

TDK Dolgozat

Fenyves Szabolcs
2023

Budapesti Corvinus Egyetem

A tagállamok Európai Parlamentbeli szavazóerejének vizsgálata gráfokon megszorított kooperatív játékokkal

Analysis of the voting power of the member states in the European Parliament by using graph restricted cooperative games

Készítette: Fenyves Szabolcs

Gazdálkodási és menedzsment szak
2023

Témavezető: Mágó Mánuel László

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Módszertan	4
2.1. Gráfelmélet és lineáris algebra alapok	5
2.2. Gráfok elkészítésének általános módszere	6
2.3. Játékelmélet	16
2.4. Gráfokon megszorított játékok	18
3. Eredmények	22
3.1. Gráfokon megszorított szavazási játékok	22
3.2. Táblázatos eredmények	23
4. Összefoglalás	31
Irodalomjegyzék	33

Ábrák jegyzéke

1.	Politikai gráf	8
2.	Gazdasági gráf logaritmizálás után	10
3.	Társadalmi gráf	11
4.	Földrajzi gráf	12
5.	Kulturális gráf	14
6.	Vallási gráf	15

Táblázatok jegyzéke

1.	A leíró statisztika eredményei a gráfok fokszámairól	16
2.	EP képviselők száma országonként	23
3.	ACC és Banzhaf-érték eredményei	24
4.	CPM-mel korrigált adatok	27
5.	Myerson- és Shapley-értékek eredményei	28
6.	Megszorított Banzhaf- és Banzhaf-értékek eredményei	29

1. Bevezetés

Dolgozatom középpontjában az Európai Unió tagállamai állnak, amelyek képviselőket delegálva tudnak szavazni az Európai Parlament (EP) ülésein. Kutatásom során az egyes országok szavazóerejét vizsgálom az Európai Parlamentben. Számításaim során a képviselőszékek országonkénti megoszlását veszem alapul. A hat különböző csoportosítási szempont (politikai, gazdasági, társadalmi, földrajzi, kulturális és vallási) alapján kialakított gráfok esetében néhányszor két év adatait is felhasználom, amellyel az esetleges időben lejátszódó változásokat próbálom szemléltetni. Ez a két év nevezetesen 2014 és 2019, mert ekkor voltak EP választások, tehát ekkor alakult új szavazótestület. Fontos kihangsúlyozni, hogy a 2019-es év adatai már tartalmazzák az Egyesült Királyság kilépésére (Brexit) vonatkozó változásokat. Ilyen például a képviselőszékek számának 751 főről (amely egyébként a maximális képviselő létszám) 705 főre csökkenése. A 2019-es képviselőszékek megoszlása a tagállamok között már tartalmazza a Brexit utáni fennmaradó székek elosztását. A két testület létszáma közötti 46 fős különbséget pedig fenntartja az Európai Parlament a jövőben csatlakozó országok számára.

Kutatásom során motivációként és iránymutatásként szolgált Petróczy et al. (2022) egy hasonló, az Európai Unió Tanácsának szavazási rendszerére épülő cikke, mely során a tagkilépések utáni hatalmi befolyást vizsgálják, középpontban Magyarországgal. Ezenkívül Álvarez-Mozos et al. (2013) cikke is jelentős, amelyben a Shapley-érték egy alternatíváját vezetik be, az úgynevezett spektrum értéket, amely szerint szavazási játékokban a koalíciók csak a politika bal-jobb spektrum figyelembevételével jöhetnek létre. Végül pedig Skibski és Yokoo (2017), melynek célja, hogy a Myerson-érték számolására adjon egy újabb alternatívát valószínűségi gráfok használatának segítségével.

Kutatásom központi témája a tagállamok szavazóerejének megállapítása és változásának elemzése különböző megszorítások és szempontok alapján. Ehhez segít hozzá a matematikai alapokra épülő módszertan is, amelyben először bevezetek néhány gráfelmélettel kapcsolatos alapfogalmat. Ezután bemutatom a hat különböző szempont (politikai, gazdasági, társadalmi, földrajzi, kulturális és vallási) alapján elkészített gráfok általános módszertanát, melyben az elkészített gráfok összefüggőségi mátrixai kiemelt szerepet kapnak, melyek jelentősége a játékelméleti alfejezetben is visszaköszön. A gráfok összefüggőségén alapuló *cutoff* értékek számítását is bemutatom, amelynek lényege, hogy egy adott értéknél „elvág” két országot, tehát az ennél kisebb értékűeket összeköti, az ennél nagyobbakat pedig nem. A hat gráf elkészítése során az egyszerűség és pontosság kedvéért az Egyesült Királyságot mindig kivettem és egy esetben hozzáadtam Horvátországot az eredeti, kiinduló állapothoz. Minden gráf esetében kifejtem az adatok eredetét és vektorba rendeződését, majd a kapott gráfokat vizuálisan prezentálom is. Ezt követően pár kooperatív játékelméleti fogalmat is használok és jellemezek. Kezdve a játékosokkal és a koalíciókkal, bevezetem és aktívan használom az átruházható hasznosságú, röviden TU-játékok fogalmait. A TU-játékhoz kapcsolódva két, a szakirodalomban elterjedt értéket, a Shapley- és Banzhaf-értéket vezetem be, majd a TU-játék egy speciális formáját, a

szavazási játékot definiálok.

Következőként a gráfokon megszorított játékokat írom le, mely során több nevezetes egyértelmű megoldást, röviden csak értéket vezetek be. Az első ilyen nevezetes érték, a Myerson-érték, amelyet Myerson (1977) használt először, mely segítségével az általa felvázolt kommunikációs megszorításokat tudta vizsgálni kooperatív játékokban. A Myerson-érték tulajdonképpen a gráfon megszorított kooperatív játékok Shapley-értéke. Emellett fontos még a megszorított Banzhaf-érték is, amelyet Owen (1986) vezetett be és a Myerson-értékhez hasonlóan a gráfon megszorított Banzhaf-értékként definiálható. Ezentúl a megszorított Banzhaf-érték egy alternatíváját mutatom be, az átlagos összefüggő hozzájárulási értéket, röviden ACC-t, amelyet Mágó (2018) vezetett be. Végül pedig a módszertan alapján elvégzett kutatás eredményét mutatom be, amely tartalmaz néhány várakozásoknak megfelelő mellett néhány meglepő és izgalmas eredményt is. A gráfokon megszorított szavazási játék és az ehhez használt súlyvektor definiálása után az eredményeket három fő táblázatba osztom szét.

Dolgozatom egyik fő eredménye egy olyan módszertan kialakítása, amely egy működő modellt kínál a fentebb említett megszorítások vizsgálatára szavazási játékokban és alaposan, hat különböző szempontot elemezve foglalja össze az eredményeket. Emellett ez azt eredményezi, hogy a bemenetekkel lehet „játszani” tehát változtatni őket. Például a szavazási játékban a győztes koalíció formálásához szükséges kvóta értéke lehet 0,75 vagy a koalíciók formálását meghatározó gráfok alapját képező súlyvektort lehet módosítani, illetve természetesen számos más szempont alapján lehetne a feltételeknek megfelelően elkészíteni a gráfok összefüggőségi mátrixait. Ezenfelül kutatásom másik központi állítása a szavazóerők elmozdulása, melyből az következik, hogy a gráf nélküli esetben gyengébb országok fontosabb vagy kevésbé fontos szerepet kaphatnak bizonyos gráfokban, míg az alapvetően erős országok szavazóereje könnyen csökken a gráfok jelentette megkötések miatt. Ezt kiválóan szemlélteti például Németország Myerson-értéke a társadalmi gráffal megszorított játékban, ugyanis olyan országok is felértek hozzá, mint Ausztria vagy Olaszország (lásd 5. táblázat). Ezenfelül ugyan kisebb, azonban jelentős eredmény Németország dominanciája szinte minden játékban és érték szerint, amely azt mutatja, hogy vannak olyan befolyással és szavazóerővel rendelkező országok, amelyekre a gráfok jelentette megszorításnak szinte minimálisan negatív vagy esetleg pozitív következményei vannak. Továbbá Luxemburg nagyszerű példája annak, amikor valaki egyénileg, azaz gráf nélkül kitűnik a tömegből, már-már outlierként is viselkedik, azonban egy gráfon megszorított játékban szinte jelentéktelen mértékű szavazóerőt produkál annak ellenére, hogy az eredeti adatok közül eléggé erősnek tűnt első ránézésre. Végül pedig a szavazási játékokban kiemelkedő szerepet játszó bridge, azaz híd pozíciót fontos megemlíteni egy példa kíséretében, amikor egy ország önmagában nem különösebben erős, azonban ő tesz bizonyos koalíciókat nyerővé azzal a tulajdonságával, hogy összeköt olyan potenciális játékosokat (országokat), amelyek között túl nagy lenne alapvetően a távolság, azaz nem valószínű, hogy egy szavazási játékban együtt dolgoznának vagy szavaznának, azonban egy egyfajta

mediátor szereppel ő ezt lehetővé teszi. Ilyen szerepet tölt be Bulgária a vallási gráfban, amelyben két irányzatot köt össze és teszi lehetővé az együttműködésüket. Bulgáriáról egyébként elmondható, hogy ennek a szerepnek is köszönhetően mindhárom érték alapján a vallási gráfban bizonyul a legerősebbnek.

Dolgozatom négy fejezetből áll, amelyek alfejezetre tagolódnak. A 2. fejezetben alaposan leírom a kutatásomhoz szükséges módszertani alapokat és fontos definíciókat, mint például a gráfelmélettel vagy a kooperatív játékelmélettel kapcsolatosakat. A 3. fejezetben a gráfokon megszorított szavazási játékok eredményeit prezentálom táblázatos formában, kiemelve néhány érdekes eredményt és lehetséges okait. Végül pedig az utolsó, 4. fejezetben kicsit visszatekintve értékelem újra a kapott eredményeket, illetve felvázolok néhány lehetséges alternatívát a módszertani megoldásokra, amelyet egy esetleges későbbi kutatás során érdemes lehet kipróbálni és használni.

2. Módszertan

Ennek a fejezetnek a célja, hogy megismerjük a dolgozatom alapjául szolgáló elméleti módszertant, mely segítségével teremtettem elő az eredményeket. A fejezet során először matematikai alapfogalmakat (gráfelmélet és lineáris algebra) ismertetek, majd a gráfok létrejöttéhez szükséges módszertant mutatom be a gráfok elkészítésének egyes lépésein belül. A hat különböző szempont (politikai, gazdasági, társadalmi, földrajzi, kulturális és vallási) alapján megalkotott gráfok létrehozása során támaszkodok a fentebb említett matematikai alapfogalmakra, illetve használom az euklideszi távolságot, amely a tagországok közelségét hivatott mérni a különböző szempontok szerint, emellett a *cutoff* érték fogalmát is bevezetem. Az eredmények kiszámításához Matlab R2022b¹ verziójú programot használtam, amely a számolás mellett a vizuális reprezentációban is hasznosnak bizonyult. Az összes kapott gráfot statisztikai szempontból is jellemeztem. Leíró statisztikát készítettem az egyes gráfok fokszámaira vonatkozóan (átlag, szórás, minimum, maximum és átmérő). Ezután a játékelmélet alappilléreit fektetem le néhány gondolaton keresztül. Először a játékelmélet két ágát (kooperatív és nem kooperatív) választom szét, majd dolgozatom témájának illeszkedése szempontjából a kooperatív ágra fókuszálok, ahol játékosok tudnak együtt dolgozni és közösen elérni egy eredményt vagy értéket, amelyet szét tudnak osztani különböző szempontok alapján. Ezután megemlítek egy központi fogalmat, a TU-játékot, amelynek lényege, hogy a karakterisztikus függvény egy valós számot rendel minden játékoshalmazhoz és ezzel jelképezi azt a közösen elérhető értéket, amelyet akkor érnek el, ha együtt dolgoznak. Ezután használom az egyértelmű megoldás vagy röviden csak érték fogalmát, amely egy TU-játék során minden játékoshoz rendel egy értéket, amely segítségével reprezentálható minden egyes játékos fontossága (Mágó, 2018). A legelterjedtebb ilyen érték a Shapley-érték, melyet Shapley (1953) vezetett be. A Shapley-érték egy adott játékos várható határhozzájárulása az összes olyan koalícióhoz, amelyben a játékosok az adott játékos előtt lépnek be egy meghatározott sorrend alapján feltéve, hogy minden sorrend egyenlő valószínűséggel következik be. Emellett egy szintén széles körben ismert érték a Banzhaf-érték, amelyet Banzhaf (1965) használt először a szavazóerő mérésére szavazási játékokban. Egy játékos Banzhaf-értéke egy TU-játékban az adott játékos átlagos határhozzájárulása az összes öt tartalmazó koalícióhoz abban az esetben, ha az összes ilyen lehetséges koalíció ugyanakkora valószínűséggel jön létre. Ez a két érték a szakirodalomban is elterjedt, standard módszer, amelyet gyakran alkalmaznak többek között szavazási játékokban a játékosok szavazási erejének mérésére. Végül pedig kevésbé ismert módszereket is alkalmazva bevezetem a gráfokon megszorított játékok fogalmát és több értéket felhasználva jutok el az eredményekig. A gráfok hálózatot reprezentálnak és kiválóan szemléltethetnek kooperatív játékokban kommunikációs megszorításokat, amelyet Myerson (1977) vezetett be először. Myerson nevéhez fűződik továbbá a gráfokon megszorított Shapley-érték fogalma is, amelyet Myerson-értéknek nevezünk. Ezenkívül bemutatom a

¹Lásd: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>

megszorított Banzhaf-értéket is, amelyet Owen (1986) vezetett be. Végül pedig leírom ennek a két értéknek egy fontos közös jellemzőjét vagy egyfajta „hátrányát”, melyre több megoldás is született már. A Myerson-érték esetében több alternatíva is létezik, azonban a megszorított Banzhaf-értékre még nem volt kiemelkedő alternatíva. Ezért erre szeretnék bemutatni egy alternatívát, amely az átlagos összefüggő hozzájárulási érték (average connected contribution) vagy röviden ACC, amelyet Mágó (2018) vezetett be.

2.1. Gráfelmélet és lineáris algebra alapok

Először tekintsük át a gráfelmélet alapjait, például, hogy mit is nevezünk gráfnak. A gráf pontok és vonalak együttese. A pontokat csúcsoknak, a csúcsokat összekötő vonalakat pedig éleknek nevezzük. Az élek így tehát csúcspárokat alkotnak. A következő fontos definíció a fokszám. A gráfok egyes csúcsaihoz tartozó fokszám a csúcsokra illeszkedő élek száma, tehát, azt mutatja meg, hogy hány él illeszkedik egy adott csúcsra. Izolált pontnak nevezzük azt a csúcsot, amelynek fokszáma 0. Azt a gráfot, amelynek bármely két pontja között vezet út, összefüggő gráfnak nevezzük (lásd például: Fiala (2010) és Bloch et al. (2017)). Ez szemléletesen annyit jelent, hogy bármelyik csúcsból el lehet jutni egy másik csúcsba. Egy gráfban egy út csúcsok olyan sorozata, amely minden csúcsot csak egyszer érint és az egymás után következő csúcsok össze vannak kötve. Emellett egy gráfban egy kör csúcsok olyan sorozata, amelynek kezdő- és végpontja azonos, azoktól eltekintve viszont utakat dormálnak. Azt a gráfot, amely nem tartalmaz kört és összefüggő, fagráfnak nevezzük. Ha egy gráfban minden csúcs össze van kötve mindegyik másikkal, azt teljes gráfnak nevezzük. Kutatásom során kizárólag egyszerű gráfokkal dolgozom, amelyekben nincs sem hurokél, sem kettős él. A használt gráfok súlyozatlanok, vagyis nem szerepelnek élsúlyok a dolgozatban. Az izolált pontok fogalma és a teljes gráfhoz képesti kevesebb kapcsolat fontos tényező a későbbiek során, ezért szerepelnek a definíciók kicsit részletesebben. A gráfelmélet alkalmazásai az élet számos területén jelentősek, ilyen például az emberek közötti kapcsolatok vagy kereskedelmi hálózatok.

Most pedig szeretnék pár gondolatot írni néhány lineáris algebrával kapcsolatos definícióról, amelyek a gráfelmélet mellett a kutatásom jelentős matematikai háttérét alapozták meg. A legelső ilyen fontos definíció a vektor fogalma. A vektor definíciója nagyon eltérő a matematika különböző területein, de a mi esetünkben a „számok felsorolása” interpretációja megfelel. A vektoroknak számos tulajdonsága van, ezek közül a vektorok hosszát, távolságát és elemszámát szeretném kiemelni. Egy vektor hossza a két végpontjának távolsága, amelyet abszolút értékkel jelölnek, tehát például egy $a \in \mathbb{R}^n$ vektor hossza $|a|$. A következő kiemelt fogalom a távolság, amely matematikailag sokféleképpen megadható, azonban mi most az euklideszi távolságra fókuszálunk. Az euklideszi tér egy olyan vektortér, ahol Euklidesz geometriájának axiómái és tételei teljesülnek, illetve amelyben az axiómákon kívül értelmezve van egy skaláris szorzat, amelyet euklideszi normának nevezünk. Két vektor euklideszi távolsága a vektorok különbségének hossza az Euklideszi téren, vagyis a vektorok elemienek különbségeinek négyzetösszégének gyöke. Végül pedig a

vektorok elemszáma egy olyan nemnegatív egész szám, amely megadja, hogy hány eleme van a vektornak. Emellett megkülönböztetünk sor- és oszlopvektorokat is. Alap értelmezésben a vektorok általában oszlopvektorok, vagyis a következőkben amikor vektorokról esik szó, akkor oszlopokként kell őket elképzelni, illetve ennek transzponáltja (a sorok és oszlopok felcserélése) pedig a sorvektor. A vektorokhoz hasonló kiemelt fontosságú fogalom a mátrix. A mátrix tulajdonképpen egy táblázat, amely sorokból és oszlopokból áll. A mátrix oszlopainak számát n , sorainak számát pedig m betűvel jelöljük. Tehát egy $m \times n$ -es mátrixnak m db sora és n db oszlopa van. A vektorok is tulajdonképpen mátrixok, a sorvektor egy $m \times 1$ -es, az oszlopvektor pedig egy $1 \times n$ -es mátrix. A mátrixok egy fontos típusa a négyzetes, $n \times n$ -es mátrix, amely sorainak és oszlopainak száma megegyezik. A négyzetes mátrixok típusainak egyik részhalmaza a szimmetrikus mátrix, amelyben a diagonális (főátló) alatt és felett lévő elemek megegyeznek.

2.2. Gráfok elkészítésének általános módszere

Most pedig a számításaimhoz használt gráfok létrehozásának általános módszertanát szeretném bemutatni. Különböző szempontok alapján kigyűjtöttem a 27 Európai Unió tagállam különböző adatait és oszlopvektorokba rendeztem őket, ez tehát 27 oszlopvektort jelent. A vektorokban szereplő országokénti adatok az adott szempontokat mutató mérőszámok. Például a kulturális szempont esetében azon emberek százalékos megoszlása az adott országban, akik adott nyelvet beszélnek. Így az országokénti vektoroknak annyi sora van, amennyi nyelv összesen szerepelt a vizsgálatban, ahonnan az adatokat gyűjtöttem. Minden gráf kialakításához szükségem volt egy mátrixra, amelyhez több lépcsőben jutottam el. Az oszlopvektoroktól kezdődően a végső mátrixok kialakításáig minden lépést Excelben végeztem. Először is szükségem volt a vektorok távolságára, amelyet euklideszi távolsággal számoltam. Excelben ez a négyzetösszeg függvénnyel oldható meg. Az így kapott mátrix, benne az országok euklideszi távolságait tartalmazó adatokkal tehát egy 27×27 -es négyzetes és szimmetrikus mátrix, nyilván minden szempont alapján különböző értékekkel. A főátlóban kizárólag 0 értékek vannak, hiszen a főátló egyes elemei az adott ország önmagától vett távolsága, amely természetesen 0. Ez a mátrix többféleképpen is elkészíthető, de ennek módszere nem lényegi változtatás, csak preferencia és idő kérdése. Én először a főátlóba beírtam a 0 elemeket, majd a főátló alatti elemeket, tehát a mátrix alsó háromszögét töltöttem ki megfelelő rögzítés után a négyzetösszeg függvénnyel. Az adatokat (főleg, ha bázis- és tárgyidőszak is volt) bizonyos esetekben könnyebb volt sorvektorban tárolni, ezért ebben az esetben a mátrix felső háromszögével kezdtem. Miután a mátrix átló alatti vagy feletti része, azaz alsó vagy felső háromszöge elkészült, az adott sor- vagy oszlopvektorokat transzponálva létrejött a szimmetrikus, az adott szempont szerinti távolságokat tartalmazó mátrix.

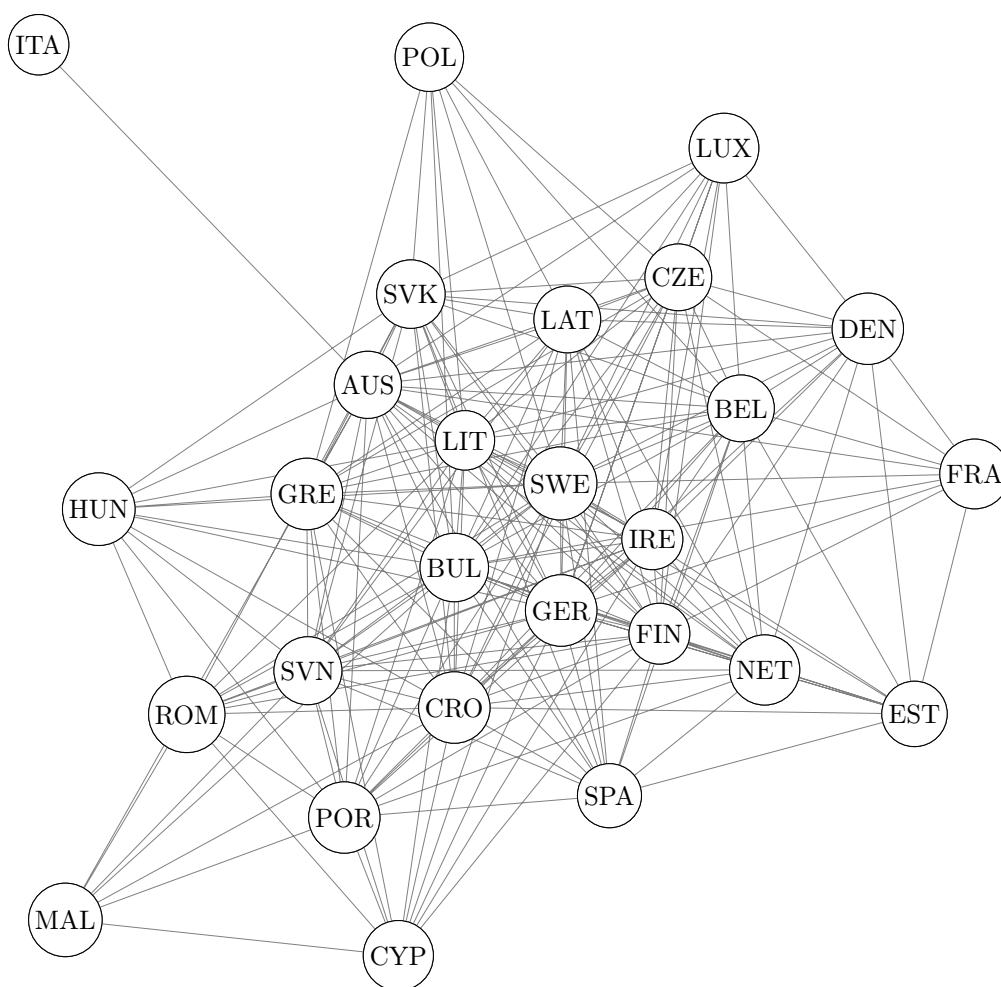
Ezután érdemes azt tisztázni, hogy két országot egy-egy gráfban mi alapján kötünk össze a távolságokat alapul véve. Lehetséges módszer az az eljárás, amikor egy reális, de szinte véletlenszerű értéket megadunk és ott „vágjuk el” az országokat, azaz az adott érték-

nél kisebb távolságúakat összekötjük, az ennél nagyobbakat pedig nem kötjük össze. Ezt lekódolni, illetve mátrixban ábrázolni viszonylag egyszerű, bináris kódolással megoldható: amely országokat összekötjük, azokat 1-essel, amelyeket nem azokat pedig 0-val jelöljük a mátrixban. Így kapunk egy gráf összefüggőségi mátrixát. Ezt az értéket *cutoff* értéknek nevezzük. Ez megadható „mechanikusan”, azaz kézileg is, amely lehet egy reálisnak gondolt érték is, de egy mutatóhoz is köthető (pl.: egy főre jutó GDP esetében medián vagy a leíró statisztika egyéb eszközei). Én a számításaim során egy más szemléletű megoldást alkalmaztam. Nálam a *cutoff* értéket a számítógép határozta meg a Matlab² program segítségével. Ez az érték eltérő volt minden gráf esetében és a program a gráf összefüggőségére irányult ugyanis a célhoz, hogy egy szavazási játékot megszoríthassunk a kapott gráfon ez kiemelt fontosságú. Számításaim során tehát a *cutoff* az a legkisebb érték, ami mellett a kapott gráf először összefüggő, ha a *cutoff* értéket a lehető legmagasabb távolságtól indítjuk. Vagyis, a *cutoff* érték az a legnagyobb szám, aminél ha nagyobb értéket választanánk, akkor az így generált mátrix már nem lenne összefüggő. A kódnak egyetlen inputja volt: egy X mátrix, amely az adott szempontok szerinti euklideszi távolságokat tartalmazó mátrix volt. A kód végeredménye egy olyan 0-1-es értékeket tartalmazó mátrix lett, amiket a felépített gráfok összefüggőségi mátrixai lettek. A kapott gráfok eléggé jellegzetes struktúrával rendelkeznek. Általában a gráfok „magja” jellemzően sűrű, sok kapcsolattal, míg van egy-két úgynevezett „outlier” ország, amely csak egy-két másik országgal vannak összekötve. Ez a gráfok elkészítésének módja (*cutoff* értékek választása) miatt alakult így, hiszen amint összefüggővé válik a gráf, a program le is áll a *cutoff* érték számolásával. Mivel előfordulhat bizonyos szempontok esetén, hogy a távolságok egy adott országhoz túl nagyok, így a számítási módból adódóan, ahhoz hogy a gráfok viszonylag kevésbé legyen sűrűek néhány esetben érdemes és szükséges is átskálázással korrigálni az alapvető értékeket, amik alapján a távolságok meg lettek határozva. Erre néhány gráf esetében sor is került, amelyet az egyes gráfok részletezésénél be is mutatok majd. Alapvetően a keletkezett gráfokat nem nevezhetjük úgynevezett sűrű gráfoknak, hiszen jelenlegi élszámuk messze kevesebb, mint a maximális lehetséges élszám, azonban, ha az egy-két kilógó országtól eltekintünk egy pillanat erejéig, akkor jól megfigyelhetőek tömörülések, illetve csoportosulások, amelyek az adott szempont figyelembevételével kiemelkedően láthatóak és vizuálisan is értelmezhetőek. A 27 ország összetételéről azt érdemes tudni, hogy az Egyesült Királyság nem szerepel egyik gráfban sem, ugyanis több gráf esetében szerepel 2014-es és 2019-es adat is. Ezért az egységesség érdekében az Egyesült Királyságot kivettem mindegyik gráfból és a vizsgálatból, illetve Horvátország szerepel minden elemzésben, annak ellenére, hogy néhány esetben olyan évek adatait használtam fel, amikor még nem voltak tagjai az Európai Uniónak. Emellett minden gráfot a leíró statisztika néhány elemével is elláttam. Ezek főként az átlagos foksám, foksámok szórása, legkisebb és legnagyobb foksám, illetve a gráf átmérője.

²Számításaim során a Matlab R2022b verziójában dolgoztam és beépített függvényeket felhasználva egyedi kódokkal számoltam.

Az első gráf politikai szempont alapján készült. Az Európai Parlament (EP) 2014-es és 2019-es testületeiben a 27 tagország képviselői különböző frakciókban való megoszlása szolgált adatként³. 2019-ben 751 helyett csak 705 képviselő állt rendelkezésre a Brexit miatt. Ebben az esetben nem a konkrét országok szerinti képviselősékek számával dolgoztam, hanem az egyes értékeket leosztottam az adott sorvektorok összegével, azaz az adott ország összes képviselőszékeinek számával. Ezután mindkét évre megcsináltam az euklideszi távolságokat tartalmazó mátrixot, majd a két mátrix összegét használtam inputként a gráfot meghatározó kódhoz. Ezután lefuttattam a *cutoff* érték és a minimálisan összefüggő gráf létrehozásához szükséges programot. A kapott gráf az 1. ábrán látható.

1. ábra. Politikai gráf



Forrás: saját szerkesztés

Az 1. ábrán látható, amit korábban említettem, miszerint van egy-két ország, amely meglehetősen távolra esik a többitől és fokszáma csupán egy (egy szomszédja van), ez az

³Forrás: <https://www.europarl.europa.eu/elections2014-results> és <https://www.europarl.europa.eu/election-results-2019>. Letöltve: 2023.03.16.

ország jelen esetben Olaszország, amely azért tűnhet ki, mert képviselői kevés politikai csoportban (frakcióban), de azokban annál nagyobb számban vannak jelen. Emellett a gráf „sűrűbb” részén megfigyelhetők a tömörülések. A foksámra vonatkozó leíró statisztika eredményei a következők: Átlag: 15,7; szórás: 5,62; minimum: 1; maximum: 24; átmérő: 3.

A következő gráf gazdasági szempont alapján készült. A távolságokat tartalmazó X mátrix az országok 2014-es és 2019-es egy főre jutó GDP adatai alapján készültek, amelyek alapvetően sorvektorba rendeződtek. Az X mátrix létrehozásának lépései a korábban ismertetett lépések alapján történt, a minimálisan összefüggő gráf azonban Luxemburg kiemelkedő GDP értékei miatt nem nagyon érdekes. Az összes ország között nagyon sok kapcsolat áll fent, míg Luxemburnak csupán egy szomszédja lett. Ez annak köszönhető, hogy Luxemburnak abszolút és relatív értelemben is jóval magasabb a két vizsgált évben az egy főre jutó GDP-je (például 2014-ben Luxemburg egy főre jutó GDP-je 114.358 USD volt, míg például Németország esetében ez a szám csupán 46.799 USD volt). Emiatt úgy döntöttem, hogy veszem mindkét évi adatsor természetes alapú logaritmusát annak érdekében, hogy csökkentssem az ehhez hasonló outlierok okozta „kilengéseket”. Ezután létrejött a szokásos módszer alapján az új, korrigált adatok alapján számolt távolságokat tartalmazó mátrix, amelyből a 2. ábrán látható minimálisan összefüggő gráf alakult ki.

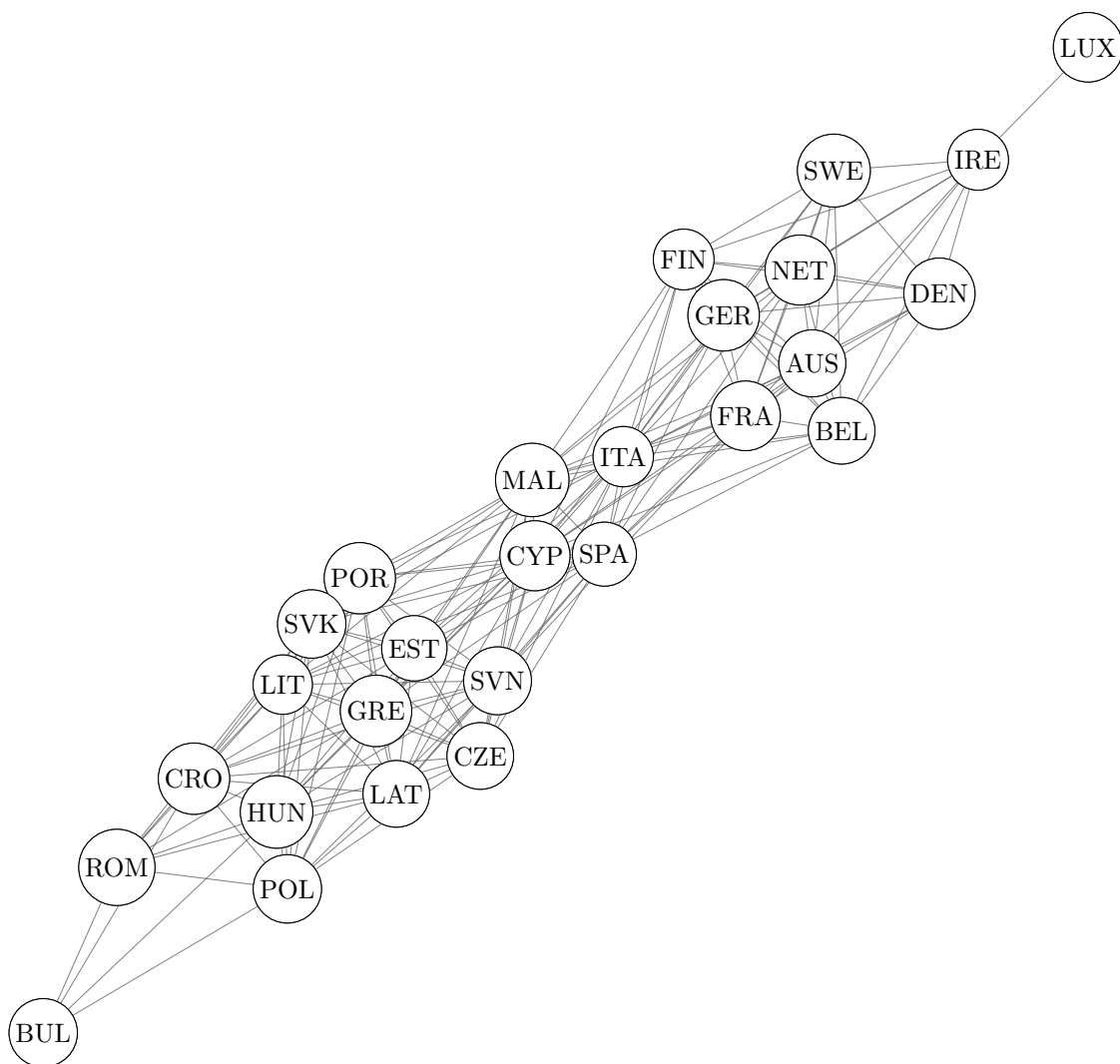
A 2. ábra alapján megállapítható, hogy Luxemburg még a természetes alapú logaritmus alkalmazása után is kitűnik a többi ország közül, azonban a köztük lévő kilengés, azaz távolság nagyban lecsökkent. A foksámra vonatkozó leíró statisztika eredményei a következők: Átlag: 12,3; szórás: 3,73; minimum: 1; maximum: 17; átmérő: 5.

A harmadik szempont a társadalmi szempont volt, amely jellemzésére a Human Development Index (HDI), azaz az Emberi Fejlettségi Index⁴ szolgált. A HDI három komponensből áll össze. Az első komponens az egészség, amely a születéskori várható élettartamot reprezentálja, a második faktor az oktatás, amely magában foglalja az átlagos és a várható iskolázottság mértékét években kifejezve, végül pedig a harmadik tényező az életszínvonal, amely tartalmazza a GNI (Gross National Income) per Capita mutatószámot, amely az egy főre jutó bruttó nemzeti jövedelem, melyet a GDP-ből származtatnak. Ez természetesen egyfajta rokonságot reprezentál az egy főre jutó GDP-vel, azonban a másik két tényező miatt szerintem inkább társadalmi, mintsem gazdasági erősségeket. Ebben az esetben is két év, 2014 és 2019 adatait használtam fel és ezek alapján elkészítettem az euklideszi távolságokat tartalmazó mátrixot, ami a 3. ábrán látható minimálisan összefüggő gráfhoz vezetett.

A 3. ábra alapján látható, hogy Bulgária és Románia kiemelkedik a többi ország közül, amely annak a ténynek köszönhető, hogy ebben a két országban a legalacsonyabb a HDI mutató értéke mindkét évben. Ezenkívül jól azonosíthatók a csoportosulások vizuálisan is, amelyeket a mutató értékei támasztanak alá. A bal alsó sarokban tömörülő országok (pl.: Svédország, Németország vagy Hollandia) HDI mutatója a legmagasabb az összes ország közül. Ahogy jobbra felfelé haladunk, egyre alacsonyabb HDI mutatóval rendelke-

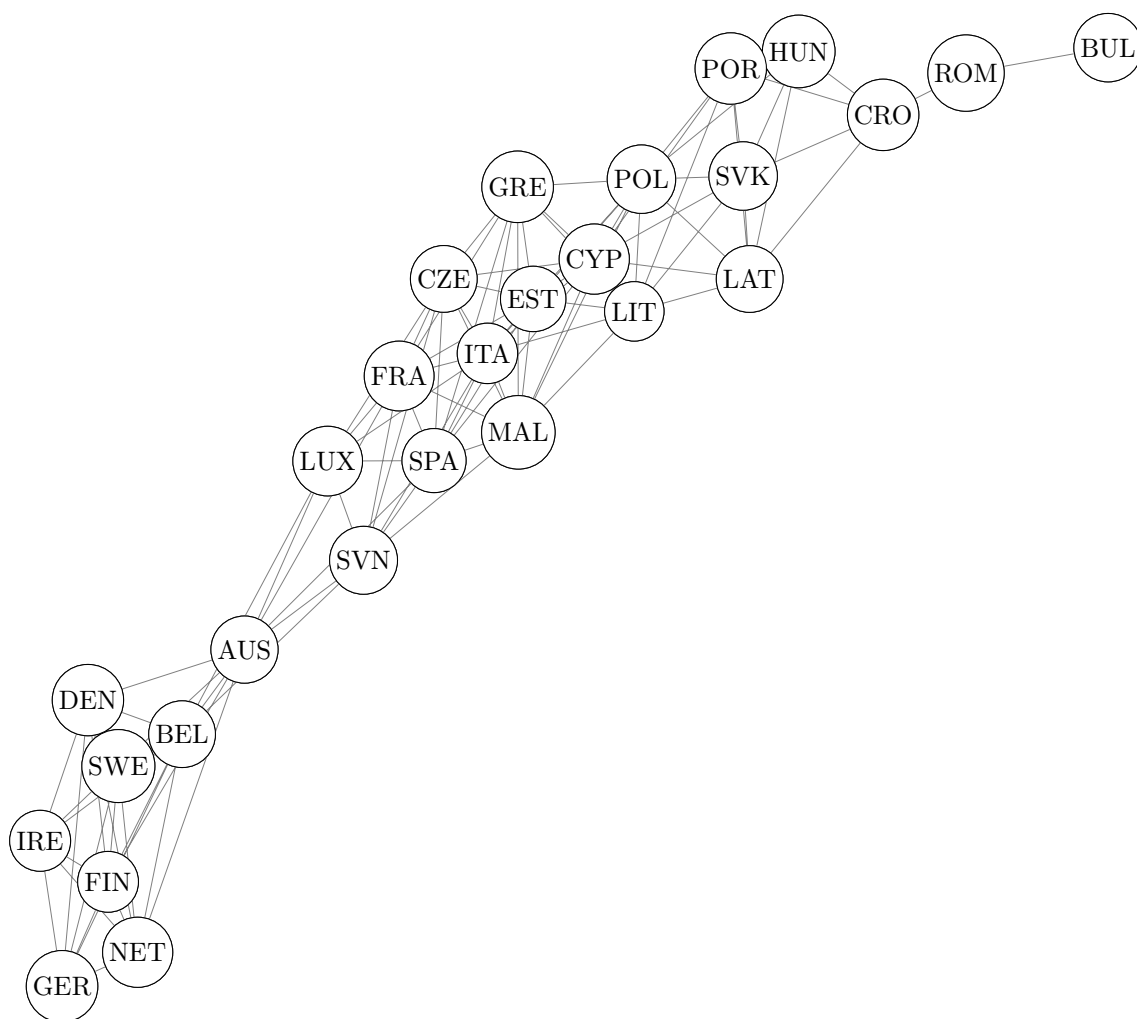
⁴Forrás: <https://countryeconomy.com/hdi>. Letöltve: 2023.03.17.

2. ábra. Gazdasági gráf logaritmizálás után



Forrás: saját szerkesztés

3. ábra. Társadalmi gráf

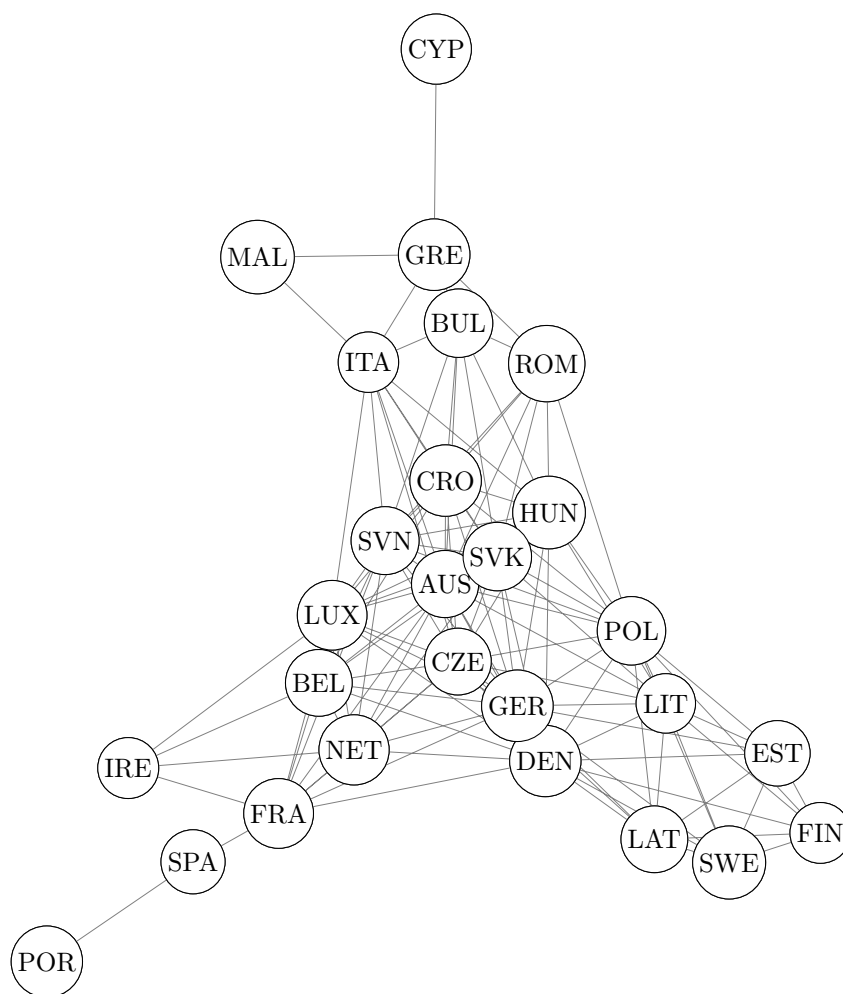


Forrás: saját szerkesztés

ző országokat látunk. A foksámra vonatkozó leíró statisztika eredményei a következők: Átlag: 7,56; szórás: 2,36; minimum: 1; maximum: 11; átmérő: 8.

A következő mátrix földrajzi távolságok alapján készült. Vettem minden tagország fővárosai közötti távolságot⁵ (légvonalban, km-ben). Ebben az esetben nem volt szükség oszlopvektorokra, hiszen a távolságokat kigyűjtve egy mátrixba, már egyből olyan mátrix állt rendelkezésre, aminek egyes értékei már alaptól távolságot jelentenek. Ezután az ebből származó gráf a 4. ábrán látható.

4. ábra. Földrajzi gráf



Földrajzi elhelyezkedésükből érthetően közel került egymáshoz egyrésről a Ciprus-Málta-Görögország hármass, másrésről a Spanyolország-Portugália páros is. Középen pedig jól látható a közép-európai tömörülés, illetve délen a Skandináv országok és Balti államok közelsége. A foksámra vonatkozó leíró statisztika eredményei a következők: Átlag: 9,41; szórás: 4,68; minimum: 1; maximum: 16; átmérő: 6.

Az ötödik gráf kulturális szempont alapján alakult ki. A vektorok adatait a tagállam-

⁵Forrás: <https://www.google.com/maps>

mokban beszélt nyelvek adták. Az oszlopvektorokban az egyes értékek azt jelentik, hogy az adott ország egy adott nyelvet az emberek hány százaléka beszél anyanyelvként vagy idegen nyelvként. Ez egy 2012-es Európai Unió felmérés⁶ az Európai Unió tagállamairól, amelynek ekkor még nem volt tagja Horvátország, ezért Horvátország adatait egy másik, ugyanilyen elven alapuló felmérés⁷ eredményei biztosították. A többi gráffal konzisztensen, a 2012-es felmérésből kivettem az Egyesült Királyságot, mivel dolgozatommal a Brexit utáni állapotot vizsgálom. Ebben az esetben fontos kiemelni, hogy minden országban ugyanazokat a nyelveket vizsgálták, tehát az egyes országokra kigyűjtött oszlopvektorok elemszáma szükségképpen megegyezik. Ezen oszlopvektorok euklideszi távolságát véve elkészítettem a mátrixot, amelyből előállt a minimálisan összefüggő gráf, ami az 5. ábrán látható.

Az 5. ábra alapján belátható, hogy Írország középpontban van, hiszen az Egyesült Királyság figyelmen kívül hagyásával Írország „veszi át” az angol nyelvet, illetve az angol nyelv Európában a legerterjedtebb, ezért az Írországgal való számos közvetlen kapcsolat így értelmezhető. Ezentúl a német nyelv népszerűsége is felfedezhető, hiszen Németország és Ausztria is fontos, központi szerepben van. Továbbá látható, hogy a történelem során szomszédos országok (pl.: Csehország és Szlovákia vagy Magyarország és Románia) is közel, közvetlen kapcsolatban állnak egymással. A foksámra vonatkozó leíró statisztika eredményei a következők: Átlag: 6; szórás: 4,83; minimum: 1; maximum: 22; átmérő: 4.

Az utolsó gráf vallási alapokon nyugszik, amelyhez a tagállamok különböző vallások szerinti megoszlását⁸ használtam fel, amelyet egy 2015-ös Európai Unió felmérésben gyűjtöttek össze. Az egyes adatok a sorvektorokban azt jelentik, hogy egy adott országban az adott vallást a lakosság hány százaléka gyakorolja. A szokásos módszertant elvégezve összeállt a minimálisan összefüggő gráf, ami a 6. ábrán látható.

A 6. ábrán látható gráf vizuálisan kiemelkedő, melynek struktúrája jelentősen beszédes és tanulságos. Alapvetően az ábra jól tükrözi azt, hogy Európában a katolikus és protestáns vallások dominálnak, ezért érthető is a bal alsó sarokban az országok 85%-ának elhelyezkedése. Az alsó csoportosulás déli része reprezentálja a katolikus vallást gyakorló országokat (pl.: Lengyelország vagy Írország), míg az északi részen találhatóak az inkább protestáns irányzatot követő országok (pl.: Finnország vagy Dánia). A jobb felső sarokban elhelyezkedő Görögország-Románia-Ciprus hármas pedig képviseli az ortodox irányzatot. A két tömörülést Bulgária köti össze, akinek számadatai valóban a két irányzat között helyezkednek el. A foksámra vonatkozó leíró statisztika eredményei a következők: Átlag: 13,93; szórás: 5,89; minimum: 3; maximum: 21; átmérő: 4.

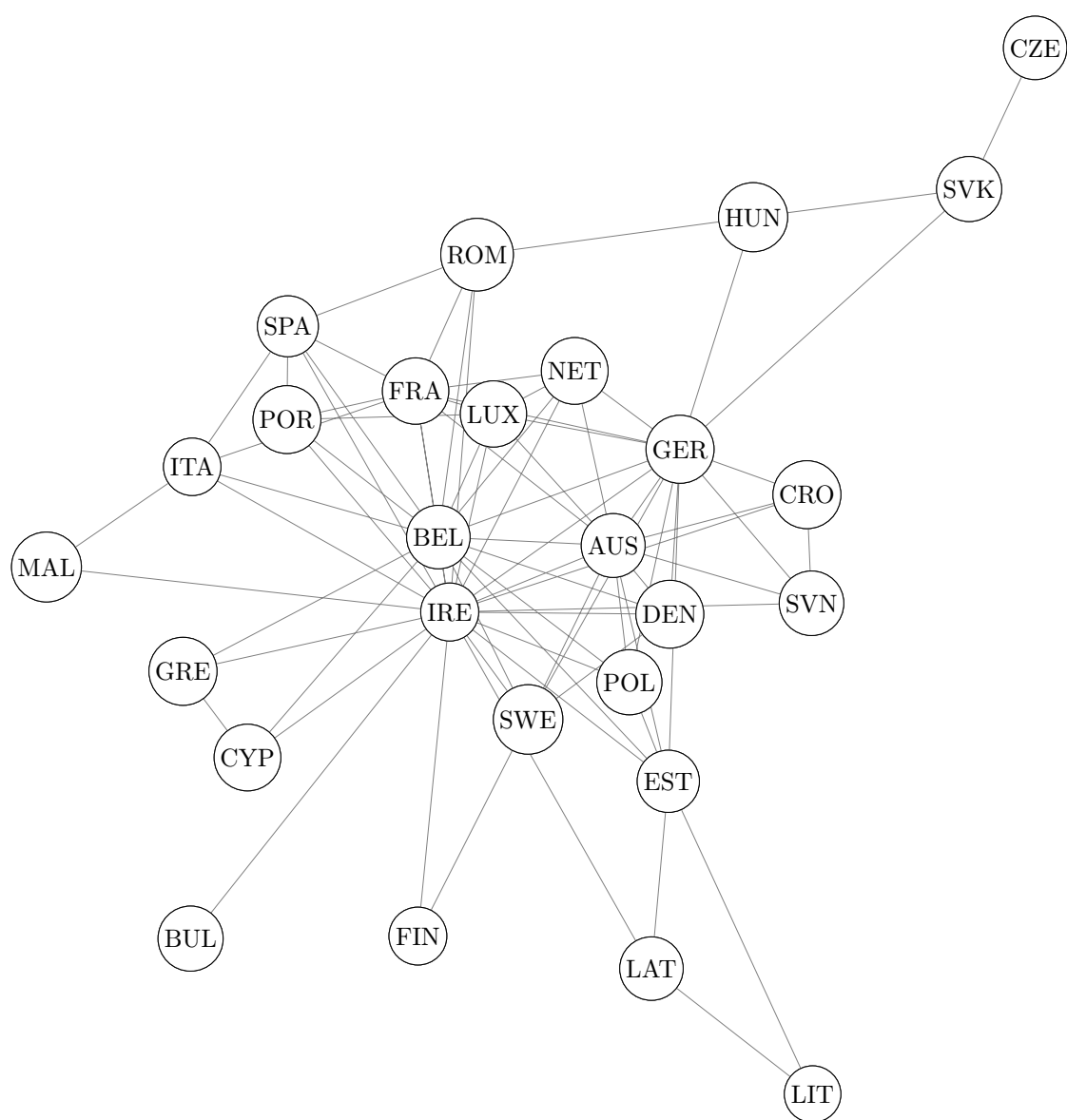
Végül, a gráfok foksámaira vonatkozó leíró statisztikai adatokat tartalmazó összefoglalja az 1. táblázat.

⁶Forrás: <https://languageknowledge.eu>. Letöltve: 2023.03.17.

⁷Forrás: Eurobarometer 64.3 felmérés Horvátországra vonatkozó adatai, Letöltve:2023.03.17.

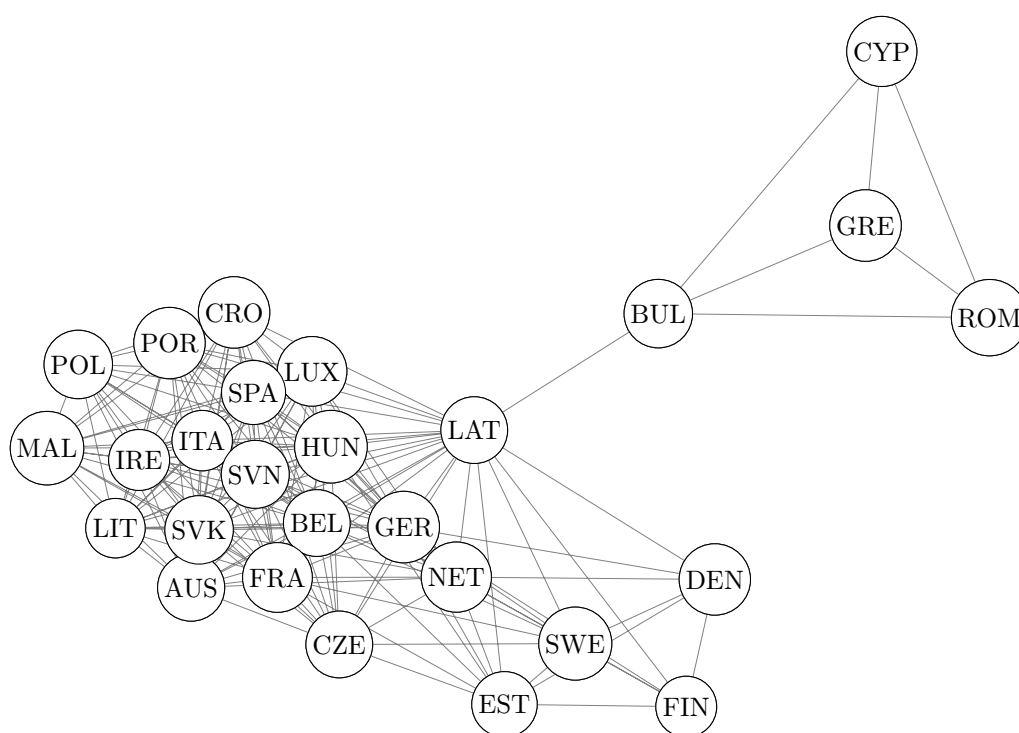
⁸Forrás: Eurobarometer 437 felmérés, Letöltve:2023.03.17.

5. ábra. Kulturális gráf



Forrás: saját szerkesztés

6. ábra. Vallási gráf



Forrás: saját szerkesztés

1. táblázat. A leíró statisztika eredményei a gráfok fokszámairól

	Politikai	Gazdasági	Társadalmi	Földrajzi	Kulturális	Vallásos
Átlag	15,70	12,30	7,56	9,41	6	13,93
Szórás	5,62	3,73	2,36	4,68	4,83	5,89
Min	1	1	1	1	1	3
Max	24	17	11	16	22	21
Átmérő	3	5	8	6	4	4

Forrás: saját szerkesztés

2.3. Játékelmélet

Mivel kiemelt szerepe van kutatásom során a módszertan ezen részének, ezért fontos tisztázni és pontosan definiálni a kooperatív játékelmélettel, illetve szavazási játékokkal kapcsolatos fogalmakat. A játékelmélet a matematikai közgazdaságtan egyik ága, amelynek segítségével vizsgálhatunk különböző társadalmi, politikai vagy gazdasági szituációkat és megfelelő modellek segítségével következtetéseket vonhatunk le belőlük. A játékelméletnek két ága van, a kooperatív és nem kooperatív játékelmélet. Dolgozatomban a kooperatív részét érinti, amely során a résztvevők együtt dolgozhatnak és közös hasznot érhetnek el, amely az adott szereplők különböző mértékű hozzájárulásától is függ. Hiszen egy társulás vagy úgynevezett koalíció célja, hogy együtt nagyobb hasznot érjenek el, mint az egyénileg realizálható értékük összege. Ebből tehát keletkezik egy többlet, amely felvet egy érdekes kérdést, miszerint hogyan osszuk el a keletkezett többletet a koalíció egyes résztvevői között (Mágó, 2018)? A játékelmélet ezen ágazatával tehát az egyes résztvevők fontosságát határozhatjuk meg egy adott csoportban. Az egyes szereplőket játékosoknak hívjuk, ezeket jellemezzük egy véges, nemüres N halmazzal, amelynek elemeit leggyakrabban számozással jelöljük. Az N halmaznak egy S részhalmazát úgynevezett koalíciónak hívjuk, amelynek több típusát különböztetjük meg: N a nagykoalíció, illetve létezik még az üres halmaz is, mint üres koalíció. Azon koalíciókat, amelyek csupán egy játékosból állnak singleton koalíciónak vagy röviden singletonnak nevezzük és az alábbi jelölést alkalmazzuk: $\{i\}$. Az alapvető feltételezésünkben kikötések vagy megszorítások nélkül élünk, azaz minden koalíció létrejöhet. Az összes lehetséges koalíció száma megegyezik az N halmaz összes részhalmazainak számával, amely $2^{|N|}$, ahol $|N|$ a halmaz számosságát mutatja. Azonban, ha precízebbek akarunk lenni, akkor ez a szám $2^{|N|} - 1$, hiszen a vizsgált esetek során az üres koalíciót nem értelmezzük (Forgó et al., 2005). Most pedig vizsgáljunk meg egy játéktípust, amely nevezetesen a TU-játék. Ez eredetileg az angol *transferable utility* tehát átruházható vagy átváltható hasznosság kifejezésből ered, amely azt jelenti, hogy a hasznosságokat a szereplők ugyanúgy mérik, tehát van értelme arról beszélni, hogy mi egy csoport hasznossága és ezek hogyan viszonyulnak egymáshoz. A későbbiek során egyéb szabály fennállása hiányában mindig ehhez hasonló modellből indulunk ki.

Egy TU-játék egy olyan (N, v) párt feltételez, ahol N egy véges halmaz a játékosok-

nak, illetve a $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ úgynevezett karakterisztikus vagy koalíciós függvény, amely minden $S \subseteq N$ koalícióhoz hozzárendel egy $v(S)$ értéket azzal a feltétellel, hogy $v(\emptyset) = 0$, azaz az üres koalíció mindig érjen 0-t. Egy (N, v) párként felírt TU-játék esetében egy $i \in N$ játékosnak egy $S \subseteq N$ koalícióban ($i \in S$) a határhozzájárulása (*marginal contribution*): $v(S) - v(S \setminus \{i\})$. Az egyértelmű megoldás vagy röviden csak érték TU-játékok esetében egy olyan f függvény, amely hozzárendel minden (N, v) TU-játékhoz egy $f(N, v) \in \mathbb{R}^{|N|}$ vektort, ahol $f_i(N, v) \in \mathbb{R}$ az f által az $i \in N$ játékoshoz rendelt szám (Mágó, 2018). A leghíresebb ilyen érték a Shapley-érték (Shapley, 1953). Egy TU-játékban az $i \in N$ játékos Shapley-értékét $\varphi_i(N, v)$ jelöléssel illetjük. A Shapley-érték az i játékos várható határhozzájárulása az összes olyan koalícióhoz, amelyben a játékosok az i játékos előtt lépnek be egy meghatározott sorrend alapján feltéve, hogy minden sorrend egyenlő valószínűséggel következik be. Emellett létezik még egy, az előző állítással ekvivalens definíció a Shapley-értékre, miszerint egy (N, v) TU-játékban egy $i \in N$ játékos Shapley-értéke az i játékos várható határhozzájárulása az összes olyan i játékost tartalmazó $S \subseteq N$ koalícióhoz ($i \in S$), amelynek valószínűsége $(|S| - 1)!(|N| - |S|)!/|N|!$. Egy $i \in N$ játékos Shapley-értéke tehát egy (N, v) TU-játékban az alábbi összefüggéssel írható fel:

$$\varphi_i(N, v) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} (|S| - 1)! (|N| - |S|)! (v(S) - v(S \setminus \{i\})).$$

Egy másik szintén standard és gyakran alkalmazott mutató a Banzhaf-érték, amelyet Banzhaf (1965) mutatott be annak érdekében, hogy bizonyos szavazási játékokban tudja mérni a játékosok szavazóerejét. Egy $i \in N$ játékos Banzhaf-értékének jelölése alábbi: $\beta_i(N, v)$ és a következőként definiáljuk: Egy $i \in N$ játékos Banzhaf-értéke egy (N, v) TU-játékban az i játékos átlagos határhozzájárulása az összes őt tartalmazó koalícióhoz abban az esetben, ha az összes ilyen lehetséges koalíció ugyanakkora valószínűséggel jön létre. Ezt felhasználva egyenértékű megfogalmazás az is, hogy egy $i \in N$ játékos Banzhaf-értéke egy (N, v) TU-játékban az adott játékos az összes őt tartalmazó lehetséges koalícióhoz való határhozzájárulásának átlaga. Ez a következőképpen írható fel képlettel:

$$\beta_i(N, v) = \frac{1}{2^{|N|-1}} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} (v(S) - v(S \setminus \{i\})).$$

A játékelmélet alfejezet zárásaként pedig a szavazási játékokról szeretnék írni. A szavazási játékok speciális TU-játékok. Egy szavazási játékban legyen N a játékosok vagy jelen esetben a szavazók véges halmaza. A szavazók két lehetőség előtt állnak: vagy megszavaznak egy adott problémát vagy ellene szavaznak. Minden $i \in N$ játékos rendelkezik egy $w_i > 0$ súllyal, amely azt mutatja meg, hogy mennyit ér a szavazata az adott kérdés során. Legyen W az összes szavazatok száma, amelynek egyenlőnek kell lenni az egyéni szavazatok számának összegével, tehát $\sum_{i \in N} w_i$. Egy $i \in N$ játékos nominális szavazóereje tehát az ő részesedése az összes szavazatból, amelyet w_i/W törtként írhatunk fel. Annak érdekében, hogy egy adott koalíció megnyerjen egy szavazást, a szavazatok számának leg-

alább akkorának kell lennie, mint egy előre meghatározott q kvótának, amire feltesszük, hogy $W/2 < q \leq W$. Ez ahhoz kell, hogy ne lehessen két diszjunkt koalíció nyerő. Számos politikai helyzetben ez a kvóta $50\% + 1$, tehát a szavazatoknak legalább a felét és még egy szavazatot meg kell szerezni például egy törvényhozáshoz. Kutatásom során a szavazási játékokban a túllépendő kvóta $q = W/2 + 1$, tehát $50\% + 1$ szavazat. Ez alapján tehát egy szavazási játék karakterisztikus függvénye a következőképpen írható fel:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \sum_{i \in S} w_i \geq q, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

2.4. Gráfokon megszorított játékok

Eddigi feltételezéseink során a koalíciók létrejöttét illetően semmilyen megszorítással nem éltünk, tehát az összes koalíció szabadon létrejöhetett, amely $2^{|N|}$ vagy $2^{|N|} - 1$ koalíciót eredményezett attól függően, hogy miként vélekedtünk az üres koalícióról. Mindazonáltal a való életben számos gazdasági, társadalmi és politikai helyzet adódik, ahol a lehetséges koalíciók létrejötte korlátozva van. Például, az Európai Unió országai esetében, két olyan ország nem valószínű, hogy együtt fog dolgozni vagy valamilyen törvényjavaslat elfogadásánál együtt fog szavazni az Európai Parlamentben egy adott kérdésben, amelyek közül az egyik vezetése a politikai spektrum bal oldalán, a másik pedig a spektrum jobb oldalán helyezkedik el. A két ország összefogására több alternatíva is van, de a legegyszerűbb arra gondolni, ha van egy úgynevezett *bridge*, azaz híd szerepet betöltő ország, aki csupán a két országot köti össze ideológiájában és lehetővé teszi, hogy ők együtt működhessenek rajta keresztül. Számos ismert megszorítás létezik a kooperatív játékokban a koalíciók kialakulására, azonban az egyik legismertebb a kommunikációs megszorítás, amely Myerson (1977) nevéhez fűződik. A legegyszerűbb példa az, amikor két játékos valamilyen oknál fogva nem tud kommunikálni. A megszorításokat a játékosok halmazát reprezentáló hálózati modellel jellemezhetjük. Ha a játékosok egy adott részhalmaza a hálózatban összefüggő, azaz közvetlenül vagy közvetett módon összeköttetésben állnak, akkor tudnak együtt kommunikálni vagy dolgozni, azaz a koalíció megvalósítható és a koalíció együttműködésből eredő értéke elérhető. Azonban, ha két ország között nincs kapcsolat a hálózatban, akkor a koalíció nem valósítható meg és értéke nem érhető el számukra. Myerson (1977) javaslata szerint a kommunikációs hálózatot (N, E) gráffal reprezentálható, amelyhez tartozik egy (N, v) egy TU-játék. Az E halmazban szereplő élek bináris kapcsolatok a játékosok között, tehát két játékos vagy össze van kötve vagy nincsen. Egy kommunikációs kapcsolatokat reprezentáló (N, E) gráffal kiegészített (N, v) TU-játékot gráfos játéknak vagy gráfon megszorított játéknak nevezzük és az alábbi hármassal jelöljük: (N, v, E) . Egy (N, v, E) gráfon megszorított játékban egy $S \subseteq N$ koalíció $v(S)$ értékének értelmezése a következő módon történik: Ha S összefüggő a gráfban, akkor $v(S)$ a megalakult koalíció értéke, azonban, ha nem összefüggő, akkor a $v(S)$ az az érték,

amelyet akkor kapna az S koalíció, ha együtt tudnának működni. Tehát a $v(S)$ érték a koalícióban résztvevő játékosok gazdasági lehetőségeit reprezentálja, amely csak akkor valósítható meg, ha a játékosok halmaza összefüggő a gráfban (Owen, 1986). Ennek eredményeként, a kommunikációs hálózat élei módosíthatók a karakterisztikus függvény újra definiálása nélkül (Mágó, 2018). A karakterisztikus függvényt úgy értelmeztük, mint egy olyan koalíció által realizált értéket, amelyben a koalíciók össze vannak kötve. Emellett fontos megvizsgálni azt az értéket is, amelyet a nem összefüggő koalíciók érnek el. Myerson (1977) feltételezései szerint egy (N, v, E) gráfos játékban egy S nem összefüggő koalíció csupán a gráf egyes komponensei által realizált értékek összegét érheti el. Ez a feltételezés a következő eredményhez vezet minket, miszerint egy (N, v, E) gráfon megszorított (N, v^E) játék az alábbi formulával írható fel:

$$v^E(S) = \sum_{T \in L_S^m(N, E)} v(T),$$

ahol az $L_S^m(N, E)$ halmaz tartalmazza az S halmaz összes maximális összefüggő részalmazát, vagyis komponensét, minden $S \subseteq N$ -re (Myerson, 1977).

Egy gráfos játék egyértelmű megoldása vagy röviden értéke egy olyan f függvény, amely hozzárendel minden egyes (N, v, E) játékhoz egy $f(N, v, E) \in \mathbb{R}^{|N|}$ vektort (Mágó, 2018). A leggyakrabban vizsgált ilyen érték a Myerson-érték, amelyet Myerson (1977) vezetett be. A Myerson-érték a gráfon megszorított játék Shapley-értéke, amely szerint egy (N, v, E) gráfos játék Myerson-értéke a következő összefüggéssel írható fel: $\mu(N, v, E) = \varphi(N, v^E)$. Tehát minden (N, v, E) játék és $i \in N$ játékos esetében a következőt kapjuk:

$$\mu_i(N, v, E) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} (|S| - 1)! (|N| - |S|)! (v^E(S) - v^E(S \setminus \{i\})).$$

Egy, a Myerson-értékhez hasonló koncepció a megszorított Banzhaf-érték (*restricted Banzhaf value*), amelyet Owen (1986) vezetett be. Ezt az értéket szokás még gráfon megszorított Banzhaf-értéknek is nevezni (Alonso-Meijide és Fiestras-Janeiro, 2006). Egy gráfos játék megszorított Banzhaf-értéke a Myerson által bevezetett megszorított játék Banzhaf-értékeként határozható meg, amely minden (N, v, E) gráfos játék esetében a megszorított Banzhaf-értéket a következő egyenlőséggel definiálja: $\rho(N, v, E) = \beta(N, v^E)$. Tehát minden gráfon megszorított (N, v, E) játékra és $i \in N$ játékosra fennáll az alábbi definíció:

$$\rho_i(N, v, E) = \frac{1}{2^{|N|-1}} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} (v^E(S) - v^E(S \setminus \{i\})).$$

Egy másik, szintén nem standard megoldás az átlagos összefüggő hozzájárulási érték, amelyet az angol *average connected contribution* kifejezésből eredően ACC-nek rövidítünk. Ezt az értéket Mágó (2018) vezette be. Az érték használata mögötti motiváció a

megszorított Banzhaf-érték alternatívájának keresése. A Myerson-érték és a megszorított Banzhaf-érték esetében a határhozzájárulások néhány összefüggő koalícióban többször is számításba kerülnek, ezért a gráfokon megszorított koalíciókat nem teljes mértékben reprezentálja ez a két érték. Míg a Myerson-érték esetében több alternatíva, például a súlypont megoldás, angolul *gravity center solution* (Koshevoy és Talman, 2014) egy lehetséges alternatíva, addig a megszorított Banzhaf-értékhez hasonló és a fenti problémával foglalkozó hasonló megoldás az ACC. Az ACC tehát a megszorított Banzhaf-érték egyfajta javítása, pontosítása. Egy játékos átlagos összefüggő hozzájárulási értéke egy gráfon megszorított játékban a határhozzájárulásainak átlaga az olyan megvalósítható koalíciókban, amelynek az adott játékos tagja lehet (Mágó, 2018). A Myerson-értékkel és a megszorított Banzhaf-értékkel ellentétben az ACC nem függ nem összefüggő koalícióbeli hozzájárulásoktól és konzisztens a hozzájárulások számolásával kapcsolatban az összes összefüggő koalícióban. Ez tehát azt jelenti, hogy az ACC csak egyszer számol minden hozzájárulást és csak a megvalósítható koalíciókban teszi ezt. Ezért az ACC nagyon hasonlít a Banzhaf-értékhez, sőt teljes gráf esetében a két érték megegyezik (Mágó, 2018). Az ACC-t az alábbi módon lehet kiszámolni egy adott (N, v, E) gráfos játékban:

$$ACC_i(N, v, E) = \frac{1}{c_i(N, E)} \sum_{\substack{S \in L_N(N, E) \\ i \in S}} (v(S) - v^E(S)),$$

ahol $c_i(N, E)$ azon összefüggő koalíciók száma, amikben az i játékos szerepel, $L_N(N, E)$ pedig az összes összefüggő koalíciót tartalmazó halmaz.

A dolgozatban ezeket a standard (Shapley- és Banzhaf-érték), illetve nem standard, de a gráfok bevonásával használt (Myerson- és megszorított Banzhaf-érték, ACC) módszereket használok az Európai Parlament székei alapján elkészített szavazási játékokra, ahol a gráfokat a már bemutatott módszerrel készítettem el. Fontos kiemelni, hogyha a gráfok teljes gráfok lennének, akkor a bemutató gráfos játékokra alkalmazott megoldások pontosan a Shapley- és Banzhaf-értékeket adnák eredményül. Mindemellett szerintem fontos kiemelni a megszorítások esetében felvázolt bináris kapcsolatokat, melyeket matematikailag a gráfok élei segítségével jellemeztük. Ez a korábbiak szerint azt jelentette, hogy például a szavazás témája kapcsán két ország vagy össze volt kötve vagy nem. Ennek kivitelezéséhez használtam a korábbiakban bemutatott *cutoff* értéket, amely egy adott számnál „elvágyja” az országokat. Ez esetünkben azt jelenti, hogy egy bizonyos értéknél kisebb távolsággal rendelkező országokat összeköt, míg ennél nagyobb országokat pedig nem. Emellett a gráfokban megjelenő távolság is jelentős fontossággal bír. Az országok közötti távolság kiválóan reprezentálja a köztük lévő hasonlóságot, amely az esetleges koalíciók megformálásában kulcsfontosságú, még akkor is ha a gráfok elkészítésénél ezekből bináris adat lett. A gráfok esetében még fontos kiemelni az izolált pontokat és a teljes gráfot. A korábbiakban láthattuk, hogy egy adott S koalíció $v(S)$ értéke csak akkor realizálható, ha a játékosok halmaza össze van kötve az adott gráfban, azaz összefüggő. Ez matematikailag azt jelenti, hogy szavazási játékok esetén ha biztosan szeretnénk azt, hogy legyen legalább

egy győztes koalíció, akkor ezt úgy tudjuk garantálni, hogy az összes játékost tartalmazó gráf összefüggő. Ez volt a fő oka annak, hogy a távolságok alapján képzett mátrixokból úgy készültek a gráfok, hogy a *cutoff* értékek a lehető legkisebb számnak határoztuk meg, amire a gráf még éppen összefüggő. Az egyik, összefüggőséget kizáró tényező az, ha a gráf tartalmaz izolált pontot. Dolgozatomban azért használok kizárólag összefüggő gráfokat, hogy minden esetben legyen legalább egy nyertes koalíció, nevezetesen a nagykoalíció. Emellett a teljes gráf sem megfelelő, hiszen akkor mindenki össze van kötve mindenki-vel, tehát az nem eredményez semmiféle megszorítást, Ekkor tulajdonképpen a standard Shapley- és Banzhaf-értéket kapjuk eredményül.

3. Eredmények

Ebben a fejezetben a fentebb ismertetett módszertan alapján elvégzett számításaim eredményeit szeretném bemutatni. Három összefoglaló, az eredményeket tartalmazó táblázatot készítek, amelyeket aztán különböző szempontok alapján bemutatok és elemzek. A táblázatok oszlopai a hat különböző gráfon megszorított értékeket plusz egy, a megszorított értékhez kapcsolódó standard értéket tartalmaznak, a sorokban pedig az egyes országok nevei találhatóak név szerinti sorrendben. A táblázatok adatai Matlab kódok outputjai. Ebben az esetben 3 inputja volt a kódoknak: w , az egyes országok képviselőszékeinek számát az összes frakcióban; a kvótát jelképező p , amely konstans 0,5-re volt beállítva minden esetben; illetve a korábbiakhoz hasonlóan az X mátrix, amely az országok közötti távolságokat tartalmazza, alapján elkészített gráfok Y összefüggőségi mátrixai. A kódok átlagos futási ideje nagyjából három nap gráfonként és játékelméleti értéként. Ebből is látszik, hogy ez a fajta kutatás gyakran számítástechnikai korlátokba ütközik. Az átlagos futási idő pedig azt is mutatja, hogy egy ekkora feladat (27 tagország) vizsgálata a kapacitási korlátok kihasználásának közel maximuma volt. Elemzésem valamennyi táblázat esetében tartalmazza Magyarország eredményeit, a legnagyobb értéket, azaz a „legerősebb” országot az adott szempont alapján, illetve néhány ország adatait, amely eredményei meglepőek és kiemelkedően érdekesek voltak számomra. Elemzésem során a kapott eredményt megpróbálom az eredeti adatok, illetve az általános tudás és megítélés alapján összevetni és levonni a konklúziót. Emellett hangsúlyozom bizonyos országok esetében a gráf fontosságát vagy éppen szükségtelenségét is, ugyanis vannak olyan országok, amelyek önmagukban is erősek gráf nélkül, azonban lesz néhány olyan is, amely a gráfok vizsgálata nélkül alulmaradna és szimplán átlagosan teljesítene.

Most pedig a gráfokon megszorított játékokhoz felhasznált w súlyvektorról szeretnék néhány gondolatot írni. Ez alapvetően egy 27 elemű oszlopvektor, amely tartalmazza az országok EP képviselőinek számát mind a 27 ország esetében. A vektor elemeinek összege 705, amely kiadja a jelenlegi EP testület képviselőszékeinek számát. A képviselőszékek számát az országok lakossága alapján határozzák meg arányosan. Ez a vektor volt az egyik inputja azoknak a kódoknak, amelyeknek eredményeit a lentebb látható három fő táblázatban foglaltam össze. Ennek százalékos megoszlása is használható, amikor minden értéket leosztunk a vektorban szereplő értékek összegével, tehát 705-tel, azaz a vektort 1-re normalizáljuk. Azonban én az előbbi megoldást választottam, amely a 2. táblázatban látható.

3.1. Gráfokon megszorított szavazási játékok

A fentebb ismertetettek alapján tehát a szavazási játékok tulajdonképpen speciális TU-játékok, amelyeket eddig megszorítások nélkül kezeltünk és használtunk. Azonban a szavazási játékokat is meg lehet szorítani gráfokon. Ezért bevezethetünk egy (N, E) gráfot, amely segítségével egy (N, v, E) gráfon megszorított játékot kapunk. Ekkor a gráf által

2. táblázat. EP képviselők száma országoként

Austria	19	Italy	76
Belgium	23	Latvia	8
Bulgaria	17	Lithuania	11
Cyprus	12	Luxembourg	6
Croatia	6	Malta	6
Czechia	21	Netherlands	27
Denmark	14	Poland	52
Estonia	7	Portugal	21
Finland	14	Romania	33
France	79	Slovakia	14
Germany	96	Slovenia	8
Greece	21	Spain	59
Hungary	21	Sweden	21
Ireland	13		

Forrás: saját szerkesztés

létrejövő megszorításokat a következő módon értelmezhetjük: Ha a szavazók egy halmaza össze van kötve a gráfban, akkor rendelkeznek azzal a lehetőséggel, hogy az adott kérdésre igennel szavazzanak még akkor is, ha az összes többi szavazó ellenük is szavaz. illetve, ha nincsenek összekötve, akkor nem tudnak együtt szavazni az adott kérdésre, azonban ellene tudnak. Ez a megközelítés kiváló példa a politikai kérdések interpretációjára, ahol hasonló szituációk alakulhatnak ki. Például politikai pártok vagy frakciók között a komoly nézeteltérések miatt egy *bridge* játékos nélkül esélytelen az, hogy a két párt együtt szavazzon egy adott kérdésben (Mágó, 2018).

3.2. Táblázatos eredmények

A 3. táblázat tartalmazza az ACC és a standard Banzhaf-érték, tehát egy standard és egy nem standard megoldás eredményeit együttesen a hat gráf esetén és a teljes gráfra.

A 3. táblázatban tehát az átlagos hozzájárulási érték, az ACC található, amely a játékos határhozzájárulásainak átlagát tartalmazza az öt tartalmazó összefüggő koalíciókban, illetve a gráfok általi megszorítás nélküli szavazóerő meghatározására szolgáló standard Banzhaf-érték látható. Fontos kiemelni, hogy míg a Shapley-érték axiomatizációjának egyik feltétele az, hogy az adott határhozzájárulások (jelen esetben az oszlopvektor elemei) 1-re összegződnek, viszont ez a Banzhaf-érték esetében nem teljesül. Ezért ebben a táblázatban soronként érdemes vizsgálni a kapott eredményeket. A Banzhaf-értéket azonban lehet 1-re normalizálni is, amely elvégzése után már oszloponként is értelmezhetjük az adatokat. Mindazonáltal most elsősorban a sorok szerinti vizsgálat eredményeit szeretném bemutatni néhány érdekes példán keresztül. Elsőként Magyarország adatainak értelmezésével szeretném kezdeni. Magyarország nagyjából minden szempont szerint hasonló

3. táblázat. ACC és Banzhaf-érték eredményei

	Politikai	Gazdasági	Társadalmi	Földrajzi	Kulturális	Vallásos	Banzhaf
Austria	0,2463	0,0805	0,3281	0,0798	0,0801	0,0784	0,0790
Belgium	0,0951	0,0975	0,2748	0,0869	0,1200	0,0945	0,0957
Bulgaria	0,0704	0,0729	0,0660	0,0828	0,0698	0,2077	0,0707
Croatia	0,0492	0,0561	0,1696	0,0506	0,0491	0,0496	0,0498
Cyprus	0,0247	0,0394	0,1012	0,0215	0,0245	0,0247	0,0249
Czechia	0,0869	0,0913	0,0935	0,0882	0,0840	0,0865	0,0874
Denmark	0,0574	0,0597	0,0700	0,0653	0,0573	0,0577	0,0581
Estonia	0,0287	0,0314	0,0499	0,0261	0,0438	0,0290	0,0291
Finland	0,0574	0,0592	0,0700	0,0511	0,0571	0,0577	0,0581
France	0,3446	0,3536	0,3688	0,5693	0,3473	0,3439	0,3488
Germany	0,4358	0,4543	0,4499	0,3817	0,5137	0,4354	0,4436
Greece	0,0869	0,0925	0,1088	0,0961	0,0861	0,0871	0,0874
Hungary	0,0863	0,0949	0,0988	0,0838	0,1137	0,0866	0,0874
Ireland	0,0533	0,0684	0,0545	0,0477	0,1977	0,0535	0,0540
Italy	0,3341	0,3487	0,3531	0,3248	0,3336	0,3297	0,3339
Latvia	0,0334	0,0363	0,0612	0,0329	0,0435	0,2173	0,0332
Lithuania	0,0457	0,0490	0,1075	0,0497	0,0447	0,0452	0,0457
Luxembourg	0,0246	0,0255	0,1226	0,0286	0,0255	0,0247	0,0249
Malta	0,0246	0,0388	0,0473	0,0216	0,0243	0,0247	0,0249
Netherlands	0,1112	0,1149	0,1252	0,1008	0,1110	0,1114	0,1126
Poland	0,2194	0,2326	0,2964	0,2092	0,2177	0,2185	0,2218
Portugal	0,0863	0,0913	0,1160	0,0589	0,0870	0,0866	0,0874
Romania	0,1361	0,1452	0,1742	0,1437	0,1781	0,1375	0,1379
Slovakia	0,0580	0,0624	0,0864	0,0600	0,1033	0,0576	0,0581
Slovenia	0,0328	0,0462	0,1309	0,0385	0,0327	0,0329	0,0332
Spain	0,2492	0,2686	0,2761	0,2808	0,2498	0,2495	0,2526
Sweden	0,0868	0,0897	0,0996	0,0773	0,0898	0,0867	0,0874

Forrás: saját szerkesztés

számokat ért el, azonban a kulturális szempont szerinti csoportosításban tűnt a legerősebbnek, amely egyrésztől köszönhető az Európában népszerű idegen nyelvek (angol és német) elterjedtségének, másrésztől a földrajzi elhelyezkedésnek és a történelmi múltunknak. Magyarország vallási szempontból átlagosnak tekinthető. Emellett Magyarország esetében a standard Banzhaf-érték megegyezik, illetve nagyon közel áll olyan országokhoz, amelyek Magyarországgal egy kategóriába sorolhatók (pl.: Csehország, Ausztria, Görögország), tehát bizonyos szempont alapján hasonlóak (pl.: ország mérete vagy gazdasági teljesítmény). Emellett Franciaországot is szeretném megemlíteni, hiszen a várakozásokat teljesítve Németország mellett ő bizonyult még kiemelkedőnek olyannyira, hogy a földrajzi gráfban ő a legerősebb, amely általánosságban is teljesül. A két ország közötti különbséget ebben az esetben az biztosíthatja, hogy Franciaország *bridge* szerepet tölt be, ugyanis a Spanyolország-Portugália kettőst összeköti Európa többi részével amellet, hogy a gráf nélkül is erősnek bizonyult. Ezt alátámasztja Franciaország standard Banzhaf-értéke is. Most pedig Németországról szeretnék pár gondolatot írni, aki ugyanis ezen mutatók alap-

ján az „abszolút győztes”, hiszen majdnem minden kategóriában a legerősebbnek bizonyult. A kategória, amely kivétel ez alól a földrajzi szempont, ahol Franciaország nem sokkal, de felülmúlta Németországot. Németország dominanciája több szempontból is várható volt, hiszen politikai, gazdasági és földrajzi előnye említésre méltó a többi országhoz képest. Emellett a német anyanyelvnek köszönhetően természetesen a kulturális gráfban is erősnek látszik. Ezen jellemzők ismeretében tehát jól interpretálható az a gondolatmenet, hogy miért Németországnak volt a legnagyobb Banzhaf-értéke. Ezenkívül Ausztriát is szeretném kiemelni, ugyanis több érdekes eredmény is született ezen ország esetében. Elsőként a kulturális gráfot említeném meg, amely esetében a várakozásokat alulmúlta Ausztria, hiszen olyan országokkal szemben bizonyult gyengébbnek, mint Magyarország vagy Svédország, azonban a várakozások azt diktálták, hogy ugyan a német nyelven közösen osztoznak Németországgal, mégis első látásra a német nyelv mellett a magyar és angol nyelveknek köszönhetően dominánsabbnak látszódtam kutatásom előtt. Mindazonáltal politikai és társadalmi szempontból Ausztria közelít olyan fejlett országokhoz, mint Németország vagy Franciaország. A Banzhaf-érték szempontjából Ausztria a gráf nélkül nem bizonyult különösebben dominánsnak. Végül ebből a táblázatból még kiemelném Bulgáriát, akiről már sejthető volt a minimálisan összefüggő gráf elkészítésekor, hogy meghatározó szerepe lesz. Bulgária önmagában nem túl erős vallási szempontból, a gráf hiányában egészen átlagosnak mondhatnánk, azonban kiváló mintapéldája a korábban említett *bridge*, azaz híd szerepnek, amikor egy ország nem azért erős, mert önmagában is domináns egy adott szempont alapján, hanem mert bizonyos koalíciókat, jelen esetben tömörüléseket össze tud tenni, ezáltal lehetővé tudja tenni egy szavazási játékban, hogy együtt dolgozzanak és közösen érjenek el egy jobb eredményt. Továbbá Bulgária társadalmilag gyenge szerepe is látható volt már az ACC programkódok futtatása előtt is, hiszen az alacsony HDI érték mellett Bulgária fokszáma a gráfban 1 volt, tehát egyfajta outlier szerepet töltött be.

Az első táblázat elemzésének zárásaként pedig szeretném kiemelni a kapott értékek normalizálásának lehetőségét is, amely több szempontból is érdekes. Az ACC esetében a kapott érték egy hányados, amely az adott ország fontosságát méri az adott gráfon megszorított szavazási játékban. Ez a hányados egy olyan törtből áll elő, amelynek számlálójában egy olyan szám áll, amely azt fejezi ki, hogy hány összefüggő koalíciót tesz nyerővé az adott ország, azaz hány esetben lesz ő a „mérleg nyelve”, a nevezőben lévő szám pedig azt mutatja meg, hogy az adott ország hány összefüggő koalícióban van benne a vizsgált gráf kapcsán. Tehát két vizsgált érték közül a nagyobb érték az alábbi módon interpretálható: Vagy azért nagyobb az érték, mert nagyjából azonos nagyságú nevező mellett nagyobb a számlálója, tehát több koalíciót tesz nyerővé azok közül, amelyekben benne van, vagy körülbelül azonos nagyságú számláló mellett szimplán kevesebb koalíciónak a tagja, ezért azok közül arányaiban többet tesz nyerővé. A Banzhaf-érték esetében a hányadost eredményező tört számlálója azonosan értelmezhető az ACC eredményeivel, azonban a nevezőben annyi változás történik, hogy az összes olyan koalíciót beleszámol-

jük, amelynek az adott ország a tagja lehet. Ez esetünkben azt eredményezi, hogy ez a nevező minden ország esetében ugyanannyi. A nevezőben létrejövő „hatást” azonban ki lehet szűrni. Erre egy lehetséges alternatíva, az összefüggőségi erő (connectivity power measure), röviden CPM használata. A CPM mutató azon összefüggő csúcshalmazok száma egy gráfban, amelyeknek egy adott csúcs a része (Mágó, 2018). Ez a gráfokon megszorított játékunkban azt jelenti, hogy egy adott gráfban megadja az összes olyan összefüggő koalíciót egy adott országra nézve, amelynek az adott ország a tagja. Az ACC számításában pontosan ezzel osztunk le, vagyis ha ezzel megszorozzuk az országok ACC értékeit, akkor megkapjuk, hogy az adott ország hány lehetséges koalíció esetén a mérleg a nyelve. A standard Banzhaf-érték esetében a CPM értéke: $2^{(|N|-1)}$. Ahhoz, hogy könnyebben tudjuk értelmezni a kapott eredményeket, az eredeti adatokat a CPM mutatóval felszorzásuk után érdemes leosztani egy számmal, melynek eredményeként minden eredmény újra 0 és 1 között lesz. Ez a szám azt mondja meg, hogy az adott gráfban hány különböző összefüggő ponthalmaz van összesen, vagyis az összes összefüggő ponthalmaz számával osztunk. Teljes gráf esetén ez $2^{(|N|)} - 1$, ha az üres halmazt nem tekintjük összefüggőnek de mivel $|N| = 27$, ezért 1 levonása vagy hozzáadása nem változtat túl sokat. Az előbbi mutató felszorzásával, majd utóbbi osztásával kapjuk a 4. táblázatot.

Az 5. táblázat magában foglalja a gráfokon megszorított Shapley-értéket, azaz a Myerson-értéket, illetve a gráf nélküli standard Shapley-értéket. A Shapley-érték azt mutatja meg, hogy hány olyan sorrend van, ahol az adott ország a mérleg nyelve, azaz amelyben ő teszi nyerővé a nagykoalíciót, osztva a nagykoalíció összes lehetséges kialakulási sorrendjének számával. A Shapley-érték egyik axiómájának köszönhetően az oszlopvektorok 1-re összegződnek, azaz nincs szükség normalizálásra. Ez azt eredményezi, hogy a sorok mellett az oszlopok összehasonlításának is van értelme.

Az 5. táblázat eredményeiről általánosságban elmondható, hogy az erőviszonyok nagyjából azonosak maradtak az országok szerepeit tekintve, tehát azon országok, akik eddig is fontos szereplők voltak, azok továbbra is kiemelkedőek lesznek. Kivételt képez ez alól az a tény, miszerint főként az erős országok (pl.: Franciaország és Németország) jelentőségére negatívan hatott az értékek korrigálása, tehát a legtöbb esetben vesztek fontosságukból. Például Franciaország földrajzi gráfban elfoglalt szerepe továbbra is fontos, ugyanis még mindig ő a legerősebb és a korrigálás hatására például Németország is veszített fontosságából ebben a gráfban. Emellett Németországot tekintve még mindig ő a legerősebb szinte az összes kategóriában. Továbbá az erőviszonyok sorrendjének változatlanóságát alátámasztja Olaszország helyzete is, aki a korrigálást megelőzően és utána is kiemelkedett a kisebb országok közül és közelített a fő országok szavazóerejének nagyságához.

Az 5. táblázatot az előzőhöz hasonlóan elemzem és itt is kiemelek néhány kulcsfontosságú és érdekes országot. A táblázatra első ránézésre elmondható, hogy néhány esetet kivéve teljesülnek rá az előző táblázat jellemzői is, azaz Németország és Franciaország itt is erős, illetve Bulgária társadalmilag ebben az esetben is gyengének bizonyult. Szignifikáns különbség, hogy Németország a földrajzi gráf mellett már a társadalmi gráfban is gyengült,

4. táblázat. CPM-mel korrigált adatok

	Politikai	Gazdasági	Társadalmi	Földrajzi	Kulturális	Vallásos	Banzhaf
Austria	0,1648	0,0406	0,2319	0,0407	0,0405	0,0392	0,0395
Belgium	0,0477	0,0492	0,1784	0,0443	0,0641	0,0473	0,0479
Bulgaria	0,0354	0,0353	0,0162	0,0455	0,0316	0,1672	0,0354
Croatia	0,0247	0,0291	0,1247	0,0256	0,0245	0,0200	0,0249
Cyprus	0,0124	0,0207	0,0587	0,0075	0,0121	0,0124	0,0125
Czechia	0,0436	0,0458	0,0486	0,0454	0,0248	0,0433	0,0437
Denmark	0,0287	0,0299	0,0354	0,0345	0,0286	0,0288	0,0291
Estonia	0,0144	0,0158	0,0257	0,0131	0,0260	0,0146	0,0146
Finland	0,0287	0,0299	0,0354	0,0253	0,0277	0,0288	0,0291
France	0,1722	0,1813	0,1990	0,4335	0,1749	0,1722	0,1744
Germany	0,2183	0,2292	0,2223	0,2004	0,3671	0,2191	0,2218
Greece	0,0436	0,0466	0,0561	0,0673	0,0425	0,0351	0,0437
Hungary	0,0431	0,0492	0,0503	0,0425	0,0601	0,0433	0,0437
Ireland	0,0267	0,0455	0,0269	0,0235	0,1792	0,0268	0,0270
Italy	0,1118	0,1839	0,1887	0,1958	0,1718	0,1649	0,1670
Latvia	0,0167	0,0183	0,0330	0,0167	0,0242	0,1968	0,0166
Lithuania	0,0229	0,0247	0,0608	0,0260	0,0190	0,0226	0,0229
Luxembourg	0,0123	0,0085	0,0693	0,0146	0,0128	0,0124	0,0125
Malta	0,0123	0,0204	0,0248	0,0097	0,0118	0,0123	0,0125
Netherlands	0,0556	0,0578	0,0633	0,0512	0,0555	0,0560	0,0563
Poland	0,1095	0,1205	0,1732	0,1105	0,1088	0,1092	0,1109
Portugal	0,0433	0,0458	0,0625	0,0149	0,0435	0,0433	0,0437
Romania	0,0682	0,0747	0,0854	0,0791	0,1043	0,0553	0,0690
Slovakia	0,0291	0,0314	0,0465	0,0306	0,0610	0,0288	0,0291
Slovenia	0,0165	0,0236	0,0752	0,0196	0,0163	0,0165	0,0166
Spain	0,1246	0,1411	0,1503	0,1425	0,1250	0,1248	0,1263
Sweden	0,0436	0,0449	0,0503	0,0387	0,0463	0,0435	0,0437

Forrás: saját szerkesztés

hiszen mind Franciaország, mind Ausztria esetében magasabb értéket láthatunk. Franciaország továbbra is a legdominánsabb földrajzi szempontból és ahogy előbb említettem, Németországot is felülmúlta társadalmi szempontból. Ausztria viszont a társadalmi gráf esetében átvette a vezetést és politikai erősségét is megtartotta. Magyarországról továbbra is elmondható, hogy egységesen és konzisztensen teljesített minden kategóriában és a hozzá hasonló országokkal közel azonos mutatókat eredményezett. Ebben a táblázatban két különböző országot mindenképpen meg szeretnék említeni, nevezetesen Olaszországot és Svédországot. Olaszország már a 3. és 4. táblázatokban is kiemelkedően jó eredményeket ért el és most sem történt ez másképp. Több szempontból is közelíti Franciaországot és Németországot is, azonban a politika nagyon megosztó faktor több szemszögből is. Egyrészt az előző táblázat esetében Franciaországhoz nagyon közel állt, azonban most a domináns országok (Németország és Franciaország) és a kisebb, gyengébb országok (pl.: Magyarország, Csehország) között helyezkedik el nagyjából félúton. Ez a politikai gyengeség már a gráf esetében is látszódott, hogy valamelyik táblázatban majd meg fog mutatkozni, hiszen

5. táblázat. Myerson- és Shapley-értékek eredményei

	Politikai	Gazdasági	Társadalmi	Földrajzi	Kulturális	Vallásos	Shapley
Austria	0,0848	0,0247	0,0999	0,0264	0,0282	0,0260	0,0257
Belgium	0,0314	0,0300	0,0796	0,0308	0,0491	0,0316	0,0313
Bulgaria	0,0232	0,0207	0,0047	0,0255	0,0115	0,0362	0,023
Croatia	0,0161	0,0170	0,0340	0,0166	0,0135	0,0162	0,0161
Cyprus	0,0080	0,0126	0,0194	0,0038	0,0059	0,0021	0,008
Czechia	0,0287	0,0281	0,0243	0,0291	0,0086	0,0288	0,0285
Denmark	0,0188	0,0181	0,0140	0,0200	0,0165	0,0188	0,0188
Estonia	0,0093	0,0096	0,0104	0,0089	0,0150	0,0099	0,0093
Finland	0,0188	0,0181	0,0140	0,0175	0,0131	0,0188	0,0188
France	0,1165	0,1140	0,0979	0,1792	0,1158	0,1182	0,1172
Germany	0,1462	0,1418	0,0940	0,1422	0,1650	0,1494	0,1472
Greece	0,0286	0,0285	0,0259	0,0309	0,0210	0,0074	0,0285
Hungary	0,0284	0,0291	0,0212	0,0285	0,0283	0,0288	0,0285
Ireland	0,0174	0,0207	0,0112	0,0162	0,0614	0,0176	0,0175
Italy	0,0560	0,1150	0,0921	0,1132	0,0999	0,1131	0,1122
Latvia	0,0109	0,0111	0,0110	0,0107	0,0092	0,0486	0,0107
Lithuania	0,0149	0,0150	0,0222	0,0155	0,0085	0,0149	0,0148
Luxembourg	0,0080	0,0038	0,0284	0,0093	0,0092	0,0081	0,008
Malta	0,0079	0,0124	0,0098	0,0059	0,0056	0,0081	0,008
Netherlands	0,0368	0,0355	0,0259	0,0361	0,0325	0,0379	0,037
Poland	0,0732	0,0725	0,0712	0,0728	0,0644	0,0744	0,0738
Portugal	0,0284	0,0281	0,0241	0,0059	0,0270	0,0288	0,0285
Romania	0,0454	0,0445	0,0224	0,0474	0,0552	0,0118	0,0456
Slovakia	0,0190	0,0192	0,0169	0,0195	0,0207	0,0190	0,0188
Slovenia	0,0107	0,0142	0,0312	0,0117	0,0089	0,0108	0,0107
Spain	0,0841	0,0882	0,0739	0,0493	0,0774	0,0854	0,0847
Sweden	0,0287	0,0274	0,0204	0,0269	0,0287	0,0293	0,0285

Forrás: saját szerkesztés

Olaszország nagyon kilógott és ő rendelkezett a legkisebb fokszámmal a minimálisan összefüggő gráfban. Ezenkívül Svédországot társadalmi gyengesége miatt emelném ki, amely az általános ismertséggel és a józan ésszel is szembe megy valamilyen szinten, hiszen a Skandináv államok arról híresek, hogy nincsenek számottevő társadalmi különbségek és magas az életszínvonal mellett az oktatás színvonala is, amelyek mind részei a GNI mellett a társadalmi gráfot jellemző HDI mutatónak. Végül két, már a gráfokról is jól azonosítható eredményt emelnék ki. Az egyik Luxemburg gyengesége gazdaságilag, amely remek példa arra, hogy a gráfban való részvétel csökkentheti is egy adott ország erejét. Luxemburg volt az az ország a gazdasági gráfban, amely nagyon kilógott a magas egy főre jutó GDP értékének köszönhetően és emiatt kellett az adatok természetes alapú logaritmusát venni. Azonban még ez a pozitív monoton transzformáció is csak részben tudta csökkenteni a kilengést, amelyet, mint outlier okozott Luxemburg. Az adatokból látható, hogy önmagában Luxemburg a legerősebb gazdaságilag, azonban a gráfokon megszorított játékokban a fokszáma neki lett a minimum 1, ugyanis euklideszi távolsága még mindig nagy volt a töb-

bi országéhoz képest, tehát nem voltak eléggé hasonlóak. Azonban a megszorítást követően igazolódott az, amely a gráfon már az eredmények elemzése előtt is látszott, miszerint Luxemburg a gráfban gyenge lesz. Utoljára pedig Portugália alacsony földrajzi befolyását szeretném megemlíteni, amely ezen két táblázat mellett már a gráfon megszorított játék reprezentációján is látszott. A standard Shapley-érték esetében elmondható, hogy a várakozásoknak megfelelően teljesített, tehát a domináns országok erősségét, illetve a kisebb országok elmaradottságát kiválóan reprezentálja.

6. táblázat. Megszorított Banzhaf- és Banzhaf-értékek eredményei

	Politikai	Gazdasági	Társadalmi	Földrajzi	Kulturális	Vallásos	Banzhaf
Austria	0,2459	0,0762	0,2423	0,0723	0,0771	0,0759	0,0790
Belgium	0,0941	0,0923	0,1888	0,0842	0,1330	0,0918	0,0957
Bulgaria	0,0698	0,0642	0,0111	0,0689	0,0332	0,0978	0,0707
Croatia	0,0488	0,0528	0,0829	0,0458	0,0392	0,0478	0,0498
Cyprus	0,0245	0,0376	0,0534	0,01	0,0173	0,0062	0,0249
Czechia	0,0860	0,0858	0,0663	0,0797	0,0254	0,0840	0,0874
Denmark	0,0568	0,0560	0,0421	0,0559	0,0478	0,0553	0,0581
Estonia	0,0284	0,0295	0,0300	0,0247	0,0433	0,0293	0,0291
Finland	0,0568	0,0560	0,0421	0,048	0,0377	0,0553	0,0581
France	0,3405	0,3394	0,2555	0,4671	0,3195	0,3304	0,3488
Germany	0,4306	0,4290	0,2673	0,368	0,4586	0,4208	0,4436
Greece	0,0860	0,0869	0,0730	0,0819	0,0607	0,0218	0,0874
Hungary	0,0854	0,0895	0,0586	0,0778	0,0782	0,0840	0,0874
Ireland	0,0528	0,0640	0,0331	0,0444	0,1657	0,0518	0,0540
Italy	0,1668	0,3431	0,2436	0,2999	0,2780	0,3163	0,3339
Latvia	0,0330	0,0340	0,0315	0,0297	0,0269	0,1308	0,0332
Lithuania	0,0452	0,0460	0,0606	0,0432	0,0243	0,0438	0,0457
Luxembourg	0,0243	0,0120	0,0718	0,0256	0,0256	0,0239	0,0249
Malta	0,0242	0,0371	0,0276	0,0161	0,0162	0,0239	0,0249
Netherlands	0,1100	0,1086	0,0765	0,0982	0,0928	0,1100	0,1126
Poland	0,2164	0,2191	0,1921	0,1953	0,1807	0,2085	0,2218
Portugal	0,0855	0,0858	0,0673	0,0183	0,0764	0,0840	0,0874
Romania	0,1349	0,1358	0,0531	0,1268	0,1453	0,0344	0,1379
Slovakia	0,0574	0,0586	0,0480	0,0538	0,0614	0,0558	0,0581
Slovenia	0,0326	0,0434	0,0792	0,0326	0,0261	0,0319	0,0332
Spain	0,2463	0,2630	0,1921	0,1464	0,2149	0,2397	0,2526
Sweden	0,0860	0,0842	0,0605	0,0732	0,0823	0,0855	0,0874

Forrás: saját szerkesztés

Végül, a 6. táblázatban látható a megszorított Banzhaf-érték, amely a gráfokon alkalmazott megszorítás következményeként létrejövő Banzhaf-érték, illetve a megszorítás nélküli, standard Banzhaf-érték. A táblázat eredményeiből leolvasható, hogy az eddigiekkel konzisztensen Németország szinte minden kategóriában a legerősebbnek bizonyult, míg a földrajzi gráfban, amely a kivételt képezte Franciaország nyert. Magyarország az összes esetben nagyjából hasonló teljesítményt produkált, egyedül a társadalmi gráfban volt gyengébb, amely a többi országhoz viszonyított közepes HDI mutatója mellett a

gráfban betöltött átlagos szerepének köszönhető, ugyanis látható, hogy a gráfban nem tölt be sem *bridge*, sem központi szerepet és önmagában, a gráf nélkül sem kifejezetten erős. Most pedig néhány egyéb ország esetében elemeznék bizonyos gráfokban elfoglalt szerepeket és erőviszonyokat, amelyeket érdekesnek vagy említésre méltónak gondolok. Az előző táblázatokhoz hasonlóan a gazdasági gráfon megszorított játékban Luxemburg jelentéktelennek bizonyult annak ellenére, hogy gráfok nélkül, abszolút és relatív esetben is ő volt a legjelentősebb. Emellett Bulgária társadalmi gyengesége trendszerűen folytatódik, ugyanis az ezt megelőző két táblázatban is alacsony erővel bírt e tekintetben. Ezenkívül kiemelném Ciprus gyengeségét vallási tekintetben, amely a minimálisan összefüggő gráf ábrázolása-kor már sejthető volt bizonyos mértékben, ugyanis Ciprus a Görögország-Románia-Ciprus hármas tagja, amely az ortodox irányzat alacsony európai elterjedtségének köszönhetően alacsony fokszámú, szinte izolált koalíciót eredményez, amelyet Bulgária köt össze Európa többi részével. Könnyen belátható, hogy az Ortodox hármas másik két tagja is hasonlóan kismértékű szavazóerővel rendelkezik a vallási gráfban. Ezentúl Csehország kulturális szempontból alulteljesített a többi gráfhoz képest. Ez alátámasztja azt a feltevésünket, amelyet a kulturális gráf elemzésekor is sejtettünk, nevezetesen azt, hogy Csehország kismértékű, nem szignifikáns szavazóerővel rendelkezik ilyen szempontból. Ezt jól bizonyítja az a tény, hogy Csehország fokszáma 1 ebben a gráfban és szinte outlier szerepet tölt be. Befejezőképpen pedig megemlíteném Észtországot, amely minden esetben hasonló, ám gyenge szavazóerőt reprezentált. A kulturális érték, mint sormaximum a Balti államok földrajzi közelségéből eredő nyelvhasználattal magyarázható.

4. Összefoglalás

Ebben a fejezetben szeretném újra kihangsúlyozni kutatásom módszertani fontosságát, majd néhány szignifikáns eredményt újra kiemelek. Ezenfelül szeretnék néhány alternatívát felvázolni a felhasznált módszertan kapcsán, amelyet érdemes lehet egy későbbi kutatás során kipróbálni és alkalmazni.

Dolgozatomban az Európai Unió tagállamainak szavazóerejét, illetve azoknak változását vizsgáltam a szakirodalomban elterjedt módszerek (Shapley- és Banzhaf-értékek), illetve nem standard, de a gráfok bevonásával használt (Myerson- és megszorított Banzhaf-érték, ACC) mutatók segítségével. Ehhez az alábbi módszertani lépések útján kiszámolt eredmények segítettek hozzá. Először hat különböző szempont (politikai, gazdasági, társadalmi, földrajzi, kulturális és vallási) alapján adatokat gyűjtöttem a tagállamokról és vektorokba rendeztem őket. Ezen vektorok alapján euklideszi távolságot számolva megvizsgáltam az országok közötti távolságokat. Ezután a távolságokat felhasználva kerestem egy olyan küszöbértéket (*cutoff* érték), amely esetében, ha csak azokat az országokat kötöm össze, amelyek közötti távolság ennél kisebb, akkor az így kapott gráf még éppen összefüggő. Ezen érték csökkentésével már nem összefüggő gráfot kaptam volna. Majd az így kialakult gráfokon a szavazási játékokat megszorítottam két szempont alapján, miszerint a súlyvektor a tagországok Európai Parlamentben elfoglalt képviselőségeinek száma volt és az elérni kívánt kvóta pedig 50% volt. Végül ezen gráfokon megszorított játékokra kiszámoltam a korábban említett Shapley- és Banzhaf-értékeket, illetve a Myerson-értéket, a megszorított Banzhaf-értéket és az átlagos összefüggő hozzájárulási értéket (ACC).

Újfént szeretném kiemelni a szavazóerők vizsgálatára alkotott modellem fontosságát. A dolgozatomban egyik fő eredménye ez a modell, amely bizonyos inputok és matematikai alapvetések feltevése mellett megmutatja a különböző tagországok jelentőségét általánosságban, azaz a gráfok nélküli esetben, illetve a gráfokon megszorított játékok esetében is az egyes országokra nézve. Emellett választ ad a kapott eredményekre is, például arra, hogy bizonyos országok esetében az adott gráfban vagy szavazási koalícióban való részvétel miért jelent előnyt vagy éppen hátrányt. Láthattuk, hogy bizonyos, gráf nélkül domináns országok (pl.: Luxemburg gazdasági szempontból) gráfokon megszorított játékok esetében elgyengülhetnek. Míg ennek ellentettje is teljesül, miszerint alaphoz képest kevésbé fontos és erős országok (pl.: Bulgária a vallási gráfban) kiemelkedő szerepet kaptak a gráfokban vagy azért, mert ők tették nyerővé a gráf miatt több koalíciót vagy mint Bulgária esetében ők voltak a *bridge*, azaz híd játékosok, amelyek két olyan koalíciót kötöttek össze, akik egyébként nagy távolságuk vagy eltérő nézeteik miatt egyébként soha nem tudtak volna együtt szavazni. Emellett könnyen belátható, hogy vannak bizonyos, általánosságban szinte minden kategóriában erős országok (pl.: Németország vagy Franciaország), akik gráf nélkül is erősek, illetve a gráfok által okozott megszorítás sem különösebben érinti őket és változtatja meg az erőviszonyokat. Tehát kutatásom fő eredménye ez a modell, amelynek paraméterei változtathatók, tehát szinte végtelen sok megoldást és eredményt lehet

vele reprezentálni a megadott módszertan alapján. Szerintem a fő eredmény maga a modell létrejötte és működőképessége elméletben és gyakorlatban. Emellett a jelen esetben felhasznált adatok alapján kiszámolt konkrét számok és eredmények csak egy töredékét képezik az eredménynek, hiszen ez csak egy a sok variáció közül, amellyel használni lehet a modellt. Változtatható például a gráfokon megszorított játékok esetében használt w súlyvektor, amely jelen esetben az Európai Parlament képviselőinek száma volt országonként. Ehelyett bármilyen másik, hasonló szavazási rendszerrel működő intézményre meg lehet vizsgálni az eredményeket, például az Európai Unió Tanácsára, ahol minden országnak egy képviselője van, illetve az országok közötti méretbeli különbségeket egy lakossággal arányos többségi szavazási rendszerrel korrigálják (Petróczy et al., 2022).

Ezenfelül a *cutoff* érték meghatározásának módszertana, ezáltal a gráfok kialakítása is változtatható. Én azért használtam a minimálisan összefüggő gráf alapján számolt *cutoff* értéket, mert akkor biztosan lesz nyerő koalíció (nagykoalíció) a szavazási játékban. Mindazonáltal a fentebb említett, kicsit véletlenszerűbb ötlet is megfelelő lehet, amikor egy adott mutatóhoz vagy annak valamilyen (pl.: statisztikai) eszközökkel számolt értékéhez kötjük. Erre jó példa lehet az egy főre jutó GDP mediánja vagy egyéb gazdasági, esetleg társadalmi mutató. A gráfok kialakításának módszeréhez még hozzátenném, hogy a szakirodalomban létezik egy lehetséges alternatíva (Skibski és Yokoo, 2017), amikor nem úgy alakítjuk ki a gráfot, hogy két ország össze van kötve vagy sem, tehát a gráfot reprezentáló összefüggőségi mátrix nem csupán 0 és 1 számok összessége, hanem a gráfok éleihez valószínűségeket rendelünk hozzá, ezáltal valószínűségeket reprezentáló gráfokat kapunk, amelyhez különböző matematikai eszközöket (pl.: eloszlások) felhasználva tudunk elemezni. Az X mátrixok inputjai, tehát az euklideszi távolságot tartalmazó gráfok csoportosítási szempontja és száma is változtatható. Elegendő lehet csupán kettő vagy három szempont alapján elkészíteni a gráfok összefüggőségi mátrixát, azonban lehet akár több szempontot is figyelembe venni. Itt megjegyezném, hogy az én esetemben is használt hat gráf már számítástechnikai korlátokba ütközött, hiszen az átlagos futási idő 3 nap volt a harmadik fejezetben táblázatos formában ismertetett eredmények esetén, ráadásul szükségem volt több számítógépre is a futási idő minimalizálása végett.

Hivatkozások

- Alonso-Mejide JM, Fiestras-Janeiro MG (2006) The Banzhaf value and communication situations. *Naval Research Logistics* 53(3):198–203
- Álvarez-Mozos M, Hellman Z, Winter E (2013) Spectrum value for coalitional games. *Games and Economic Behavior* 82:132–142
- Banzhaf JF (1965) Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. *Rutgers Law Review* 19:317–343
- Bloch F, Jackson MO, Tebaldi P (2017) Centrality measures in networks. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2749124> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2749124>
- Fiala T (2010) Kombinatorikus optimalizálás
- Forgó F, Pintér M, Simonovits A, Solymosi T (2005) Játékelmélet (Elektronikus jegyzet)
- Koshevoy G, Talman AJJ (2014) Solution concepts for games with general coalition structures. *Mathematical Social Sciences* 68:19–30
- Mágó ML (2018) Power Values and Framing in Game Theory. CentER Dissertation Series, Tilburg University, Tilburg
- Myerson RB (1977) Graphs and cooperation in games. *Mathematics of Operations Research* 2:225–229
- Owen G (1986) Values of graph-restricted games. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* 7:210–220
- Petróczy DG, Rogers MF, Kóczy LÁ (2022) Exits from the european union and their effect on power distribution in the council. *Games* 13(1):18
- Shapley LS (1953) A value for n -person games. In: Kuhn HW, Tucker AW (eds) *Contributions to the Theory of Games II*, *Annals of Mathematics Studies*, vol 28, Princeton University Press, Princeton, pp 307–317
- Skibski O, Yokoo M (2017) An algorithm for the Myerson value in probabilistic graphs with an application to weighted voting. *IEEE Intelligent Systems* 32(1):32–39