

Budapesti Corvinus Egyetem

Adatelemzés és Informatika Intézet

Bónusz-málusz rendszerek vizsgálata kárnagyság alapú átsorolások esetén



Csahók Mihály

Gazdaságinformatikus alapképzés

III. évfolyam

2023

Témavezető: Ágoston Kolos Csaba

Tudományos Diákköri Dolgozat

Absztrakt

A bónusz-málusz rendszer egyike a biztosítók által használt kockázatkezelési technikáknak. Legfontosabb alkalmazása a kötelező gépjármű-felelősségbiztosítás területén figyelhető meg. A bónusz-málusz rendszerek célja, hogy az elmúlt időszak káradatai alapján úgy sorolja a biztosítottakat ún. bónusz-málusz osztályokba, hogy az ügyfelek tényleges kockázatuknak leginkább megfelelő díjat fizessenek. A bónusz-málusz rendszerek fontos paramétere az átsorolási szabály, mely meghatározza, hogyan változik a biztosítottak osztálybesorolása az egyes időszakokban.

A csoportosítás és átsorolás az irodalom nagy részében és a gyakorlatban a károk száma alapján történik. Vizsgálódásom tárgyát azonban egy másik megközelítés adja, mely szerint a csoportosítást az okozott kár nagysága alapján érdemes végezni. Dolgozatomban a bónusz-málusz rendszer optimális paramétereire, illetve az optimum létezésének feltételeire keresek zárt alakokat, és azt vizsgálom, hogy a legegyszerűbb rendszeren túl is megtehető-e ugyanez. Munkámban kitérek a bónusz-málusz rendszerek szelekciós képességének mérésre, és ebben a témakörben is zárt alakok létezésének bizonyításával foglalkozom, melyekkel a különböző rendszerek expliciten összehasonlíthatóvá válnak.

Először definiáljuk a bónusz-málusz rendszert leíró nemlineáris programozási feladatot, majd megadunk kétfajta eloszlástípust (Pareto-eloszlás és exponenciális eloszlás). A dolgozat későbbi részében általános állításokat teszünk a rendszerről, illetve bizonyítjuk ezeket. Az optimális prémiumok és küszöbértékek – azaz a rendszer optimuma – ezen állítások segítségével Pareto-eloszlás speciális eseteiben és exponenciális eloszlás esetén a klasszikus analízis eszközeivel számolhatók. Pareto-eloszlás általános esetében azonban csak a létezés és az egyértelműség állítható optimumról. A szelekciós képesség mutatószámának optimális értékére zárt alak hozható a biztosított csoportok arányainak segítségével. A vizsgált modell bővítéseként, bonyolultabb bónusz-málusz struktúra esetén nem feltétlenül biztosítható, hogy akár az optimális prémiumokra, akár a küszöbértékekre zárt alak adható.

Kulcsszavak: Bónusz-málusz rendszer; Nemlineáris optimalizálás; Pareto-eloszlás; Exponenciális eloszlás; Klasszikus analízis

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Módszertan	4
2.1. A bónusz-málusz modell	4
2.2. Pareto-eloszlás	7
2.3. Exponenciális eloszlás	9
3. A modell optimalizálása	11
3.1. A célfüggvény vizsgálata	12
3.2. Optimum Pareto-eloszlás esetén	17
3.3. Optimum exponenciális eloszlás esetén	31
4. A modell mérése	37
4.1. Mutatók bevezetése	37
4.2. Ω minimalizálása Pareto-eloszlás esetén	39
4.3. Ω minimalizálása exponenciális eloszlás esetén	43
5. Összefoglalás	46
Irodalomjegyzék	47

Ábrák

1.	Pareto-eloszlás.	8
2.	Exponenciális eloszlás.	9
3.	Elsőrendű feltétel teljesülése rögzített $\alpha = 2$, $\beta_1 = 3$ és $\beta_2 = 1$ mellett. . . .	23
4.	Küszöbértékek β_1 és β_2 függvényében. ($\alpha = 2$ és $\phi^1 = \frac{1}{2}$)	24
5.	Elsőrendű feltétel teljesülése rögzített $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 5$ és $\beta = 1$ mellett. . . .	28
6.	Küszöbértékek α_1 és α_2 függvényében. ($\beta = 1$ és $\phi^1 = \frac{1}{2}$)	29
7.	Elsőrendű feltétel teljesülése általános Pareto-eloszlás esetén.	31
8.	Elsőrendű feltétel teljesülése rögzített $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 4$ mellett.	35
9.	Küszöbértékek λ_1 és λ_2 függvényében. ($\phi^1 = \frac{1}{2}$)	36
10.	ϕ^1 értéke minimális Ω mellett, β_1 és β_2 függvényében. ($\alpha = 2$)	41

Táblázatok

1.	NLP modell optimuma $\alpha_1 = \alpha_2$ paraméterű Pareto-eloszlás esetén. ($\phi^1 = \frac{1}{2}$)	20
2.	NLP modell optimuma $\beta_1 = \beta_2$ paraméterű Pareto-eloszlás esetén. ($\phi^1 = \frac{1}{2}$)	26
3.	NLP modell optimuma exponenciális eloszlás esetén. ($\phi^1 = \frac{1}{2}$)	34
4.	Ω értéke ϕ^1 függvényében. ($\alpha = 2$, $\beta_1 = 3$ és $\beta_2 = 1$)	40
5.	Ω értéke ϕ^1 függvényében. ($\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 5$ és $\beta = 1$)	42
6.	Ω értéke ϕ^1 függvényében. ($\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 4$)	44

1. Bevezetés

A bónusz-málusz rendszerek – hazai irodalomban jellemzően BM-rendszerek – a biztosítási módszerek egyik sokat kutatott területét alkotják. Gyakorlati alkalmazásának hétköznapi példája a kötelező gépjármű-felelősségbiztosítás (KGFB). Alapját a biztosított egyének feltételezett heterogenitása adja. A rendszer célja a biztosítottak minél hatékonyabb csoportosítása egy meghatározott tulajdonság mentén. A feltételezett csoportok kialakításához tulajdonképpen az egyének tetszőleges tulajdonságát használhatjuk. Az így kialakított csoportoknak azonban két követelménynek meg kell felelniük. Egyrészt az egyes csoportokon belül – a csoportképző szempont szerint – az egyéneknek homogéneknek kell lenniük. Másrészt a csoportoknak egymáshoz képest heterogenitást kell mutatniuk. A biztosított egyének ilyen partíciójának kialakítása jelenti a BM-rendszerek alapját.

A biztosítottak szükségszerűen beletartoznak valamelyik csoportba, és ennek megfelelően elfoglalnak valamilyen kezdeti osztályt a BM-rendszerben. Az osztályokhoz ún. prémium tartozik, amelyet a biztosítottnak fizetnie kell. A biztosítótársaságok és jelen esetben a BM-rendszerek vizsgálatának egyik fontos kérdése az optimális prémium értékek meghatározása. Bevett szokás a tapasztalati díjszabás, azaz múltbeli információk alapján létrehozott prémiumskála. A biztosított nem feltétlenül marad örökké a kezdeti osztályában, az ebből való elmozdulás a következőképpen valósulhat meg. Amennyiben egy egyén csoportképző ismerve legalább annyival megváltozik, hogy átlép egy adott küszöbértéket, akkor végbemegy a biztosított átsorolása. Ez a küszöbérték és általában az átsorolási szabály rögzített, ez figyelhető meg a KGFB esetén is. Nem rögzített átsorolási szabályok előfordulnak Ágoston-Gyetvai (2019) munkájában. Átsorolás esetén tehát a biztosított osztályt vált. A fizetendő prémium ennek megfelelően változhat, de előfordulhat, hogy különböző osztályokban azonos a prémium. A BM-rendszerek egyik kulcskérdése tehát, hogy mi alapján alakítjuk ki a biztosítottak csoportjait, mi alapján valósítjuk meg az átsorolást.

A nemzetközi irodalomban – kiemelten Lemaire (1995) és Heras et al. (2002) – a leggyakoribb csoportképző tulajdonság egy egyén által, egy adott időszakban jelentett káresemények száma. Egy másik, kevésbé kutatott területe a csoportképzésnek, a káresemény nagyságának figyelembe vétele. Mindkettő módszernek megvan a maga előnye. A káresemény számú csoportosítás jobban kezelhető, elsősorban azért, mert egy egzakt

mérőszámot használ, melynek begyűjtése és vizsgálata viszonylag egyszerű. Továbbá a múltbeli statisztikák alapján Gyetvai (2021) megállapítja, hogy az egyének jobban különböznek abban, hogy milyen valószínűséggel szenvednek kárt, mint abban, hogy az adott kár milyen nagyságú. A kárnagyság alapú csoportosítás egyik nagy előnye, hogy igazságosabb a káresemény alapú csoportosításnál. Utóbbi esetén egy kisebb koccanás és egy gázolás ugyanolyan hatást gyakorol a biztosított BM-besorolására, míg a kárnagyság alapú osztályozás alapján a két esemény jelentősen különbözik. Ez a módszer ösztönzi is a biztosítottakat potenciális káruk minimalizálására, hiszen egyetlen káreseménynél sem mindegy, hogy valójában milyen mértékű. Továbbá az is igaz, hogy a biztosítótársaság által kár esetén a biztosítottnak fizetett összeg jellemzően a kár mértékével arányos. Ezzel a módszerrel tehát elkerülhető a szervizeknél – kárszám alapú értékelés esetén – megfigyelhető túlszámlázás.

A dolgozatban kárnagyság alapú átsorolással foglalkozunk. Részben az előbb felsorolt előnyök miatt, részben az irodalom korlátozottsága miatt. Pinquet (1997) foglalkozik a káresemények költségének hatásával, munkájában gamma- és log-normális-eloszlásokat használ. Azt találja, hogy a csoportok közötti heterogenitás magyarázásában jelentős különbséget jelent az, hogy milyen eloszlás-családot használunk. Frangos és Vrontos (2001) olyan BM-rendszereket vizsgálnak, amely az átsorolásnál egyszerre veszi figyelembe a káresemény gyakoriságát és a kárnagyságot. Megállapítják, hogy ezzel a módszerrel az osztályok prémiumai a várható kárnagyság alapján jobban differenciálódnak, a rendszer jobban figyelembe veszi az egyének azon tulajdonságait, melyek a kárnagyságot befolyásolják. Ágoston et al. (2019) szintén kárnagyság alapú átsorolással dolgoznak, és numerikus módszerrel – a cikkben a szimulált hűtés segítségével – adnak megoldást az optimális prémiumok értékére, valamint a küszöbértékekre. Munkájukban a kárnagyságokat exponenciális eloszlással modellezzik. Cikkükben azt találják, hogy minél nagyobb a biztosítottak várható kárnagyságai közötti különbség, a BM-rendszer annál jobban tudja kontrollálni az antiszelekció jelenségét. Moumeesri és Pongsart (2022) különböző eloszlások kombinálásával alkotnak egy BM-rendszert, amelyben a kárszám és a kárnagyság is befolyásolja az átsorolást. A kárszámot binomiális Poisson-eloszlással és béta-Lindley-eloszlással, a kárnagyságot Lindley- és gamma-eloszlásokkal modellezzik. Az általuk kialakított modellben a magas kockázatú egyének lényegesen kisebb büntetést kaptak, azaz egy káresemény kevésbé rontott az osztálybesorolásukon, mint az a pusztán kárszám alapú modell esetében

elvárt lett volna.

Dolgozatomban a klasszikus analízis eszközeivel vizsgálom a lehető legegyszerűbb BM-rendszert, kárnagyság alapú átsorolások esetén. A legegyszerűbb rendszert vizsgáljuk, hiszen megállapítható, hogy már ebben az esetben sem lehet minden kérdést zárt alakban megválaszolni. A dolgozat fő célkitűzése, hogy amennyiben mégis lehetséges, zárt alakokat találjunk az átsorolási küszöbértékekre, valamint meghatározzuk a bónusz-málusz rendszer optimális állapotát. A zárt alakok vizsgálata során különös figyelemmel kell lennünk a szélsőséges esetekre, ennek vizsgálata is a kutatás részét képezi. A kárnagyságot Pareto-eloszlással és exponenciális eloszlással modellezzük. E két eloszlástípus közül valamelyikkel általában jól közelíthető egy-egy gyakorlati probléma, technikai oldalról pedig kezelésük is viszonylag egyszerű. Egy, a bónusz-málusz rendszert jellemző mutatószámot is definiálunk, melynek viselkedését különböző környezetekben vizsgáljuk. Már a legegyszerűbb bónusz-málusz rendszerben is előfordulhat, hogy nem létezik zárt alak akár a küszöbértékekre, akár egyéb mutatókra. Egyéb állítások azonban még így is megfogalmazhatók, így a dolgozat további kutatási kérdése, hogy zárt alak hiányában mit lehet elmondani egy kérdéses problémáról.

2. Módszertan

Ebben a bekezdésben a dolgozat módszertana kerül bemutatásra. Először a vizsgált modellt definiáljuk, majd a szükséges eloszlástípusokat. A dolgozat későbbi részében ezeket felhasználva igyekszünk megválaszolni a bevezetésben felállított kutatási kérdéseket, valamint megvalósítani a célkitűzéseket. Habár a módszertan néhol egyszerűnek tűnhet, valójában a legtöbb kérdésre így sem feltétlenül triviálisak a válaszok.

2.1. A bónusz-málusz modell

A felhasznált bónusz-málusz rendszer különböző módosításokkal, de előfordul Ágoston et al. (2019) és Gyetvai (2021) munkájában. Az általam felhasznált modell Gyetvai (2021) legegyszerűbb változata. Ekkor a bónusz-málusz rendszer két különböző biztosított csoportot és két különböző BM-osztályt definiál. A biztosított csoportokat $i = \{1, 2\}$ felső indexben, az osztályokat $k = \{0, 1\}$ alsó indexben jelöljük. A modell egy nemlineáris optimalizálási feladat kereteit adja meg. A teljes modell (NLP) a következő célfüggvényből és korlátokból áll.

$$\min \quad \phi^1 g_0^1 + \phi^1 g_1^1 + \phi^2 g_0^2 + \phi^2 g_1^2 \quad (\text{NLP.obj})$$

Az alábbi korlátokkal

$$\pi_0 c_0^1 + g_0^1 \geq L^1 c_0^1 \quad (\text{NLP.1.1})$$

$$\pi_1 c_1^1 + g_1^1 \geq L^1 c_1^1 \quad (\text{NLP.1.2})$$

$$\pi_0 c_0^2 + g_0^2 \geq L^2 c_0^2 \quad (\text{NLP.1.3})$$

$$\pi_1 c_1^2 + g_1^2 \geq L^2 c_1^2 \quad (\text{NLP.1.4})$$

$$\pi_0 c_0^1 - g_0^1 \leq L^1 c_0^1 \quad (\text{NLP.2.1})$$

$$\pi_1 c_1^1 - g_1^1 \leq L^1 c_1^1 \quad (\text{NLP.2.2})$$

$$\pi_0 c_0^2 - g_0^2 \leq L^2 c_0^2 \quad (\text{NLP.2.3})$$

$$\pi_1 c_1^2 - g_1^2 \leq L^2 c_1^2 \quad (\text{NLP.2.4})$$

$$\pi_0 \geq \pi_1 \quad (\text{NLP.3})$$

$$c_0^1 + c_1^1 = \phi^1 \quad (\text{NLP.4.1})$$

$$c_0^2 + c_1^2 = \phi^2 \quad (\text{NLP.4.2})$$

$$c_0^1 = c_0^1 p_{0,0}^1 + c_1^1 p_{1,0}^1 \quad (\text{NLP.5.1})$$

$$c_1^1 = c_0^1 p_{0,1}^1 + c_1^1 p_{1,1}^1 \quad (\text{NLP.5.2})$$

$$c_0^2 = c_0^2 p_{0,0}^2 + c_1^2 p_{1,0}^2 \quad (\text{NLP.5.3})$$

$$c_1^2 = c_0^2 p_{0,1}^2 + c_1^2 p_{1,1}^2 \quad (\text{NLP.5.4})$$

$$p_{0,0}^1 = 1 - F_1(\ell) \quad \text{és} \quad p_{0,1}^1 = F_1(\ell) \quad (\text{NLP.6.1 és NLP.6.2})$$

$$p_{1,0}^1 = 1 - F_1(\ell) \quad \text{és} \quad p_{1,1}^1 = F_1(\ell) \quad (\text{NLP.6.3 és NLP.6.4})$$

$$p_{0,0}^2 = 1 - F_2(\ell) \quad \text{és} \quad p_{0,1}^2 = F_2(\ell) \quad (\text{NLP.6.5 és NLP.6.6})$$

$$p_{1,0}^2 = 1 - F_2(\ell) \quad \text{és} \quad p_{1,1}^2 = F_2(\ell) \quad (\text{NLP.6.7 és NLP.6.8})$$

$$\ell > 0$$

$$\pi_0 \geq 0$$

$$g_k^i \geq 0 \quad \forall i, k$$

$$0 \leq c_k^i, p_{k,k'}^i \leq 1 \quad \forall i, k, k'$$

Az NLP modell az NLP.obj célfüggvényt minimalizálja ℓ , π_0 és π_1 változók – korlátozó feltételeknek megfelelő – megválasztásával. A modell nemlineáritása az NLP.1, NLP.2 és NLP.5 típusú korlátokból adódik. A modell részletes bemutatása következik alább.

A legfontosabb a célfüggvény értelmezése. ϕ^i jelöli az i -edik csoport arányát a biztosítottakon belül. Mivel $i = \{1, 2\}$, ezért $\phi^1 + \phi^2 = 1$. g_k^i jelöli az abszolút eltérést az i -edik csoport várható kárértéke és a k -adik osztály prémieuma között. Ezeket az abszolút eltéréseket súlyozzuk a megfelelő csoport arányával, és e súlyozott eltérések összegét minimalizáljuk. Fontos megjegyezni, hogy a célfüggvényben másfajta eltérést is minimalizálhattunk volna, például az ℓ^2 -norma szerinti, négyzetes eltérést.

Minden korlátnak különböző funkciója van. Az átsorolási valószínűségeket az NLP.6 korlátok definiálják. ℓ jelöli az átsorolási küszöbértéket mindkét csoport számára. Ha egy biztosított egy időszakban ennél nagyobb kárt okoz, akkor a rá következő időszakban a $k = 0$ -ás osztályba kerül. Ha egy biztosított ennél kisebb kárt okoz, akkor a rá következő időszakban a $k = 1$ -es osztályba kerül. Mivel az NLP modellben csak két osztály létezik, ezért elégséges egyetlen küszöbértéket definiálni, hiszen a rosszabbik osztályból nem lehet lejjebb esni, és a jobbik osztályból nem lehet feljebb kerülni. Az NLP.6 korlátok esetén $p_{k,k'}^i$ jelöli azt a valószínűséget, hogy az i -edik csoportban lévő biztosított a k -adik osztályból

a k' -edik osztályba kerül. Könnyen belátható, hogy

$$p_{0,k}^i = p_{1,k}^i \quad \forall i, k$$

hiszen a jobb osztályban való bentmaradás és a jobb osztályba való felkerülés egyaránt ℓ -nél kisebb kár esetén történik meg. Hasonlóan a rosszabbik osztályban való bentmaradás és a rosszabbik osztályba való leesés egyaránt ℓ -nél nagyobb kár esetén történik meg. $F_i(\ell)$ az i -edik csoport kárnagyságát jellemző eloszlásfüggvény, azaz, ha a biztosított kára ξ valószínűségi változó F_i eloszlással, akkor $F_i(\ell) = \mathbb{P}(\xi < \ell)$. $F_i(\ell)$ tehát azt a valószínűséget jelöli, hogy az i -edik csoport tagja ℓ -nél kisebb kárt okoz. Ez pontosan a jobbik osztályba kerülés valószínűsége, ezt definiálják az NLP.6.2, NLP.6.4, NLP.6.6 és NLP.6.8 korlátok. A komplementer eseményeket az NLP.6.1, NLP.6.3, NLP.6.5 és NLP.6.7 korlátok jelölik. A későbbiekben pontosítjuk a dolgozatban használt eloszlástípusokat.

NLP.5 korlátok definiálják minden csoportra az egyes osztályokban tartózkodás valószínűségét. c_k^i jelöli azt a valószínűséget, hogy egy adott pillanatban az i -edik csoport tagja a k -adik osztályban van. Alapvetően c_k^i időfüggő, azaz nem mindegy, hogy a BM-rendszer milyen időpillanatában vizsgáljuk a valószínűségeket. Megmutatható, hogy az NLP modell esetében, rögzített átsorolási szabály esetén ezek a valószínűségek stacionáriusak, következésképpen várható értékük időben állandó (Gyetvai, 2021). NLP.5 korlátok rekurzívan definiálják a stacionárius valószínűségeket, melyek két dologtól függenek. Egyrészt léteznek azok a biztosítottak, akik az előző időszakban is az osztályban tartózkodtak, és az átsorolás alapján nem mozdultak el, másrészt léteznek azok, akik az előző időszakban egy másik osztályban tartózkodtak, de az átsorolás alapján osztályt váltottak.

NLP.4.1 és NLP.4.2 korlátok definiálják a célfüggvényben szereplő ϕ^i értékeket. Az i -edik csoportba tartozó egyén vagy a $k = 0$ -ás vagy a $k = 1$ -es osztályban található. Így valóban $\phi^i = c_0^i + c_1^i$. A korlátokból az is következik, hogy $\phi^1 + \phi^2 = 1$, hiszen mindkét csoport biztosítottai szerepelnek valamelyik osztályban.

NLP.3 korlát kiköti, hogy a „rosszabbik” osztály prémiumának legalább akkorának kell lennie, mint a „jobbik” osztály prémiumának. Rosszabbik alatt értjük, hogy az $i = 1$ csoport egyénei nagyobb valószínűséggel tartózkodnak a $k = 0$ -ás csoportban, mint az $i = 2$ -es csoport egyénei. A jobbik alatt ennek ellenkezőjét értjük. Amennyiben $\pi_0 = \pi_1$, a bónusz-málusz rendszer azonos prémiumokat határoz meg a két osztály számára. Ez a matematikailag valós megoldás közgazdaságilag szélsőséges esetet takar. Ha egy bónusz-

málusz rendszer mégis egyenlő prémiumokat határozna meg, az külön vizsgálatot igényel, így az NLP.3 korlátot $\pi_0 > \pi_1$ formában használjuk, és külön vizsgáljuk az egyenlőség lehetőségét.

NLP.1 és NLP.2 korlátok definiálják g_k^i értékét. π_k jelöli a k -adik osztályban fizetendő optimális prémiumot, L^i pedig a csoportok várható kárértékét. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $L^1 > L^2$, tehát az $i = 1$ -es csoportban található egyének várhatóan nagyobb kárt okoznak, mint az $i = 2$ -es csoportban lévők. Tulajdonképpen NLP.1 és NLP.2 egy korlátban is összefoglalható, jelesen

$$c_k^i |L^i - \pi_k| \leq g_k^i$$

de a jobb kezelhetőség végett két különböző korlátban (összesen tehát 8 különbözőben) tüntetjük fel őket. Ebből a felírásból valóban látszódik, hogy g_k^i ténylegesen a csoport várható kárértéke és az osztály prémiuma közötti abszolút eltérést jelöli.

A modellhez hozzátartozik, hogy a változóktól nemnegativitást követelünk meg, így $\pi_k, g_k^i \geq 0$. Speciálisan a küszöbértéket csak akkor tekintjük optimálisnak, ha pozitív, azaz $\ell > 0$. Az átsorolási és stacionárius valószínűségektől a klasszikus valószínűségi korlátokat követeljük meg, azaz $0 \leq c_k^i, p_{k,k'}^i \leq 1$.

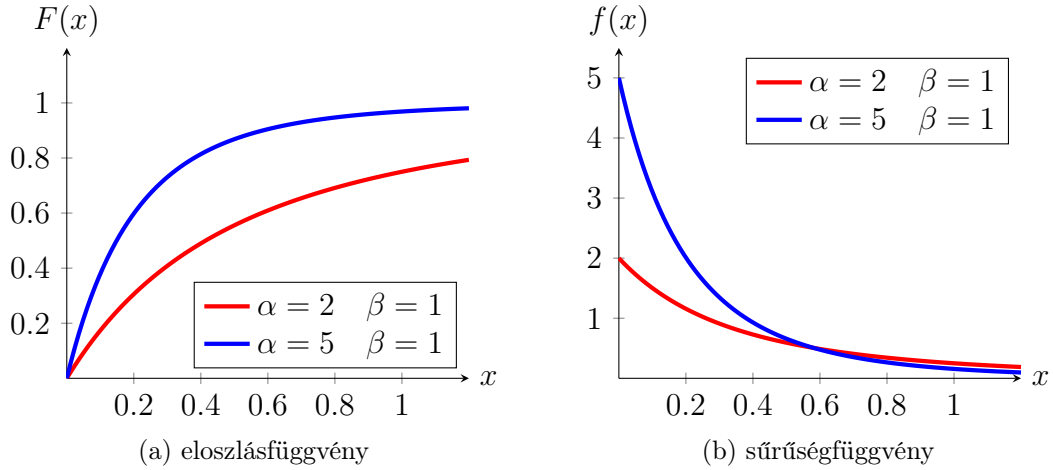
2.2. Pareto-eloszlás

A biztosított csoportok kárnagyságának eloszlását először Pareto-eloszlással modellezzük. Társadalmi folyamatoknak jó közelítése ez az eloszlástípus, Frangos és Vrontos (2001) is Pareto-eloszlással jellemzik a kárnagyságokat. Legyen ξ_i az i -edik csoport kárnagyságát jellemző valószínűségi változó Pareto-eloszlással. Ekkor ξ_i eloszlásfüggvénye

$$F_i(x) = \mathbb{P}(\xi_i < x) = 1 - \left(\frac{\beta_i}{x + \beta_i} \right)^{\alpha_i}, \quad \text{ahol } x \in (0, \infty) \quad (\text{P1})$$

ahol $\alpha_i > 1$ és $\beta_i > 0$ az eloszlást jellemző paraméterek. Mivel a modellben $\ell > 0$ feltétellel dolgozunk, ezért az eloszlást is a pozitív tartományon értelmezzük. Az eloszlásfüggvény deriváltjaként megkapjuk ξ_i sűrűségfüggvényét

$$f_i(x) = \frac{\alpha_i \beta_i^{\alpha_i}}{(x + \beta_i)^{\alpha_i+1}}, \quad \text{ahol } x \in (0, \infty) \quad (\text{P2})$$



1. ábra. Pareto-eloszlás.
(Forrás: saját szerkesztés)

A további tárgyaláshoz szükséges a Pareto-eloszlás várható értékét és különböző sűrűségfüggvények hányadosának határértékét közölni. Egyrészt az fenti módon definiált Pareto-eloszlás várható értéke

$$\mathbb{E}(\xi_i) = \int_0^\infty x f_i(x) dx = \frac{\beta_i}{\alpha_i - 1} \quad (\text{P3})$$

Másrészt vizsgáljuk az alábbi hányadost határérték szempontjából

$$\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{\alpha_2 \beta_2^{\alpha_2} (x + \beta_1)^{\alpha_1 + 1}}{\alpha_1 \beta_1^{\alpha_1} (x + \beta_2)^{\alpha_2 + 1}} \quad (\text{P4})$$

Érdekes helynek az $x \rightarrow 0^+$ és az $x \rightarrow \infty$ számít esetünkben. Egyébként a hányados folytonos függvények hányadosa, így az értelmezési tartományon önmaga is folytonos. A hányados nullában vett jobb oldali határértéke

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2} \quad (\text{P5})$$

A végtelenben vett határértékre azt kapjuk, hogy tényleges értéke α_1 és α_2 viszonyától függ, így a kérdéses határérték 3 különböző esetben fogalmazható meg

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \alpha_2 > \alpha_1 \\ \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^\alpha, & \text{ha } \alpha = \alpha_2 = \alpha_1 \\ \infty, & \text{ha } \alpha_2 < \alpha_1. \end{cases} \quad (\text{P6})$$

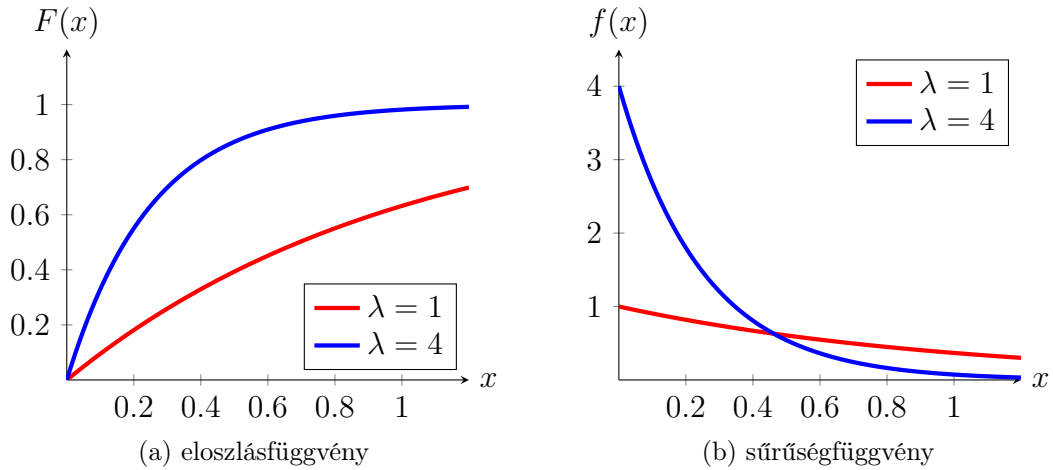
2.3. Exponenciális eloszlás

A biztosított csoportok kárnagyságát a Pareto-eloszláson kívül exponenciális eloszlással is modellezzük. Így lehetőség adódik az eredmények összevetésére különböző eloszláscsaládok használata esetén. Exponenciális eloszlást használnak Ágoston et al. (2019), munkájukban numerikus módszerekkel közelítik az optimumot. Legyen η_i az i -edik csoport kárnagyságát jellemző valószínűségi változó exponenciális eloszlással. Ekkor η_i eloszlásfüggvénye

$$F_i(x) = \mathbb{P}(\eta_i < x) = 1 - e^{-\lambda_i x}, \quad \text{ahol } x \in (0, \infty) \quad (\text{E1})$$

ahol $\lambda_i > 0$ az eloszlást jellemző paraméter. Hasonlóan a Pareto-eloszláshoz, az exponenciális eloszlást is a pozitív tartományon értelmezzük a károknagyságok nemnegatív volta miatt. Az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f_i(x) = \lambda_i e^{-\lambda_i x}, \quad \text{ahol } x \in (0, \infty) \quad (\text{E2})$$



2. ábra. Exponenciális eloszlás.
(Forrás: saját szerkesztés)

A Pareto-eloszláshoz hasonlóan szükséges közölni az így definiált exponenciális eloszlás várható értékét és a különböző sűrűségfüggvények hányadosának határértékét. Egyrészt az fenti módon definiált exponenciális eloszlás várható értéke

$$\mathbb{E}(\eta_i) = \int_0^\infty x f_i(x) dx = \frac{1}{\lambda_i} \quad (\text{E3})$$

Másrészt vizsgáljuk az alábbi hányadost határérték szempontjából

$$\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \quad (\text{E4})$$

Érdekes helynek szintén az $x \rightarrow 0^+$ és az $x \rightarrow \infty$ számít esetünkben. A hányados folytonos függvények hányadosa, így az értelmezési tartományon önmaga is folytonos. A hányados nullában vett jobb oldali határértéke

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (\text{E5})$$

A végtelenben vett határérték a Pareto-eloszlással ellentétben egyértelmű, amennyiben $\lambda_1 < \lambda_2$. Ez a feltétel a várható érték képlete alapján $L^1 > L^2$ feltételt jelent az NLP modell szempontjából. Mivel ez az egyenlőtlenség az általánosság megszorítása nélkül kijelenthető, és a dolgozat további részében is használjuk, a sűrűségfüggvények hányadosát valóban egyértelműnek vesszük, mégpedig

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 0, \quad \text{ha} \quad \lambda_1 < \lambda_2 \quad (\text{E6})$$

3. A modell optimalizálása

A dolgozat fő célja zárt alakok keresése a 2.1 pontban felállított nemlineáris optimalizálási feladatra. Az optimalizálási feladatot először a 2.2 pontban definiált Pareto-eloszlással, majd a 2.3 pontban meghatározott exponenciális eloszlással kíséreljük megoldani. Fontos definiálni, hogy az NLP modellt mikor tekintjük optimálisnak.

3.0.1. Definíció. (Az NLP modell optimuma)

Az NLP modellel definiált bónusz-málsz rendszer *optimális*, ha az NLP.obj célfüggvény minimális és a korlátozó feltételek teljesülnek. Az optimum egy (ℓ, π_0, π_1) számhármas.

A tényleges optimalizálás megkezdése előtt az NLP modell korlátaikat alakítjuk kényelmesebb alakra. Ennek eredményeképp a stacionárius valószínűségeket kifejezhetjük az átsorolási valószínűségekké. Tekintsük példának az NLP.5.1 korlátot! NLP.4.1 korlátból tudjuk, hogy $c_1^1 = \phi^1 - c_0^1$, valamint az NLP.6.1 és NLP.6.3 korlátokból $p_{0,0}^1 = p_{1,0}^1 = 1 - F_1(\ell)$. Ezek felhasználva adódik c_0^1 később praktikus alakja:

$$c_0^1 = c_0^1 p_{0,0}^1 + c_1^1 p_{1,0}^1 = c_0^1 (1 - F_1(\ell)) + (\phi^1 - c_0^1) (1 - F_1(\ell)) = \phi^1 (1 - F_1(\ell))$$

Innen pedig adódik, hogy $c_1^1 = \phi^1 F_1(\ell)$. A másik kettő stacionárius valószínűség, c_0^2 és c_1^2 , képletét az előbbi számolással analóg módon kaphatjuk.

Az optimalizálási feladat három változós, azonban a prémiumok értékére egy fontos állítás megfogalmazható, melyet a célfüggvény minimalizálásánál felhasználva az optimalizálási feladat csupán egyetlen változós problémává redukálható.

3.0.2. Állítás. (Az optimális prémium értékek egyoldali korlátossága)

Az NLP modell optimumában az alábbi két egyenlőtlenség mindig teljesül:

1. $\pi_0 \leq L^1$
2. $\pi_1 \geq L^2$.

BIZONYÍTÁS.

(1) Indirekt módon bizonyítjuk az állítást. Tegyük fel, hogy az NLP modell optimumában $\pi_0 = L^1 + \Delta_0$, ahol $\Delta_0 > 0$ pozitív érték. Vizsgáljuk ekkor az NLP.1 és NLP.2 típusú korlátokat. NLP.1.1 és NLP.2.1 korlátokból $|\Delta_0|c_0^1 \leq g_0^1$ adódik. Ekkor $\Delta_0 = 0$

esetén g_0^1 -re alacsonyabb alsó korlát adódik, mint $\Delta_0 > 0$ esetén. NLP.1.3 és NLP.2.3 korlátokból $|L^1 - L^2 + \Delta_0|c_0^2 \leq g_0^2$. Mivel $L^1 - L^2 > 0$, ezért szintén $\Delta_0 = 0$ választásával g_0^2 -re alacsonyabb alsó korlát adódik, mint $\Delta_0 > 0$ esetén. Azaz $\Delta_0 = 0$ esetén az NLP.obj célfüggvényre is kisebb értéket kapunk, mint $\Delta_0 > 0$ esetén. Innen $\pi_0 \leq L^1$.

(2) Indirekt módon bizonyítjuk az állítást. Tegyük fel, hogy az NLP modell optimumában $\pi_1 = L^2 - \Delta_1$, ahol $\Delta_1 > 0$ pozitív érték. Vizsgáljuk ekkor az NLP.1 és NLP.2 típusú korlátokat. NLP.1.4 és NLP.2.4 korlátokból $|\Delta_1|c_1^1 \leq g_1^1$ adódik. Ekkor $\Delta_1 = 0$ esetén g_1^1 -re alacsonyabb alsó korlát adódik, mint $\Delta_1 > 0$ esetén. NLP.1.2 és NLP.2.2 korlátokból $|L^2 - L^1 - \Delta_1|c_1^2 \leq g_1^2$. Mivel $L^2 - L^1 < 0$, ezért szintén $\Delta_1 = 0$ választásával g_1^2 -re alacsonyabb alsó korlát adódik, mint $\Delta_1 > 0$ esetén. Azaz $\Delta_1 = 0$ esetén az NLP.obj célfüggvényre is kisebb értéket kapunk, mint $\Delta_1 > 0$ esetén. Innen $\pi_1 \geq L^2$. $\square$

3.0.3. Következmény. A 3.0.2. Állításból és az NLP.3 korlátból adódik, hogy optimumban

$$L^2 \leq \pi_1 \leq \pi_0 \leq L^1$$

azaz a két osztály optimális prémium értéke a két biztosított csoport várható kárnagysága közé esik. A kisebb várható kárnagyságnál (L^2) kisebb és a nagyobb várható kárnagyságnál (L^1) nagyobb optimális prémium érték nem lehetséges.

3.1. A célfüggvény vizsgálata

A célfüggvény tehát az osztályok prémiuma és a csoportok várható értéke közötti abszolút eltérés súlyozott összege. A 3.0.3. Következményből tudjuk, hogy optimumban $\pi_k - L^1 \leq 0$ és $L^2 - \pi_k \leq 0$ minden k osztályra. Ezt felhasználva az NLP modell a következőképpen egyszerűsödik.

3.1.1. Állítás. (NLP modell elhagyható korlátozó feltételei)

Az NLP modell optimumában az NLP.1.3, az NLP.1.4, az NLP.2.1 és az NLP.2.2 korlátok mindig teljesülnek.

BIZONYÍTÁS.

Az NLP.1.3 korlátot átrendezve azt kapjuk, hogy $g_0^2 \geq (L^2 - \pi_0)c_0^2$. Az egyenlőtlenség bal oldala nemnegatív, hiszen g_0^2 abszolút eltérést jelöl. Az egyenlőtlenség jobb oldala nempozitív, hiszen $c_0^2 \geq 0$ stacionárius valószínűség, és $L^2 - \pi_0 \leq 0$ az eddigi állítások alapján. Egy nemnegatív szám mindig nagyobb vagy egyenlő egy nempozitív számmal. A

bizonyítás a többi három korlátra hasonlóképpen működik. $\square$

3.1.2. Következmény. A 3.1.1. Állításból következik, hogy az NLP modellben mind-egyik g_k^i abszolút eltérésre egyetlen korlát vonatkozik, így ezek egyenlőtlenség formájában valósulnak meg. A négy megmaradt korlát – NLP.1.1, NLP.1.2, NLP.2.3 és NLP.2.4 – a következő egyenletrendszert alkotja:

$$\begin{cases} g_0^1 = (L^1 - \pi_0)c_0^1 \\ g_1^1 = (L^1 - \pi_1)c_1^1 \\ g_0^2 = (\pi_0 - L^2)c_0^2 \\ g_1^2 = (\pi_1 - L^2)c_1^2 \end{cases}$$

Az abszolút eltérések ilyen formájú felírása már alkalmassá teszi az NLP.obj célfüggvény explicit felírását. Az abszolút eltéréseket stacionárius valószínűségek segítségével fejezzük ki, melyek jobban kezelhetők a továbbiakban. A dolgozat során a célfüggvény ezen alakját, illetve ennek változatait vizsgáljuk, hiszen minimumhelye az NLP optimumát jelenti.

3.1.3. Állítás. (Az NLP.obj célfüggvény alternatív alakja)

Az NLP modell pontosan akkor optimális, ha a

$$\pi_0(\phi^2 c_0^2 - \phi^1 c_0^1) + \pi_1(\phi^2 c_1^2 - \phi^1 c_1^1) + L^1(\phi^1)^2 - L^2(\phi^2)^2 \quad (\text{NLP.obj2})$$

háromváltozós – ℓ , π_0 , π_1 – kifejezés minimális.

BIZONYÍTÁS.

Használjuk fel a 3.1.2. Következményt! Az abszolút eltéréseket behelyettesítve az eredeti NLP.obj célfüggvénybe, majd a tagokat rendezve adódik az állítással ekvivalens kifejezés:

$$\begin{aligned} \phi^1 g_0^1 + \phi^1 g_1^1 + \phi^2 g_0^2 + \phi^2 g_1^2 &= \phi^1(L^1 - \pi_0)c_0^1 + \phi^1(L^1 - \pi_1)c_1^1 + \phi^2(\pi_0 - L^2)c_0^2 + \phi^2(\pi_1 - L^2)c_1^2 \\ &= \pi_0(\phi^2 c_0^2 - \phi^1 c_0^1) + \pi_1(\phi^2 c_1^2 - \phi^1 c_1^1) + L^1(\phi^1)^2 - L^2(\phi^2)^2 \quad \square \end{aligned}$$

Az NLP.obj2 célfüggvény egy négytagú összeg. Az utolsó két tag konstans, hiszen a várható értékekről és a csoportok arányáról ezzel a feltételezéssel éltünk. Az első két tag π_0 -tól, π_1 -től és ℓ -től függ. Vegyük észre, hogy $\phi^i c_k^i$ nem függ a prémiumok értékétől,

csak ℓ értékétől! Így az NLP modell megoldása tekinthető egy egyváltozós optimalizálási feladatnak, ahol az $NLP.obj2$ kifejezést minimalizáljuk ℓ szerint, majd ez alapján meghatározzuk az optimális π_0 és π_1 prémium értékeket. A következő lemma és állítás segítségével az optimális prémium értékek meghatározására adunk elégséges feltételt.

3.1.4. Lemma. (Stacionárius valószínűségekre vonatkozó egyenlőtlenség optimumban)

Az NLP modell optimumában $\frac{c_0^2}{c_1^1+c_0^2} < \frac{c_1^2}{c_1^1+c_1^2}$ egyenlőtlenség mindig teljesül.

BIZONYÍTÁS.

A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy létezik olyan $\ell > 0$ optimális küszöbérték, melyre $\frac{c_0^2}{c_1^1+c_0^2} \geq \frac{c_1^2}{c_1^1+c_1^2}$. Ezt átrendezve kapjuk, hogy $c_0^2 c_1^1 \geq c_1^2 c_0^1$. Innen a stacionárius valószínűségeket az eloszlásfüggvényekkel kifejezve

$$\phi^2(1 - F_2(\ell)) \cdot \phi^1 F_1(\ell) \geq \phi^2 F_2(\ell) \cdot \phi^1(1 - F_1(\ell))$$

$$F_1(\ell) \geq F_2(\ell) \iff \mathbb{P}(\xi_1 \leq \ell) \geq \mathbb{P}(\xi_2 \leq \ell)$$

ahol ξ_i valószínűségi változó eloszlásfüggvénye F_i . Ez azonban ellentmond a két csoport definíciójának, hiszen az $i = 2$ -es csoport definíció szerint nagyobb valószínűséggel okoz ℓ -nél kevesebb kárt, mint az $i = 1$ -es csoport. Vagyis nincsen olyan ℓ optimális küszöbérték, melyre $\frac{c_0^2}{c_1^1+c_0^2} \geq \frac{c_1^2}{c_1^1+c_1^2}$ teljesülne. Ezzel az állítást beláttuk. $\square$

3.1.5. Állítás. (Az optimális prémium értékek meghatározása)

Ha létezik olyan $\ell > 0$, melyre $NLP.obj2$ célfüggvény minimális, akkor az NLP modellnek létezik optima, és az optimális prémium értékek egyértelműen meghatározhatók az alábbi táblázat alapján.

	$\phi^1 \leq \frac{c_0^2}{c_1^1+c_0^2}$	$\frac{c_0^2}{c_1^1+c_0^2} \leq \phi^1 \leq \frac{c_1^2}{c_1^1+c_1^2}$	$\frac{c_1^2}{c_1^1+c_1^2} \leq \phi^1$
π_0 értéke optimumban	L^2	L^1	L^1
π_1 értéke optimumban	L^2	L^2	L^1

BIZONYÍTÁS.

Mivel létezik $\ell > 0$, melyre $NLP.obj2$ célfüggvény minimális, elegendő $\phi^2 c_0^2 - \phi^1 c_0^1$ és $\phi^2 c_1^2 - \phi^1 c_1^1$ kifejezések előjelével foglalkozni. Összesen az alábbi négy esetet kell vizsgálni:

	$\phi^2 c_1^2 - \phi^1 c_1^1 < 0$	$\phi^2 c_1^2 - \phi^1 c_1^1 > 0$
$\phi^2 c_0^2 - \phi^1 c_0^1 < 0$	I. eset	II. eset
$\phi^2 c_0^2 - \phi^1 c_0^1 > 0$	III. eset	IV. eset

I. eset: $\phi^2 c_1^2 - \phi^1 c_1^1 < 0$ és $\phi^2 c_0^2 - \phi^1 c_0^1 < 0$ egyszerre teljesül, azaz

$$\frac{c_0^2}{c_0^1 + c_0^2} \leq \phi^1 \quad \text{és} \quad \frac{c_1^2}{c_1^1 + c_1^2} \leq \phi^1$$

A 3.1.4. Lemma szerint a jobb oldali egyenlőtlenségből következik a bal oldali, így az I. esetnek elégséges korlátja a jobb oldali. Ekkor tehát NLP.obj2 első két tagja negatív. Így a célfüggvény akkor lesz valóban minimális, ha a prémiumok maximálisak. A 3.0.3. Következmény alapján ekkor $\pi_0 = \pi_1 = L^1$.

II. eset: $\phi^2 c_1^2 - \phi^1 c_1^1 > 0$ és $\phi^2 c_0^2 - \phi^1 c_0^1 < 0$ egyszerre teljesül, azaz

$$\frac{c_0^2}{c_0^1 + c_0^2} \leq \phi^1 \leq \frac{c_1^2}{c_1^1 + c_1^2}$$

Ekkor NLP.obj2 első tagja negatív, második tagja pozitív. Szintén a 3.0.3. következmény alapján tudjuk a prémiumokat meghatározni, hiszen ekkor π_0 -nak maximálisnak, π_1 -nek minimálisnak kell lennie. Tehát $\pi_0 = L^1$ és $\pi_1 = L^2$.

III. eset: $\phi^2 c_1^2 - \phi^1 c_1^1 < 0$ és $\phi^2 c_0^2 - \phi^1 c_0^1 > 0$ egyszerre teljesül, azaz

$$\frac{c_0^2}{c_0^1 + c_0^2} \geq \phi^1 \geq \frac{c_1^2}{c_1^1 + c_1^2}$$

A 3.1.4. Lemma szerint ilyen eset nem lehetséges.

IV. eset: $\phi^2 c_1^2 - \phi^1 c_1^1 > 0$ és $\phi^2 c_0^2 - \phi^1 c_0^1 > 0$ egyszerre teljesül, azaz

$$\phi^1 \leq \frac{c_0^2}{c_0^1 + c_0^2} \quad \text{és} \quad \phi^1 \leq \frac{c_1^2}{c_1^1 + c_1^2}$$

A 3.1.4. Lemma szerint a bal oldali egyenlőtlenségből következik a jobb oldali, így a IV. esetnek elégséges korlátja a bal oldali. Ekkor tehát NLP.obj2 első két tagja pozitív. Így a célfüggvény akkor lesz valóban minimális, ha a prémiumok minimálisak. A 3.0.3. Következmény alapján ekkor $\pi_0 = \pi_1 = L^2$. $\square$

Az eredeti NLP modell optimalizálása az előbbi állítások segítségével egyváltozós minimalizálássá redukálódott. Ennek megoldása már a klasszikus analízis eszközeivel lehetséges, ahogyan ezt a különböző eloszlástípusoknál külön-külön látni fogjuk. A bekezdés utolsó állításaként az NLP.obj2 célfüggvényt alakítjuk tovább az eloszlásfüggvények felhasználásával, illetve ennek deriváltját adjuk meg. Tesszük ezt azért, mert az NLP optimumának

szükséges feltétele lesz az, hogy a célfüggvény mindegyik deriváltja 0 legyen.

3.1.6. Állítás. (Az NLP.obj2 célfüggvény alternatív alakja)

Az NLP modell pontosan akkor optimális, ha a

$$\pi_0 \left((\phi^2)^2 - (\phi^1)^2 - (\phi^1)^2 F_1(\ell) - (\phi^2)^2 F_2(\ell) \right) + \pi_1 \left((\phi^2)^2 F_2(\ell) - (\phi^1)^2 F_1(\ell) \right) + L^1(\phi^1)^2 - L^2(\phi^2)^2 \quad (\text{NLP.obj3})$$

egyváltozós ℓ - kifejezés minimális.

BIZONYÍTÁS.

Az állításban megfogalmazott formula megkapható az NLP.obj2 képletből, ha a stacionárius valószínűségeket kifejezzük az eloszlásfüggvények segítségével. $\square$

3.1.7. Állítás. (Az NLP modell optimumának szükséges feltétele)

Ha az NLP modell optimális $\ell > 0$ küszöbérték mellett, akkor

$$\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2} = \frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)} \quad (\text{NLP.FOC})$$

ahol f_i az i -edik csoporthoz tartozó sűrűségfüggvény.

BIZONYÍTÁS.

Az NLP.obj3 célfüggvényben csak ℓ szerepel változóként. Vegyük az NLP.obj3 célfüggvény ℓ -szerinti első deriváltját:

$$\pi_0 \left((\phi^1)^2 f_1(\ell) - (\phi^2)^2 f_2(\ell) \right) + \pi_1 \left((\phi^2)^2 f_2(\ell) - (\phi^1)^2 f_1(\ell) \right) = (\pi_0 - \pi_1) \left((\phi^1)^2 f_1(\ell) - (\phi^2)^2 f_2(\ell) \right)$$

Egy szorzat értéke akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. Ha $\pi_0 = \pi_1$, akkor az első derivált értéke valóban nulla, de nem váltana előjelet. Így a célfüggvénynek csak akkor lehet szélsőértéke ℓ -ben, ha a szorzat második tagjának értéke nulla, ami átrendezve valóban az állításban szereplő kifejezést adja. $\square$

3.1.8. Megjegyzés. Az NLP.FOC elsőrendű feltétel szükséges, de nem elégséges feltétele az optimum létezésének. Pareto-eloszlás esetén ennek segítségével állapítható meg az optimális küszöbértékek egyértelműsége még akkor is, ha zárt alak nem feltétlenül adható az optimumra.

3.2. Optimum Pareto-eloszlás esetén

Az előző bekezdésben meghatároztuk a célfüggvény alternatív formáját, melyben csupán a küszöbérték szerepel változóként. A cél tehát olyan ℓ érték keresése, mely minimalizálja a célfüggvényt és ezzel optimalizálja az NLP modellünket.

Ebben a bekezdésben a biztosított csoportok káreloszlását két különböző várható értékű Pareto-eloszlással modellezzük. Az általunk definiált Pareto-eloszlásnak két paramétere van. $\alpha > 1$ és $\beta > 0$ egyaránt befolyásolja az eloszlásfüggvény elnyúlását, azaz az extrém értékek előfordulási valószínűségét. α paraméter növelésével az eloszlásfüggvény lassabban tart 1-hez, míg β paraméter növelésével gyorsabban. A paraméterek értékei alapján így 3 esetet különböztetünk meg. Első esetben a biztosított csoportokat leíró két Pareto-eloszlásnak egyenlő az α paramétere, második esetben a β paramétere. Harmadik esetként minden egyéb paraméterbeállítást egyben vizsgálunk.

Tekintsük először az egyenlő α paraméterek esetét! Legyen ekkor $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$! Mivel az $i = 1$ -es csoportnak nagyobb a várható kárértéke, mint az $i = 2$ -esnek, kompakt jelöléssel $L^1 > L^2$, ezért a várható érték (P3) formulájából adódik, hogy $\beta_1 > \beta_2$. Ennek felhasználásával először az optimum egyértelműségét bizonyítjuk.

3.2.1. Állítás. (Az optimum egyértelműsége $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ esetén)

Ha az $i = 1$ -es csoport káreloszlása α és β_1 paraméterű, az $i = 2$ -es csoport káreloszlása α és β_2 paraméterű Pareto-eloszlást követ, és az NLP modell optimális $\ell > 0$ küszöbérték mellett, akkor az így meghatározott (ℓ, π_0, π_1) számhármass egyértelmű.

BIZONYÍTÁS.

A 3.1.7. Állításból tudjuk, hogy optimumban az NLP.FOC elsőrendű feltételnek teljesülnie kell. Azt kell csupán megmutatni, hogy ez az egyenlőség Pareto-eloszlás és azonos α -k esetén egyértelmű. Belátjuk, hogy ekkor $\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$ hányadosfüggvény szigorúan monoton csökken az $\ell > 0$ intervallumon, így a konstans $\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2}$ függvénnyel legfeljebb 1 metszéspontja lehet. Tekintsük az $\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$ hányadosfüggvény értékét az ℓ pontban és az $\ell + \varepsilon$ pontban, ahol $\varepsilon > 0$. A hányadosfüggvények hányadosa ekkor

$$\frac{\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}}{\frac{f_2(\ell+\varepsilon)}{f_1(\ell+\varepsilon)}} = \frac{(\ell + \beta_1)(\ell + \beta_2 + \varepsilon)}{(\ell + \beta_2)(\ell + \beta_1 + \varepsilon)} = 1 - \frac{\beta_2 - \beta_1}{(\ell + \beta_2)(\ell + \beta_1 + \varepsilon)}\varepsilon > 1$$

felhasználva a (P4) formulát. Mivel $\beta_2 - \beta_1 < 0$ és $\varepsilon > 0$, ezért a hányados valóban

nagyobb mint 1. Azaz $\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$ hányadosfüggvény valóban szigorúan monoton csökken az $\ell > 0$ intervallumon. Így ha metszi $\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2}$ konstans függvényt, az valóban csak egy pontban lehetséges, tehát az optimum egyértelmű. $\square$

Az optimum egyértelműsége tehát adott, következő lépésben az optimális küszöbérték zárt alakjára következik állítás. Ennek segítségével tetszőleges eloszlásparaméterek esetén könnyen számolható az optimum.

3.2.2. Állítás. (Az optimum $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ esetén)

Ha az $i = 1$ -es csoport káreloszlása α és β_1 paraméterű, az $i = 2$ -es csoport káreloszlása α és β_2 paraméterű Pareto-eloszlást követ, akkor az NLP modell optimális küszöbértéke

$$\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt} = \frac{\beta_2 C - \beta_1}{1 - C}, \quad \text{ahol} \quad C = \left(\frac{(\phi^1)^2 \beta_1^\alpha}{(\phi^2)^2 \beta_2^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \quad (\text{OPT.P1})$$

amennyiben $\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt} > 0$.

BIZONYÍTÁS.

Az optimális küszöbértéknek először is ki kell elégítenie az NLP.FOC elsőrendű feltételt. Felhasználva a (P4) formulát, megoldandó az

$$\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2} = \frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)} \iff \frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2} = \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \right)^\alpha \left(\frac{\ell + \beta_1}{\ell + \beta_2} \right)^{\alpha+1}$$

egyenlet ℓ -re. Átrendezve valóban az állításban szereplő $\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt}$ értéket kapjuk. Az elsőrendű feltételt tehát kielégíti a feltételezett optimális küszöbérték.

Ahhoz, hogy a célfüggvény minimumját vegye fel az $\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt}$ pontban, szükséges feltétel továbbá, hogy a NLP.obj3 célfüggvény deriváltja előjelet váltson itt, mégpedig negatív értékből pozitívba váltson. A 3.2.1. Állítás bizonyításában megmutattuk, hogy $\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$ függvény szigorúan monoton csökken, ha $\ell > 0$. Vegyünk most egy tetszőleges $\ell_0 > 0$ értéket! Ha $\ell_0 < \ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt}$, akkor $\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2} < \frac{f_2(\ell_0)}{f_1(\ell_0)}$, azaz a célfüggvény deriváltja negatív. Analóg módon, $\ell_0 > \ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt}$ esetén $\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2} > \frac{f_2(\ell_0)}{f_1(\ell_0)}$ és a célfüggvény deriváltja pozitív.

Azaz $\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt}$ valóban a célfüggvény minimumhelye. Az optimális prémium értékek meghatározhatók a 3.1.5. Állítás alapján. Az így kapott optimumhely pedig az 3.2.1. Állítás alapján egyértelmű. $\square$

A 3.2.2. Állítás tartalmaz egy jelentős egyszerűsítést, mégpedig a pozitív küszöbérték

létezésének feltételezését. Hiszen megköveteljük, hogy az optimális küszöbérték pozitív legyen, de nem adunk rá bővebb magyarázatot. A következő állítás azt válaszolja meg, mi szükséges ahhoz, hogy azonos α -k esetén a küszöbérték – és így az NLP modell optimuma – valóban létezzen.

3.2.3. Állítás. (Az $\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt}$ optimális küszöbérték pozitivitásának feltétele)

A következő állítások ekvivalensek:

1. $\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt} > 0$
2. $1 < C < \frac{\beta_1}{\beta_2}$
3. $\frac{\beta_2^{\alpha/2}}{\beta_1^{\alpha/2} + \beta_2^{\alpha/2}} < \phi^1 < \frac{\beta_1 - \sqrt{\beta_1 \beta_2}}{\beta_1 - \beta_2}$

BIZONYÍTÁS.

(1. $\Leftrightarrow$ 2.) Vizsgáljuk $\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt}$ értékét a az OPT.P1 képlet alapján! Az világos, hogy $C = 1$ esetén $\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt}$ nincs definiálva. Ha $C < 1$, akkor a képletben található tört nevezője biztosan pozitív. Ekkor azonban a számláló negatív, hiszen $\beta_1 > \beta_2$ a várható kárértékek egyenlőtlensége miatt. Tehát $C < 1$ esetén nem lehet pozitív az optimális küszöbérték. Ha $C > 1$, akkor a képletben található tört nevezője biztosan negatív. Hogy biztosítsuk a számláló negativitását is, a $\beta_2 C - \beta_1 < 0$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Innen $C < \frac{\beta_1}{\beta_2}$. Ez pedig nem mond ellent a $C > 1$ feltételnek, hiszen szintén a várható kárértékek egyenlőtlensége miatt $1 < \frac{\beta_1}{\beta_2}$. Összefoglalva: $\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt}$ pontosan akkor pozitív, ha $1 < C < \frac{\beta_1}{\beta_2}$.

(2. $\Leftrightarrow$ 3.) Az $1 < C < \frac{\beta_1}{\beta_2}$ egyenlőtlenség-rendszer szétbontható $1 < C$ és $C < \frac{\beta_1}{\beta_2}$ egyenlőtlenségekre. Behelyettesítve C értékét az OPT.P1 képlet alapján, majd rendezve ϕ^1 -re adódik a 3-as pontban megfogalmazott egyenlőtlenség-rendszer. $\square$

3.2.4. Megjegyzés. A 3.2.3. Állítás grafikus indoklása talán szemléletesebb. $\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt}$ jelöli azt a helyet, ahol $\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2}$ és $\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$ függvények metszik egymást. Azt szeretnénk biztosítani, hogy ennek a metszéspontnak a helye pozitív legyen. A Pareto-eloszlás (P5) tulajdonsága miatt és $\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$ szigorú monotonitása miatt $\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2} < \frac{\beta_1}{\beta_2}$ egyenlőtlenségnek teljesülnie kell, hogy a metszéspont pozitív legyen. Továbbá a (P6) tulajdonság alapján $\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2} > \frac{\beta_2^{\alpha}}{\beta_1^{\alpha}}$ egyenlőtlenségnek is teljesülnie kell, hogy egyáltalán létezzen a metszéspont. E két egyenlőtlenség rendezett formáját írja le a 3.2.3. Állítás (l. 3. ábra).

3.2.5. Megjegyzés. 3.2.3. Állításból következik, hogy $\phi^1 = \phi^2 = \frac{1}{2}$ esetén, az optimum mindig létezik. Szemléletesen, ha a biztosítottak egyik fele az $i = 1$ -es, másik fele

az $i = 2$ -es csoportba tartozik, akkor az optimális küszöbérték mindig pozitív. Ekkor ugyanis

$$C = \left(\frac{(\phi^1)^2 \beta_1^\alpha}{(\phi^2)^2 \beta_2^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} = \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$$

amire a 3.2.3. Állítás második pontja teljesül.

Az 1. táblázatban különböző eloszlásparaméterek mellett szerepelnek az NLP modell optimumai, $\phi^1 = \frac{1}{2}$ esetén. Ekkor ugyanis a 3.2.5. Megjegyzés alapján bármilyen eloszlásparaméter mellett $\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt}$ pozitív. Rögzített β_2 esetén α és β_1 növelése mellett a célfüggvény értéke csökken. Ezzel párhuzamosan c_0^1 és c_1^2 stacionárius valószínűségek rendre növekednek, míg c_1^1 és c_0^2 valószínűségek csökkennek. Ebből a szempontból a bónusz-málusz rendszer egyre jobban szelektál.

α	β_1	β_2	$\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt}$	π_0	π_1	c_0^1	c_1^1	c_0^2	c_1^2	NLP.obj
2	3	1	0.8517	3.0000	1.0000	0.3033	0.1967	0.1458	0.3542	0.8150
4	4	1	0.4768	1.3333	0.3333	0.3187	0.1813	0.1051	0.3949	0.4280
6	5	1	0.3454	1.0000	0.2000	0.3349	0.1651	0.0843	0.4157	0.3504
8	6	1	0.2765	0.8571	0.1429	0.3487	0.1513	0.0709	0.4291	0.3175
10	7	1	0.2333	0.7778	0.1111	0.3602	0.1398	0.0614	0.4386	0.2995
12	8	1	0.2033	0.7273	0.0909	0.3700	0.1300	0.0543	0.4457	0.2883
14	9	1	0.1810	0.6923	0.0769	0.3783	0.1217	0.0487	0.4513	0.2806
16	10	1	0.1638	0.6667	0.0667	0.3855	0.1145	0.0441	0.4559	0.2752
18	11	1	0.1500	0.6471	0.0588	0.3918	0.1082	0.0404	0.4596	0.2711
20	12	1	0.1386	0.6316	0.0526	0.3974	0.1026	0.0373	0.4627	0.2679

1. táblázat. NLP modell optimuma $\alpha_1 = \alpha_2$ paraméterű Pareto-eloszlás esetén. ($\phi^1 = \frac{1}{2}$)
(Forrás: saját szerkesztés)

$\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt} > 0$ esetén matematikailag az NLP modell valóban optimális. $\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt} > L^1$ esetén azonban, azaz ha az átsorolási küszöbérték az $i = 1$ -es csoport várható kárértékénél is nagyobb, akkor a rendszer előzetesen várhatóan a $k = 1$ -es bónusz-málusz osztályba fogja sorolni a biztosítottakat. Hiszen ekkor várhatóan mindenki a küszöbérték alatti kárt fogja okozni, így a $k = 0$ -ás osztályban tartozkodók felkerülnek, a $k = 1$ -es csoportban tartozkodók bentmaradnak. Hasonlóan $\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt} < L^2$ esetén a bónusz-málusz rendszer minden biztosítottat a $k = 0$ -ás csoportba fog sorolni. E két szélsőséges esetben a bónusz-

málusz rendszer alapvető célja sérülhet, hiszen nem feltétlenül tudja elérni azt, hogy a biztosítottaknak olyan csoportosítását hozza létre, amelyben mindenki a várható kárértékének megfelelő prémiumot fizeti. Ugyanakkor matematikailag optimális a megoldás, és a stacionárius valószínűségek is számolhatók. Azonban, ha a valószínűségek nem lennének stacionáriusak, a bónusz-málusz rendszer egy idő után minden biztosítottat egyetlen osztályba sorolna.

3.2.6. Definíció. (NLP modell közgazdasági optimuma)

Az NLP modell *közgazdaságilag optimális*, ha optimális a 3.0.1. Definíció szerint, továbbá az ℓ^{opt} optimális küszöbértékre igaz a következő egyenlőtlenség:

$$L^2 < \ell^{opt} < L^1$$

Ahhoz, hogy az NLP modell közgazdaságilag is optimális legyen, nem elég az optimális küszöbérték pozitivitási feltételének teljesülése. A következőkben a 3.2.3. Állításnál szigorúbb megkötéssel teszünk állítást a közgazdasági optimum létezésére.

3.2.7. Állítás. (A közgazdasági optimum $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ esetén)

Az $\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt} > 0$ (matematikailag) optimális küszöbértékkel meghatározott NLP modell pontosan akkor közgazdaságilag optimális, ha a következő egyenlőtlenség teljesül:

$$\frac{I_l^{(1)}}{1 + I_l^{(1)}} < \phi^1 < \frac{I_u^{(1)}}{1 + I_u^{(1)}}$$

ahol

$$I_l^{(1)} = \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2} \left(\frac{\beta_2 \alpha}{\beta_2 \alpha - \beta_2 + \beta_1} \right)^{\alpha+1}} \quad \text{és} \quad I_u^{(1)} = \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2} \left(\frac{\beta_1 \alpha - \beta_1 + \beta_2}{\beta_1 \alpha} \right)^{\alpha+1}}$$

BIZONYÍTÁS.

Csak az egyenlőtlenség bal oldalát bizonyítjuk. Megoldandó a következő egyenlőtlenség:

$$\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt} < L^1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\beta_2 C - \beta_1}{1 - C} < \frac{\beta_1}{\alpha - 1}$$

Rendezve C -re, $C > \frac{\beta_1 \alpha}{\beta_2 \alpha - \beta_2 + \beta_1}$ adódik. Kibontva C -t, majd rendezve ϕ^1 -re:

$$\frac{\phi^1}{\phi^2} = \frac{\phi^1}{1 - \phi^1} > \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2} \left(\frac{\beta_2 \alpha}{\beta_2 \alpha - \beta_2 + \beta_1} \right)^{\alpha+1}}$$

Megoldva ϕ^1 -re adódik az állításban szereplő bal oldali egyenlőtlenség. Meg kell mutatni ezen kívül, hogy ez az egyenlőtlenség erősebb a 3.2.3. Állításnál. Azaz

$$\frac{\beta_2^{\alpha/2}}{\beta_1^{\alpha/2} + \beta_2^{\alpha/2}} < \frac{I_l^{(1)}}{1 + I_l^{(1)}}$$

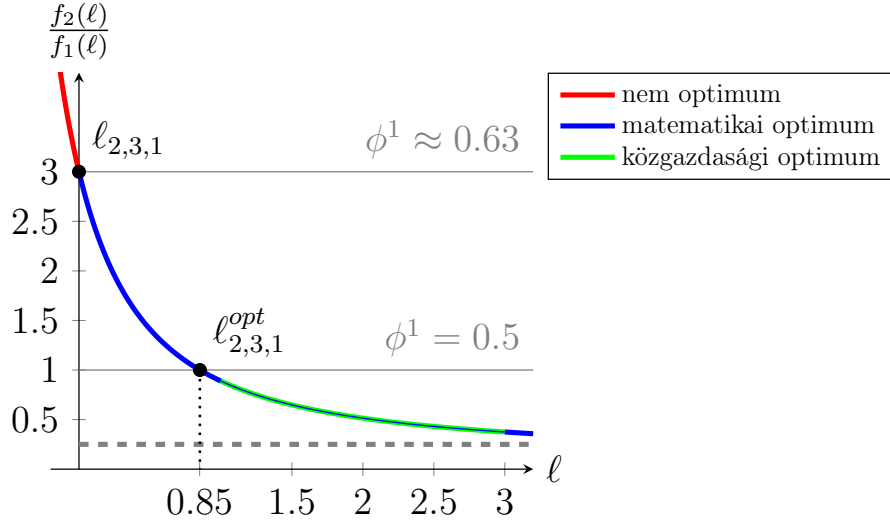
Ezt rendezve $I_l^{(1)}$ -re adódik $\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^{\alpha/2} < I_l^{(1)}$, majd ezt egyszerűsítve $\beta_2 < \beta_1$ adódik, mely definíció szerint igaz. Az állításban szereplő egyenlőtlenség jobb oldala és annak erőssége az előbbiekkal analóg módon bizonyítható. $\square$

A 3. ábra szemlélteti az NLP.FOC elsőrendű feltétel teljesülését rögzített eloszlásparaméterek és különböző ϕ^1 értékek mellett. A pozitivitási feltételek jól látszódnak:

$$\frac{\beta_2^{\alpha/2}}{\beta_1^{\alpha/2} + \beta_2^{\alpha/2}} = \frac{1^{2/2}}{3^{2/2} + 1^{2/2}} \approx 0.33 < \phi^1 < 0.63 \approx \frac{3 - \sqrt{3 \cdot 1}}{3 - 1} = \frac{\beta_1 - \sqrt{\beta_1 \beta_2}}{\beta_1 - \beta_2}$$

Az NLP.FOC egyenlet bal oldalán $\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2}$ szerepel, ennek felelnek meg a szürke konstans függvények, a feltüntetett ϕ^1 értékeknek megfelelően. A szürke szaggatott vonal ϕ^1 alsó korlátját jelöli, azaz $\phi^1 = \frac{1}{3}$. Látható, hogy $\phi^1 = 0.5$ esetén nincs közgazdasági optimumban az NLP modell (zöld tartomány). A 3.2.7. Állítás alapján meg is tudjuk adni a közgazdasági optimum zárt alakú kritériumát, azaz az NLP modell az ábrán rögzített paraméterek mellett pontosan akkor van közgazdasági optimumban, ha

$$\frac{I_l^{(1)}}{1 + I_l^{(1)}} \approx 0.38 < \phi^1 < 0.49 \approx \frac{I_u^{(1)}}{1 + I_u^{(1)}}$$



3. ábra. Elsőrendű feltétel teljesülése rögzített $\alpha = 2$, $\beta_1 = 3$ és $\beta_2 = 1$ mellett.
(Forrás: saját szerkesztés)

Utolsónak a matematikai optimumban meghatározott küszöbérték határértékeit közlöm. Extrém eloszlásparaméterek esetén a küszöbértéknek nem feltétlenül biztosítható a pozitivitása. Mind az α mind a β paraméterek függvényében vizsgálhatók a határértékek. A következő, összefoglaló állításban ezen határértékek szerepelnek, melyeknek szemléletes bemutatása egy későbbi ábránál található.

3.2.8. Állítás. ($\ell_{\alpha,\beta_1,\beta_2}^{opt}$ határértékei)

Rögzített β_1 és β_2 esetén

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \ell_{\alpha,\beta_1,\beta_2}^{opt} = \frac{\phi^1 \sqrt{\beta_1} \beta_2 - \phi^2 \sqrt{\beta_2} \beta_1}{\phi^2 \sqrt{\beta_2} - \phi^1 \sqrt{\beta_1}} \quad \text{és} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \ell_{\alpha,\beta_1,\beta_2}^{opt} = 0$$

Rögzített $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ esetén és rendre β_1 és β_2 rögzítése esetén

$$\lim_{\beta_2 \rightarrow 0^+} \ell_{\alpha,\beta_1,\beta_2}^{opt} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{\beta_1 \rightarrow \infty} \ell_{\alpha,\beta_1,\beta_2}^{opt} = \infty$$

BIZONYÍTÁS.

$\alpha \rightarrow 1^+$ esetén C határértéke véges, mégpedig $C \rightarrow \frac{\phi^1}{\phi^2} \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}$. Ezt felhasználva

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \ell_{\alpha,\beta_1,\beta_2}^{opt} = \frac{\beta_2 \frac{\phi^1}{\phi^2} \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}} - \beta_1}{1 - \frac{\phi^1}{\phi^2} \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}} = \frac{\frac{\phi^1}{\phi^2} \sqrt{\beta_1 \beta_2} - \beta_1}{1 - \frac{\phi^1}{\phi^2} \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}} = \frac{\frac{\phi^1}{\phi^2} \sqrt{\beta_1 \beta_2} - \beta_1}{\frac{\phi^2 \sqrt{\beta_2} - \phi^1 \sqrt{\beta_1}}{\phi^2 \sqrt{\beta_2}}} = \frac{\phi^1 \sqrt{\beta_1} \beta_2 - \phi^2 \sqrt{\beta_2} \beta_1}{\phi^2 \sqrt{\beta_2} - \phi^1 \sqrt{\beta_1}}$$

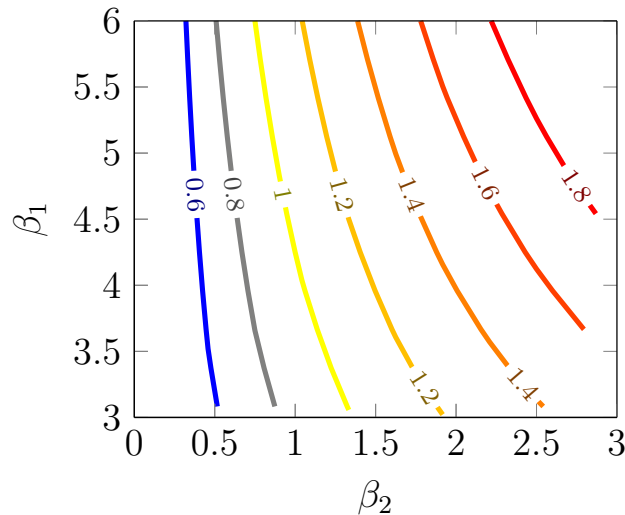
adódik. $\alpha \rightarrow \infty$ esetén $C \rightarrow \frac{\beta_1}{\beta_2}$, így

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt} = \frac{\beta_2 \frac{\beta_1}{\beta_2} - \beta_1}{1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}} = \frac{\beta_1 - \beta_1}{1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}} = 0$$

$\beta_2 \rightarrow 0^+$ esetén $C \rightarrow \infty$, így $\beta_2 C$ kifejezés határértéke külön vizsgálatot igényel. Kifejezve C -t azonban a határérték számolható, mégpedig $C \rightarrow 0$. Így $(\beta_2 C - \beta_1)$ tart a $(-\beta_1)$ -be, $(1 - C)$ pedig $(-\infty)$ -be. Hányadosuk – és így $\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt}$ – tehát 0-ba tart.

$\beta_1 \rightarrow \infty$ esetén szintén $C \rightarrow \infty$. A L'Hôpital-szabály alkalmazásával adódik a kérdéses határérték. $\square$

A 4. ábra rögzített $\alpha = 2$ és $\phi^1 = \frac{1}{2}$ paraméterek mellett szemlélteti az optimális küszöbértékeket, β_1 és β_2 függvényében. A 3.2.8. Állítás utolsó két határértékére grafikus magyarázatot szolgál az ábra.



4. ábra. Küszöbértékek β_1 és β_2 függvényében. ($\alpha = 2$ és $\phi^1 = \frac{1}{2}$)
(Forrás: saját szerkesztés)

Következő esetként tekintsük az azonos β -k esetét! Legyen $\beta = \beta_1 = \beta_2$! Hasonlóan az előző esethez, szükséges rögzíteni a biztosított csoportok várható kárnagysága közötti egyenlőtlenséget, mely itt az $\alpha_1 < \alpha_2$ feltétel formájában valósul meg. Az állítások felépítése az azonos α -k esetéhez hasonló, először az optimum egyértelműségét bizonyítjuk, majd a zárt alak helyességét.

3.2.9. Állítás. (Az optimum egyértelműsége $\beta = \beta_1 = \beta_2$ esetén)

Ha az $i = 1$ -es csoport káreloszlása α_1 és β paraméterű, az $i = 2$ -es csoport káreloszlása

α_2 és β paraméterű Pareto-eloszlást követ, és az NLP modell optimális $\ell > 0$ küszöbérték mellett, akkor az így meghatározott (ℓ, π_0, π_1) számhármass egyértelmű.

BIZONYÍTÁS.

A 3.1.7. Állításból tudjuk, hogy optimumban az NLP.FOC elsőrendű feltételnek teljesülnie kell. Azt kell csupán megmutatni, hogy ez az egyenlőség Pareto-eloszlás és azonos β -k esetén egyértelmű. Belátjuk, hogy ekkor $\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$ hányadosfüggvény szigorúan monoton csökken az $\ell > 0$ intervallumon, így a konstans $\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2}$ függvénnyel legfeljebb 1 metszéspontja lehet. Tekintsük az $\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$ hányadosfüggvény értékét az ℓ pontban és az $\ell + \varepsilon$ pontban, ahol $\varepsilon > 0$. A hányadosfüggvények hányadosa ekkor

$$\frac{\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}}{\frac{f_2(\ell+\varepsilon)}{f_1(\ell+\varepsilon)}} = \left(\frac{\ell + \beta}{\ell + \beta + \varepsilon} \right)^{\alpha_1 - \alpha_2} = \left(\frac{\ell + \beta + \varepsilon}{\ell + \beta} \right)^{\alpha_2 - \alpha_1} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\ell + \beta} \right)^{\alpha_2 - \alpha_1} > 1$$

felhasználva a (P4) formulát. Mivel $\alpha_2 - \alpha_1 > 0$ és $\varepsilon > 0$, ezért a kifejezés valóban nagyobb mint 1. $\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$ hányadosfüggvény tehát szigorúan monoton csökken az $\ell > 0$ intervallumon. Így ha metszi a $\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2}$ konstans függvényt, az valóban csak egy pontban lehetséges, tehát az optimum egyértelmű. $\square$

3.2.10. Állítás. (Az optimum $\beta = \beta_1 = \beta_2$ esetén)

Ha az $i = 1$ -es csoport káreloszlása α_1 és β paraméterű, az $i = 2$ -es csoport káreloszlása α_2 és β paraméterű Pareto-eloszlást követ, akkor az NLP modell optimális küszöbértéke

$$\ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt} = \left(\frac{(\phi^1)^2 \alpha_1}{(\phi^2)^2 \alpha_2} \beta^{\alpha_1 - \alpha_2} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}} - \beta$$

amennyiben $\ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt} > 0$.

BIZONYÍTÁS.

Az állításban szereplő $\ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt}$ kielégíti az NLP.FOC elsőrendű feltételt, hiszen megoldása a

$$\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \beta^{\alpha_2 - \alpha_1} (x + \beta)^{\alpha_1 - \alpha_2}$$

egyenletnek. Ezen kívül NLP.obj3 célfüggvény első deriváltja előjelet is vált ebben a pontban. Ehhez vegyünk egy tetszőleges $\ell_0 > 0$ pontot, és használjuk fel, hogy $\ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt}$ egyértelmű a 3.2.9. Állítás alapján. Ha $\ell_0 < \ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt}$, akkor $\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2} < \frac{f_2(\ell_0)}{f_1(\ell_0)}$, azaz NLP.obj3 első deriváltja negatív. Ha $\ell_0 > \ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt}$, akkor $\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2} > \frac{f_2(\ell_0)}{f_1(\ell_0)}$, és ekkor NLP.obj3 első deriváltja pozitív. Azaz $\ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt}$ valóban NLP.obj3 minimumhelye. $\square$

3.2.11. Állítás. (Az $\ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt}$ optimális küszöbérték pozitivitásának feltétele)

Az NLP modell optimumában meghatározott $\ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt}$ küszöbérték pontosan akkor pozitív, ha $\phi^1 < \frac{\alpha_2 - \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{\alpha_2 - \alpha_1}$.

BIZONYÍTÁS.

Megoldandó a

$$\left(\frac{(\phi^1)^2 \alpha_1}{(\phi^2)^2 \alpha_2} \beta^{\alpha_1 - \alpha_2} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}} - \beta > 0$$

egyenlőtlenség. Átrendezve adódik $\frac{\phi^1}{\phi^2} > \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$. Behelyettesítve $\phi^2 = 1 - \phi^1$ alapján adódik az állításban szereplő egyenlőtlenség. $\square$

α_1	α_2	β	$\ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt}$	π_0	π_1	c_0^1	c_1^1	c_0^2	c_1^2	NLP.obj
2	5	1	0.3572	1.0000	0.2500	0.2714	0.2286	0.1086	0.3914	0.2893
2	6	2	0.6321	2.0000	0.4000	0.2887	0.2113	0.0962	0.4038	0.6309
2	7	3	0.8542	3.0000	0.5000	0.3029	0.1971	0.0866	0.4134	1.0037
2	8	4	1.0397	4.0000	0.5714	0.3150	0.1850	0.0787	0.4213	1.3971
2	9	5	1.1985	5.0000	0.6250	0.3253	0.1747	0.0723	0.4277	1.8054
2	10	6	1.3371	6.0000	0.6667	0.3344	0.1656	0.0669	0.4331	2.2250
2	11	7	1.4598	7.0000	0.7000	0.3423	0.1577	0.0622	0.4378	2.6533
2	12	8	1.5698	8.0000	0.7273	0.3494	0.1506	0.0582	0.4418	3.0888
2	13	9	1.6695	9.0000	0.7500	0.3558	0.1442	0.0547	0.4453	3.5300
2	14	10	1.7605	10.0000	0.7692	0.3615	0.1385	0.0516	0.4484	3.9762

2. táblázat. NLP modell optimuma $\beta_1 = \beta_2$ paraméterű Pareto-eloszlás esetén. ($\phi^1 = \frac{1}{2}$)
(Forrás: saját szerkesztés)

3.2.12. Állítás. (A közgazdasági optimum $\beta = \beta_1 = \beta_2$ esetén)

Az $\ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt} > 0$ (matematikailag) optimális küszöbértékekkel meghatározott NLP modell pontosan akkor közgazdaságilag optimális, ha a következő egyenlőtlenség teljesül:

$$\frac{I_l^{(2)}}{1 + I_l^{(2)}} < \phi^1 < \frac{I_u^{(2)}}{1 + I_u^{(2)}}$$

ahol

$$I_l^{(2)} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 1} \right)^{\alpha_1 - \alpha_2}} \quad \text{és} \quad I_u^{(2)} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - 1} \right)^{\alpha_1 - \alpha_2}}$$

BIZONYÍTÁS.

Csak a jobb oldali egyenlőtlenséget bizonyítjuk. Tudjuk, hogy közgazdasági optimumban

$$\ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt} > L^2 \iff \left(\frac{(\phi^1)^2 \alpha_1}{(\phi^2)^2 \alpha_2} \beta^{\alpha_1 - \alpha_2} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}} - \beta > \frac{\beta}{\alpha_2 - 1}$$

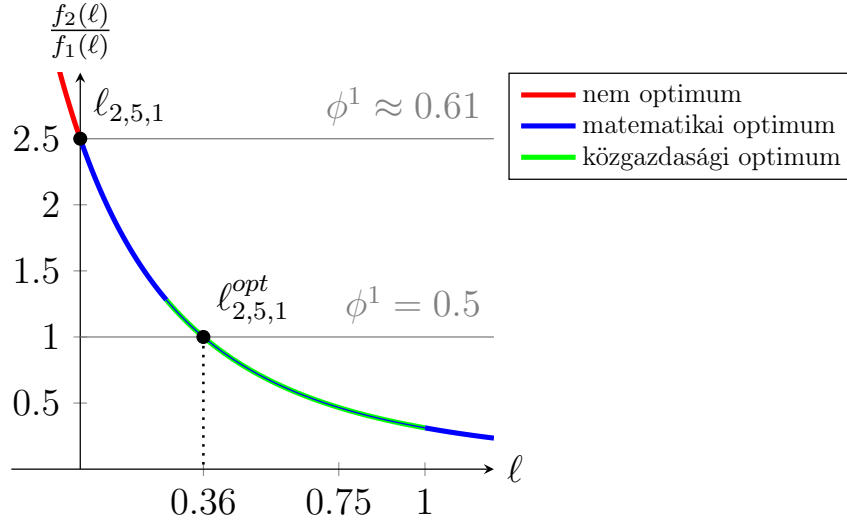
A jobb oldalhoz hozzáadva β -t, majd átrendezve adódik $\frac{\phi^1}{\phi^2} < \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - 1} \right)^{\alpha_1 - \alpha_2}}$. Az egyenlőtlenség-jel azután „fordul meg”, miután mindkét oldalt az $\alpha_1 - \alpha_2 < 0$ hatványra emeljük. A kapott egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk az állításban szereplő kritériumot, amely a pozitivitásnál erősebb feltételt támaszt. Az állításban szereplő bal oldali egyenlőtlenség az előbbihez analóg módon számolható. $\square$

3.2.13. Megjegyzés. A 2. táblázatban szereplő optimális küszöbértékek kivétel nélkül közgazdaságilag is optimálisak, rögzített $\phi^1 = \frac{1}{2}$ esetén. Az 5. ábrán rögzített eloszlásparaméterek mellett szerepel az NLP.FOC feltétel teljesülése különböző ϕ^1 értékek esetén. A 3.2.11. Állítás alapján az NLP akkor határoz meg pozitív küszöbértéket, ha

$$\phi^1 < \frac{\alpha_2 - \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{5 - \sqrt{2 \cdot 5}}{5 - 2} \approx 0.61$$

Szigorúbb feltételhez kötött a közgazdasági optimum létezése – az ábrán zölddel jelölve. Ennek ϕ^1 -re vonatkozó követelménye a 3.2.12. Állításban szerepel, mégpedig

$$\frac{I_l^{(2)}}{1 + I_l^{(2)}} \approx 0.36 < \phi^1 < 0.53 \approx \frac{I_u^{(2)}}{1 + I_u^{(2)}}$$



5. ábra. Elsőrendű feltétel teljesülése rögzített $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 5$ és $\beta = 1$ mellett.
(Forrás: saját szerkesztés)

3.2.14. Állítás. ($\ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt}$ határértékei)

Rögzített α_1 és α_2 esetén

$$\lim_{\beta \rightarrow 0^+} \ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt} = \infty$$

Rögzített $\beta = \beta_1 = \beta_2$ esetén és rendre α_2 és α_1 rögzítése esetén

$$\lim_{\alpha_1 \rightarrow 1^+} \ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt} = \left(\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2} \beta^{1-\alpha_2} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_2}} - \beta \quad \text{és} \quad \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt} = 0$$

BIZONYÍTÁS.

$\beta \rightarrow 0^+$ és $\alpha_1 \rightarrow 1^+$ esetén a határérték egyszerűen számolható. $\beta \rightarrow \infty$ esetén végezzünk el kiemelést $\ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt}$ képletében:

$$\ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt} = \left(\frac{(\phi^1)^2 \alpha_1}{(\phi^2)^2 \alpha_2} \beta^{\alpha_1 - \alpha_2} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}} - \beta = \left[\left(\frac{(\phi^1)^2 \alpha_1}{(\phi^2)^2 \alpha_2} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}} - 1 \right] \beta$$

Megmutatható, hogy a szorzat bal oldali tagja pozitív. Ehhez tekintsük a következő egyenlőtlenséget:

$$\left(\frac{(\phi^1)^2 \alpha_1}{(\phi^2)^2 \alpha_2} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}} > 1 \quad \implies \quad \frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2} < \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

Amely egyenlőtlenség minden α_1, α_2 -re igaz az NLP.FOC elsőrendű feltétel, a (P5) tulaj-

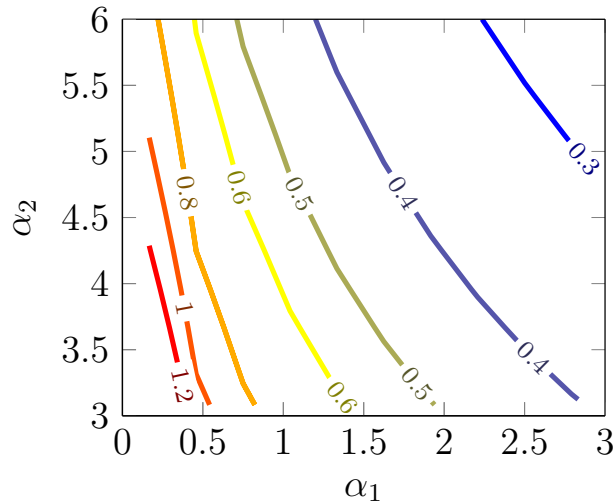
donság és a sűrűségfüggvények hányadosának monotonitása miatt.

Amennyiben $\alpha_2 \rightarrow \infty$, a szorzat bal oldali tagja 0-ba tart, hiszen

$$A = \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \left(\frac{(\phi^1)^2 \alpha_1}{(\phi^2)^2 \alpha_2} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}} \implies \ln A = \lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \frac{(\phi^1)^2 \alpha_1}{(\phi^2)^2 \alpha_2} = 0 \implies A = 1.$$

Innen pedig a kérdéses határérték valóban 0. $\square$

A 6. ábra hasonló az előbb tárgyalt speciális Pareto-eloszláshoz. Rögzített $\beta = 1$ és $\phi^1 = \frac{1}{2}$ paraméterek mellett szemlélteti az optimális küszöbértékeket, α_1 és α_2 függvényében. Az ábrán megtalálható a 2. táblázatban és az 5. ábrán is szereplő $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1) = (2, 5, 1)$ eset. Az ábra ezen kívül szemléltetheti $\ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt}$ határértékeit, természetesen bizonyító erő nélkül.



6. ábra. Küszöbértékek α_1 és α_2 függvényében. ($\beta = 1$ és $\phi^1 = \frac{1}{2}$)
(Forrás: saját szerkesztés)

A Pareto-eloszlás két speciális esetét már bemutattuk. Általános esetben nem adható zárt alak az optimális küszöbértékre. Elsősorban azért, mert az NLP.FOC elsőrendű feltételben szereplő $\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$ kifejezésben az $\frac{(\ell + \beta_1)^{\alpha_1 + 1}}{(\ell + \beta_2)^{\alpha_2 + 1}}$ tört nem egyszerűsíthető tovább. Ugyanakkor a prémiumok értékeinek meghatározása ugyanúgy működik, mint a speciális esetekben. Az általános eset az eloszlásparaméterek három különböző relációját jelenti: $\beta_1 < \beta_2$ és $\alpha_1 < \alpha_2$, $\beta_1 > \beta_2$ és $\alpha_1 < \alpha_2$, $\beta_1 > \beta_2$ és $\alpha_1 > \alpha_2$. Minden egyéb eset vagy érintve volt a speciális esetek által, vagy az $L^1 > L^2$ feltétel miatt egyáltalán nem lehetséges. A következő állítás az általános paraméterű Pareto-eloszlással jellemezhető csoportokból álló bónusz-málusz rendszer optimumának egyértelműségét adja meg.

3.2.15. Állítás. (Az optimum egyértelmősége általános Pareto-eloszlás esetén)

Ha az $i = 1$ -es csoport káreloszlása α_1 és β_1 paraméterű, az $i = 2$ -es csoport káreloszlása α_2 és β_2 paraméterű Pareto-eloszlást követ, és az NLP modell optimális $\ell > 0$ küszöbérték mellett, akkor az így meghatározott (ℓ, π_0, π_1) számhármass egyértelmű.

BIZONYÍTÁS.

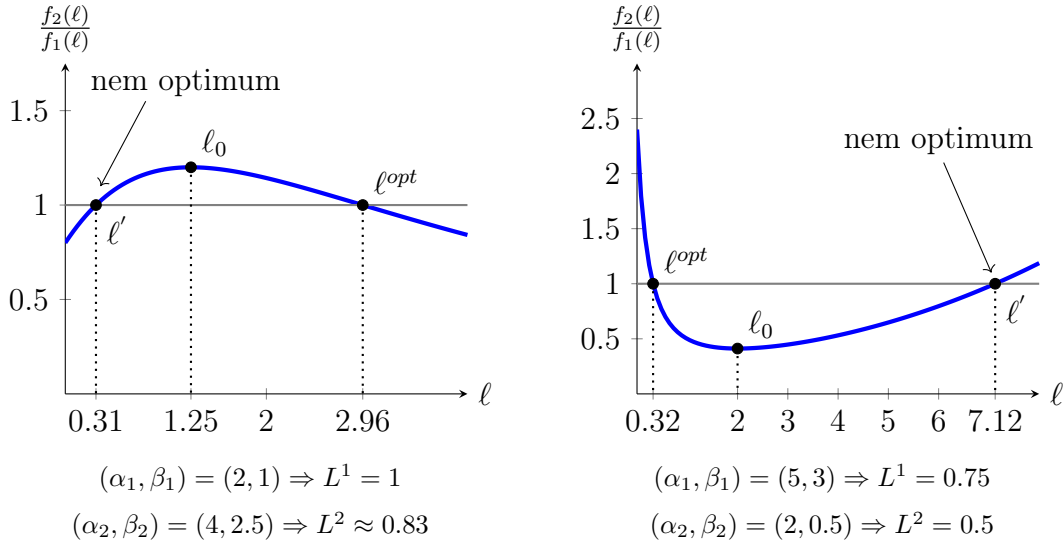
Vizsgáljuk $\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$ függvényt monotonitás szempontjából! Ha az $\ell > 0$ tartományon monoton, azaz nincsen szélsőértékhelye a tartományon és mindenhol folytonos, akkor az NLP.FOC elsőrendű feltételnek legfeljebb 1 megoldása lehet, ami az optimum egyértelműségét implikálja. Tekintsük $\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$ függvény első deriváltját:

$$\left(\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}\right)' = \gamma \left(\frac{(\ell + \beta_1)^{\alpha_1+1}}{(\ell + \beta_2)^{\alpha_2+1}}\right)' = \gamma \cdot \frac{(\ell + \beta_1)^{\alpha_1}(\ell + \beta_2)^{\alpha_2}[(\alpha_1 + 1)(\ell + \beta_2) - (\alpha_2 + 1)(\ell + \beta_1)]}{(\ell + \beta_2)^{2\alpha_2+2}}$$

ahol $\gamma = \frac{\alpha_2\beta_2^{\alpha_2}}{\alpha_1\beta_1^{\alpha_1}}$. Mivel $\gamma > 0$ és $(\ell + \beta_2)^{2\alpha_2+2} > 0$, a derivált előjele csak a képletben szereplő tört számlálójától függ. Az NLP modell megköveteli a küszöbérték pozitivitását, azaz $\ell > 0$, így $(\ell + \beta_1)^{\alpha_1}$ és $(\ell + \beta_2)^{\alpha_2}$ egyaránt pozitívak. Az $\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$ függvény deriváltjának értéke egyetlen ℓ esetén lehet nulla, mégpedig

$$\ell_0 = \frac{\beta_1(\alpha_2 + 1) - \beta_2(\alpha_1 + 1)}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

$\beta_1 > \beta_2$ és $\alpha_1 < \alpha_2$ esetén ez az érték mindig negatív, így $\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$ monoton a pozitív tartományon. $\beta_1 > \beta_2$ és $\alpha_1 > \alpha_2$ esetén ez az érték mindig pozitív, és ekkor ℓ_0 pontban $\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$ -nek minimumhelye van. $\beta_1 < \beta_2$ és $\alpha_1 < \alpha_2$ megfelelő megválasztása esetén konstruálható pozitív ℓ_0 , ekkor $\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$ -nek maximumhelye van ℓ_0 -ban. Mindkettő esetben az NLP.FOC elsőrendű feltétel legfeljebb két pozitív pontban teljesülhet (l. 7. ábra, $\phi^1 = 0.5$). Ezek közül csakis az egyik pontban (ℓ^{opt}) létezik minimumja az eredeti NLP.obj3 célfüggvénynek, hiszen $\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$ folytonos az $\ell > 0$ tartományon. $\beta_1 > \beta_2$ és $\alpha_1 > \alpha_2$ esetén $\ell^{opt} < \ell'$, míg $\beta_1 < \beta_2$ és $\alpha_1 < \alpha_2$ esetén $\ell^{opt} > \ell'$. $\square$



7. ábra. Elsőrendű feltétel teljesülése általános Pareto-eloszlás esetén.
(Forrás: saját szerkesztés)

3.3. Optimum exponenciális eloszlás esetén

Az exponenciális eloszlást egyetlen paraméterrel definiáljuk, λ -val, mely a várható érték reciproka. Ellentétben a Pareto-eloszlással, itt nem különböztetünk meg több esetet, az optimumot λ -kra vonatkozó feltétel nélkül határozzuk meg. Mivel $L^1 > L^2$, a $\lambda_2 > \lambda_1$ egyenlőtlenségnek mindig teljesülnie kell, így biztosítható a várható kárértékek szigorú különbözősége.

3.3.1. Állítás. (Az optimum egyértelműsége exponenciális eloszlás esetén)

Ha az $i = 1$ -es csoport káreloszlása λ_1 paraméterű, az $i = 2$ -es csoport káreloszlása λ_2 paraméterű exponenciális eloszlást követ, és az NLP modell optimális $\ell > 0$ küszöbérték mellett, akkor az így meghatározott (ℓ, π_0, π_1) számhármass egyértelmű.

BIZONYÍTÁS.

A bizonyítás a 3.2.9. Állítás bizonyításához hasonlóan történik. Meg kell mutatni, hogy a sűrűségfüggvények hányadosa által meghatározott függvény szigorúan monoton csökken az $\ell > 0$ intervallumon. Ekkor az NLP.FOC elsőrendű feltétel legfeljebb egyetlen pontban teljesülhet. A sűrűségfüggvények hányadosának monotonitás-vizsgálata ($\varepsilon > 0$):

$$\frac{\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}}{\frac{f_2(\ell+\varepsilon)}{f_1(\ell+\varepsilon)}} = \frac{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\ell}}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)(\ell+\varepsilon)}} = e^{-\varepsilon(\lambda_1 - \lambda_2)} = e^{\varepsilon(\lambda_2 - \lambda_1)} > 1$$

Felhasználva, hogy $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$ és $\varepsilon > 0$. Az azonosan $\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2}$ függvény tehát legfeljebb egy pontban metszheti az $\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$ hányadosfüggvényt, így az optimális küszöbérték egyértelmű. A küszöbérték alapján pedig a prémiumok is egyértelműen meghatározhatók. $\square$

3.3.2. Állítás. (Az optimum exponenciális eloszlás esetén)

Ha az $i = 1$ -es csoport káreloszlása λ_1 paraméterű, az $i = 2$ -es csoport káreloszlása λ_2 paraméterű exponenciális eloszlást követ, akkor az NLP modell optimális küszöbértéke

$$\ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{opt} = \frac{2 \ln \frac{\phi^1}{\phi^2} + \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (\text{OPT.EXP})$$

amennyiben $\ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{opt} > 0$.

BIZONYÍTÁS.

Az állításban szereplő képlet megoldása az NLP.FOC elsőrendű feltételnek. Meg kell mutatni, hogy az NLP.obj3 első deriváltja előjelet is vált ebben a pontban. Vegyünk egy $\ell_0 > 0$ tetszőleges pontot! Ha $\ell_0 < \ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{opt}$, akkor $\left(\frac{\phi^1}{\phi^2}\right)^2 < \frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$, azaz a derivált negatív. Ha $\ell_0 > \ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{opt}$, akkor $\left(\frac{\phi^1}{\phi^2}\right)^2 > \frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$, azaz a derivált pozitív. NLP.obj3 deriváltja tehát az $\ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{opt}$ pontban negatív értékből pozitívba megy, tehát az eredeti célfüggvénynek minimumja van ebben a pontban. $\square$

3.3.3. Állítás. (Az $\ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{opt}$ optimális küszöbérték pozitivitásának feltétele)

Az NLP modell optimumában meghatározott $\ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{opt}$ küszöbérték pontosan akkor pozitív, ha $\phi^1 < \frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1}$.

BIZONYÍTÁS.

Megoldandó a

$$\frac{2 \ln \frac{\phi^1}{\phi^2} + \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} > 0$$

egyenlőtlenség. Mivel $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$, ezért az egyenlőtlenség $2 \ln \frac{\phi^1}{\phi^2} + \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$ esetén teljesülhet. Innen $\frac{\phi^1}{\phi^2} < \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$, amit megoldva ϕ^1 -re (felhasználva, hogy $\phi^1 + \phi^2 = 1$) adódik az állításban megfogalmazott feltétel. $\square$

3.3.4. Megjegyzés. Érdemes megvizsgálni az optimális küszöbérték pozitivitásának feltételét. A számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenséget felhasználva megmutatható, hogy

$$\frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1} > \frac{1}{2}$$

Tehát $\phi^1 \leq \frac{1}{2}$ esetén az optimális küszöbérték mindig pozitív. Ha $\lambda_1 \rightarrow 0^+$, azaz a „rosszabbik” csoport várható kárértéke tart a végtelenbe, illetve ha $\lambda_2 \rightarrow \infty$, azaz a „jobb” csoport várható kárértéke tart a 0-ba:

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \lim_{\lambda_2 \rightarrow \infty} \frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1} = 1$$

Azaz minél távolabb kerülnek a csoportok várható kárértékei egymástól, az NLP modell annál nagyobb arányt enged meg az $i = 1$ -es csoportból.

Az alábbi táblázat az NLP modell optimát mutatja különböző eloszlásparaméterek mellett, $\phi^1 = \phi^2 = \frac{1}{2}$ esetén. Ekkor tehát az $i = 1$ -es és $i = 2$ -es csoport azonos arányban szerepel a rendszerben. Ahogy a 3.3.4. Megjegyzésben megállapítottuk, hogy $\phi^1 = \frac{1}{2}$ esetén az optimális küszöbérték minden eloszlásparaméter mellett pozitív. A táblázat ezek mellett tartalmazza a stacionárius valószínűségeket, és a célfüggvény értékét optimumban. Az optimális prémiumok értékei rendre $\pi_0 = L^1$ és $\pi_1 = L^2$. Ahogy λ_2 értéke nő, úgy nő a biztosított csoportok várható kárértéke közötti különbség, és $\ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{opt}$ is csökken. Az is megfigyelhető, hogy λ_2 növelésével c_0^1 és c_1^2 valószínűségek egyaránt nőnek, azaz a rendszer az $i = 1$ -es csoport tagjait egyre nagyobb valószínűséggel sorolja a $k = 0$ -ás osztályba, míg az $i = 2$ -es csoport tagjait a $k = 1$ -es osztályba. A bónusz-málusz rendszer határértékének tekinthető a $c_0^1 = \phi^1$ és $c_1^2 = \phi^2$ állapot, így λ_2 növelésével a rendszer – ebben az értelemben – tart a tökéletes osztályozáshoz.

λ_1	λ_2	$\ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{opt}$	π_0	π_1	c_0^1	c_1^1	c_0^2	c_1^2	NLP.obj
1	2	0.6931	1.0000	0.5000	0.2500	0.2500	0.1250	0.3750	0.0938
1	3	0.5493	1.0000	0.3333	0.2887	0.2113	0.0962	0.4038	0.1025
1	4	0.4621	1.0000	0.2500	0.3150	0.1850	0.0787	0.4213	0.0989
1	5	0.4024	1.0000	0.2000	0.3344	0.1656	0.0669	0.4331	0.0930
1	6	0.3584	1.0000	0.1667	0.3494	0.1506	0.0582	0.4418	0.0870
1	7	0.3243	1.0000	0.1429	0.3615	0.1385	0.0516	0.4484	0.0815
1	8	0.2971	1.0000	0.1250	0.3715	0.1285	0.0464	0.4536	0.0765
1	9	0.2747	1.0000	0.1111	0.3799	0.1201	0.0422	0.4578	0.0721
1	10	0.2558	1.0000	0.1000	0.3871	0.1129	0.0387	0.4613	0.0682
1	11	0.2398	1.0000	0.0909	0.3934	0.1066	0.0358	0.4642	0.0647

3. táblázat. NLP modell optimuma exponenciális eloszlás esetén. ($\phi^1 = \frac{1}{2}$)
(Forrás: saját szerkesztés)

3.3.5. Állítás. (A közgazdasági optimum exponenciális eloszlás esetén)

Az $\ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{opt} > 0$ (matematikailag) optimális küszöbértékkel meghatározott NLP modell pontosan akkor közgazdaságilag optimális, ha a következő egyenlőtlenség teljesül:

$$\frac{I_l^{(3)}}{1 + I_l^{(3)}} < \phi^1 < \frac{I_u^{(3)}}{1 + I_u^{(3)}}$$

ahol

$$I_l^{(3)} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1}}} \quad \text{és} \quad I_u^{(3)} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2}}}$$

BIZONYÍTÁS.

Csak az egyenlőtlenség jobb oldalát bizonyítjuk. Ehhez a következő egyenlőtlenségnek kell teljesülnie:

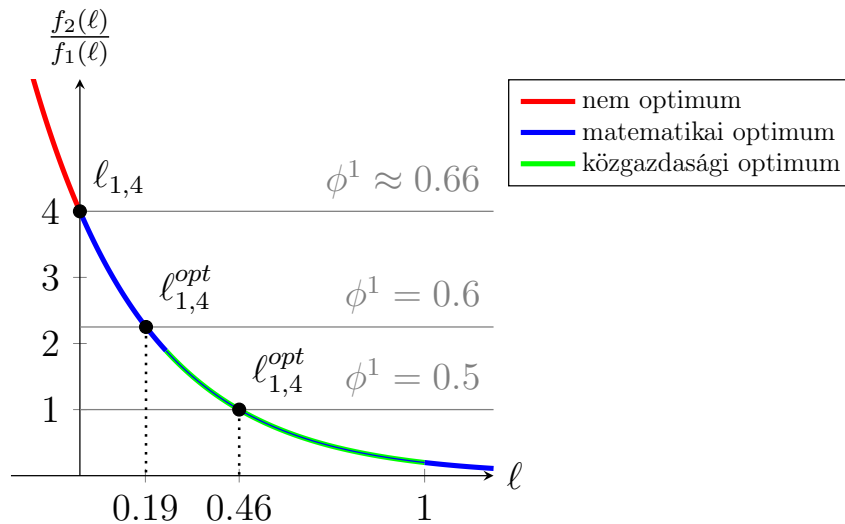
$$\ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{opt} > L^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2 \ln \frac{\phi^1}{\phi^2} + \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} > \frac{1}{\lambda_2}$$

Átrendezve ϕ^1 -re adódik $\frac{\phi^1}{\phi^2} < \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2}}}$, ahonnan az állításban szereplő egyenlőtlenség jobb oldalának ekvivalens alakja levezethető. $\frac{I_u^{(3)}}{1 + I_u^{(3)}}$ szigorúan kisebb, mint $\frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1}$, így ez a korlát valóban szigorúbb, mint a pozitivitási korlát. Az állításban szereplő bal oldali korlát az előbbihez analóg módon számolható. $\square$

3.3.6. Megjegyzés. A 3. táblázatban szereplő matematikailag optimális küszöbértékek egyaránt közgazdaságilag is optimálisak. A 8. ábra rögzített $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 4$ mellett ábrázolja az optimális küszöbértékeket különböző ϕ^1 -ek esetén. Ez tulajdonképpen az NLP.FOC elsőrendű feltétel vizualizációja. A szürkével jelölt konstans függvények a $\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2}$ értékeket jelölik. A küszöbérték pozitivitási feltételét felhasználva

$$\phi^1 < \frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{4 - \sqrt{1 \cdot 4}}{4 - 1} = \frac{2}{3}$$

esetén létezik a matematikai optimum. Ezen kívül minden $\phi^1 \geq \frac{2}{3}$ esetén nem létezik matematikai optima az NLP modellnek, a jelenleg rögzített eloszlásparaméterekkel. Például $\phi^1 = 0.6$ -nél a küszöbérték kisebb, mint $L^2 = 0.25$, így ez nem közgazdasági optimum. Ahogy az 3. táblázatban is szerepel, $\phi^1 = 0.5$ -nél közgazdasági optima van az NLP modellnek.



8. ábra. Elsőrendű feltétel teljesülése rögzített $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 4$ mellett.
(Forrás: saját szerkesztés)

3.3.7. Állítás. ($\ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{opt}$ határértékei)

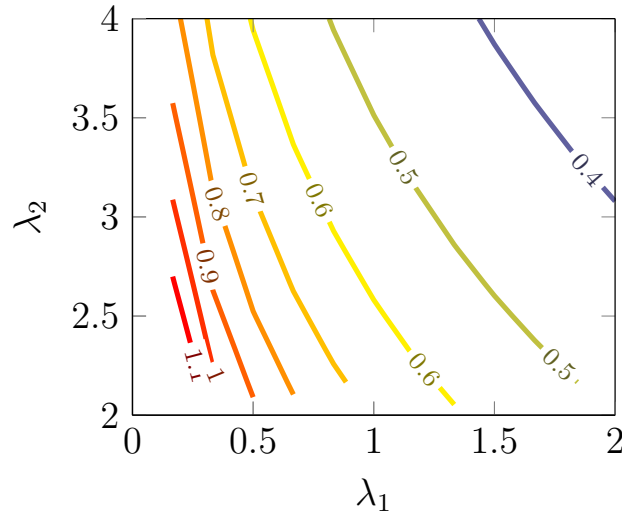
Rögzített λ_1 esetén $\lim_{\lambda_2 \rightarrow \infty} \ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{opt} = 0$ és rögzített λ_2 esetén $\lim_{\lambda_1 \rightarrow 0^+} \ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{opt} = \infty$.

BIZONYÍTÁS.

Az első határérték:

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow \infty} \ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{opt} = \lim_{\lambda_2 \rightarrow \infty} \frac{2 \ln \frac{\phi^1}{\phi^2} + \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{\lambda_2 \rightarrow \infty} \frac{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{-1}{\lambda_2^2}}{-1} = \lim_{\lambda_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} = 0.$$

A második határérték esetén $2 \ln \frac{\phi^1}{\phi^2} + \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ tart a $(-\infty)$ -be, valamint $\lambda_1 - \lambda_2$ a $(-\lambda_2)$ -be. Így a hányadosuk a pozitív végtelenbe tart. $\square$



9. ábra. Küszöbértékek λ_1 és λ_2 függvényében. ($\phi^1 = \frac{1}{2}$)
(Forrás: saját szerkesztés)

A fenti szintvonalas ábra az optimális küszöbértéket mutatja λ_1 és λ_2 függvényében és rögzített $\phi^1 = \frac{1}{2}$ esetén. A biztosított csoportok aránya, azaz ϕ^1 és ϕ^2 , a szintvonalak elhelyezkedését nem befolyásolja, csupán a küszöbértékek nagyságrendjét. Illetve $\phi^1 > \frac{1}{2}$ esetén a 3.3.4. Megjegyzés alapján nem feltétlenül biztosítható a küszöbérték pozitívítása, így az optimum létezése. Az ábra szemlélteti a 3.3.7. Állítás eredményeit, azaz az optimális küszöbértékek határértékeit az eloszlásparaméterek függvényében.

4. A modell mérése

A 3. bekezdésben az NLP modell optimumának létezésével, annak feltételeivel és a konkrét küszöbértékek meghatározásával foglalkoztunk. Egy bónusz-málusz rendszer esetén – azaz rögzített paraméterek esetén – már meghatározhatóvá vált az optimum. Ugyanakkor a különböző modellek továbbra is nehezen összehasonlíthatók abból a szempontból, hogy milyen jól szelektálnak. Dolgozatomban használt mérőszám Gyetvai (2021) munkájában szerepel hasonló megközelítésben. A mérőszám definiálásakor alapvető gondolat az elméleti és gyakorlati prémiumfizetések összehasonlítása. Az NLP modellt tekintve az elméleti optimális fizetendő prémium nagysága az i -edik csoport számára $\phi^i L^i$, míg a gyakorlati fizetendő prémium nagysága az osztályok prémiumainak az osztályokban tartózkodás valószínűségével súlyozott összege. Az ún. túlfizetési (overpayment, OP) mutató ezt az összehasonlítást ragadja meg. Az OP mutatókat felhasználva pedig minden bónusz-málusz rendszerhez rendelhető egy egységes mérőszám (Ω), mely a szelektálás minőségét méri. Ebben a bekezdésben ezt a mutatót optimalizáljuk a megismert eloszlástípusokat felhasználva.

4.1. Mutatók bevezetése

4.1.1. Definíció. (A túlfizetési mutató)

Az i -edik osztály túlfizetési mutatója az NLP modell optimumában:

$$OP^i = \frac{\pi_0 c_0^i + \pi_1 c_1^i}{\phi^i L^i} - 1$$

4.1.2. Megjegyzés. A definícióból következik, hogy a túlfizetési mutató bármilyen előjelű lehet. Negatív OP értéknél tulajdonképpen alulfizetés történik, azaz a biztosított csoport kevesebbet fizet, mint a várható kárnagysága. Ennek ellenére a negatív túlfizetést is túlfizetésnek tekintjük a későbbiekben.

4.1.3. Állítás. (A túlfizetési mutatók előjelei)

Ha az NLP modell optimumában $\pi_0 = L^1$ és $\pi_1 = L^2$, akkor $OP^1 < 0$ és $OP^2 > 0$.

BIZONYÍTÁS.

Csak az $OP^1 < 0$ állítást bizonyítjuk. OP^1 definíció szerint

$$OP^1 = \frac{\pi_0 c_0^1 + \pi_1 c_1^1}{\phi^1 L^1} - 1 = \frac{L^1 c_0^1 + L^2 c_1^1 - \phi^1 L^1}{\phi^1 L^1} = \frac{c_1^1(L^2 - L^1)}{\phi^1 L^1} < 0$$

Hiszen $L^1 > L^2$. Az $OP^2 > 0$ állítás hasonlóképpen bizonyítható. $\square$

4.1.4. Definíció. (Az NLP modell Ω mutatója)

$$\Omega = |OP^1| + |OP^2|$$

4.1.5. Következmény. Ha $\pi_0 = L^1$ és $\pi_1 = L^2$, a 4.1.1. Definícióból és a 4.1.3. Állításból következik, hogy az NLP modell Ω mutatója ekvivalens a következő kifejezéssel:

$$\begin{aligned} \Omega &= \left| \frac{L^1 c_0^1 + L^2 c_1^1}{\phi^1 L^1} - 1 \right| + \left| \frac{L^1 c_0^2 + L^2 c_1^2}{\phi^2 L^2} - 1 \right| = \frac{L^1 c_0^2 + L^2 c_1^2}{\phi^2 L^2} - \frac{L^1 c_0^1 + L^2 c_1^1}{\phi^1 L^1} \\ &= (L^1 - L^2) \left(\frac{c_0^2}{\phi^2 L^2} + \frac{c_1^1}{\phi^1 L^1} \right) = (L^1 - L^2) \left(\frac{1 - F_2(\ell)}{L^2} + \frac{F_1(\ell)}{L^1} \right) \end{aligned}$$

A dolgozat utolsó részeként az Ω mutató egy lehetséges optimalizálásával foglalkozom. Mivel Ω egy bónusz-málusz rendszer igazságosságának mérőszámának tekinthető (Gyevai, 2021), optimalizálása tulajdonképpen egy minimalizálási feladatot jelent. A következőkben végig feltételezzük, hogy $\pi_0 = L^1$ és $\pi_1 = L^2$, azaz a bónusz-málusz rendszer az osztálynak különböző prémiumot határoz meg. Az eddig bemutatott esetek mind megfeleltek ennek a feltételnek. A dolgozatban nincs bizonyítva, de érdemes vizsgálni, valójában létezik-e olyan optimum (pozitív küszöbértékkel), ahol $\pi_1 = \pi_0$. Az optimális prémiumokra vonatkozó feltételezés esetén Ω csupán ℓ -től függ. ℓ optimális értékére az előző bekezdésben zárt alakokat találtunk, melyek rendre az eloszlásparaméterektől és a biztosított csoportok arányától (ϕ^i) függték. Ω minimalizálását rögzített eloszlásparaméterek mellett végzem. Ezen kívül érdemes lehet a rögzített ϕ^i -k esetét vizsgálni, illetve az együttes minimalizálást.

Ω minimalizálási stratégiája a következő. Rögzítjük az eloszlásparamétereket, majd megkeressük azt az $\ell^{opt} > 0$ értéket, melyre Ω minimális – ha létezik. Tudjuk azonban, hogy ennek az ℓ^{opt} küszöbértéknek meg kell egyeznie az adott eloszlásparaméterekhez tartozó – NLP modell által meghatározott – optimális küszöbértékkel. Ez pedig egyetlen ϕ^1 érték esetén lesz lehetséges. Ennek az egyedi ϕ^1 -nek a, illetve Ω minimális értékének

meghatározása tehát a minimalizálási feladat célja.

4.1.6. Állítás. (Ω szélsőértékének szükséges feltétele)

Ha Ω -nak szélsőértéke van $\ell > 0$ pontban, akkor

$$\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)} = \frac{L^2}{L^1} \quad (\text{OMEGA.FOC})$$

BIZONYÍTÁS.

A 4.1.5. Következményben átalakított Ω képletét használjuk. Keressük azt az ℓ értéket, ahol Ω -nak szélsőértéke lehet. Vegyük az Ω -nak ℓ szerinti deriváltját és tegyük egyenlővé nullával:

$$(L^1 - L^2) \left(\frac{-f_2(\ell)}{L^2} + \frac{f_1(\ell)}{L^1} \right) = 0$$

Mivel $L^1 > L^2$, a fenti kifejezés pontosan akkor igaz, ha a második tag egyenlő nullával, mely éppen az állításban megfogalmazott egyenlőséget jelenti. $\square$

4.1.7. Következmény. A 4.1.6. Állítás megadja azt, hogy milyen $\ell > 0$ érték mellett lehet Ω -nak szélsőértéke. Ugyanakkor ennek az $\ell > 0$ pontnak ki kell elégítenie az NLP.FOC elsőrendű feltételt is, hogy az NLP modell szerint optimális küszöbértéket határozzon meg. NLP.FOC és OMEGA.FOC elsőrendű feltételek együttes teljesülését a következőképpen írhatjuk:

$$\frac{(\phi)^1}{(\phi)^2} = \frac{L^2}{L^1} \quad (\text{OPT.PHI})$$

Ha mindkét elsőrendű feltételről ellenőrizhető, hogy minimumpontot határoznak meg (NLP.obj3 és Ω egyaránt minimális), valamint az eloszlásparaméterek rögzítettek, akkor az OPT.PHI egyenlőség alapján meghatározható az a ϕ^1 érték, amely az együttes optimumot jellemzi.

4.2. Ω minimalizálása Pareto-eloszlás esetén

Először az azonos α -k esetét vizsgáljuk, majd az azonos β -k esetét. Mivel általános esetben nem tudtunk zárt alakot adni az optimális küszöbértékre, ezt az esetet itt nem tárgyaljuk. A két speciális esetben az optimalizálás folyamán beláttuk, hogy $\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$ szigorúan monoton csökken a pozitív tartományon. Ez biztosítja, hogy OMEGA.FOC is legfeljebb egy pontban teljesülhet, azaz Ω szélsőértéke egyértelmű. Ráadásul ha létezik, akkor valóban minimumhely, ennek bizonyítása szintén hasonló ahhoz, melyet az optimum egyértelmű-

ségénél bemutattunk (l. 3.2.1. Állítás és 3.2.2. Állítás bizonyítása).

4.2.1. Állítás. (ϕ^1 értéke minimális Ω esetén, $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$)

Rögzített $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ és $\beta_1 > \beta_2$ esetén Ω pontosan akkor minimális, ha

$$\phi^1 = \frac{\sqrt{\beta_1 \beta_2} - \beta_2}{\beta_1 - \beta_2}$$

BIZONYÍTÁS.

Megoldandó az OPT.PHI egyenlet, azaz $\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2} = \frac{\beta_2}{\beta_1}$. Ekkor $\phi^2 = 1 - \phi^1$ egyenlőséget felhasználva és átrendezve ϕ^1 -re adódik az állításban szereplő feltétel.

Még meg kell mutatni, hogy ebben a ϕ^1 pontban meghatározott $\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt}$ teljesíti a 3.2.3. Állításban megfogalmazott pozitivitási feltételek valamelyikét. Vegyük a 2. feltételt! OPT.PHI miatt $\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2} = \frac{\beta_2}{\beta_1}$, ezt behelyettesítve C -be:

$$C = \left(\frac{(\phi^1)^2 \beta_1^\alpha}{(\phi^2)^2 \beta_2^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} = \left(\frac{\beta_2 \cdot \beta_1^\alpha}{\beta_1 \cdot \beta_2^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} = \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}$$

Azaz valóban teljesül az $1 < C < \frac{\beta_1}{\beta_2}$ feltétel, így $\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt}$ pozitív, ha $\phi^1 = \frac{\sqrt{\beta_1 \beta_2} - \beta_2}{\beta_1 - \beta_2}$. $\square$

ϕ^1	ϕ^2	$\ell_{\alpha, \beta_1, \beta_2}^{opt}$	c_0^1	c_1^1	c_0^2	c_1^2	OP^1	OP^2	Ω
0.33	0.67	5.7272	0.0390	0.2910	0.0148	0.6552	-0.5879	0.0442	0.6321
0.34	0.66	4.9398	0.0485	0.2915	0.0187	0.6413	-0.5715	0.0567	0.6282
0.35	0.65	4.3088	0.0590	0.2910	0.0231	0.6269	-0.5543	0.0710	0.6253
0.36	0.64	3.7914	0.0702	0.2898	0.0279	0.6121	-0.5366	0.0871	0.6237
0.37	0.63	3.3594	0.0823	0.2877	0.0331	0.5969	-0.5183	0.1052	0.6235
0.38	0.62	2.9931	0.0952	0.2848	0.0389	0.5811	-0.4996	0.1254	0.6250
0.39	0.61	2.6783	0.1089	0.2811	0.0451	0.5649	-0.4806	0.1478	0.6284
0.40	0.60	2.4048	0.1232	0.2768	0.0518	0.5482	-0.4613	0.1725	0.6338
0.41	0.59	2.1649	0.1383	0.2717	0.0589	0.5311	-0.4417	0.1997	0.6414

4. táblázat. Ω értéke ϕ^1 függvényében. ($\alpha = 2$, $\beta_1 = 3$ és $\beta_2 = 1$)
(Forrás: saját szerkesztés)

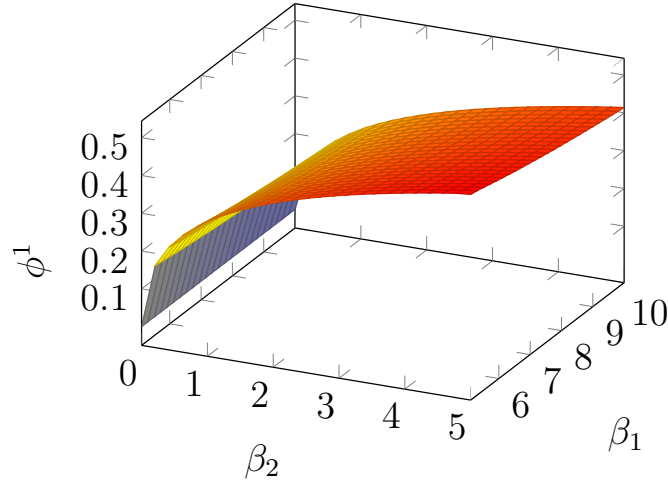
A 4. táblázat a korábbi paraméterbeállítások mellett – l. 3. ábra – mutatja be Ω értékeit

különböző ϕ^1 értékek mellett. A 4.2.1. Állítás alapján Ω pontosan

$$\phi^1 = \frac{\sqrt{\beta_1\beta_2} - \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} = \frac{\sqrt{3 \cdot 1} - 1}{3 - 1} \approx 0.37$$

esetén minimális. Ekkor $\Omega = 62.35\%$, ez az abszolút túlfizetések összegének optimális mértéke. Az $i = 1$ -es csoport 51.83%-kal fizet alul, míg az $i = 2$ -es csoport 10.52%-kal fizet túl a nekik megfelelő prémiumokhoz képest.

A 10. ábra ϕ^1 értékét szemlélteti, ha az eloszlásparaméterek – α kivételével – nincsenek rögzítve. $\phi^1 \rightarrow 0$ mind $\beta_1 \rightarrow \infty$ és $\beta_2 \rightarrow 0^+$ esetén. Ez utóbbi világosan látszódik, előbbi azonban kevésbé. Ha tehát a biztosított csoportok elég messze kerülnek várható kárértékben egymástól, Ω értéke csakis akkor lesz minimális, ha $\phi^2 = 1$, azaz ha a bónusz-málusz rendszer kizárólag „jó” ügyfelekből áll.



10. ábra. ϕ^1 értéke minimális Ω mellett, β_1 és β_2 függvényében. ($\alpha = 2$)
(Forrás: saját szerkesztés)

4.2.2. Állítás. (ϕ^1 értéke minimális Ω esetén, $\beta = \beta_1 = \beta_2$)

Rögzített $\beta = \beta_1 = \beta_2$ és $\alpha_1 < \alpha_2$ esetén Ω pontosan akkor minimális, ha

$$\phi^1 = \frac{\sqrt{(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)} - \alpha_1 + 1}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

BIZONYÍTÁS.

Megoldandó az OPT.PHI egyenlet, azaz $\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2} = \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2 - 1}$. Átrendezve ϕ^1 -re adódik az állításban megfogalmazott képlet. Ekkor a 3.2.11. Állítás alapján $\ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt}$ valóban pozitív

küszöbértéket határoz meg, hiszen

$$\begin{aligned}
0 < \phi^1 &= \frac{\sqrt{(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)} - \alpha_1 + 1}{\alpha_2 - \alpha_1} < \frac{\alpha_2 - \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{\alpha_2 - \alpha_1} \\
&= \underbrace{\frac{\sqrt{(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)}}{< \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - 2)}} + \underbrace{\frac{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{< \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)}} < \alpha_2 + \alpha_1 - 1
\end{aligned}$$

$\alpha_2 > \alpha_1 > 1$ és a számtani-mértani közepek egyenlőtlensége miatt. $\square$

ϕ^1	ϕ^2	$\ell_{\alpha_1, \alpha_2, \beta}^{opt}$	c_0^1	c_1^1	c_0^2	c_1^2	OP^1	OP^2	Ω
0.29	0.71	1.4654	0.0477	0.2423	0.0078	0.7022	-0.6266	0.0329	0.6595
0.30	0.70	1.3876	0.0526	0.2474	0.0090	0.6910	-0.6184	0.0387	0.6571
0.31	0.69	1.3137	0.0579	0.2521	0.0104	0.6796	-0.6099	0.0452	0.6551
0.32	0.68	1.2433	0.0636	0.2564	0.0120	0.6680	-0.6010	0.0528	0.6538
0.33	0.67	1.1761	0.0697	0.2603	0.0137	0.6563	-0.5916	0.0615	0.6531
0.34	0.66	1.1120	0.0762	0.2638	0.0157	0.6443	-0.5819	0.0714	0.6533
0.35	0.65	1.0506	0.0832	0.2668	0.0179	0.6321	-0.5716	0.0827	0.6544
0.36	0.64	0.9917	0.0907	0.2693	0.0204	0.6196	-0.5609	0.0957	0.6567
0.37	0.63	0.9353	0.0988	0.2712	0.0232	0.6068	-0.5497	0.1105	0.6603

5. táblázat. Ω értéke ϕ^1 függvényében. ($\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 5$ és $\beta = 1$)
(Forrás: saját szerkesztés)

Az előző esethez hasonlóan az 5. táblázat is Ω értékeit mutatja különböző ϕ^1 értékek esetén, rögzített eloszlásparamétereket használva – l. 5. ábra. A 4.2.2. Állítás alapján Ω pontosan

$$\phi^1 = \frac{\sqrt{(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)} - \alpha_1 + 1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\sqrt{(2 - 1) \cdot (5 - 1)} - 2 + 1}{5 - 2} = \frac{1}{3} \approx 0.33$$

esetén minimális. Ekkor $\Omega = 65.31\%$. Az $i = 1$ -es csoport 59.16%-kal fizet alul, míg az $i = 2$ -es csoport 6.15%-kal fizet túl a nekik megfelelő prémiumokhoz képest. Mivel $\phi^1 \rightarrow 0$ szintén $\alpha_2 \rightarrow \infty$ és $\alpha_1 \rightarrow 1^+$ esetén egyaránt, az azonos α -knál tett megállapítások ϕ^1 határértéke szempontjából ugyanúgy alkalmazhatók.

4.3. Ω minimalizálása exponenciális eloszlás esetén

Exponenciális esetén az eredeti NLP modell optimalizálása folyamán beláttuk, hogy $\frac{f_2(\ell)}{f_1(\ell)}$ szigorúan monoton csökken a pozitív tartományon (l. 3.3.1. Állítás bizonyítása). Ez biztosítja, hogy OMEGA.FOC is legfeljebb egy pontban teljesülhet, azaz Ω szélsőértéke egyértelmű. Ráadásul a Pareto-eloszláshoz hasonlóan, ha létezik ez a szélsőérték, akkor valóban minimumhely, szintén az előbbi bizonyítás alapján.

4.3.1. Állítás. (ϕ^1 értéke minimális Ω esetén, $\lambda_1 < \lambda_2$)

Rögzített $\lambda_1 < \lambda_2$ esetén Ω pontosan akkor minimális, ha

$$\phi^1 = \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

BIZONYÍTÁS.

Megoldandó az OPT.PHI egyenlet, azaz $\frac{(\phi^1)^2}{(\phi^2)^2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. A $\phi^2 = 1 - \phi^1$ egyenlőséget felhasználva és átrendezve ϕ^1 -re adódik az állításban szereplő feltétel.

Ehhez a ϕ^1 értékhez tartozó $\ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{opt}$ optimális küszöbérték valóban pozitív, hiszen kielégíti a 3.3.3. Állításban szereplő feltételt, mégpedig

$$\begin{aligned} 0 < \phi^1 &= \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} < \frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_2} \\ &= 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} < \lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned}$$

$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ és a számtani-mértani közepek egyenlőtlensége miatt. □

ϕ^1	ϕ^2	$\ell_{\lambda_1, \lambda_2}^{opt}$	c_0^1	c_1^1	c_0^2	c_1^2	OP^1	OP^2	Ω
0.29	0.71	1.0590	0.1006	0.1894	0.0103	0.6997	-0.4899	0.0434	0.5333
0.30	0.70	1.0270	0.1074	0.1926	0.0115	0.6885	-0.4814	0.0493	0.5308
0.31	0.69	0.9955	0.1146	0.1954	0.0129	0.6771	-0.4728	0.0559	0.5288
0.32	0.68	0.9646	0.1220	0.1980	0.0143	0.6657	-0.4642	0.0633	0.5275
0.33	0.67	0.9342	0.1297	0.2003	0.0160	0.6540	-0.4553	0.0715	0.5268
0.34	0.66	0.9043	0.1376	0.2024	0.0177	0.6423	-0.4464	0.0806	0.5270
0.35	0.65	0.8748	0.1459	0.2041	0.0196	0.6304	-0.4373	0.0907	0.5280
0.36	0.64	0.8457	0.1545	0.2055	0.0217	0.6183	-0.4280	0.1019	0.5299
0.37	0.63	0.8169	0.1635	0.2065	0.0240	0.6060	-0.4187	0.1143	0.5329

6. táblázat. Ω értéke ϕ^1 függvényében. ($\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 4$)
(Forrás: saját szerkesztés)

A 6. táblázatban $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 4$ paraméterbeállítással szerepelnek Ω értékei különböző ϕ^1 arány mellett. Ugyanezekkel a paraméterekkel határoztuk meg az optimumot (l. 8. ábra), de $\phi^1 \geq \frac{1}{2}$ esetekben. Ω pontosan akkor minimális a 4.3.1. Állítás értelmében, ha

$$\phi^1 = \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\sqrt{1 \cdot 4} - 1}{4 - 1} = \frac{1}{3} \approx 0.33$$

Ekkor $\Omega = 52.68\%$, ami az $i = 1$ -es csoport 45.53%-os alulfizetéséből és az $i = 2$ -es csoport 7.15%-os túlfizetéséből tevődik össze. Érdeemes megjegyezni, hogy az 5. táblázatban és a 6. táblázatban ugyanolyan várható kárértékű csoportokat modelleztünk, az egyetlen különbség a jellemző eloszlástípusok voltak. A két esetben azonosan $\phi^1 = \frac{1}{3}$ esetén lett Ω minimális. Azonban utóbbi esetben Ω értéke 12.63%-ponttal alacsonyabb. Jelen esetben tehát az exponenciális eloszlással jellemzett biztosítottak hatékonyabb bónusz-málusz rendszert alkotnak, mintha ugyanilyen várható értékű biztosítottakat Pareto-eloszlással jellemeztük volna. Érdekes kérdés ennek a megállapításnak lehetséges általánosítása vagy cáfolása. Ezen kívül ϕ^1 értéke λ_1 és λ_2 függvényében pontosan megegyezik a Pareto-eloszlás azonos α esetéhez a formai hasonlóság miatt (l. 4.3.2. Megjegyzés).

4.3.2. Megjegyzés. Megfigyelhető a Pareto-eloszlás és az exponenciális eloszlások által meghatározott zárt alakok közötti alaki hasonlóság. Habár különböző eloszláscsaládokról beszélünk, mégis bizonyos párhuzamok felfedezhetők a dolgozat egészét tekintve. A két

eloszlástípus természetesen nem feleltethető meg egymásnak, de bizonyos esetekben érdekes összehasonlítást adhatnak, ha a várható értékeket kívánjuk rögzíteni, mint az előbbi esetben láttuk.

Rögzített α esetén a Pareto-eloszlás által meghatározott ϕ^1 érték Ω minimalizálására $\frac{\sqrt{\beta_1\beta_2}-\beta_2}{\beta_1-\beta_2}$, míg exponenciális eloszlás esetén $\frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}-\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}$. Előbbi esetben $\beta_1 > \beta_2$, utóbbi esetben $\lambda_1 < \lambda_2$. Így β_1 és λ_2 , valamint β_2 és λ_1 között vonható párhuzam.

Rögzített β esetén a formai hasonlóság az előző bekezdés 3.2.11. Állítása és 3.3.3. Állítása, azaz az NLP modell küszöbértékeinek pozitivitási feltételei között figyelhető meg. Előbbi esetben $\phi^1 < \frac{\alpha_2-\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_2-\alpha_1}$, míg exponenciális eloszlás esetén $\phi^1 < \frac{\lambda_2-\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_2-\lambda_1}$ esetén lesz ℓ^{opt} pozitív. Itt $\alpha_1 < \alpha_2$ és $\lambda_1 < \lambda_2$, ahonnan α_1 és λ_1 , valamint α_2 és λ_2 párhuzama adódik. Így például a 3.3.4. Megjegyzés nemcsak az exponenciális eloszlásra vonatkozhat, hanem egyenlő β -jú Pareto-eloszlásra is.

5. Összefoglalás

Dolgozatomban két osztályból álló bónusz-málusz rendszert vizsgáltam, mely két különböző várható kárértékű biztosított csoportot kezel. Kérdés volt, hogy ezen rendszert használva megállapítható-e a bónusz-málusz rendszer optimuma zárt alakban, és megtehető-e ez bonyolultabb struktúra esetén. További kérdés volt a bónusz-málusz rendszer mérésével kapcsolatos zárt alakok létezése.

Az optimális prémiumokra minden esetben adható zárt alak, ráadásul véges az optimális prémiumok kombinációja: a bónusz-málusz osztályok optimális prémiumai a biztosított csoportok várható kárértékei közül kerülnek ki. Pareto-eloszlás esetén azonos α , illetve azonos β paraméterű eloszlással jellemezhető biztosítottak esetén zárt alak adható a küszöbértékekre, és szintén zárt alakkal biztosítható ezen küszöbérték pozitivitása – ami az optimum feltétele. Egyéb esetben a biztosítottak Pareto-eloszlással való modellezésével egyértelműen meghatározható az optimum, azonban a klasszikus analízis segítségével zárt alak nem adható az optimális küszöbértékekre. Exponenciális eloszlás használata esetén az optimum zárt alakban meghatározható, hasonlóan a Pareto-eloszlás speciális eseteihez. A rendszer további osztályokkal vagy csoportokkal való bővítése esetén nem feltétlenül biztosítható, hogy az optimum zárt alakban meghatározható. Ez az optimális prémiumokra vonatkozó állítás gyengülésével magyarázható. Látható, hogy már a legegyszerűbb rendszer esetén is szükséges lehet numerikus módszerekkel közelíteni az optimumot.

A rendszer szelekciós képességét csoportonkénti túlfizetési mutatóval, illetve ezen mutatók abszolút értékének összegével mérhetjük. Utóbbi mérőszám rögzített eloszlásparaméterek mellett minimális, ha a biztosítottak megfelelő arányban vannak jelen a rendszerben. A megfelelő arányra pontosan akkor adható zárt alak, ha az eredeti modellnek is létezik zárt alakban meghatározható optimuma.

A modell bővítése több irányban lehetséges. Kézenfekvő az osztályok és csoportok számának növelése. Ezen kívül a célfüggvényben használt ℓ^1 -normát tetszőleges normára cserélhetjük, elsősorban az ℓ^2 -normára érdemes váltani. Másfajta bővítést jelenthet a csoportszintű küszöbérték bevezetése, hiszen jelen modellben az átsorolás azonos küszöbérték alapján történik a két biztosított csoportot tekintve. Messzebbre mutat, amennyiben Ω minimalizálását tűzzük ki célfüggvényként, ez az optimum és annak értelmezésének teljes módosítását jelenti.

Irodalomjegyzék

- [1] Ágoston, K. Cs., Gyetvai, M. (2019). Átsorolási szabályok optimalizálása bónusz-málusz rendszerekben. *Sigma, Volume 51, Issue 4*, pp. 335-362., 28 p.
- [2] Ágoston, K. Cs., Gyetvai, M. (2020). Joint Optimization of Transition Rules and the Premium scale in a Bonus-Malus System. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, Volume 50, Issue 3*, pp. 743-776., 34 p.
- [3] Ágoston, K. Cs., Gyetvai, M., Kovács L. (2019). Optimization of transition rules based on claim amounts in a bonus-malus system. In: *Zadnik Stirn, L; Kljajić Borštar, M; Žerovnik, J; Drobneand, S; Povh, J (ed.) Proceedings of the 15th International Symposium on Operational Research: SOR '19 Ljubljana, Slovenia: Slovenian Society Informatika, (2019)* pp. 375-380., 6 p.
- [4] Frangos, N. E., Vrontos, S. D. (2001). Design of Optimal Bonus-Malus Systems With a Frequency and a Severity Component On an Individual Basis in Automobile Insurance. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA , Volume 31 , Issue 1*, pp 1-22, 22 p.
- [5] Gyetvai, M. (2021). Optimization of Bonus-Malus Systems. *PhD disszertáció*.
- [6] Heras A., Vilar, J. L., Gil, J. A. (2002). Asymptotic Fairness of Bonus-Malus Systems and Optimal Scales of Premiums. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory, Volume 27, Issue 1*, pp. 61-82, 22 p.
- [7] Lemaire, J. (1995). Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance. *Kluwer Academic Publishers, Boston-Dotrecht-London, Volume 26, Issue 2*.
- [8] Moumeesri, A., Pongsart, T. (2022). Bonus-Malus Premiums Based on Claim Frequency and the Size of Claims. *Risks, Volume 10, Issue 9*, 22 p.
- [9] Pinquet, J. (1997). Allowance for Cost of Claims in Bonus-Malus Systems. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, Volume 27, Issue 1*, pp. 33-57, 25 p.