Xi)} \right) - \sum_{s=0}^{l-1} \gamma_0^{(s)} \left(\sum_{\sigma \in P(s,i)} \phi_0^{(\otimes \sigma)} \right) \right] [\varphi_0^{\otimes i}], \quad i \in \{0, \dots, j\},$$

az elemi megoldás multilineáris sorfejtése, $\phi_0^{(r)}, \Gamma_0^{(r)}, \psi_0^{(r)}$ a megadott leképezések $r = 0, 1, \dots, k$ -ad rendű megfelelő Euklideszi terek origóiban vett multilineáris sorfejtési tagjai, φ_0 a $\phi_0^{(1)}$ lineáris leképezés jobb oldali pszeudinverze, $P_0(s, i)$ az összes olyan $(l_1, \dots, l_s) \in \mathbb{N}_0^i$ halmaza, amelyre $l_1 + \dots + l_s = i$ teljesül, $P(s, i)$ pedig az összes olyan $(l_1, \dots, l_s) \in \mathbb{N}^i$ halmaza, amelyre $l_1 + \dots + l_s = i$ teljesül.

Megjegyzés. A továbbiakban $\gamma_{0,j} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^o)$, $j \leq k$ alatt a 13-as tételben megkonstruált $\sum_{i=0}^k \gamma^{(i)}$ leképezést értjük majd.

14. Állítás. [Az $k \geq r$ -ed rendű közelítő megoldás nem függ k -tól]

Legyen $k, l, r \in \mathbb{N}$, $r \leq k, r \leq l$, és $\gamma_k \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^o)$, $\gamma_l \in \mathcal{C}^l(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^o)$ olyan, hogy $J_0^{k,r} \gamma_{0,k} \star J_0^{k,r} \phi = J_0^{k,r} \psi \star J_0^{k,r} \Gamma$, illetve $J_0^{l,r} \gamma_{0,l} \star J_0^{l,r} \phi = J_0^{l,r} \psi \star J_0^{l,r} \Gamma$ teljesül. Ekkor $\gamma_{0,l} \sim_0^r \gamma_{0,k}$, azaz $J_0^{r,r} \gamma_{0,l} = J_0^{r,r} \gamma_{0,k}$.

Bizonyítás. A Jet-hozzárendelés definíciójából nyilvánvalóak a $J_0^{r,r} \gamma_{0,l} = J_0^{l,r} \gamma_{0,l}$ és $J_0^{r,r} \gamma_{0,k} = J_0^{k,r} \gamma_{0,k}$ összefüggések. Az állítás így következik a 13-as Tétel konstrukciójából.

Megjegyzés. A 13-as Tételben szereplő minden $\gamma_0^{(i)}$ mennyiség korlátos, amennyiben ϕ és $\psi \circ \Gamma$ is multilineáris közelítései is korlátosak a 0 pontban, azaz léteznek olyan $C_i \in \mathbb{R}$ számok, hogy

$$\forall y \in \mathbb{R}^m : \left\| \gamma_{\phi(p)}^{(i)}(y^{\otimes i}) \right\| \leq C_i \|y\|^i$$

teljesül, tehát a j -edik részösszegre fennáll a

$$\left\| \gamma_{j,\phi(p)}(y) \right\| = \left\| \sum_{i=0}^j \gamma_{\phi(p)}^{(i)}(y^{\otimes i}) \right\| \leq \sum_{i=0}^j \left\| \gamma_{\phi(p)}^{(i)}(y^{\otimes i}) \right\| \leq \sum_{i=0}^j C_i \|y\|^i$$

egyenlőtlenség. Sima és analitikus ϕ és Γ leképezések esetében tehát a jobb oldali becslés egy hatványsor lesz, melynek R konvergenciasugara

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\limsup \sqrt[i]{C_i}}, & \text{ha } \limsup \sqrt[i]{C_i} \in (0, \infty) \\ 0, & \text{ha } \limsup \sqrt[i]{C_i} = \infty \\ \infty, & \text{ha } \limsup \sqrt[i]{C_i} = 0 \end{cases}$$

Ennek a következményeként mondható ki a következő

15. Tétel. [γ leképezés konverenciája]

Legyenek $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^t, \mathbb{R}^o$ és ϕ, Γ, ψ a 13-as Tételben megfogalmazottak szerint. A $\gamma_0^{(i)}$ leképezések minden $\mathbb{N} \ni j$ -edik $\gamma_{0,j}$ részösszege folytonos és korlátos leképezés, mely teljesíti a $J_0^{k,j}(\gamma_{0,j} \circ \phi) = J_0^{k,j}(\phi \circ \Gamma)$ összefüggést. A $\gamma_{0,j}$ sorozat a $B_R(0) = \{y \in \mathbb{R}^m | d_{\mathbb{R}^m}(y, 0) < R\}$ halmazon pontonként konvergens, azon túl pedig divergens, ahol

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\limsup \sqrt[i]{C_i}}, & \text{ha } \limsup \sqrt[i]{C_i} \in (0, \infty) \\ 0, & \text{ha } \limsup \sqrt[i]{C_i} = \infty \\ \infty, & \text{ha } \limsup \sqrt[i]{C_i} = 0 \end{cases}$$

Megjegyzés. A 13-as tételben szereplő $J_p^{k,j}(\gamma_{0,j} \circ \phi) = J_p^{k,j}(\phi \circ \Gamma)$ megkötés gyengébb annál, hogy $(\gamma_{0,j} \circ \phi)(q) = (\phi \circ \Gamma)(q) \forall q \in \mathbb{R}^n, \phi(q) \in \text{Dom}(\gamma_{0,j})$ lenne, az eltérés mértéke azonban becsülhető, melyet rögzít az alábbi

16. Tétel. [Véges sok tagból álló közelítés hibájának becslése]

Legyenek $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^t, \mathbb{R}^o$ és ϕ, Γ, ψ a 13-as Tételben megfogalmazot tulajdonságú, $k+1$ rendben folytonosan differenciálható leképezések és legyen $\gamma_{0,j}$ a megkonstruált $\mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^o)$ folytonos leképezés j -edik részösszege. Legyen $Q = \cap_{q \in \text{Dom}(\gamma_{0,k})} \phi^{-1}(q)$. Minden $\forall q \in Q$ pontra

$$\left\| (\gamma_{0,j} \circ \phi)(q) - (\psi \circ \Gamma)(q) \right\| \leq \frac{\left\| \phi(q) - \phi(p) \right\|^{(j+1)}}{(j+1)!} \cdot \sup_{u \in Q} \left\| (\psi \circ \Gamma)^{(j+1)}(u) - (\psi \circ \Gamma)^{(j+1)}(p) \right\|$$

teljesül. Speciálisan, magára a k -adik részösszegre:

$$\|(\gamma_{0,k} \circ \phi)(q) - (\phi \circ \Gamma)(q)\| \leq \frac{\|\phi(q) - \phi(p)\|^{(k+1)}}{(k+1)!} \cdot \sup_{u \in Q} \|(\psi \circ \Gamma)^{(k+1)}(u) - (\psi \circ \Gamma)^{(k+1)}(p)\|$$

A 16-os tétel következménye, hogy ϕ, Γ, ψ analitikus leképezések mellett $\gamma \circ \phi = \psi \circ \Gamma$ teljesül:

17. Tétel. [Egzakt megoldás sima és analitikus leképezések esetében]

Legyenek $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^t, \mathbb{R}^o$ adottak és ϕ, Γ, ψ a 13-as Tételben megfogalmazot tulajdonságú, sima és analitikus leképezések. Legyen $U_m \subseteq B_R(0)$, $U_n = \phi^{-1}(U_m) \subseteq \mathbb{R}^n$, $U_t = \Gamma[U_n] \subseteq \mathbb{R}^t$ és $U_o = \psi[U_t] \subseteq \mathbb{R}^o$. Ekkor a $\gamma|_{U_m}, \phi|_{U_n}, \Gamma|_{U_t}$ és $\psi|_{U_o}$ leképezésekre $\gamma|_{U_m} \circ \phi|_{U_n} = \psi|_{U_o} \circ \Gamma|_{U_t}$ teljesül, a 4-es diagram tehát kommutatív.

$$\begin{array}{ccc} (U_n, 0) \subseteq (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\Gamma|_{U_n}} & (U_t, 0) \subseteq (\mathbb{R}^t, 0) \\ \downarrow \phi|_{U_n} & & \downarrow \psi|_{U_t} \\ (U_m, 0) \subseteq (\mathbb{R}^m, 0) & \xrightarrow{\gamma|_{U_m}} & (U_o, 0) \subseteq (\mathbb{R}^o, 0) \end{array}$$

4. ábra. Euklideszi részsokaságok közötti leképezésvázlat kiegészítése kommutatív diagrammá sima és analitikus leképezésekkel

Megjegyzés. Abban a speciális esetben, ha $t = n$, $o = m$ és $\psi = \phi$, a 17-es Tétel a determinisztikus, időfejlődő rendszerek modellterredukciójának példájának megoldását adja.

18. Tétel. [Kommutatív diagramok sorozatának egzakt kiegészítése]

Legyenek $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^t, \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^o$ adottak, $\phi = \psi, \Gamma$ sima és analitikus leképezések és $U_n \subseteq U_t \subseteq \mathbb{R}^n$, $U_m \subseteq U_o \subseteq \mathbb{R}^m$ a 17-es Tételben megfogalmazott tulajdonságúak. Ekkor a $\gamma|_{U_m}, \phi|_{U_n}, \Gamma|_{U_t}$ és $\psi|_{U_o}$ leképezésekre $\gamma|_{U_m}^k \circ \phi|_{U_n} = \psi|_{U_o} \circ \Gamma|_{U_t}^k$ teljesül, tehát az 5-ös diagram kommutatív.

$$\begin{array}{ccccccc} (U_n, 0) & \xrightarrow{\Gamma|_{U_n}} & (U_n, 0) \subseteq (U_t, 0) & \xrightarrow{\Gamma|_{U_n}} & (U_n, 0) \subseteq (U_t, 0) & \xrightarrow{\Gamma|_{U_n}} \dots & \xrightarrow{\Gamma|_{U_n}} (U_n, 0) \subseteq (U_t, 0) \\ \downarrow \phi|_{U_n} & & \downarrow \phi|_{U_t} & & \downarrow \phi|_{U_t} & & \downarrow \phi|_{U_t} \\ (U_m, 0) & \xrightarrow{\gamma|_{U_m}} & (U_m, 0) \subseteq (U_o, 0) & \xrightarrow{\gamma|_{U_m}} & (U_m, 0) \subseteq (U_o, 0) & \xrightarrow{\gamma|_{U_m}} \dots & \xrightarrow{\gamma|_{U_m}} (U_m, 0) \subseteq (U_o, 0) \end{array}$$

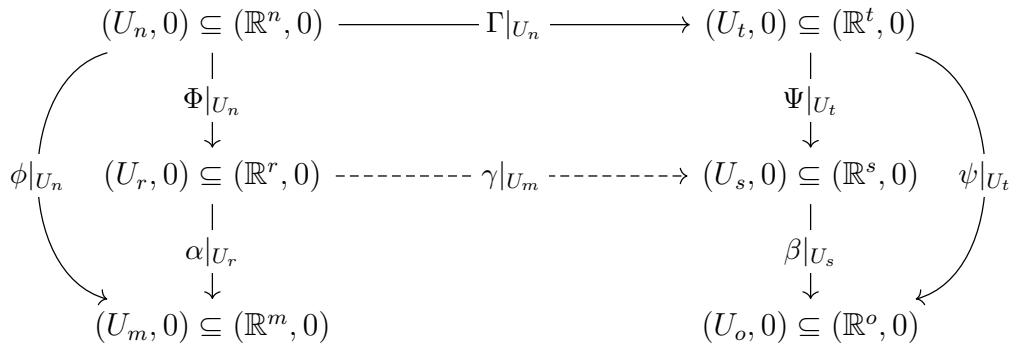
5. ábra. Euklideszi részsokaságok közötti leképezésvázlatok sorozatának kiegészítése kommutatív diagrammá sima és analitikus leképezésekkel

Megjegyzés. Ha a leképezési diagramok kiegészítését, mint a meglévőnél optimálisabb számítási folyamatok keresését fogjuk fel, annak is értéke lehet, ha nem közvetlenül az $\mathbb{R}^m$ és $\mathbb{R}^o$ Euklideszi terekbe ágyazható terek közötti leképezéseket keresünk, amennyiben ϕ és ψ nem analitikus, de Γ igen. Ha szerencsénk van, találhatunk olyan közbülső $\mathbb{R}^r$ és $\mathbb{R}^s$ tereket, melyeken a ϕ és ψ

leképezések felbomlanak $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \mathbb{R}^r)$ -beli, illetve $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^t \mathbb{R}^s)$ -beli analitikus leképezések valamilyen nemanalitikus $\alpha : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^m$, illetve $\beta : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^o$ leképezésekkel vett függvénykompozícióként. Ezen $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^t, \mathbb{R}^s$ terek között pedig már megoldhatjuk egzaktul a problémát, amivel $\psi \circ \Gamma$ -nál potenciálisan kevesebb számítást feltételező leképezést tudunk megkonstruálni $\mathbb{R}^n$ -ből $\mathbb{R}^o$ -ba.

19. Tétel. [Probléma megoldása közbülső térrel]

Legyen $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^t, \mathbb{R}^o$ adott, $\phi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty((\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^t)$, $\psi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^t, \mathbb{R}^o)$ három leképezés. Ha létezik két olyan $\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s$ és négy $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r)$, $\Psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^t, \mathbb{R}^s)$, $\alpha \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^m)$, $\beta \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^o)$ leképezés, amire $\phi = \alpha \circ \Phi$ és $\psi = \beta \circ \Psi$, akkor a 17-es Tétel alkalmazható, és létezik olyan $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s)$ leképezés, melyre a 6-os diagram kommutatív.

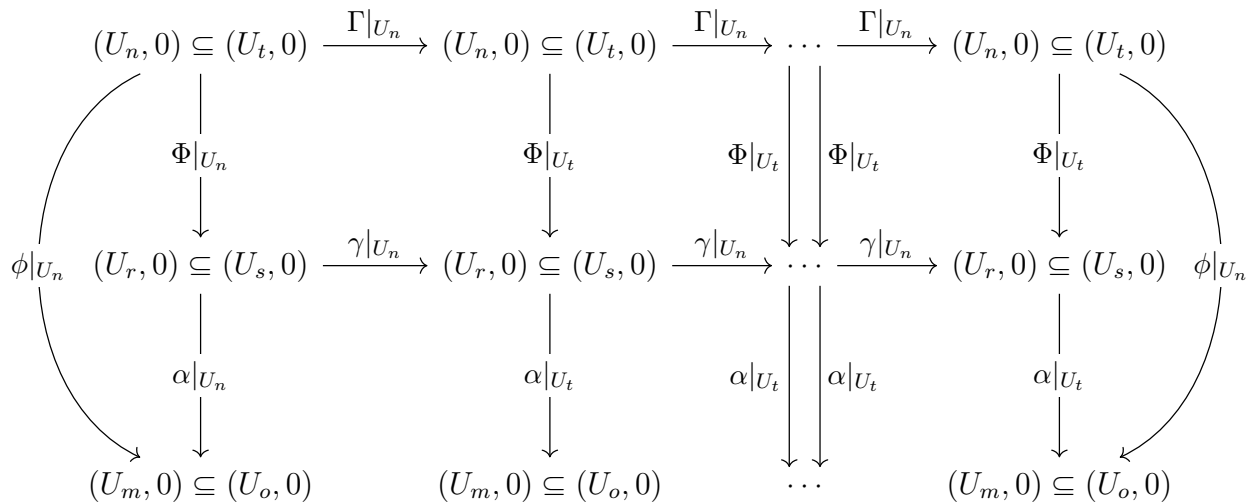


6. ábra. Euklideszi részsokaságok közötti leképezésvázlat kiegészítése kommutatív vázlatná közbülső Euklideszi terek beillesztésével

Megjegyzés. Végezetül, a 19-es Tételt a 18-as Tétellel kombinálva adódik a következő:

20. Tétel. [Kommutatív vázlatok sorozatának egzakt kiegészítése közbülső Euklideszi terekkel]

Legyenek $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^t, \mathbb{R}^o, \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s$ adottak, $\phi, \Phi, \alpha, \Gamma, \psi, \Psi, \beta$ leképezések pedig a 19-es Tétel szerintiek. Tegyük fel, hogy $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^t$, $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^o$ és $\psi = \phi$. Ekkor alkalmazható a 18-as Tétel, amivel a 7-es vázlat kommutatív.



7. ábra. Euklideszi részsokaságok közötti leképezésvázlatok sorozatának kiegészítése kommutatív d vázlatná közbülső Euklideszi terek beillesztésével

3. Euklideszi terekbe ágyazható differenciálható sokaságok

Előző TDK dolgozatom terjedelmi korlátai miatt annak az esetnek a megoldását, amikor nem Euklideszi terekkel, hanem differenciálható struktúrával ellátott lokálisan Euklideszi topologikus sokaságokkal dolgozunk, csak vázlatosan mutattam be. Ezt szeretném ebben a fejezetben pótolni és pontosítani.

Azon túl, hogy eljárást adunk az előző fejezetben ismertetett módszer lehetséges általánosítására, rámutatunk, milyen, az Euklideszi terek esetében meg nem jelenő többlétszabadság adódik az összetettebb topologikus struktúrából. Emellett kitérünk annak a kérdésnek a tisztázására, hogy mikor létezhet a keresett problémának megoldása, és az milyen értelemben tekinthető egyértelműnek.

3.1. Topologikus terek, topologikus és differenciálható sokaságok

Ebben az alfejezetben összegzem azokat a definíciókat és tételeket, melyek a munkám eredményeiben megjelenő fogalmak és tételek megértéséhez, azok indoklásához szükségesek. Ahhoz, hogy az alfejezet a lehető legteljesebb legyen, olyan fogalmak, mint a topologikus tér és a folytonos leképezések, a differenciálható sokaságok és ezek közötti sima leképezések is definiálva lesznek, melyek egyes olvasók számára – a fogalmak széleskörű ismertsége miatt – feleslegesnek tűnhetnek. Ugyanakkor, ez az alfejezet lehetőséget szolgál a dolgozatban használt jelölési és fogalmi konvenciók lefektetésére, így összességében azt remélem, hogy az olvasó is hasznosnak találja majd. A tém'ba részletesebb bevezetést nyújt [4], [5].

A fontosabb definíciók, illetve tételek után megjegyzéseket helyeztem el, melyek rávilágítanak az adott eredmény relevanciájára a dolgozat fő célja: Euklideszi terekbe ágyazható differenciálható sokaságok közötti leképezési diagramok kommutatív diagrammá való kiegészítése szempontjából.

21. Definíció. [Topologikus tér]

Topologikus térnek nevezzük az (X, τ) párt, ahol X egy halmaz és τ az X halmaz olyan, *nyílt* halmazoknak nevezett részhalmazainak gyűjteménye, melyre teljesülnek a következők:

1. $X, \emptyset \in \tau$;
2. $\forall \{U_i \in \tau\}_{i \in I} : \bigcup_i U_i \in \tau$, ahol I egy tetszőleges indexhalmaz;
3. $\forall \{U_i \in \tau\}_{i=1}^n : \bigcap_i U_i \in \tau$, ahol $n \in \mathbb{N}$.

Zárt halmaznak definiálunk minden olyan $A \subseteq X$ halmazt, amelynek a komplementere nyílt a τ topológiára nézve. Ha nem okoz félreértést, a topologikus térre csak az alaphalmaz megjelölésével hivatkozunk.

22. Definíció. [Topologikus tér kompakt részhalmaza]

Az (X, τ) topologikus tér $A \subseteq X$ részhalmaza kompakt, ha minden $\mathcal{U}_A \subseteq \tau$ nyílt fedésének van véges részfedése.

23. Definíció. [Topologikus térpár]

Az (X, A) párt térpárnak nevezzük, ha X topologikus tér és $A \subset X$.

24. Definíció. [Pontozott topologikus tér]

Az (X, A) térpárt pontozott topologikus térnek nevezzük, ha $A = \{x_0\}$, $x_0 \in X$ teljesül. Jelölésben (X, x_0) -t használunk, a halmaz jelölést elhagyjuk.

25. Definíció. [Topologikus térpár közötti leképezés]

Legyen (X, A) és (Y, B) térpár. Az $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ leképezés olyan $f : X \rightarrow Y$ leképezés, melyre $f(A) \subset B$ teljesül.

26. Definíció. [Topologikus terek közötti szabályos leképezés]

Legyen (X, τ_X) és (Y, τ_Y) két topologikus tér. Az $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ leképezés szabályos, ha minden $K \subseteq Y$ kompakt halmaz $f^{-1}(K) \subseteq X$ ösképe kompakt.

27. Definíció. [Topologikus terek közötti folytonos leképezések]

Legyen (X, τ_X) és (Y, τ_Y) két topologikus tér. Az $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ leképezést folytonosnak nevezzük, ha minden $V \in \tau_Y$ nyílt halmazra $f^{-1}(V) \in \tau_X$, vagyis nyílt halmaz ösképe nyílt.

28. Definíció. [Topologikus terek közötti homeomorfizmus, homeomorf topologikus terek]

Legyen (X, τ_X) és (Y, τ_Y) két topologikus tér. Az $f : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ bijekciót homeomorfizmusnak nevezzük, ha ő maga és inverze is folytonos.

29. Definíció. [Folytonos leképezések közötti relatív homotópia]

Legyen (X, τ_X) és (Y, τ_Y) két topologikus tér és $A \subseteq X$ adott. Az $f, g : (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ folytonos leképezések A -hoz relatív homotópiája alatt egy olyan folytonos $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ leképezést értünk, amire $h(x, 0) = f(x)$, $h(x, 1) = g(x)$ és $\forall t \in [0, 1] : \forall a \in A : h(a, t) = f(a) = g(a)$ teljesül.

30. Definíció. [Topologikus tér bázisa]

Az (X, τ) topologikus tér *bázisának* nevezzük azt a $\mathcal{B} \subset \tau$ kollekción, melyre $\forall U \in \tau$ nyílt halmaz felírható $\mathcal{B}$ -beli elemek úniójaként. Egy topologikus tér *megszámlálható bázisú*, ha létezik megszámlálható $\mathcal{B} \subset \tau$ bázisa.

31. Definíció. [Hausdorff-tulajdonságú topologikus tér]

Az (X, τ) topologikus tér *Hausdorff-tulajdonságú*, ha minden két különböző pontjának létezik diszjunkt környezete.

32. Definíció. [Lokálisan Euklideszi topologikus tér]

Egy (X, τ) topologikus tér *lokálisan Euklideszi*, ha $\forall p \in X : \exists U \in \tau$, úgy, hogy $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ homeomorfizmus. Ekkor azt mondjuk, hogy a topologikus tér *m-dimenziós*, és jelölésében néha (X, τ) helyett X^m -et használunk.

33. Definíció. [Topologikus sokaság]

Egy megszámlálható bázisú, Hausdorff-tulajdonságú, m dimenziós lokálisan Euklideszi (M, τ) topologikus teret *topologikus m-sokaságnak* nevezünk.

34. Definíció. [Topologikus sokaság térképezése és koordinátázása]

Legyen (M, τ) egy topologikus m -sokaság, $U \in \tau$ és $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ homeomorfizmus. Az (U, ϕ) párt *koordinátatérképnek*, vagy egyszerűen *térképnek*, a $(\phi(U), \phi^{-1})$ párt pedig (lokális) *paraméterezésnek* nevezzük. A térképet $U \ni p$ -re *centráltnak* nevezzük, ha $\phi(p) = 0$ teljesül. A ϕ leképezést *koordinátázásnak*, a $\phi(p) = (x^1(p), \dots, x^m(p))$ összefüggéssel definiált $\{x^i : U \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=1}^m$ leképezéseket (lokális) *koordinátáknak* nevezzük.

35. Definíció. [Topologikus sokaság két térképének kompatibilitása]

Legyen (M, τ) topologikus m -sokaság és $(U, \phi), (V, \psi)$ két térképezés úgy, hogy $U \cap V \neq \emptyset$. A két térképezést $\mathcal{C}^k$ rendben *kompatibilisnek* mondjuk, ha $\forall x \in \phi[U \cap V]$ -re $\psi \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ illetve $\forall y \in \psi[U \cap V]$ -re $\phi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvények $\mathcal{C}^k$ -k, azaz létezik és folytonos minden $r \leq k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ rendű deriváltjuk. A $\mathcal{C}^\infty$ rendben kompatibilis térképeket *simaan kompatibilisnek* nevezzük. Minden olyan térkép, melyre $U \cap V = \emptyset$, tetszőleges rendben kompatibilis.

36. Definíció. [Topologikus sokaság atlasza]

Legyen M topologikus m -sokaság és $\{U_i\}_{i \in I}$ az M egy nyílt fedése és $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ekkor az $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ -t $\mathcal{C}^k$ -atlasznak nevezzük, ha az egyes térképezések páronként $\mathcal{C}^k$ -kompatibilisak. A $\mathcal{C}^\infty$ atlaszt *sima atlasznak* nevezzük. Egy $\mathcal{C}^k$ -atlasz *maximális*, ha egy másik $\mathcal{C}^k$ -atlasznak sem része, vagyis minden kompatibilis térképezést tartalmaz.

37. Definíció. [Differenciálható sokaság]

Az $(M, \tau, \mathcal{A})$ párt $\mathcal{C}^k$ -sokaságnak vagy egyszerűen *differenciálható m -sokaságnak* nevezzük, ha (M, τ) egy topologikus m -sokaság és $\mathcal{A}$ egy ehhez tartozó $\mathcal{C}^k$ -atlasz. A $\mathcal{C}^\infty$ -sokaságokat *sima m -sokaságoknak* nevezzük. Az $\mathcal{A}$ atlaszt gyakran a differenciálható sokaság differenciálható struktúrájának nevezzük. Ha nem okoz félreértést, egy differenciálható sokaságra egyszerűen az alaphalmazzal hivatkozunk, esetleg más betűtípussal, kifejezve a többletstruktúra meglétét, például: $\mathcal{M} = (M, \tau, \mathcal{A})$.

38. Állítás. [Egy kompatibilis atlasz meghatározza a differenciálható struktúrát]

Legyen (M, τ) topologikus m -sokaság és $\mathcal{A}$ egy kompatibilis atlasza. Ekkor $\mathcal{A}$ meghatároz egy maximális $\mathcal{A}$ atlaszt, amivel $(M, \tau, \mathcal{A})$ differenciálható sokaságot alkot.

39. Definíció. [Euklideszi terek, mint differenciálható sokaságok]

A $(\mathbb{R}^n, \tau_d)$ metrikus topológiával ellátott topologikus téren az $\mathcal{A} = \{\mathbb{R}^n, \text{id}\}$ atlaszból származtatott maximális $\mathcal{A}$ atlasz megad egy differenciálási struktúrát tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ mellett. Így nyerjük az $\mathcal{E}^n := (\mathbb{R}^n, \tau_d, \mathcal{A})$ sima differenciálható sokaságot.

Megjegyzés. Az Euklideszi terek egyszerre tekinthetők vektortérnek és differenciálható sokaságnak, hiszen azok tetszőleges pontjukhoz tartozó érintőtérrel való azonosíthatóságuk révén természetes lineáris struktúrával is rendelkeznek. Ha Euklideszi terekről, mint sokaságokról beszélünk, az $\mathcal{E}^n$ jelölést alkalmazzuk majd, ha pedig a vektortér struktúrát akarjuk kiemelni, a szokásos $\mathbb{R}^n$ -ként hivatkozunk majd a terünkre.

40. Definíció. [Differenciálható és sima leképezés differenciálható sokaságok között]

Legyen $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ két sima m -, n -sokaság. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ leképezés

$\mathbb{N} \ni k$ -ad rendben differenciálható vagy $\mathcal{C}^k$ osztályú, ha minden $p \in \mathcal{M}$ pontra léteznek olyan (U, ϕ) és (V, ψ) térképezések, hogy ha $p \in U$, $f(p) \in V$ és $f[U] \subseteq V$, akkor a $h = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$, $h : \phi(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ leképezés $\mathcal{C}^k$ osztályú. Az f leképezést simának nevezzük, ha minden $\mathbb{N} \ni k$ -ra $\mathcal{C}^k$ osztályú.

41. Definíció. [$\mathcal{C}^k$ - és sima diffeomorfizmus sima sokaságok között]

Legyen $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ két sima m - és n -sokaság. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ bijekció $\mathcal{C}^k$ -diffeomorfizmus, ha ő maga és inverze is k -ad rendben differenciálható leképezés a sokaságok között. Az f bijekció sima diffeomorfizmus vagy egyszerűen csak diffeomorfizmus, ha minden $\mathbb{N} \ni k$ -ra $\mathcal{C}^k$ -diffeomorfizmus.

42. Definíció. [$\mathcal{C}^k$ -sokaságok kategóriája]

A $\mathbf{Man}^k$ kategóriát, melynek objektumai a $\mathcal{C}^k$ -sokaságok és morfizmusok az ezek közötti k -ad rendben differenciálható leképezések, a $\mathcal{C}^k$ -sokaságok kategóriájának nevezzük.

43. Definíció. [A pontozott $\mathcal{C}^k$ -sokaságok kategóriája]

A $\mathbf{Man}_*^k$ kategóriát, melynek objektumai a pontozott $\mathcal{C}^k$ -sokaságok és morfizmusok az ezek közötti k -ad rendben differenciálható leképezések, a pontozott $\mathcal{C}^k$ -sokaságok kategóriájának nevezzük.

44. Definíció. [Differenciálható sokaságok közötti differenciálható leképezések vektortere]

Legyen $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ két sima m - és n -sokaság. Az $\mathcal{F}^k(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \{f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{M}, \mathcal{N})\}$ halmaz természetes $\mathbb{R}$ -vektortér struktúrával rendelkezik, mely a k -ad rendben differenciálható leképezések vektorterét adja. Speciálisan, $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \mathcal{F}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ a sima leképezések $\mathbb{R}$ -vektortere, melyre, ha nem okoz félreértést, egyszerűen $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -ként hivatkozunk. Ha $\mathcal{N} = \mathcal{E}^1$, vagyis a valós számegegyenes, mint differenciálható sokaság, úgy a jelölésben csak az $\mathcal{M}$ sokaságot tüntetjük fel: $\mathcal{F}^k(\mathcal{M})$, $\mathcal{F}^\infty(\mathcal{M})$ és $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$.

45. Definíció. [Deriváció differenciálható sokaság egy pontjában]

Legyen $\mathcal{M}$ egy sima sokaság, $p \in \mathcal{M}$. A $v_p : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris leképezés p -beli deriváció, ha:

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) : v_p(fg) = f(p) \cdot v_p(g) + g(p) \cdot v_p(f).$$

46. Definíció. [Differenciálható sokaság pontbeli érintőtere és érintőnyalábja]

A $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ összes $\mathcal{M} \ni p$ -beli derivációinak halmazát $T_p(\mathcal{M})$ módon jelöljük és az $\mathcal{M}$ sokaság p -beli érintőterének nevezzük. $T_p(\mathcal{M})$ elemeit p -beli érintővektoroknak nevezzük. $T_p(\mathcal{M}) \cong \mathbb{R}^n$, ahol $n = \dim \mathcal{M}$. A sokaság minden pontjához rendelt érintőterek halmaza az érintőnyaláb:

$$T(\mathcal{M}) = \coprod_{p \in \mathcal{M}} T_p(\mathcal{M}) = \{(p, v) | p \in \mathcal{M}, v \in T_p(\mathcal{M})\}.$$

47. Definíció. [Differenciálható sokaság pontbeli duális érintőtere és érintőnyalábja]

Az $\mathcal{M}$ differenciálható sokaság $T_p(\mathcal{M})$ érintőterének duálisát $T_p^*(\mathcal{M})$ módon jelöljük, a duális

érintőnyaláb pedig:

$$T^*(\mathcal{M}) = \coprod_{p \in \mathcal{M}} T_p^*(M) = \{(p, \omega) | p \in M, \omega \in T_p^*(\mathcal{M})\}.$$

48. Definíció. [Differenciálható sokaság (k, l) típusú tenzornyalábja]

Az $\mathcal{M}$ differenciálható sokaság (k, l) típusú tenzornyalábját $T^{(k,l)}(\mathcal{M})$ módon jelöljük, és a következő teret értjük alatta:

$$T^{(k,l)}(T(\mathcal{M})) = \coprod_{p \in \mathcal{M}} (\otimes_k T_p(\mathcal{M})) \otimes (\otimes_l T_p^*(\mathcal{M})).$$

Természetesen adódnak a $\pi_{(k,l)}$ projekciók $T^{(k,l)}(T(\mathcal{M}))$ -ről $\mathcal{M}$ -re:

$$\pi_{(k,l)} : T^{(k,l)}(T(\mathcal{M})) \rightarrow \mathcal{M}, \quad \pi_{(k,l)}((p, W)) \mapsto p.$$

49. Definíció. [Differenciálható sokaság (k, l) típusú tenzormezője]

Ha $\mathcal{M}$ egy sima m -sokaság és $T^{(k,l)}(M)$ az érintő (k, l) -típusú tenzornyalábja, akkor az $s_{k,l} : \mathcal{M} \rightarrow T^{(k,l)}(\mathcal{M})$ leképezést *szelésnek* nevezzük, ha $\pi_{(k,l)} \circ s_{k,l} = \text{id}_{\mathcal{M}}$. Speciálisan, egy sokaságon értelmezett minden vektormező halmaza $\mathcal{X}(M) = \{X : \mathcal{M} \rightarrow T(M) | X \text{ szelés}\}.$

50. Definíció. [Sokaságok közötti sima leképezéshez tartozó globális és lokális szelés]

Legyen $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ két sima sokaság. Az $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ sima leképezéshez tartozó lokális szelés alatt egy $s : U \subseteq \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ sima leképezést értünk, ami U -n jobb-inverze F -nek, tehát $F \circ s = \text{id}_U$. Ha $U = \mathcal{N}$, globális szelésről beszélünk.

51. Definíció. [Sima sokaság pontjának sima leképezés szerinti fibruma]

Legyen $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ két sima sokaság és $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ sima leképezés. A π leképezés $\mathcal{N} \ni q$ pont feletti fibruma alatt a $\pi^{-1}(q) \subseteq \mathcal{M}$ halmazt értjük.

52. Definíció. [Sokaságok közötti sima leképezés differenciálja]

Legyen $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ két sima sokaság. Az $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ sima leképezés $\mathcal{M} \ni p$ -beli differenciálja alatt azt a $dF_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{F(p)}\mathcal{N}$ leképezést értjük, melyre minden $v_p \in T_p\mathcal{M}$ vektorra és $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N})$ leképezésre $(dF_p(v_p))(f) = v_p(f \circ F)$ teljesül.

53. Definíció. [Sokaságok közötti sima leképezés rangja, állandó rangú leképezés]

Legyen $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ két sima sokaság. Az $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ sima leképezés $\mathcal{M} \ni p$ -beli rangján a $dF_p : T_p(\mathcal{M}) \rightarrow T_p(\mathcal{N})$ leképezés rangját értjük. F -et állandó rangú leképezésnek mondjuk, ha rangja minden $\mathcal{M} \ni p$ pontban azonos.

54. Definíció. [Topológiai beágyzás, immerzió, szubmerzió]

Legyen X és Y két topologikus tér. Az $F : X \rightarrow Y$ folytonos leképezés

1. topológiai beágyzás, ha homeomorfizmust ad meg X és $F[X]$ között;
2. topológiai immerzió, ha minden $X \ni p$ pontnak van olyan $p \in U \in \tau_X$ környezete, hogy $F|_U : U \rightarrow Y$ topológiai beágyzás;

3. topológiai szubmerzió, ha X minden pontja az F -hez tartozó egy folytonos lokális szelés képe.

55. Definíció. [Sima immerzió, szubmerzió, beágyazás]

Legyen $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ két sima sokaság. Az $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ sima leképezés

1. sima szubmerzió, ha minden $\mathcal{M} \ni p$ pontban dF_p szürjektív, vagyis $\text{rank}(dF_p) = \dim(\mathcal{N})$;
2. sima immerzió, ha minden $\mathcal{M} \ni p$ pontban dF_p injektív, vagyis $\text{rank}(dF_p) = \dim(\mathcal{M})$;
3. sima beágyazás, ha egyszerre sima immerzió és topológiai beágyazás.

Megjegyzés. Nem minden topológiai immerzió, illetve beágyazás, ami sima leképezés is, lesz sima immerzió, illetve sima beágyazás.

56. Definíció. [Szabályos beágyazás]

Legyen $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ két sima sokaság. Az $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ sima beágyazás szabályos, ha egyben szabályos leképezés is.

57. Definíció. [Nyílt részsokaság]

Legyen $(\mathcal{M}, \tau_{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$ egy sima m -sokaság, $U \in \tau_{\mathcal{M}}$ egy nyílt halmaza és τ_U a hozzá tartozó, $\mathcal{M}$ -től örökölt altértopológia. Az $(U, \tau_U, \mathcal{A}_U)$ differenciálható sokaságot az $(\mathcal{M}, \tau_{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$ sima sokaság nyílt részsokaságának nevezzük, ahol $\mathcal{A}_U = \{(V, \psi) \in \mathcal{A} : V \subseteq U\}$ az $\mathcal{M}$ -től örökölt differenciálható struktúra.

58. Definíció. [Immetrált és beágyazott részsokaság]

Legyen $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ két sima sokaság. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{M}$ sima sokaság immetrált (illetve beágyazott) részsokasága a $\mathcal{N}$ sima sokaságnak, ha létezik $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ immerzió (illetve beágyazás).

59. Tétel. [Sokaságok közötti sima leképezés átvitele hányados-sokaságra]

Legyen $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ két sima sokaság és $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ szürjektív sima szubmerzió. Ha $\mathcal{P}$ sima sokaság és $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}$ olyan sima leképezés, mely a π fibrumain állandó, akkor egyértelműen létezik olyan $\tilde{F} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$ sima leképezés, melyre $F = \tilde{F} \circ \pi$ teljesül. Másképp, a 8-as diagram kommutatív.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M} & & \\
 \downarrow \pi & \searrow F & \\
 \mathcal{N} & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathcal{P}
 \end{array}$$

8. ábra. Az 59-es tételben szereplő leképezési diagram

Megjegyzés. A fenti, 59-es Tétel jelentősége dolgozatom szempontjából a következőben áll: tegyük fel, hogy $\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$ és $\mathcal{Q}$ négy sima sokaság és $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathcal{M})$, $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathcal{P})$ és $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ három olyan sima leképezés, hogy $\psi \circ \Gamma$ állandó a ϕ fibrumain. Ekkor egyértelműen létezik olyan $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{Q})$ sima leképezés, amelyre $\gamma \circ \phi = \psi \circ \Gamma$ teljesül. Az, hogy

$\psi \circ \Gamma$ állandó a ϕ tetszőleges fibrumán, egy erős megkötés. Ugyanakkor, megtörténhet, hogy ha leszűkítjük az egyes sokaságokat, és azoknak csak megfelelő részsokaságait tekintjük, ott egyértelmű megoldást tudunk megkonstruálni. Azt, hogy pontosan milyen részsokaságokat érdemes tekinteni, és ha ismerjük a feladat megoldását egy részsokaságra, azt miként lehet kiterjeszteni a teljes sokaságokra, a következőekben tekintjük át.

60. Tétel. [Sima sokaságok közötti leképezés megszorítása részsokaságra]

Legyen $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ két sima sokaság, $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ sima leképezés. Legyen $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}$ immertált vagy beágyazott részsokaság. Ekkor az $f|_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{N}$ leképezés is sima.

61. Tétel. [Sima sokaságok közötti leképezés képének megszorítása részsokaságra]

Legyen $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ két sima sokaság, $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ sima leképezés. Legyen $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{N}$ immertált vagy beágyazott részsokaság, melyre $\text{Im } f \subseteq \mathcal{Q}$. Ha a $\tilde{f} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q}$ folytonos, akkor sima is.

Megjegyzés. A 61-es tételben, ha $\mathcal{P}$ beágyazott részsokaság, akkor a folytonossági feltevés elhagyható, tehát f képének megszorítása beágyazott sokaságra továbbra is sima leképezést ad.

Megjegyzés. A nyílt és beágyazott részsokaságok fogalma két szempontból bír nagy jelentőséggel kutatásom szempontjából. Egyrészt, ahogy az 59-es Tételt követő megjegyzésben szerepel, nyílt részsokaságokra megoldani egy leképezési diagram kommutatívra való kiegészítését általában könnyebb feladat, mint a teljes sokaságokra elvégezni ugyanezt. A megvalósításban jelentős szerepe van annak a kérdésnek, hogy mikor tudunk egy sokaság egy részhalmazáról sima leképezést a teljes sokaságra kiterjeszteni. Másrészt, előző éves TDK munkám legfontosabb eredménye volt, hogy Euklideszi terek közötti leképezési diagramok kommutatív diagrammá történő kiegészítésére módszert találtam sima leképezések esetében. Így, ha a sima sokaságok közötti leképezési diagramokat meg tudjuk feleltetni Euklideszi terek közötti sima leképezések diagramjainak, azokat kiegészítjük, majd visszaképezzük a kapott leképezéseket, azzal megoldjuk a feladatot. Ahhoz, hogy e módszert alkalmazni tudjunk sima sokaságokra, tudnunk kell, beágyazhatóak-e Euklideszi terekbe, és, hogy folytonos leképezéseket sima leképezésekkel miként lehet közelíteni.

62. Tétel. [Whitney-féle beágyazási tétel]

Ha $m > 0$, minden $\mathcal{M}$ sima m -sokaságnak létezik sima beágyazása $\mathcal{E}^{2m} \cong \mathbb{R}^{2m}$ -be, és szabályos beágyazása $\mathcal{E}^{2m+1} \cong \mathbb{R}^{2m+1}$ -be.

63. Definíció. [Beágyazott vagy reguláris részsokaság]

Legyen $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ két sima sokaság. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{M}$ az $\mathcal{N}$ sokaság beágyazott vagy reguláris részsokasága, ha létezik olyan $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ immerzió, mely diffeomorfizmus $\mathcal{M}$ és $f[\mathcal{M}]$ között.

Megjegyzés. Az, hogy az $\mathcal{M}$ sima sokaság az $\mathcal{N}$ sima sokaság reguláris részsokasága, szemléletesen azt jelenti, hogy egyaránt gondolhatunk $\mathcal{M}$ -re, mint amit belső, topológiai és differenciálható struktúrája meghatároz, de úgy is, mintha egy $\mathcal{N}$ -beli objektum lenne. A 62-es beágyazási tétel szerint minden sima differenciálható sokaság reguláris részsokasága egy kellően magas dimenziós Euklideszi térnek.

64. Tétel. [Részsokaságról való leképezés kiterjesztése]

Legyen $\mathcal{M}$ sima sokaság, $\mathcal{P}$ sima sokaság és $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ sima. Ha $\mathcal{P}$ beágyazott részsokaság, akkor van olyan $\mathcal{P} \subseteq U \subseteq \mathcal{M}$, hogy $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}$ sima és $\tilde{f}|_{\mathcal{P}} = f$. Ha ráadásul $\mathcal{P}$ szabályosan beágyazott $\mathcal{M}$ -ba, akkor $U = \mathcal{M}$ is tekinthető.

65. Tétel. [$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{E}^n)$ leképezés sima kiterjesztése zárt részhalmazról teljes sokaságra]

Legyen $\mathcal{M}$ sima sokaság és $A \subseteq \mathcal{M}$ egy zárt részhalmaza, illetve $f : A \rightarrow \mathcal{E}^n$ egy sima leképezés. Ekkor, minden $A \subseteq U \in \tau_{\mathcal{M}}$ nyílt környezetre létezik olyan $\tilde{f} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}^n$ sima leképezés, melyre $\tilde{f}|_A = f$ és $\text{supp } \tilde{f} \subseteq U$ teljesül.

66. Definíció. [$\mathcal{C}^0(\mathcal{M}, \mathcal{E}^n)$ leképezések közelsége]

Legyen $\mathcal{M}$ sima sokaság és $\delta : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ pozitív folytonos leképezés. Azt mondjuk, hogy az $f, \tilde{f} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}^n$ leképezések δ -közeliek, ha minden $\mathcal{M} \ni p$ -re $|f(p) - \tilde{f}(p)| < \delta(p)$.

67. Tétel. [Whitney-féle approximációs tétel $\mathcal{C}^0(\mathcal{M}, \mathcal{E}^n)$ leképezésekre]

Legyen $\mathcal{M}$ sima sokaság és $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}^n$ folytonos leképezés. Ekkor minden $\delta : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ pozitív folytonos leképezéshez létezik olyan $\tilde{f} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}^n$ sima leképezés, melyre f és $\tilde{f}$ δ -közeliek. Ha adott $A \subseteq \mathcal{M}$ zárt halmazon f sima, akkor ott $\tilde{f}$ választható f -el megegyezőnek.

68. Definíció. [$\mathcal{E}^n$ -be ágyazott sima sokaság normálnyalábja]

Legyen $\mathcal{M}$ az $\mathcal{E}^n$ -be ágyazott sima sokaság. Ennek a normálnyalábja alatt a $T\mathcal{E}^n$ következő beágyazott részsokaságát értjük:

$$N\mathcal{M} := \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \in \mathcal{M} \text{ és } \langle x, v \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0\}.$$

Természetesen adódik a $\tilde{\pi} : N\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ projekció, amely a $\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ projekció megszorításaként áll elő.

69. Definíció. [$\mathcal{E}^n$ -be ágyazott sima sokaság tubuláris környezete]

Legyen $\mathcal{M}$ az $\mathcal{E}^n$ -be ágyazott sima sokaság és $\delta : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ pozitív folytonos leképezés. Ekkor az $\mathcal{M}$ sima sokaság δ -tubuláris környezete alatt az $N\mathcal{M}$ normálnyaláb következő nyílt részét értjük:

$$\mathcal{M}_\delta = \{(x, v) \in \mathcal{N} : \|v\|_{\mathbb{R}^n} < \delta(x)\}.$$

70. Definíció. [Topologikus tér altérre való retrakciója]

Az (X, τ) topologikus tér $A \subseteq X$ altérre való retrakciója olyan $r : X \rightarrow A$ sima leképezés, melyre $r|_A = \text{id}_A$ teljesül.

71. Tétel. [Tubuláris környezet tétel]

Minden $\mathcal{E}^n$ -be ágyazott sokaságnak van tubuláris környezete.

72. Tétel. [$\mathcal{E}^n$ -be ágyazott sima sokaság tubuláris környezetének szubmerziós retrakciója]

Legyen $\mathcal{M}$ az $\mathcal{E}^n$ -be ágyazott sima sokaság és $\mathcal{M}_\delta$ egy δ -tubuláris környezete valamely $\delta : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ pozitív folytonos leképezésre. Ekkor létezik olyan sima $r : \mathcal{M}_\delta \rightarrow \mathcal{M}$ leképezés, mely egyszerre szubmerziós és retrakció.

73. Tétel. [Whitney-féle approximációs tétel]

Legyen $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ két sima sokaság és $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ folytonos leképezés. Ekkor f homotóp egy sima leképezéssel. Ráadásul, ha f sima egy $A \subseteq \mathcal{M}$ zárt halmazon, akkor ez a homotópia tekinthető A -hoz relatívnak.

74. Tétel. [$\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ leképezés sima kiterjesztése zárt részhalmazról teljes sokaságra]

Legyen $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ két sima sokaság, $\mathcal{N} \supseteq A$ zárt részhalmaz és $f : A \rightarrow \mathcal{M}$ sima leképezés. Az f leképezésnek akkor és csak akkor van sima $\tilde{f} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ kiterjesztése a teljes $\mathcal{N}$ sokaságra, ha létezik folytonos kiterjesztése.

Megjegyzés. A differenciálható sokaságok gyakran csak kiindulópontjai összetettebb struktúrával rendelkező modelleknek. A többletstruktúrák egy része lehet még kompatibilis az Euklideszi terek struktúrájával abban az értelemben, hogy a kérdéses struktúrával ellátott differenciálható sokaságokról továbbra is létezhetnek struktúraörző beágyazások a megfelelő struktúrával kiegészített Euklideszi terekbe. Ilyenre adnak példát a (szemi-)Riemann sokaságok, melyek metrikus struktúrával látják el a differenciálható sokaságokat.

75. Definíció. [Riemann- és szemi-Riemann sokaság]

Az $(\mathcal{M}, g)$ párt szemi-Riemann m -sokaságnak nevezzük, ha $\mathcal{M}$ sima m -sokaság és $g : \mathcal{M} \rightarrow T^{(2,0)}(T(\mathcal{M}))$ sima szelés, melyre minden $p \in \mathcal{M}$ -re $g_p : T_p^{(0,2)}(T(\mathcal{M})) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, nemelfajuló és szimmetrikus. Ha g_p ráadásul minden pontban pozitív definit is, akkor $(\mathcal{M}, g)$ Riemann m -sokaság. Ha nem okoz félreértést, a sokaság dimenziójára nem hivatkozunk annak megnevezésekor.

76. Definíció. [Izometrikus beágyazás]

Legyen $(\mathcal{M}, g)$ és $(\mathcal{N}, h)$ két (szemi-)Riemann sokaság. Az $f : (\mathcal{M}, g) \rightarrow (\mathcal{N}, h)$ beágyazást izometrikusnak nevezzük, ha minden $\mathcal{M} \ni p$ pontra és $u, v \in T_p(\mathcal{M})$ vektorra a következő teljesül:

$$g_p(u, v) = h_{f(p)}(df_p(u), df_p(v)).$$

77. Tétel. [Nash-féle beágyazási tétel]

Legyen $(\mathcal{M}, g)$ egy m -dimenziós (szemi-)Riemann sokaság. Ekkor létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $(\mathcal{M}, g)$ izometrikusan beágyazható $\mathcal{E}^n$ -be.

3.2. A feladat megoldása Euklideszi térbe beágyazható differenciálható sokaságokra

Az Euklideszi terek esetében a megoldás azon alapult, hogy az $\mathbb{R}^m$ Euklideszi tér, mint metrikus topológiával és az identitásleképezéssel, mint atlással ellátott differenciálható sokaság pontjait azonosítani tudjuk a tér egy tetszőleges $\mathbb{R}^m \ni p$ pontjához tartozó $T_p(\mathbb{R}^m)$ érintőtérrel. Így adott $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ leképezés $\mathbb{R}^m \ni q$ pontban felvett értéke kifejezhető egy $\tilde{\phi} \in \mathcal{C}^\infty(T_p(\mathbb{R}^m), T_\phi(p)(\mathbb{R}^m))$ leképezéssel úgy, hogy az 1-es diagram kommutatív legyen.

Sokaságok esetében szintén elő tudunk állítani érintőterek közötti leképezéseket a fenti módon, vagyis megtehetnénk, hogy a sokaságokra általánosítható Jet-ekvivalenciát kihasználva

próbálunk felépíteni olyan leképezéseket, melyekkel kommutatívvá tehetünk ilyen diagramokat. Azonban, ahhoz, hogy az így kapott kifejezéseket a sokaságok részsokaságai közötti (majd pedig a teljes sokaságon értelmezett) leképezéssé terjeszthessük ki, hiányzik a megfeleltetés érintőtér és a sokaság pontjai között.

Az Euklideszi terek egy fontos tulajdonsága, hogy rendelkeznek azzal a globális azonosítással, mellyel a sokaság pontjait tetszőleges pontbeli érintőtér pontjaival azonosítható. Ennek a legegyszerűbb kiaknázásához, szemléletesen a következő módszer lehet alkalmas: ha a sokaságaink Euklideszi terekbe való beágyazásait tekintjük, elvégezzük az azonosítást a beágyazott pontok és az beágyazási tér érintőterei között (ez már nem lesz bijekció, a beágyazási térben lesznek olyan pontok, melyek nem tartoznak a sokasághoz), az érintőterekben megkonstruáljuk a megfelelő leképezéseket, a kapott kiterjesztést visszavisszük a beágyazási térbe, majd megszorítjuk a sokaság pontjaira és visszahúzzuk. A módszer elvi lépéseit a 9-es ábra szemlélteti. Ez az ábra, a következő tétellel együtt, egy igen fontos eredménye a dolgozatnak:

78. Tétel. [Leképezési diagram kiegészítése]

Legyen $(\mathcal{N}, p)$, $(\mathcal{M}, q)$, $(\mathcal{T}, w)$ és $(\mathcal{O}, z)$ adott pontozott sima sokaságok és $G : (\mathcal{N}, p) \rightarrow (\mathcal{T}, w)$, $f : (\mathcal{N}, p) \rightarrow (\mathcal{M}, q)$ és $h : (\mathcal{T}, w) \rightarrow (\mathcal{O}, z)$ három $\mathcal{C}^k$ leképezés. Tegyük fel továbbá, hogy létezik egy $g : (\mathcal{M}, q) \rightarrow (\mathcal{O}, z)$ leképezés, mellyel $g \circ f = h \circ G$ teljesül. A 9-es ábrán megfogalmazott eljárásról a következőket tudjuk állítani:

- (i) A $(0) \mapsto (1)$ áttérés során a $G_{(k)}$, $f_{(k)}$, $h_{(k)}$, $g_{(k)}$ és a G, f, h, g leképezések közötti kapcsolat kölcsönösen egyértelmű;
- (ii) A $(2) \mapsto (3)$ áttérés során, ahol $\iota_{\mathcal{N}}$, $\iota_{\mathcal{M}}$, $\iota_{\mathcal{T}}$ és $\iota_{\mathcal{O}}$ az egyes pontozott sokaságok kijelölt pontjaira centrált szabályos beágyazások megfelelő dimenziós Euklideszi terekbe, kölcsönösen egyértelmű a megfeleltetés $G|, f|, h|, g|$ és $\tilde{G}|, \tilde{f}|, \tilde{h}|, \tilde{g}|$ között;
- (iii) Az $(3) \mapsto (4)$ áttérés során az előző fejezetben tárgyalt megoldást konstruáljuk meg a γ leképezés maximális R konvergenciasugarán belüli U_m^R halmazon. Az $U_m = \iota_{\mathcal{M}}[\mathcal{U}_m] \cap U_m^R$ halmazon $\gamma|_{U_m}$ létezik;
- (iv) Az U_m halmazon $\gamma|_{U_m}$ egyértelműen meghatározza a $\tilde{g}|$ leképezést az $\mathcal{U}_m = \iota_{\mathcal{M}}^{-1}[U_m]$ halmazon: $\tilde{g}|_{\mathcal{U}_m} = \iota_{\mathcal{O}}^{-1} \circ \gamma|_{U_m} \circ \iota_{\mathcal{M}}$;
- (v) Az U_n , U_m és U_t halmazokra megszorítva a Γ, ϕ, ψ leképezéseket, azok megegyeznek az $\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_m, \mathcal{U}_t$ -re megszorított $G|, f|, h|$ és $g|$ leképezések $\tilde{G}|_{\mathcal{U}_n}, \tilde{f}|_{\mathcal{U}_n}, \tilde{h}|_{\mathcal{U}_t}$ megfelelőivel;
- (vi) Az $\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_m, \mathcal{U}_t$ halmazokon $G|_{\mathcal{U}_n} = \iota_{\mathcal{T}}^{-1} \circ \Gamma|_{U_n} \circ \iota_{\mathcal{N}}$, $f|_{\mathcal{U}_n} = \iota_{\mathcal{M}}^{-1} \circ \phi|_{U_n} \circ \iota_{\mathcal{N}}$ és $h|_{\mathcal{U}_n} = \iota_{\mathcal{O}}^{-1} \circ \psi|_{U_t} \circ \iota_{\mathcal{T}}$;
- (vii) $G'|_{\mathcal{U}_n} = G|_{\mathcal{U}_n}$, $f'|_{\mathcal{U}_n} = f|_{\mathcal{U}_n}$ és $h'|_{\mathcal{U}_t} = h|_{\mathcal{U}_t}$;
- (viii) Az $\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_m, \mathcal{U}_t$ és $\mathcal{U}_o$ megfelelő homotópiák általi képeire megszorítva $G'_{(k)}| = G|_{(k)}$, $f'_{(k)}| = f|_{(k)}$ és $h'_{(k)}| = h|_{(k)}$.

Bizonyítás. [A 78-as Tételé]

- (i) A $H_\bullet$ homotópiák inverzei is homotópiák;
- (ii) Adódik abból, hogy $\iota_\bullet^{-1}|_{U_\bullet} : (U_\bullet, 0) \rightarrow (\mathcal{U}_\bullet, *_\bullet)$ mindegyike bijekció, ahol $\bullet \in \{\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{T}, \mathcal{O}\}$ és $*_\bullet \in \{p, q, w, z\}$ a megfelelő pont;
- (iii) Adódik abból, hogy γ létezik az U_m^R halmazon és $U_m \subseteq U_m^R$;
- (iv) Egyértelmű, hiszen $\iota_{\mathcal{M}}, \iota_{\mathcal{O}}^{-1}$ bijekció a kérdéses halmazon;
- (v) A (ii)-es állításból következik;
- (vi) Következik az (v)-ös állításból;
- (vii) A (ii)-es és (vi)-os állításból következik, illetve a G', f', h' leképezések definíciójából;
- (viii) Következik a (vii)-es állításból. ■

Emellett, ha sima leképezéseket tekintünk, és $\mathcal{U}_{\mathcal{N}}, \mathcal{U}_{\mathcal{M}}, \mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ és $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ szabályosan beágyazott sokaságok, a következőket állíthatjuk:

79. Tétel. [Sima sokaságok szabályos beágyazott részsokaságai közötti sima leképezésdiagramjai kiegészítésének létezése és egyértelműsége]

Legyen $(\mathcal{N}, p), (\mathcal{M}, q), (\mathcal{T}, w)$ és $(\mathcal{O}, z)$ adott pontozott sima sokaságok, $G : (\mathcal{N}, p) \rightarrow (\mathcal{T}, w)$, $f : (\mathcal{N}, p) \rightarrow (\mathcal{M}, q)$ és $h : (\mathcal{T}, w) \rightarrow (\mathcal{O}, z)$ három $\mathcal{C}^\infty$ leképezés, $(\mathcal{U}_{\mathcal{N}}, p), (\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, q), (\mathcal{U}_{\mathcal{T}}, w)$ és $(\mathcal{U}_{\mathcal{O}}, z)$ szabályosan beágyazott pontozott részsokaságok. A 9-es ábrán megfogalmazott eljárásról a következőket tudjuk állítani:

- (i) Ha létezik $g \in \mathcal{C}^\infty$, amelyre $g \circ f = h \circ G$ teljesül minden $p \in \mathcal{N}$ pontra, akkor egyértelmű;
- (ii) Ha létezik $g| \in \mathcal{C}^\infty$, amelyre $g| \circ f| = h| \circ G|$ teljesül minden $p \in \mathcal{U}_{\mathcal{N}}$ pontra, akkor egyértelmű;
- (iii) Ha g létezik, akkor egyértelmű, és $g| \in \mathcal{C}^\infty((\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, q), (\mathcal{U}_{\mathcal{O}}, z))$ létezik;
- (iv) Ha $g| \in \mathcal{C}^\infty((\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, q)(\mathcal{U}_{\mathcal{O}}, z))$ létezik, akkor egyértelmű;
- (v) Minden $U_{\mathcal{N}} \subseteq U_n^R, U_{\mathcal{M}} \subseteq U_m^R, U_{\mathcal{T}} \subseteq U_t^R$ és $U_{\mathcal{O}} \subseteq U_o^R$ mellett $g| = \iota_{\mathcal{O}}^{-1} \circ \gamma|_{U_m} \circ \iota_{\mathcal{M}}$ megoldja a (2)-es diagramot, tehát egyértelmű;
- (vi) Minden $U_{\mathcal{N}} \subseteq U_n^R, U_{\mathcal{M}} \subseteq U_m^R, U_{\mathcal{T}} \subseteq U_t^R$ és $U_{\mathcal{O}} \subseteq U_o^R$ mellett az (1)-es diagramnak van megoldása, mégpedig a $G| = \iota_{\mathcal{T}}^{-1} \circ \Gamma|_{U_n} \circ \iota_{\mathcal{N}}, f| = \iota_{\mathcal{M}}^{-1} \circ \phi|_{U_n} \circ \iota_{\mathcal{N}}, h| = \iota_{\mathcal{O}}^{-1} \circ \psi|_{U_t} \circ \iota_{\mathcal{T}}$ és $g| = \iota_{\mathcal{O}}^{-1} \circ \gamma|_{U_m} \circ \iota_{\mathcal{M}}$ kiterjesztéséből adódó leképezésekkel.

Bizonyítás. [A 79-es Tételé]

- (i) g egyértelműsége az 59-es Tétel következménye, ennek a megszorítása adja a $g|$ leképezést;
- (ii) Ismét, $g|$ egyértelműsége az 59-es Tétel következménye;

- (iii) Egyszerű következménye annak, hogy az összes leképezés konvergens a megadott halma-
zokon és $\gamma \circ \phi = \psi \circ \Gamma$ teljesül ezeken;
- (iv) Az előző állítások és a 64-es Tétel kombinált használatából következik.
- (v) Az állítás a konstrukció miatt igaz.
- (vi) Ismét, az állítás a konstrukció miatt igaz. ■

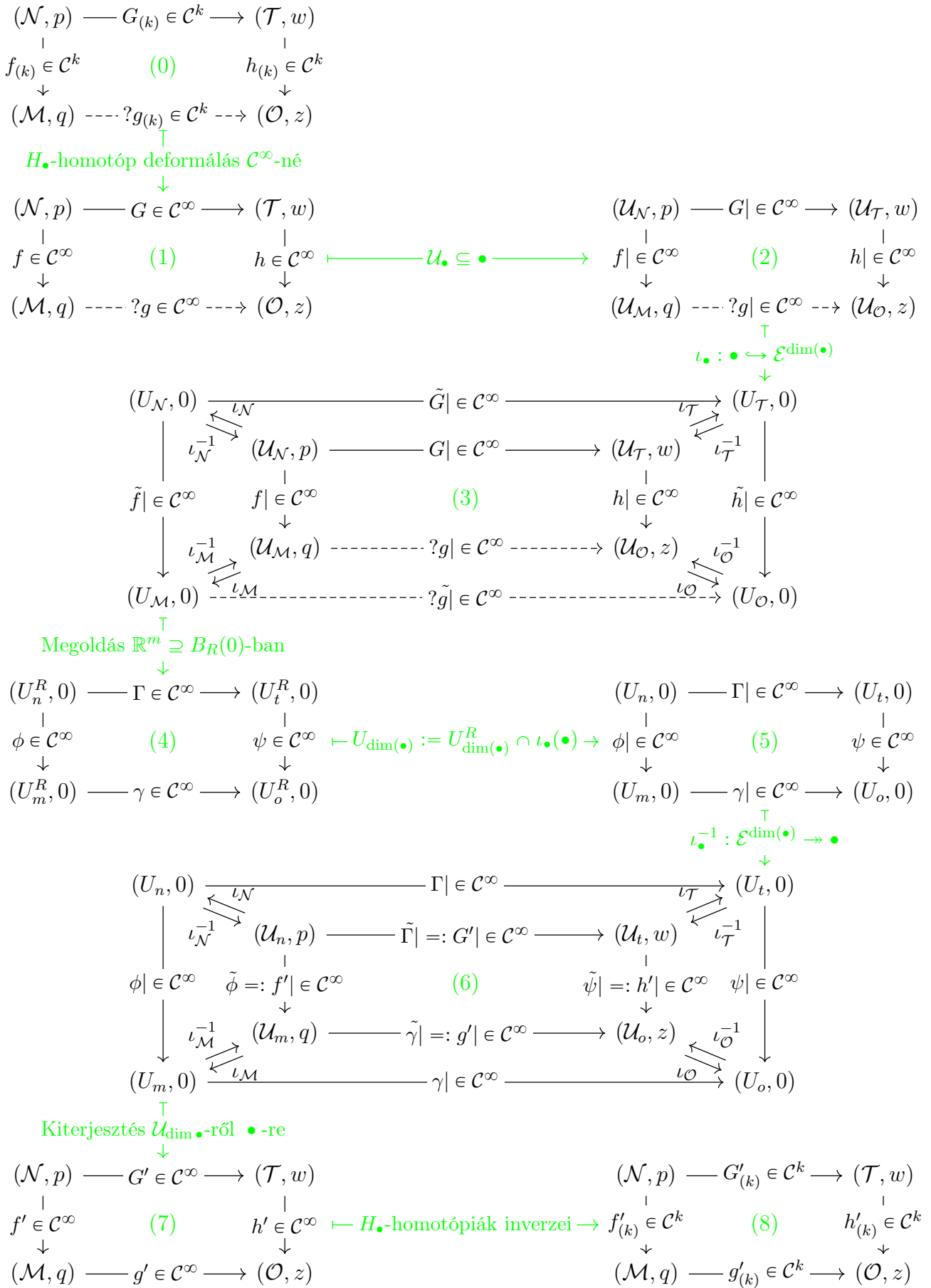
80. Tétel. [Különböző megoldások szuperponálhatósága]

Legyen $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{T}$ és $\mathcal{O}$ adott sima sokaságok és $G \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathcal{T})$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ és $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{T}, \mathcal{O})$ sima leképezések. Legyenek $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{N}$, $q_1, \dots, q_k \in \mathcal{M}$, $w_1, \dots, w_k \in \mathcal{T}$ és $z_1, \dots, z_k \in \mathcal{O}$ olyan pontok, melyekre $G(p_l) = w_l$, $f(p_l) = q_l$ és $h(w_l) = z_l$ teljesül minden $l \in \{1, \dots, k\}$ -ra. Legyenek $\tau_{\mathcal{N}} \ni \mathcal{U}_{\mathcal{N},l} \ni p_l$, $\tau_{\mathcal{M}} \ni \mathcal{U}_{\mathcal{M},l} \ni q_l$, $\tau_{\mathcal{T}} \ni \mathcal{U}_{\mathcal{T},l} \ni w_l$ és $\tau_{\mathcal{O}} \ni \mathcal{U}_{\mathcal{O},l} \ni z_l$ nyílt környezetek, melyek lezártjaihoz tartozó legszűkebb nyílt környezetek diszjunktak, és képezzük ezekből az $(\mathcal{U}_{\mathcal{N},l}, p_l)$, $(\mathcal{U}_{\mathcal{M},l}, q_l)$, $(\mathcal{U}_{\mathcal{T},l}, w_l)$ és $(\mathcal{U}_{\mathcal{O},l}, z_l)$ nyílt pontozott részsokaságokat minden $l \in \{1, \dots, k\}$ mellett. Legyenek $G_1|, \dots, G_k| \in \mathcal{C}^\infty((\mathcal{U}_{\mathcal{N},l}, p_l), (\mathcal{U}_{\mathcal{T},l}, w_l))$, $f_1|, \dots, f_k| \in \mathcal{C}^\infty((\mathcal{U}_{\mathcal{N},l}, p_l), (\mathcal{U}_{\mathcal{M},l}, q_l))$ és $h_1|, \dots, h_k| \in \mathcal{C}^\infty((\mathcal{U}_{\mathcal{T},l}, w_l), (\mathcal{U}_{\mathcal{O},l}, z_l))$ a megfelelő leképezések megfelelő megszorításai. Ekkor a következőket állíthatjuk:

- (i) Ha létezik $g_l| \in \mathcal{C}^\infty((\mathcal{U}_{\mathcal{M},l}, q_l), (\mathcal{U}_{\mathcal{O},l}, z_l))$, amelyre $g_l| \circ f_l| = h_l| \circ G_l|$ teljesül, akkor ez egyértelmű, és vannak olyan $(\mathcal{V}_{\mathcal{N},l}, p_l)$, $(\mathcal{V}_{\mathcal{M},l}, q_l)$, $(\mathcal{V}_{\mathcal{T},l}, w_l)$ és $(\mathcal{V}_{\mathcal{O},l}, z_l)$ pontozott nyílt részsokaságok, hogy $\mathcal{U}_{\mathcal{N},l} \subseteq \mathcal{V}_{\mathcal{N},l}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{M},l} \subseteq \mathcal{V}_{\mathcal{M},l}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{T},l} \subseteq \mathcal{V}_{\mathcal{T},l}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{O},l} \subseteq \mathcal{V}_{\mathcal{O},l}$ és a $G_l|, f_l|, h_l|, g_l|$ leképezések megfelelő sokaságokra való simák kiterjesztései $\mathcal{V}_{\bullet,l}$ -en kívül $*_{\bullet,l}$ -et vesznek fel, ahol $\bullet \in \{\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{T}, \mathcal{O}\}$ és $*_{\bullet} \in \{p, q, w, z\}$;
- (ii) Ha minden $l \in \{1, \dots, k\}$ -re létezik $g_l| \in \mathcal{C}^\infty((\mathcal{U}_{\mathcal{M},l}, q_l), (\mathcal{U}_{\mathcal{O},l}, z_l))$ megoldása a $g_l| \circ f_l| = h_l| \circ G_l|$ feltételnek, akkor létezik olyan $\tilde{g} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{O})$ sima leképezés, amelyre $\tilde{g} \circ f = h \circ G$ teljesül és $\tilde{g}|_{\mathcal{U}_{\mathcal{M},l}} = g_l|$ minden $l \in \{1, \dots, k\}$.

Bizonyítás. [A 80-as Tételé]

- (i) A $g_l|$ leképezés egyértelműsége a 79-es Tétel következménye. A $(\mathcal{V}_{\bullet,l}, *_{\bullet,l})$ részsokaságokat úgy kapjuk meg, hogy a beágyazott $\tilde{G}_l|, \tilde{f}_l|, \tilde{h}_l|$ és $\tilde{g}_l|$ leképezésekre alkalmazzuk a 65-ös Tételt, majd visszahúzzuk azokat az egyes sokaságokra.
- (ii) Az (i)-es pontbeli eljárást elvégezzük minden $l \in \{1, \dots, k\}$ -ra. ■



9. ábra. Euklideszi terekbe ágyazható differenciálható sokaságok közötti leképezési diagram kiegészítése kommutatív diagrammá

4. A módszer következményei, lehetséges alkalmazásai

Ahogy azt már a bevezetőben írtuk, a kommutatív leképezési diagramok egyik legnagyobb jelentősége számítási szempontból, hogy kifejezik, hogy lehet *ugyanazt* a feladatot több módszerrel is megoldani. Ha adott egy kommutatív leképezési diagram, és sikerül abban egy új élt elhelyeznünk úgy, hogy az így kapott, kiegészített diagram továbbra is kommutatív, akkor sikerült (legalább egy) feladatra alternatív megoldást találni.

Leggyakrabban az automatizálni kívánt problémamegoldást úgy érhetjük el, hogy lokálisan Euklideszi terekben reprezentáljuk a rendszer állapotait numerikus számítások elvégzése céljával. Emiatt lokálisan Euklideszi terek – így topológiai-, differenciálható- és sima sokaságok – közötti kommutatív leképezési diagramok kiegészítéseit vizsgáljuk, annak közvetlen alkalmazásai lehetnek numerikus számítások optimalizálásában. Ennek a fejezetnek a célja, hogy röviden összefoglaljon néhány olyan, egyértelműen vagy nem triviális módon adódó alkalmazást, mely a dolgozatban szemléltetett módszerek informatikai hasznára mutathatnak rá.

4.1. Nemlineáris leképezések pszeudoinvertálása

Amikor feladatok megoldását kommutatív diagramok révén kódoljuk, a megjelenő leképezések nagyrésze jó eséllyel nemlineáris leképezés lesz. Ha az a feladatunk, hogy egy ismert megoldású feladat megoldásából próbáljuk következtetni a lehetséges bemenetekre, például algebrai egyenletek eredményeit akarjuk megkereseni, fontos kérdés, hogy azt milyen módon tehetjük meg.

Amennyiben a kérdéses kommutatív leképezési diagramban Euklideszi terek és közöttük való lineáris leképezések jelennek meg, ez az invertálás valamilyen értelemben megoldható. Ennek az esetnek a tárgyalása jelentős szakirodalommal rendelkezik, melynek egyik alapműve Roger Penrose-tól származik [6]:

81. Tétel. [Lineáris terek közötti leképezés Moore-Penrose pszeudoinverze]

Legyen $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ két véges dimenziós Euklideszi tér és $\mathcal{A} : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ lineáris leképezés. Legyen $n = \dim \mathcal{E}_1, m = \dim \mathcal{E}_2$. Tekintük az $\mathcal{E}_1$ és $\mathcal{E}_2$ terek egy tetszőleges bázisát, melyen reprezentáljuk az $\mathcal{A}$ leképezést egy $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{m,n}$ valós mátrixként. Ekkor létezik és egyértelmű az az $A^+ \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n,m}$ mátrix, melyre az alábbi négy feltétel teljesül:

- $AA^+A = A$ és $A^+AA^+ = A^+$
- $(AA^+)^* = AA^+$ és $(A^+A)^* = A^+A$

Ezt az A^+ mátrixot az A mátrix lineáris- vagy Moore-Penrose pszeudoinverzének nevezzük.

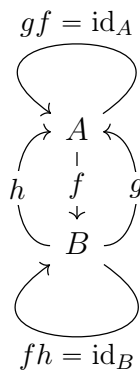
82. Állítás. [A lineáris pszeudoinverz kiszámítása speciális esetekben]

Amennyiben a 81-es tételben szereplő A mátrix olyan, hogy az $A^*A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{m,m}$ mátrix invertálható, akkor $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$, és így A^+ bal oldali inverze is A -nak, vagyis $A^+A = 1_{m,m}$ teljesül. Hasonlóan, ha az $AA^* \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{n,n}$ mátrix invertálható, akkor $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$, és így A^+ jobb oldali inverze is A -nak, vagyis $AA^+ = 1_{n,n}$ teljesül.

Amennyiben a leképezések nemlineárisak, azoknak általánosított inverzeiről beszélünk. Ezek, ahogy az elnevezés is jelzi, megpróbálják általánosítani azt az inverz-fogalmat, amely lineáris esetben könnyen megfogalmazó. A lehetséges definíciók széles skálája létezik felhasználási céltól és vizsgált leképezési csoporttól függően, azonban természetesen mindegyik a következő tulajdonságokat gyengíti:

83. Definíció. [Leképezés bal- és jobb oldali inverze]

Legyen C egy kategória, A, B két objektum és $f \in \text{Hom}(A, B)$. Ekkor az f leképezés bal-, illetve jobb oldali inverze alatt olyan $g, h \in \text{Hom}(B, A)$ leképezéseket értünk, melyekre $gf = \text{id}_A$, illetve $fh = \text{id}_B$ teljesülnek. Márképp, a 10-es diagram kommutatív.



10. ábra. Leképezés jobb- és bal oldali inverze

Azt, hogy egy általánosított inverztől a fenti mellett milyen erős vagy gyengébb tulajdonságokat várunk el, széles körben változik. Közös azonban, hogy a legtöbb ilyen általánosított inverz ténylegesen csak nehezen megkonstruálható. A leggyakoribb módszerek egy leképezés gyenge jobb- vagy bal-inverzének keresésére a következők:

1. Regularizációs módszerek ([7], [8], [9]): A Tyihonov-regularizáció vagy a Lasso-regularizáció általánosan használt regularizációs módszer sima nemlineáris leképezések közelítő inverzeinek kiszámítására. Ezek a módszerek gyakran valamilyen büntető taggal korlátozzák az invertálás során kapott megoldásokat, így akadályozva a túlillesztést vagy az instabilitást. A regularizáció bevezetésével a megoldás stabilabbá és robusztusabbá tehető a zajjal vagy a bemeneti zavarokkal szemben.
2. Kernel-módszerek ([10], [11], [12]): A kernel-módszerek, mint például az RBF (radial basis functions) vagy SVM (support vector machines), nemlineáris leképezések közelítésére használhatóak. A bemeneti adatokat egy magas dimenziós térbe ágyazva, azokon lineáris regressziót végeznek. A lineáris regresszió inverze ezután a nemlineáris leképezés közelítő inverzeként használható.
3. Neurális háló alapú megközelítések ([13]): Az alapvető elképzelés az, hogy neurális hálókat tanítunk meg adott feladat elvégzésére, és rétegenként végzünk el egyfajta gyenge pszeudoinvertálást, amiből megpróbálunk következtetni olyan bemenetre, amely a megfelelő kimenetet produkálhatta.

A fenti módszerek mind széles körben elterjedtek, és, ahogy az lenni szokott, mindnek megvan a maga előnye és hátránya egyaránt. Egyrészt, a regularizációs módszerek sokat segítenek abban, hogy aluldeterminált feladatok megoldásai közül a kevésbé instabilakat tudjuk megtalálni. A kernel-módszerek egy nagy előnye, hogy komplex összefüggéseket is fel tudnak térképezni. A neurális háló alapú megközelítések pedig jó minőségű és viszonylag könnyen kezelhető modellt szolgáltatnak, melyben a kérdéses feladat megoldása részekre bontható. Ugyanakkor, a legtöbb ilyen módszer erősen adatintenzív: hatásfokuk nagyban függ a rendelkezésre álló adatpontok számától. Másképp: ezek a módszerek akkor lehetnek igazán hatásosak, ha vagy explicit módon nem ismerünk olyan megoldást, amely a megfelelő bemenet - kimenet párokat összeköti, vagy pedig a vizsgált leképezés könnyen kiszámítható.

Amikor egy összetett nemlineáris modellt akarunk invertálni, egyrészt természetes módon adottak a modellt alkotó leképezések, másrészt kifejezetten idő- és memóriaintenzív lehet azokat rengeteg adatpontra kiértékelni. Emellett, általában a pszeudoinvertálás célja olyan adatokat nyerni, melyekkel aztán további műveleteket tudunk elvégezni. Ezért jogos lehet bevezetni a következő pszeudoinverz fogalmat:

84. Definíció. [Sima sokaságok közötti sima leképezés (Γ, ψ) -pszeudoinverze]

Legyen $\mathcal{N}, \mathcal{M}, \mathcal{T}, \mathcal{O}$ négy adott sima sokaság, $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathcal{T})$, $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{T}, \mathcal{O})$ két sima leképezés. A $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ leképezés (Γ, ψ) -pszeudoinverzén, ha létezik, azt a φ leképezést értjük, melyre a 11-es ábrán szereplő (2)-es leképezési diagram kommutatív, ha az (1)-es is az.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{N} & \xrightarrow{\Gamma \in \mathcal{C}^\infty} & \mathcal{T} \\
 \downarrow \phi \in \mathcal{C}^\infty & (1) & \downarrow \psi \in \mathcal{C}^\infty \\
 \mathcal{M} & \xrightarrow{\gamma \in \mathcal{C}^\infty} & \mathcal{O}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{N} & \xrightarrow{\Gamma \in \mathcal{C}^\infty} & \mathcal{T} \\
 \uparrow \varphi \in \mathcal{C}^\infty & (2) & \downarrow \psi \in \mathcal{C}^\infty \\
 \mathcal{M} & \xrightarrow{\gamma \in \mathcal{C}^\infty} & \mathcal{O}
 \end{array}$$

11. ábra. Sima sokaságok közötti sima ϕ leképezés (Γ, ψ) -pszeudoinverze

Megjegyzés. A fenti típusú pszeudoinverz egyik nagy előnye, hogy szabadságunk van megválasztani a Γ és ψ leképezéseket. Ezt indokolhatja a pszeudoinvertálás eredményének későbbi felhasználása, vagy más kényelmi szempont, például kiszámíthatóság. A következő speciális típusú pszeudoinverz kisebb szabadságot ad, mégis sok szempontból praktikus:

85. Definíció. [Sima sokaságok közötti sima leképezés Γ -pszeudoinverze]

Legyen $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ két sima sokaság, $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathcal{T})$ egy sima leképezés. A $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ leképezés Γ -pszeudoinverzén, ha létezik, azt a φ leképezést értjük, melyre a 12-es ábrán szereplő (2)-es leképezési diagram kommutatív, ha az (1)-es is az.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{N} & \xrightarrow{\Gamma \in \mathcal{C}^\infty} & \mathcal{N} \\
 \downarrow \phi \in \mathcal{C}^\infty & (1) & \downarrow \phi \in \mathcal{C}^\infty \\
 \mathcal{M} & \xrightarrow{\gamma \in \mathcal{C}^\infty} & \mathcal{M}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{N} & \xrightarrow{\Gamma \in \mathcal{C}^\infty} & \mathcal{N} \\
 \uparrow \varphi \in \mathcal{C}^\infty & (2) & \uparrow \varphi \in \mathcal{C}^\infty \\
 \mathcal{M} & \xrightarrow{\gamma \in \mathcal{C}^\infty} & \mathcal{M}
 \end{array}$$

12. ábra. Sima sokaságok közötti sima ϕ leképezés Γ -pszeudoinverze

Megjegyzés. Amennyiben $\Gamma = \text{id}_{\mathcal{N}}$, a $\gamma = \text{id}_{\mathcal{M}}$ mindig megoldja a 12-es ábra (1)-es kommutatív diagramját, és ekkor φ , ha létezik, ϕ jobb-inverze lesz.

Ha adott pszeudoinvertálási feladatot a dolgozat előző fejezetében megadott megoldási módszerek segítségével akarunk megoldani, érdemes figyelmet szentelni arra az esetre, amikor a leképezéseink pontozott sima sokaságok közöttiek:

86. Definíció. [Pontozott sima sokaságok közötti sima leképezés Γ -pszeudoinverze]

Legyen $(\mathcal{N}, p), (\mathcal{M}, q)$ két sima sokaság, $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty((\mathcal{N}, p), (\mathcal{M}, q))$ egy sima leképezés. A $\phi \in \mathcal{C}^\infty((\mathcal{N}, p), (\mathcal{M}, q))$ leképezés Γ -pszeudoinverzén, ha létezik, azt a φ leképezést értjük, melyre a 13-as ábrán szereplő (2)-es leképezési diagram kommutatív, ha az (1)-es is az.

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{N}, p) & \xrightarrow{\Gamma \in \mathcal{C}^\infty} & (\mathcal{N}, p) \\
 \downarrow \phi \in \mathcal{C}^\infty & (1) & \downarrow \phi \in \mathcal{C}^\infty \\
 (\mathcal{M}, q) & \xrightarrow{\gamma \in \mathcal{C}^\infty} & (\mathcal{M}, q)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (\mathcal{N}, p) & \xrightarrow{\Gamma \in \mathcal{C}^\infty} & (\mathcal{N}, p) \\
 \uparrow \varphi \in \mathcal{C}^\infty & (2) & \uparrow \varphi \in \mathcal{C}^\infty \\
 (\mathcal{M}, q) & \xrightarrow{\gamma \in \mathcal{C}^\infty} & (\mathcal{M}, q)
 \end{array}$$

13. ábra. Pontozott sima sokaságok közötti sima ϕ leképezés Γ -pszeudoinverze

Ha leképezések Γ -pszeudoinverzeit tekintjük valamilyen pontozott sokaságokon, a 13-as ábra által adott (2)-es diagram kommutativitásából egyenletek lokális egyenletek adódnak, melyeket speciális esetekben minden további nélkül meg tudunk oldani Euklideszi terekbe való beágyazással, majd visszahúzzhatjuk a megoldást, aminek az eredménye a konvergenciatartományon egyértelmű. Ilyen speciális eset, ha a Γ leképezés (lokális) nyújtásként jelenik meg, amit az egyszerűség kedvéért Euklideszi terekre mondunk ki:

87. Definíció. [Pontozott Euklideszi terek közötti sima leképezés c -pszeudoinverze]

Legyen $(\mathcal{E}^n, 0), (\mathcal{E}^m, 0)$ két pontozott Euklideszi tér, $(\mathbb{R}_{>0} \setminus 1) \ni c$ tetszőleges pozitív $\neq 1$ skalár, és $\Gamma = c \cdot \text{id}_{\mathcal{E}^n}$ skálázás. A $\phi \in \mathcal{C}^\infty((\mathcal{E}^n, 0), (\mathcal{E}^m, 0))$ leképezés c -pszeudoinverzén, ha létezik, annak Γ -pszeudoinverzét értjük.

88. Állítás. [c -pszeudoinverz létezése]

Pontozott Euklideszi terek közötti sima leképezés c -pszeudoinverze létezik valamely $B_R(0) \subseteq \mathcal{E}^m$ halmazon.

Bizonyítás. [A 88-as Állításé]

Némi számolás után, az egyenletek, melyeket tetszőleges Γ -inverz meghatároz, a következő alakúak rögzített $k = 1, \dots, \dim(X)$, illetve $\beta_1, \dots, \beta_r = 1, \dots, \dim(Y)$ értékek mellett:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{0 \ l_1, \dots, l_r}^{(r)k} \cdot \prod_{i=1}^r \varphi_{0 \ \alpha_i}^{(1)l_i} &= \varphi_{0 \ \beta_1, \dots, \beta_r}^{(r)k} \cdot \left(\prod_{i=1}^r \phi_{0 \ s_i}^{(1)\beta_i} \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^r \Gamma_{0 \ t_i}^{(1)s_i} \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^r \Phi_{0 \ \alpha_i}^{(1)t_i} \right) = \\
 &= R_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}^k (J_{x_0}^0 \phi, \dots, J_0^r \phi, J_0^0 \phi, \dots, J_0^r \phi, J_0^0 \Gamma, \dots, J_0^r \Gamma),
 \end{aligned}$$

ahol $f^{(r)^k}_{p, l_1, \dots, l_r}$ az f leképezés $\text{Dom}_f \ni p$ -beli r -Jetének felel meg, automatikus összegzés van az $l_1, \dots, l_r, s_1, \dots, s_r, t_1, \dots, t_r = 1, \dots, \dim(X)$, illetve a $\beta_1, \dots, \beta_r = 1, \dots, \dim(Y)$ értékekre, illetve $R^k_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}$ egy ismert, a $J^0_0 \phi, \dots, J^r_0 \phi, J^0_0 \Gamma, \dots, J^r_0 \Gamma$ Jet-ekből kifejezhető mennyiség. Emellett, $\Phi^{(1)}_0$ a ϕ leképezés 0-beli lineáris közelítésének Moore-Penrose pszeudoinverze. Ezek az egyenletek $\Gamma = c \cdot \text{id}_{\mathcal{E}^n}$ esetében egyszerűen megoldhatóak. ■

Ha tekintünk egy 1-hez tartó $c_n : n \in \mathbb{N}$ sorozatot, megkonstruálhatjuk az ezeknek megfelelő c_n -pszeudoinverzek egy sorozatát. Ha a c_n -pszeudoinverzek egy sorozata valamilyen 0 körüli nyílt környezetben legalább pontonként konvergál egy értékhez, azt tekinthetjük a ϕ leképezés egy pszeudoinverzének:

89. Definíció. [Pontozott Euklideszi terek közötti sima leképezés $(c_n : n \in \mathbb{N})$ -pszeudoinverze] Legyen $(\mathcal{E}^n, 0), (\mathcal{E}^m, 0)$ két pontozott Euklideszi tér, $c_n : n \in \mathbb{N}$ egy tetszőleges, sehol sem 1 értékű pozitív valós sorozat, és legyen $\Gamma_n = c_n \cdot \text{id}_{\mathcal{E}^n}$ skálázások egy sorozata. A $\phi \in C^\infty((\mathcal{E}^n, 0), (\mathcal{E}^m, 0))$ leképezés $(c_n : n \in \mathbb{N})$ -pszeudoinverzén, ha létezik, a Γ_n -pszeudoinverzek sorozatának pontonkénti limeszét mondjuk.

Megjegyzés. A Γ -pszeudoinvertálás elképzelése tehát a következő: ha ismerem egy ϕ leképezés hatását adott téren, megnézhetjük, hogy mi változik, ha a tér pontait eltranszformáljuk. Ha egyszerű transzformációt hajtunk végre, egyszerre tudjuk követni a transzformáció okozta változást, és egyszerre tudunk elég információt adni ahhoz, hogy ebből már kényelmesen meg tudjunk konstruálni egy pszeudoinverzet. Ha ráadásul egyre kisebb módosításokat hajtunk végre, és tekintjük az ezekből kapott pszeudoinverzek sorozatának pontonkénti limeszét, azzal ki tudjuk számítani adott leképezés tényleges pszeudoinverzét - hiszen speciális esetben, ha egy sima bijektív leképezésből indulunk ki, tényleg a leképezés inverzét kapjuk vissza. A dolgozatban felvázolt eljárások és tételek következtében sokat tudunk mondani arról, milyen körülmények között várhatunk megoldást a problémára, és milyen hibát eredményezhet az adott leképezések véges sok taggal való közelítése. Emellett, a következő két alfejezetben kitérek arra, mikor lehet több pszeudoinverze is egy leképezésnek, és ez hogyan kapcsolódik az egzakt sorok elméletéhez.

4.2. Modellek invariáns transzformációinak keresése

Számos, létező modell esetében fontos eldönteni, hogy a bemenet milyen transzformációi szolgáltatnak azonos eredményt. A fizikában a relativitáselmélet megszületéséhez vezetett annak a felismerése, hogy a Maxwell-törvények nem invariánsak a Galilei-csoport minden transzformációjára nézve; robosztus numerikus modellek kialakítása során pedig törekszünk arra, hogy adott bemenet természetes transzformációira (pl. kép forgatása, szórend megváltoztatása azonos jelentéstartalom mellett, stb.) legyen invariáns az adott eljárás.

Modellek invariáns transzformációinak keresése során általában két típusú kérdés merül fel: egyrészt, invariáns-e a modellem (akár csak a lehetséges bemenetek egy kitüntetett rész-halmazán) egy általam megadott transzformációra, másrészt, melyek azok a transzformációk, melyekre a modellem invariáns. Ezek bizonyos értelemben ekvivalens kérdések: ha a másodikra

tudom a választ, akkor az elsőre is könnyen válaszolni tudok. Ha minden lehetséges transzformáció mellett ismerem a választ az első kérdésre, akkor a második kérdésre is ismerem a választ.

A gyakorlatban leginkább arra vagyunk kíváncsiak, hogy az általunk kiválasztott transzformációkra invariáns-e a modell, így az első kérdés vizsgálata sokkal gyakrabban bukkan fel, mint a második kérdése. Ugyanakkor, a második kérdést vizsgálni sok szempontból egyszerűbb és praktikusabb is: ha szabályozni szeretnénk, hogy milyen transzformációkra adjon azonos eredményt egy feladat megoldására tervezett algoritmus, ezáltal elkerülve annak hibás működését, muszáj ismernünk adott modell összes olyan transzformációját, amire invariáns eredményt szolgáltat.

Ebben a rövid alfejezetben tömören kitérek arra a kérdésre, hogy adott folytonos modellek (pl. gyakori természettudományos modellek vagy neurális hálók) mellett miként tudjuk megfogalmazni az invariáns transzformációk meglétét, és hogyan segíthetnek ebben dolgozatom eredményei.

90. Definíció. [Sima sokaságok közötti sima leképezés sima invariáns transzformációja]

Legyen $\mathcal{N}, \mathcal{M}$ két sima sokaság, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ sima leképezés. Ekkor a $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}, \mathcal{N})$ sima leképezést a ϕ leképezés sima invariáns transzformációjának nevezzük, ha a 14-es diagram kommutatív. Ezek a transzformációk csoportot alkotnak.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{N} & \xrightarrow{\Gamma \in \mathcal{C}^\infty} & \mathcal{N} \\
 \downarrow \phi \in \mathcal{C}^\infty & & \downarrow \phi \in \mathcal{C}^\infty \\
 \mathcal{M} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{M}}} & \mathcal{M}
 \end{array}$$

14. ábra. Sima sokaságok közötti sima ϕ leképezés Γ sima invariáns transzformációja

Tehát, ha ϕ ismert, és az a kérdés, hogy adott Γ leképezés invariáns transzformáció-e, akkor elég a fenti diagram kommutativitását megvizsgálni a maximális értelmezési tartományra. Fordítva, ha a ϕ leképezés által reprezentált modell sima invariáns transzformációit keressük, az ekvivalens azzal, hogy keressük az összes olyan Γ leképezést, amivel a 14-es diagram kommutatív lesz. Nemidentikus sima invariáns transzformációk megléte azt jelenti, hogy a dolgozat 2. Fejezetében bemutatott megoldás esetében az egyes (r) -ed rendű kommutatív diagramok néhány ága automatikusan a 0 leképezést adja, vagyis a kapott egyenletrendszer alulhatározott. Ezen lépéseknél lehetőségünk van a megfelelő rendű multilineáris sorfejtési tagokat szabad(abb) megadni. Az így kapott megoldások pedig mindannyian kommutatívan kiegészítik a kérdéses diagramot. Mivel ezek a transzformációk csoportot alkotnak, így ha egy adott nemidentikus transzformációt megtaláltunk, annak a hatványaiként előálló invariáns transzformációkat is automatikusan ismerni fogjuk.

4.3. Egzakt sorok szerepe

Az előző fejezet végén előkerült annak a kérdése, hogy mit jelent egy modell invariáns transzformációinak megléte az Euklideszi terek közötti leképezési diagramok r -Jet diagramjainak megoldása szemszögéből. A sima invariáns transzformációk megléte arra volt visszavezethető, hogy adott leképezési diagram esetében az egyik út azonosan 0 leképezést adott. Ezért nagyon röviden kitérek a (rövid) egzakt sorokra, hogy rámutassak azok relevanciájára a kérdés vizsgálatában.

91. Definíció. [Hosszú egzakt sor]

A hosszú egzakt sor vagy egyszerűen egzakt sor olyan leképezési diagram, mely, mint gráf, út, és amelyben adott él képe a következő él magja, ahogy a 15-ös diagram szemlélteti.

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} A_2 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} A_{n-1} \xrightarrow{f_n} A_n$$

15. ábra. Példa egzakt sorra: $A_i \in C$, $f_i \in \text{Hom}(A_{i-1}, A_i)$ és $\text{Im} f_i = \text{Ker} f_{i+1}$.

92. Definíció. [Rövid egzakt sor]

A a 16-os diagramon szereplő egzakt sort rövid egzakt sornak nevezzük.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

16. ábra. Rövid egzakt sor.

Tehát, az, ha adott modell rendelkezik valamilyen nemtriviális sima invariáns transzformációval, szükségszerűen azt is jelenti, hogy olyan leképezési diagramot akarunk kiegészíteni kommutatív módon, amiben egy egzakt sor szerepel, ahogy azt a 17-es ábra szemlélteti.

$$\begin{array}{ccccccc}
 (\mathcal{E}^n, 0) & \xrightarrow{\Gamma \in \mathcal{C}^\infty} & (\mathcal{E}^t, 0) & & 0 \longrightarrow (\mathcal{E}^n, 0) & \xrightarrow{J_0^{\infty, r} \Gamma} & (\mathcal{E}^t, 0) \\
 \downarrow \phi \in \mathcal{C}^\infty & & \downarrow \psi \in \mathcal{C}^\infty & \xrightarrow{\text{green } J_0^r(\bullet)} & \downarrow J_0^{\infty, r} \phi & (r) & \downarrow J_0^{\infty, r} \psi \\
 (\mathcal{E}^m, 0) & \xrightarrow{? \gamma \in \mathcal{C}^\infty} & (\mathcal{E}^o, 0) & & (\mathcal{E}^m, 0) & \xrightarrow{? J_0^{\infty, r} \gamma} & (\mathcal{E}^o, 0) \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & 0
 \end{array}$$

17. ábra. Rövid egzakt sor.

Ha a 17-es diagramon valamilyen $r \in \mathbb{N}$ mellett a $0 \rightarrow \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^t \rightarrow \mathcal{E}^o \rightarrow 0$ leképezési út rövid egzakt sor, akkor a $J_0^{\infty, r} \phi$ Jet függvényében létezhet olyan $J_0^{\infty, r} \gamma$ nemnulla leképezés is, amire a $0 \rightarrow \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^m \rightarrow \mathcal{E}^o \rightarrow 0$ sor is egzakt lesz. A legnagyobb szabadság akkor adódik, amikor $J_0^{\infty, r} \phi$ zérus leképezés, ekkor minden $J_0^{\infty, r} \gamma$ leképezéssel ki tudjuk egészíteni az r -ed rendű diagramot kommutatív módon.

Összefoglalás

Összességében, dolgozatomban azt vizsgáltam, miként lehet Euklideszi terekbe ágyazható sima leképezésből álló kommutatív diagramokat kiegészíteni. A kérdés vizsgálata mögötti motivációt az összetett feladatok numerikus megoldásainak megtalálásának és optimalizálásának kérdése adta.

A dolgozat eredményeként számos tételt sikerült belátni azzal kapcsolatban, hogy mikor lehet a vizsgált diagramok kiegészítését megadni. Tárgyaltuk az adott megoldás létezésének és egyértelműségének kérdését, illetve a bizonyos értelemben független megoldások szuperponálhatóságát. Bevezettünk egy új típusú nemlineáris pszeudoinverz fogalmat, mely speciális esetben visszaadja a megszokott általánosított inverzet, és mely egyszerű esetekben analitikusan is megkonstruálható. Kitértünk arra, hogyan lehet ezen típusú nemlineáris pszeudoinverzek sorozatából előállítani egy általánosított pszeudoinverzet. Végezetül, megmutattuk, hogyan kapcsolódik a dolgozat tartalma modellek invariáns transzformációinak kereséséhez, és kitértünk arra, hogy az ilyen invariáns transzformációk meglétét hogyan láthatjuk előre az egyes leképezési diagramokhoz rendelt adott rendű Jet-diagramokban megjelenő egzakt sorokkal.

Köszönet

Szeretnék köszönetet mondani családomnak folyamatos támogatásukért. Emellett szeretnék köszönetet mondani a Bolyai Kollégium, az Eötvös József Collegium és a Márton Áron Szakkollégium közösségének szellemi és/vagy anyagi támogatásáért, melynek hála e kutatás megvalósulhatott. Megköszönöm a Magyar Innovációs Szövetség és MATEHETSZ támogatását, mely révén kutatásommal részt vehettem a Stockholm International Youth Science Seminar 2022 rendezvényen 2022. december 3. és 11. között, és prezentálhattam munkám a Nobel-hét során. A dolgozat a Kulturális és Innovációs Minisztérium ÚNKP-22-2 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.



Hivatkozások

- [1] J.J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Universitext. Springer New York, 2008.
- [2] D. Eisenbud. *Commutative Algebra: With a View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1995.
- [3] J.P. Marquis. *From a Geometrical Point of View: A Study of the History and Philosophy of Category Theory*. Logic, Epistemology, and the Unity of Science. Springer Netherlands, 2008.
- [4] Loring W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Springer, 2011.
- [5] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2013.
- [6] Roger Pensrose. A generalized inverse for matrices. 1955.
- [7] A.K.M.E. Saleh, M. Arashi, and B.M.G. Kibria. *Theory of Ridge Regression Estimation with Applications*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 2019.
- [8] M. Taddy. *Business Data Science: Combining Machine Learning and Economics to Optimize, Automate, and Accelerate Business Decisions*. McGraw Hill LLC, 2019.
- [9] R. Kress. *Numerical Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.
- [10] Yin-Wen Chang, Cho-Jui Hsieh, Kai-Wei Chang, Michael Ringgaard, and Chih-Jen Lin. Training and testing low-degree polynomial data mappings via linear svm. *Journal of Machine Learning Research*, 11(48):1471–1490, 2010.
- [11] B. Schölkopf, K. Tsuda, and J.P. Vert. *Kernel Methods in Computational Biology*. A Bradford book. Bradford Bks, 2004.
- [12] T. Hastie, R. Tibshirani, and J. Friedman. *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction, Second Edition*. Springer Series in Statistics. Springer New York, 2009.
- [13] A.S. El-Baz and J. Suri. *State of the Art in Neural Networks and Their Applications: Volume 1*. Number 1. k. Elsevier Science, 2021.