



Matematika a filmvászonon

BME Tudományos Diákköri Konferencia

Készítette: Bakos Máté Bálint
Váci Madách Imre Gimnázium

Témavezető: Dr. Molontay Roland, egyetemi docens,
BME Sztochasztika Tanszék

2023

Tartalomjegyzék

Absztrakt.....	4
1. Bevezetés.....	5
1.1 A dolgozat felépítése és célkitűzések	5
1.2 Irodalmi áttekintés.....	6
2. Matematikával foglalkozó filmek.....	8
3. Matematikusok filmbeli ábrázolása.....	11
3.1 A tehetség felkarolásának folyamata.....	16
3.2 A különö zseni karaktere.....	17
3.3 A kirajzolódó matematikuskép.....	18
4. Matematikai tartalom a filmekben.....	20
4.1 A matematika szerepe	20
4.2 Pontatlan matematika a filmekben.....	22
5. Két film részletes matematikai elemzése.....	25
5.1 Good Will Hunting.....	25
5.2 21-Las Vegas ostroma.....	33
6. Szakkörterv: “Matematika a filmvásznon”.....	36
6.1 Előzetes kérdőíves felmérés.....	37
6.2 Szakköri foglalkozások felépítése.....	39
7. Összefoglalás.....	42
8. Irodalomjegyzék.....	44
9.Függelékjegyzék.....	46

Absztrakt

A filmnézés napjainkban elterjedt szórakozási forma, mely egyre növekvő népszerűségnek örvend, amelyet a streaming-szolgáltatások elterjedése és a növekvő mozibevételek is mutatnak. A filmek által tematizált jelenségek, a különféle karakterábrázolások és narratív struktúrák komoly hatással lehetnek az emberek világnézetére és gondolkodásmódjára.

Dolgozatomban feltárom a matematika és a matematikusok filmbeli ábrázolásának sokszínűségét. Tizenhat olyan filmet vizsgállok, melyben a matematika vagy a matematikus lét központi szervező erőként jelenik meg. Matematikai alapossággal vizsgálom az ilyen filmek matematikai tartalmat szerepeltető jeleneteit, helyenként egy-egy pontatlanságra is rávilágítva. Külön hangsúlyt fektetek a matematikus karakterek filmbeli ábrázolására is, rávilágítva arra, hogy a matematikai tudomány művelőit gyakran művészileg stilizált módon ábrázolják, eltérően az akadémiai valóságtól.

Dolgozatom fontos része, hogy bemutatom azt, hogy ezen filmek hogyan használhatóak a középiskolai oktatásban. „Matematika a filmvásznon” címmel olyan szakkör-tervet készítek, amiben a filmjelenetek segítségével a diákok számára közelebb hozható nemcsak a matematikatörténet, de egy-egy mélyebb matematikai fogalom is könnyebben megérthetővé válik, továbbá megmutatom, hogy a filmjelenetek matematikai tartalma motivációként szolgálhat egy-egy nehezebb témakör vagy feladat bevezetéséhez is. A szakkör egyes elemeit saját középiskolám fakultációs tanóráin belül elő is adom.

1. Bevezetés

A matematika a hétköznapi emberek számára sokszor nehezen érthető, meglehetősen rejtélyes tudomány, ami éppen ezért elég sokszor jelenik meg művészeti alkotásokban (könyvekben, filmekben), illetve a populáris médiában is - bár általában csak "díszletként". A filmekben például előszeretettel használják a matematikai tartalmakat: rejtélyes képletek és számítások jelennek meg különböző jelenetekben. Sőt a már-már misztikusnak tűnő munkát végző matematikusok is egyre gyakrabban jelennek meg a filmvásznon érdekes munkájuk és személyiségük miatt. Nagyon sok ember számára - személyes tapasztalat híján - ezek a filmek formálják, hogy milyen matematika- és matematikuskép alakul ki bennük. A különböző streaming-szolgáltatások elterjedésével a nézők pedig még könnyebben hozzá tudnak férni a filmes tartalmakhoz. Fontos tehát, hogy jobb megértésünk legyen a filmekben megjelenő matematikai tartalmakról és filmek matematikusábrázolásáról.

A filmekben megjelenő tartalom az oktatásban is nagy segítség lehet, a mozgókép segítségével sokszor könnyebb megérteni bonyolultabb témákat, illetve a filmes matematikai vonatkozásokat kellő motivációt is jelenthetnek a tanulók számára egy-egy matematikai fogalommal való megismerkedéshez. A filmes referenciák szórakoztatóbbá tehetik a tanulás folyamatát, a filmjelenetek segítségével pedig könnyebben bele tudjuk élni magunkat egy adott szituációba, könnyebben meg tudjuk érteni egy adott probléma jelentőségét.

1.1 A dolgozat felépítése és célkitűzések

A kutatás folyamán előtérbe helyeztem a populáris kultúrában megjelenő és nagy közönség előtt bemutatott filmeket. Ezek azok, amik igazán közismertek a társadalomban, és érdemes a bennük szereplő matematikai tartalmat átnézni. A dolgozat tárgyát tehát nem képezik a dokumentumfilmek vagy kifejezetten a matematika oktatása céljából készített oktatóvideók sem.

A második fejezetben áttekintést adok a dolgozatban feldolgozott filmekről. A filmeket különböző szempontok alapján vizsgálom és kategorizálom.

A harmadik fejezetben a feldolgozott filmekben szereplő különböző matematikus személyeket és karaktereket, illetve azok filmbeli viselkedését elemzem és kategorizálom több szempont alapján.

A negyedik fejezetben mutatom be a filmekben megjelenő konkrét matematikai tartalmat, és elemzem azok filmbeli szerepét. Külön hangsúlyt fektetek az eredeti angol

szöveg és a magyar szinkronos változat eltéréseire és rámutatok néhány matematikai hibára és félrefordításra is.

Az ötödik fejezetben két meglehetősen különböző filmet alaposabban is megvizsgálók matematikai szempontból. Ez a két film a *Good Will Hunting* és a *21-Las Vegas* ostroma.

A hatodik fejezetben egy általam kidolgozott szakkörterv segítségével azt mutatom meg, hogy a filmekben megjelenő matematikai tartalmak hogyan használhatóak fel a középiskolai oktatásban.

A hetedik fejezetben röviden összefoglalom az elvégzett munkát, és rámutatok a legfontosabb eredményekre.

A dolgozat az alábbi kérdésekre keresi a választ:

A: Hogyan és miért jelenik meg a matematika a filmekben? Milyen szerepe van a matematikának a filmek cselekményében?

B: Milyen módon ábrázolják a matematikusokat a filmekben? Milyen sztereotípiákra erősítenek rá a filmek?

C: Mennyire hitelesek a filmek matematikai tartalma szóban és írásban? Azonosíthatóak-e matematikai pontatlanságok?

D: Hogyan és milyen sikerrel alkalmazhatók a populáris kultúrában ismert filmek a középiskolai matematikaoktatásban?

1.2 Irodalmi áttekintés

A filmek matematikai tartalmának elemzése és a matematikaoktatásban való felhasználhatóságuk vizsgálata nem újkeletű, számos hazai és nemzetközi forrás vette górcső alá a filmek matematika- és matematikus ábrázolását. Már az 1950-es évek végén is felismerték a televíziók és filmek oktatásban való alkalmazásának jelentőségét [10]. A televíziózás, majd később a streaming-szolgáltatók térnyerésével pedig azóta még szélesebb társadalmi rétegek tudnak filmeket, videós tartalmakat fogyasztani, ami még inkább időszerűvé tette, hogy átfogó képet kapjunk arról, hogyan ábrázolják a matematikát és a matematikusokat a filmvászonon. Ennek a témakörnek a fontosságát igazolja még egy Erasmus+ program is [11], amiben a matematikát a filmek segítségével hozták közelebb a tanulókhoz.

Magyar nyelvű dolgozatok is foglalkoznak matematika és a filmek kapcsolatával. Legfőképpen ki kell emelni Korándi József doktori disszertációját [1], a disszertációjához kapcsolódó 2013-as munkáját [2] és egy már angol nyelvű kutatást amiben társszerzőként volt jelen [7]. Ezek a kutatások legfőképpen a *Good Will Hunting*

című film köré összpontosulnak, amit majd részletesen a 5.1.-es alfejezetben én is megvizsgállok. Ezenkívül az 5.2.-es alfejezetnél részletezem a *21-Las Vegas* filmet és a benne szereplő Monty Hall-paradoxont, amihez nagy segítségemre volt Kőhalmi Krisztina munkája [6].

A filmek matematikai tartalmának felkutatását felgyorsították a különböző matematikai filmeket listázó toplisták [3, 15, 16] és cikkek [8, 19]. Filmbeli matematikusok megítéléséről és Korándi József munkásságáról számol be Mécs Anna egy blogbejegyzés keretein belül [14]. Mérő László is értekezik a filmbeli matematikáról és főleg annak “giccsességét” hangsúlyozza [12]. Latterel és Wilson a matematikusok populáris médiában való megítélését veszi górcső alá, és bár megállapításuk szerint felülreprezentáltak a társadalomba nehezen beilleszkedő, furcsa, örült és zseni matematikus karakterek, de a kép ennél árnyaltabb [13].

A két legnagyobb adatbázist matematikai tartalmú filmekről az MMDB [5] és a Harvard University [4] készítette. A Harvard adatbázisában már 2006 óta folyamatosan gyűjtik a filmek matematikával foglalkozó jeleneteit. Az oldalt is azzal az ötlettel hozták létre, hogy az itt található filmjeleneteket fel lehessen használni tanítási célból, akár prezentációkhoz. Az itt található angol nyelvű filmjeleneteket összevetve a magyar szinkronnal sikerült több esetben is kiszűrni a félrefordításokat, amiről majd a 4.2-es fejezetben részletesen beszámolok. Ezeknek a hibáknak a kiszűrésében segített még a The Internet Movie Script Database (röviden IMSDb) nevezetű weboldal, ahol megtekinthettem az eredeti forgatókönyveket, így az eredeti szövegeket is [20]. A filmek felépítésének elemzésében a forgatókönyv gyűjteményen kívül a Pannonscript weboldala vált hasznossá [18].

2 Matematikával foglalkozó filmek

A feldolgozott filmek meglehetősen különbözőek, más a műfajuk, más a cselekményük, de összeköti őket, hogy valamilyen módon mindegyikben - bár különböző mértékben, de - hangsúlyos szerepet kap a matematika. Bár a matematikai témájú filmeket listázó adatbázisok több száz filmet listáznak [4, 5], ezek között vannak olyan filmek is, ahol csupán néhány matematikai képlet húzódik meg a háttérben egy krétás táblára felvázolva. A kutatásban mi azokat a filmeket helyeztük előtérbe, amelyekben van elgondolkodtató (nem triviális) matematikai tartalom, vagy ahol a cselekmény alakításában részt vesz legalább egy matematikával rendszeresen foglalkozó személy. Tizenhat filmet választottunk ki a kutatás tárgyának (1. táblázat), ezeket a filmeket néztem végig, és elemeztem ki matematikai szempontból. A továbbiakban amikor a matematikai tartalmú film kifejezést használom, akkor erre az 1. táblázatban szereplő tizenhat filmre utalok.

Film címe (magyar)	Film címe (angol)	Rendező(k) nevei	Megjelenés dátuma
Mutasd meg, ki vagy	Stand and Deliver	Ramón Menéndez	1988
A Moebius-metró	Moebius	Gustavo Mosquera	1996
A kocka	Cube	Vincenzo Natali	1997
Good Will Hunting	Good Will Hunting	Gus Van Sant	1997
Pi	Pi	Darren Aronofsky	1998
A bank	The Bank	Robert Connolly	2001
Egy csodálatos elme	A Beautiful Mind	Ron Howard	2001
Bizonyítás	Proof	John Madden	2005
Fermat szobája	Fermat's Room	Luis Piedrahita, Rodrigo Sopeña	2007
21 - Las Vegas ostroma	21	Robert Luketic	2008
Pénzcsináló	Moneyball	Bennett Miller	2011
X+Y	X+Y	Morgan Matthews	2014
Kódjátzsma	The Imitation Game	Morten Tyldum	2014
Az ember, aki ismerte a végtelent	The Man Who Knew Infinity	Matt Brown	2015
A számolás joga	Hidden Figures	Theodore Melfi	2016
A tehetség	Gifted	Marc Webb	2017

1. táblázat: A kutatás során feldolgozott filmek adatai: a film magyar és angol címe, rendezők neve, megjelenés éve.

A listán szereplő filmek túlnyomó többségben a dráma műfajába sorolhatóak be, de találunk három thrillert is: *Pi*, *A bank* és a *Fermat szobája*. Talán meglepő módon még egy horrorfilm is rendelkezhet komoly matematikai tartalommal: az 1997-es *Kocka*, ami sikere után több folytatást és egy koreai feldolgozást is kapott ugyanazzal a névvel. A listán szerepel egy sci-fi is: *A Moebius-metró*.

A filmek cselekménye az esetek felében valós történetet dolgozott fel vagy valós esemény inspirálta. A valós eseményeket feldolgozó filmekben a matematikus karakter rendszerint a film főszereplője, ami azt mutatja, hogy sok matematikus kalandos élete kívánczik filmvászonra. A feldolgozott filmek másik csoportjának szervező ereje, hogy a cselekmény egy matematikai bizonyítás utáni hajsza vagy egy komoly matematikai probléma megoldásával kapcsolatos erőfeszítés körül összpontosul (pl.: *Pi*, *Bizonyítás*, *Fermat szobája*, *A tehetség*), míg a *Good Will Hunting* című filmben a matematikai problémamegoldás inkább csak mellékszál, nem a cselekmény fő szervező ereje.

3 Matematikusok filmbeli ábrázolása

A kutatás során vizsgált filmek mindegyikében fő- vagy mellékszereplőként megjelennek matematikusok, a vizsgált 16 filmben összesen 29 matematikus karaktert azonosítottam, a karakterek jellemzéséről ad összefoglalást a 2. táblázat. Fontos megjegyezni, hogy a feldolgozott filmek matematikusai túlnyomó többségben külföldiek. Ez egyrészt nem meglepő, hiszen egy közepes matematikus élete kevésbé kívánczik filmvászonra, ugyanakkor az ilyen ábrázolásmód tovább erősítheti a társadalomban meglévő matematikusokkal kapcsolatos sztereotípiákat. Nem nagyon találhatunk olyan filmet, ahol a filmbeli karakter egy átlagos matematikus, pedig szakmájukban nem kiemelkedő fogorvosokról, ügyvédekről, divattervezőkről, paleontológusokról, séfekekről, reklámszakemberekről, színészekről vagy masszőrökről szólnak filmek vagy sorozatok (az utóbbi hat foglalkozás a *Jóbarátok* című sorozat hat főszereplőjének szakmája). Ez a megállapításunk összhangban van Latterrel és Wilson vonatkozó munkájával is [13].

A filmekben szereplő matematikusok a világ legjobb egyetemeire (pl.: Cambridge, Columbia, Chicago, Princeton, MIT) jártak vagy akár ott tanítanak [17]. A valós eseményeket feldolgozó filmeknél ez teljesen érthető, hiszen Srínivász Rámánudzsán tényleg a Cambridge-i Egyetemen kutatót évekig, John Nash valóban a Princeton Egyetemen doktorált, a *21 - Las Vegas ostroma* cselekményét pedig valóban az MIT hallgatóiból álló Blackjack Team inspirálta. Érdekesebb ugyanakkor, hogy a filmek fikatív matematikusai is mind a legnevesebb egyetemeken tanulnak vagy dolgoznak: a *Pi* főszereplője (Max Cohen) a Columbián végzett, és rendszeren játszik go játékot régi professzorával, Will Huntingot az MIT-n veszi szárnyai alá Lambeau professzor, a *Bizonyításban* Robert Llewellyn a Chicagói Egyetem professzora.

Alapadat				Viselkedés jellemzése										
Név	Film	Valós személy	Státusza	Furcsa viselkedés	Betegsége	Emberekkel való kapcsolat	Legfelső végzettség	Kiemelkedő tulajdonságok :	Használt matematikai elemek	Zseni-e?	Mély kapcsolat valakivel?	Hobbi/szabadidő	Kapcsolata a matekkal	A sorsa,vagy végkifejlete a filmben
Max	Pí	Nem	Fő	Őrült egy időre	Van .Néha fejfájás roham (vakulás óta)	Zárkózott	Columbia	Fejszámolás, világ megfigyelése, időpontok megjegyzése és események dokumentálása ("9 13: megjegyzés...")	Számelmélet, geometria	Igen	-	Go játék	Munka	Elveszti tudását
Peter	Pénzcsináló	Nem	Mellék	-	-	Vegyes	Yale egyetem, közgazdaság	Jó fejszámoló	Statisztika, valószínűség számítás	Nem	?	?	Munka	A módszere elterjedt a baseball klubok között
Will Hunting	Good will hunting	Nem	Fő	Nehéz eset	Pszichés	Nyitott	?	Nehéz problémák gyors megoldása, jó memória, gyorsan tanul	Gráfelmélet, lineáris algebra,	Igen	Van barátja	Baseball, haverokkal elmenni	Kényszer	Elismeri tudását és hasznosítja
Lambeau prof.	Good will hunting	Nem	Mellék	-	-	Nyitott	Egyetemet el kellett végeznie	-	Gráfelmélet, mátrixok,	Talán	?	?	Munka	Nem tudja kihasználni Huntingot
Tom (a segéd)	Good will hunting	Nem	Mellék	-	-	Inkább zárkózott	Egyetemet el kellett végeznie	-	Gráfelmélet, mátrixok (a professzorral)	Nem érzékelhető	?	?	Munka	-

Nash	Egy csodálatos elme	Igen (John Forbes Nash)	Fő	Őrült	Skizofrénia	Zárkózott	Princeton	Szabályok megfigyelése a környezetben, vagy mintaké	Nem kooperációs játék elmélet	Igen	Van feleség	-	Munka,kényszer	Közgazdasági nobel
Mary	A tehetség	Nem	Fő	-	-	Nyitott	Még nem végzett el semmit (7 éves)	Jó fejszámoló	-	Igen	-	Bármilyen gyerekjáték	Élvezi,még nem munka	Floridában egyetemre jár,a nevelője maradt ugyanaz
Nathan	X+Y	Nem	Fő	-	Autizmus	Enyhén zárkózott	Még gimnazista	Jó problémamegoldó	Versenyzeladatok	Igen	Van szerelem	Csillagászat,régen vonatok,matek	Élvezi,de később kényszer	Elszökik szerelmével
Zhang Mei	X+Y	Nem	Mellék	-	-	Nyitott	Még gimnazista	-	Versenyzeladatok	Talán	Van szerelem	?	Kényszer	Elszökik szerelmével
Mr.Humphreys(a fiú felkészítője)	X+Y	Nem	Mellék	-	Szklerózis multiplex	Nyitott	Egyetemet el kellett végeznie	Unortodox tanítási módszer	Versenyzeladatok	Nem	Van szerelem	Pókerezett laptopon	Munka	-
Richard (olimpiai csapat vezető)	X+Y	Nem	Mellék	-	-	Nyitott	Egyetemet el kellett végeznie	-	Versenyzeladatok	Nem	?	?	Munka	-
Ben	21 Las Vegas ostroma	Valós történet	Fő	-	-	Nyitott	Még egyetemista	Gyors betanulás,pro bémák gyors megoldása(M onty hall),fontos infók memorizálása	Valószínűségi számítás,statisztika	Igen	Van szerelem	Haverokkal elmenni, robotika(2.09)	Jó benne,munka	Valószínűleg megkapta az ösztöndíjat
Micky Rosa prof.	22 Las Vegas ostroma	Valós történet	Mellék	-	-	Nyitott	Egyetemet el kellett végeznie	-	Valószínűségi számítás,statisztika	Talán	?	?	Munka	A Las Vegasai hatóságok elkapták
Catherine	Bizonyítás	Nem	Fő	Nehéz eset	Depresszió apja halála után	Vegyes	Egyetemi tanulmányait félre kellett tennie	-	Nincs egyértelműen meghatározva	Igen	Van szerelem	-	Jó benne	Homályos végkifejlet(lehet maradt az egyetem környékén,lehet hogy a munkája híressé tette,lehet elment NY-ba)

Robert	Bizonyítás	Nem	Fő	Őrült	-	Inkább nyitott	Egyetemet el kellett végeznie	Bármikor képes volt dolgozni (hiddegben,es te,kint)	Nincs egyértelműen meghatározva	Igen	Házasnak kellett lennie	?	Munka	Meghal még a film elején
"Galois"	Fermat szobája	Nem	Fő	-	-	Nyitott	Egyetemen tanul	-	Goldbach sejtés,fejtörők	Nem	Igen	-	Egyetemi elfoglaltság	Kiszabadul
"Olivia"	Fermat szobája	Nem	Fő	-	-	Nyitott	?	-	fejtörők	Nem	Igen	Tud zongorázni	Jó benne	Kiszabadul
"Hilbert"	Fermat szobája	Nem	Fő	Őrültnek számít	Nincs, de már tervezett öngyilkosságot	Nyitott	Az egyetemet el kellett végeznie,hogya ilyen témára tudott bizonyítást írni	-	Goldbach sejtés,fejtörők	Nem	Igen,volt	Sakkozik	Munka	Meghal
"Pascal"	Fermat szobája	Nem	Fő	-	-	Nyitott	?	-	Fejtörők	Nem	?	-	Jó benne	Kiszabadul
"Fermat"	Fermat szobája	Nem	Mellék	-	Talán memóriazavarok	Nyitott	?	-	-	Nem	?	-	Jó benne	Meghal
Alan Turing	Kódjatszma	Igen	Fő	-	-	Zárkózott	Egyetemet el kellett végeznie	Kiemelkedő megoldások találása	Kombinatorika ,számítógépek	Igen	Van	Rejtvényfejtés	Matematikus,oktató	Feltörte a kódot,de később öngyilkos lett
Escalante	Mutasd meg ki vagy	Igen	Fő	-	Kórházba kellett vinni,gengyere szervezet (sok munka miatt)	Nyitott	Egyetemet el kellett végeznie	Bármelyik diákot rá tudja venni a matek tanulásra	Algebra	Nem	Van feleség	-	Munka	Sikeresen népszerűsítette a matektanítást az iskolában ,egyre több diák tette le az amerikai matek "érettségit"
Jim (valódi név:Paul)	A bank	Nem	Fő	-	-	Nyitott	Egyetemet el kellett végeznie	-	Ökonometria, mandelbrot	Igen	Van barátnő	Tud sakkozni	Munka	Sikeresen csődbe viszi a bankot,ezzel bosszút állva

Katherine	A számolás joga	Igen	Fő	-	-	Nyitott	Középsuli (egyetem is valószínű)	Jó fejszámoló(összetett számokkal is)	Fizikán nagyobb a hangsúly	Igen	Van új férj	-	Munka,jó bene	Több ürprogramban is részt vett társaival
S.Rámánudzsán	Az ember,aki ismerte a végtelent	Igen	Fő	-	Volt,talán TBC	vegyes	Nincs (A film szerint)	Jó fejszámoló,világ megváltoztató ötletek	Számelmélet,partíciók	Igen	Van	-	Kiemelkedő benne	Betegségébe belehal,de munkáit megismerte a világ
Hardy	Az ember,aki ismerte a végtelent	Igen	Fő	-	-	Nyitott	Egyetemet el kellett végeznie	-	Számelmélet,partíciók	Nem	Nincs	Tenisz, sakktábla	Munka	Rámánudzsán befolyással lett rá
Littlewood	Az ember,aki ismerte a végtelent	Igen	Mellék	-	-	Nyitott	Egyetemet el kellett végeznie	-	?	Nem	?	Tenisz	Munka	Rámánudzsán hatalmas befolyással lett rá
Leaven	A kocka	Nem	Fő	-	-	Nyitott	Még diák	Képes volt hamar rájönni a számsorok jelentésére,jó fejszámoló	Számelmélet,prím számok	Igen	?	?	Tanulja	Halálát a kockán belül leli
Daniel	Moebius-metró	Nem	Fő	-	-	Nyitott	Egyetem	-	Topológia	Igen	?	?	Munka	Rájön az igazságra,de senki nem képes beismerni

2. táblázat: A feldolgozott filmekben szereplő matematikával foglalkozó karakterek néhány jellemzője

3.1 A tehetség felkarolásának folyamata

Több feldolgozott film közös jellemzője a fiatal matekzszeni karaktere. Tipikus példa itt *A tehetség* főszereplője Mary, vagy az *X+Y* film számos fiatal szereplője. Mindenféle nehézség nélkül old meg matematikai feladatokat, kiemelkedően jó fejszámoló és szabadidejében is olyan matematikai problémákon töri a fejét, amiről másnak csak több évnyi egyetemi tanulmány után van fogalma. Erre is csak úgy tekint, mint valami hobbi, ami szabadidőben jó kikapcsolódást jelent számára. Még nem számít matematikusnak, de fényes jövő áll előtte. A tehetséges fiatal elmét idővel felismerik tapasztalt szakemberek. A felismerés után odakerül olyan matematikusokhoz, akik értenek a fiatalokhoz, szárnyaik alá veszik a fiatal tehetséget, és mentorálják őket. Sokszor megjelenik a filmekben tehát a mentor-mentorált kapcsolatrendszer (pl. *Good Will Hunting*, *A tehetség*, *Az ember, aki ismerte a végtelent*, *21-Las Vegas ostroma*), ami nem áll távol a valóságtól. A matematikusoknál valóban kiemelt jelentősége van a személyes kapcsolatoknak és a mentor-mentorált viszonyrendszernek, a matematikusok általában büszkén számon tartják akadémiai felmenőiket (pl. Mathematics Genealogy Project [21]).

A matematikusok életében a valóságban és a filmekben is nagyon fontos tehát a tehetséggondozás. A valóságnak megfelel az, hogy a mentorok örömmel veszik szárnyaik alá a fiatal tehetségeket, sőt keresik azokat. Erre példa amikor a *Good Will Hunting*-ban Lambeau professzor pontosan a legtehetségesebb diákok kiszűrésére írt fel egy gráfelméleti problémát a "végtelen folyosó" táblájára. A *21-Las Vegas ostroma* című filmben szintén fontos elem a tehetség felkarolása, de itt Ben tehetségét nem a tételek megfejtéséhez használta ki Micky Rosa professzor, hanem pénzszerzésre. Fontos hangsúlyozni, hogy ez a pénzszerzés nem volt öncélú. A megszerzett pénz tette lehetővé Ben számára, hogy fedezze tanulmányait. Bár a filmek többségében a mentor-mentorált kapcsolat az egyetemeken bontakozik ki, aminek egyrészt dramaturgiai okai vannak, hisz az egyetem jobban kifejezei a tudományosságot, a felsőbb matematikai tudást, másrészt a valós történetek esetén adottság. Fontos hangsúlyozni azonban, hogy voltak filmek ahol középiskolai tanárok voltak a kiemelt mentori szerepben. Bár itt látszólag a tét kisebb, de a diákoknak rengeteget segített a tanárok munkássága a jövőbeli boldogulásukban. Ki lehetne emelni a *Mutasd meg, ki vagy* filmből Jaime Escalante munkáját, aki a látszólag átlagos diákokért mindent megtett iskolán kívül és belül is, azért hogy jobb életük legyen a továbbiakban. Az *X+Y* filmben Martin Humphreys, egy gimnáziumi tanár segít az enyhe autizmussal élő Nathannek, aki kifejezetten tehetségesnek bizonyult matematika terén. Martin több évnyi munkásságának eredménye lett hogy a fiú a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia döntőjébe is bejutott.

Az említett két film esetén a középiskolai mentorok hosszú távú hatását nem lehet tudni, mert erre a cselekmény nem tér ki, a gyerekek további jövőjéről nem esett szó. Nem úgy a *Számolás joga* című film esetén, ahol a film nyitójelenetében már kiderül, hogy a még kislány Katherine kiemelkedően tehetséges matematikában. A számok sorolása közben kiemeli a prímszámokat, unalmában sorolja a geometriai alakzatokat és az órán is

könnyűszerrel tudja megoldani tanár által feladott matek feladatokat úgy, hogy tisztán látható, hogy nála idősebbekkel tanulja együtt a matematikát. Bár a filmben konkrét név nem hangzik el a mentorral kapcsolatban, de az kiderül, hogy az egész tanári kar nagyon sokat tett a fiatal tehetség megfelelő oktatáshoz való juttatásához, például gyűjtést is szerveztek a tanárok a fiatal zseni továbbtanulásának megsegítésére. Ez a korai felismerés nagyban hozzájárult ahhoz, hogy végül Katherine afroamerikai nő léte a NASA-nál dolgozhasson az űrprogramban, és hogy végső soron elismerjék ő és társai munkásságát.

3.2. A külön zseni karaktere

A tehetség felkarolása mint szervező elem mellett egy másik fontos visszatérő elem a matematikai témájú filmek esetében a külön zseni karaktere. Több filmben megjelent egyfajta nézeteltérés a matematikus főszereplő és a környezetében lévő többi ember között. Sokszor a munkatársak, családtagok örülnek bélyegzik meg a matematikus főhőst, annak szokatlan viselkedése vagy furcsa gondolatai miatt. Sokszor kiközösítik, nem bíznak benne annyira, mint korábban. Az eleve zárkózott főszereplőt pedig ezzel több filmben is örületbe kergetnek. A legközismertebb példa erre az *Egy csodálatos elme* főszereplője, John Forbes Nash, aki a film megjelenése után vált igazán közismertté [13]. Nash kormány általi megbízatásáról nem beszélhet senkinek, ezt a titkot meg is tartja magának. Viszont a tudat, hogy csak ő tudja az igazságot a közvetlen környezetében, az rossz hatással van pszichológiai állapotára. Eleinte csak paranoia, majd skizofrénia alakul ki benne. Amikor elmondta az igazságot a munkájáról a feleségének, ő nem hitte el neki. Ezzel a lépéssel viszont tovább rontott a főszereplő sorsán. A *Pi* filmben a rendkívül zárkózott életet élő, pszichés zavarokkal küzdő Max Cohennek az állapota folyamatosan romlani kezdett, miután a professzorával nézeteltéréseik lettek Max munkájával kapcsolatban. Pszichés állapotát tovább rontotta, hogy ügynökök vagy a zsidó közösség tagjai keresték fel és találtak rá a legváratlanabb pillanatokban az utcán vagy éppen lakása előtt megjelenve.

Bár ahogy említettem, a matematikai témájú filmekben a matematikus szereplő többségében zseni, de akadnak azért a filmvásznon átlagosnak tűnő matematikával foglalkozó személyek is - elsősorban mellékszerepben. Lehet itt gondolni Peterre a *Pénzcsináló* filmből, vagy a *Good Will Hunting*-ből Tomra, aki Lambeau professzor segédje. Fontos lenne több átlagosnak mondható matematikus karakter filmbeli ábrázolása, egyrészt, hogy ne erősítsék a filmek a társadalomban a matematikusokról eleve meglévő "külön zseni" sztereotípiát, illetve hogy megmutassák, hogy nem csak a zseniknek való a matematikusi pálya.

Szerencsére akadnak olyan filmek is, ahol a matematikus főszereplők nyitottabbak, nincsenek folyamatos nézeteltérései a környezetével, a társadalomba probléma nélkül beilleszkednek. Ilyen filmek például a *Mutasd meg, ki vagy*, a *Moebius-metró* és a *Bank*.

Jaime Escalante-ról már esett szó korábban, ő egy valós személyiség, *Mutasd meg, ki vagy* főszereplője. Jamie egy átlagos életet élő középiskolai tanár, aki kreatívan tanítja a matematikát (annak ellenére hogy eredetileg informatikát jött tanítani az iskolába). Családjával egy amerikai kertvárosban él és a környék középiskolájában tanít. Nem mondható kifejezetten zseninek, inkább egy kreatív ember, aki szorgos munkájával segített a diákoknak [16].

A *Moebius-metró* főszereplője sem egy kifejezett zseni karakter, bár a megnemértettség egy fontos eleme személyiségének. Daniel topológusként dolgozik, és egy olyan elméletet dolgozott ki, ami magyarázatot adna a filmbeli problémára, ugyanakkor a környezete ezt nem ismeri el, ami konfliktushoz vezet a főhős és a mellékszereplők között.

A *Bank* című filmben a főszereplő nagy dolgot tett: bosszút állt egy teljes bankrendszeren. Viszont ez sem azért történhetett meg mert zseni volt, hanem mert el tudta hitetni a többiekkel, mennyire megbízható.

Fontos megemlíteni, hogy bár akadnak olyan példák, ahol a főhős nem zseni, de azért szakmájában kiemelkedő matematikus. Ráadásul ezek a filmek kisebb filmstúdiók által készített, kisebb költségvetésű, kevésbé ismert alkotások, így kevesebb emberhez is jutottak el, mint nagyköltségvetésű társaik.

3.3 A kirajzolódó matematikuskép

Felmerülhet a kérdés, hogy miért is fontos megfigyelni a matematikusok ábrázolását a filmekben. Elvégre a matematikus foglalkozás is ugyanolyan hivatás, mint bármelyik más szakma mégsem készülnek dolgozatok a könyvelők, az építészmérnökök vagy a biológusok filmbeli ábrázolásáról. Az hogy filmek milyen képet közvetítenek a matematikusokról meghatározó jelentőségű, hiszen a társadalom széles tömegei a filmekben keresztül kerülnek legközelebbi kapcsolatba matematikusokkal. A filmbeli ábrázolás különösen fontos, hiszen a vizuális információ jobban megmarad az agyban, mint az írott.

Milyen kép alakulhat ki a nézőben tehát a matematikusokról a kigyűjtött filmek alapján? Ahogy már korábban említettük szinte az összes filmben megjelent a főszereplő karakterében a szakmai kiválóság, sőt több, a zseni jellem életkortól és nemtől függetlenül. A nézőben tehát olyan gondolat fogalmazódhat meg a matematikusokról hogy ehhez a szakmához muszáj született tehetségnek lenni. Úgy tűnhet, ha nincs meg benne valakiben megfelelő tehetség, akkor ne is kezdjen bele a matematikába. Az sem teszi vonzóvá a matematikus létet, hogy több filmben a főszereplő vagy néhány mellékszereplő egyenesen beleőrül munkájába. A nézőben ez azt az érzetet kelti, hogy a matematikus életpálya növeli a pszichés zavarok, a megnemértettség, sőt a társadalomból való kivetettség kockázatát is. Ilyen filmek például a *Pi*, *Egy csodálatos elme* vagy éppen a *Bizonyítás*, amiben a nézők szembe mennek a gondolattal, hogy a matematika együtt él a matematikussal, akármennyire akarja vagy sem [9].

Van viszont oka a forgatókönyvíróknak hogy ilyen konkrét, gyakran negatív tulajdonságokat adnak a szereplőnek. A filmeknek a célja az emberek figyelmének lekötése és a szórakoztatás, ennek pedig eszköze a dramatizálás. A matematikus életpálya népszerűsítése szempontjából talán kevésbé szerencsés, de ha a főszereplő egy teljesen átlagos szereplő lenne, semmi különálló tulajdonsággal, akkor kevésbé lenne érdekes a film. John Nash életéről sem valószínű hogy készült volna könyv, majd film, hogyha nem lett volna skizofrén. Önmagában az 1994-es közgazdasági Nobel-díj elnyerése természetesen még nem elég Hollywood számára. Ez olyannyira igaz, hogy az 1994-es közgazdasági Nobel-díj másik két díjazottja, Reinhard Selten és Harsányi János neve el sem hangzik az *Egy csodálatos elme* című filmben. A film fináléjában egyedül ment fel a színpadra Nash a díj átvételéhez. Pozitívabb képet fest viszont a matematikusokról a szintén sok filmben megjelenő mentor-mentorált kapcsolat fontossága. A filmbeli matematikusok örömmel karolnak fel fiatal tehetségeket, segítik őket, hogy kibontakozhassanak. Érdekes, hogy bár sok filmben jelenik meg ez az elem, mégis talán kevésbé szivárgott le a társadalomba a matematikusoknak ez a fontos, és a valóságban is meglévő tulajdonsága.

4 Matematikai tartalom a filmekben

Az előző fejezetben a filmekben megjelenő matematikusokkal foglalkoztunk, most pedig az általuk üzött matematikát vesszük górcső alá. Az elemzett filmekben a matematika bár sokszor csak díszletként jelenik meg egy táblára felírt rejtélyes képlet vagy ábraként. Több filmben a cselekmény fő szervező ereje a matematikai gondolkodás, a főszereplő célja egy matematikai probléma megoldása. Ezzel a ténnyel indul be gyakran a cselekmény.

4.1 A matematika szerepe

Mivel a feldolgozott filmek népszerű közösségfilmek ezért természetesen a filmkészítőnek nem célja, hogy a bemutatott matematikát a néző megértse. Ebből a tényből következik, hogy ezekben a filmekben a matematika csak díszletként lehet jelen, mint a többi kellék. Az átlagos néző csak annyit lát hogy bonyolult dolgokról beszélnek a szereplők, és ez is a filmkészítők célja [12]. A néző beletörődik abba, hogy nem érti a problémát, és nézi tovább a filmet. Ez a “problémát nem értés” semmiben nem rontja a filmélményt. A nézők azon nagyon kis része, aki tanulmányai alatt már találkozott a megjelenő matematikai problémával sem szokta részletesen szemügyre venni a problémát, hisz tudja, hogy nem ez a film lényege. Tovább nézi a filmet, nehogy lemaradjon a cselekményről.

A matematika tehát ezekben a széles körben ismert filmekben csak dísz. Ez a jelenség már a filmek címében is fellelhető. Ha végignézzük a filmek listáján, több címen is megakadhat a szemünk: *A Moebius-metró*, *A kocka*, *Pi*, *Bizonyítás*, *Fermat szobája*, *21-Las Vegas ostroma*, *X+Y*, *Az ember, aki ismerte a végtelent*. Sőt, filmek poszterein is megjelennek már matematikai elemek díszként (1. ábra). Ezeknek a célja a figyelemfelkeltés, és az emberek érdeklődésének felkeltése. Ezzel megpróbálva a nézőket elcsábítani egy adott film vetítésére.



1. ábra: Az ember, aki ismerte a végtelent (balra) és a Fermat szobája film plakátja (jobbra).

Ezek a plakátokon jellemző hogy a karakterek látványosan gondolkodnak valamin, ennek a fokozása érdekében jelenítenek meg lebegő számolásokat és képleteket körülöttük. Ezek a különböző számolások szintén csak díszként vannak jelen, nem köthetők a cselekményhez.

A filmjelenetekben megjelenő matematika is csak díszlet. A plakátokhoz hasonlóan a bevezető jeleneteknél is sokszor használnak különböző geometriai alakzatokat, képleteket, görbéket vagy akár milyen matematikai tartalmat, ami bonyolultnak tűnik egy átlagos néző számára. Példaként felhozható, hogy a *Good Will Hunting*-ban a nevek felsorolása közben megjelentek különböző oldalak egy matematika tankönyvből. A *Pi* filmben pedig a bevezető jelenetnél különböző matematikai jelentőségű ábrák villanak fel a bevezető jelenet folyamán. Ezekon kívül a π végtelen számjegyeit szimbolizáló számsorozat is jelen van. Érdekesség, hogy ennek a számsorozatnak a tizedespont után csak az első nyolc számjegye pontos, a többi számjegy már nem követi a π értékeit. A filmek végefőcím részénél is megjelenik a matematika mint vizuális dísz. *A számolás joga* végefőcím dalánál a háttérben egy képletekkel teleírt krétás táblát láthat a néző.

A posztereken, a nyitó és záró jelenetekben túl a feldolgozott filmekben végig jelen van a matematika mint dísz. Fontos különbség azonban, hogy itt már megjelennek az igenis komoly matematikai tartalommal bíró részek, de az esetek többségében még mindig megmarad a díszlet szerep. Többször a háttérben megbúvó krétás táblákra felírt számolások emlékeztetik a nézőt, hogy itt egy vagy több matematikus dolgozik valami

fontos témakörben. Ezek az írott formában megjelent matematikai gondolatok mindenhol megjelenhetnek: hagyományos krétás vagy filces táblán, jegyzetfüzetben, de ennél sokkal különlegesebb helyeken is. A *Pi*-ben Max újságpapírra írja képleteit, Will Hunting a tükörrre filctollal, míg John Nash a könyvtár ablakára vázolja fel ötleteit. Ezek célja elsősorban a dramatizálás, a valóságban tollal papírra vagy krétával táblára írnak a matematikusok. Rámánudzsannak sem volt semmi oka a porba írnia, mivel később kiderült az összes ötletét több füzetben vezette párhuzamosan.

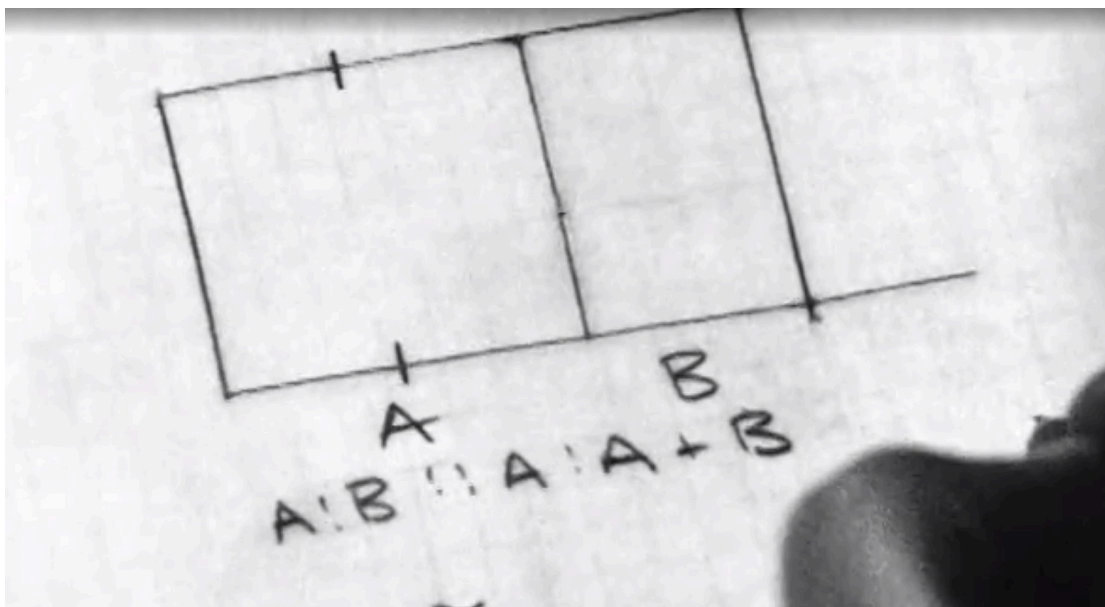
Fontos megemlíteni, hogy a különböző matematikai tartalmak felírásához többször matematikusokat is felbérelnek a filmkészítők. Ami azt bizonyítja hogy hozzáértő emberekkel állítatják össze a matematikai ábrákat és képleteket. Ugyan szakemberek dolgoztak ezeken a különböző matematikai tartalmakon, de többször is bekerültek hibás képletek a filmekbe, ahogy arra a következő fejezetben rámutatok.

Az eddigiekben vizuális formákra koncentráltunk, de jelen van a matematika a párbeszédekben is. A különböző matematikai érdekességek vagy bonyolult fogalmak több szereplő szájából elhangzottak már. Ezek a nem mindennapi témákról való társalgás kiemeli a szereplőt a többi mellékszereplő közül, ezzel is a főszereplő zseni létét hangsúlyozva. Itt sincs lényeges különbség hogy a szereplők a Germain-prímszámokról (*Bizonyítás*) vagy a Trachtenberg-módszerről (*A tehetség*) beszélgetnek, a lényeg hogy a nézőben az az illúzió keletkezzen hogy nagyon bonyolult és összetett témáról beszélgetnek a szereplők.

4.2 Pontatlan matematika a filmekben

Akármennyire is igyekeznek a filmkészítők hiba nélküli tartalmat készíteni, amihez akár matematikus segítséget is igénybe vesznek, néha bekerülnek kisebb hibák a kész filmekbe is. Ezek ugyan csak egy jelenetként vagy néha pár képkocka erejéig vannak jelen, és a film élvezeti értékét nyilván nem csökkentik, egy matematikai témájú dolgozatban mégis fontosnak tartottam kiemelni ezeket a részeket. Természetesen most nem a szándékos matematikai hibákról van szó, mint *A tehetség*nél, ahol a kislánynak kellett kijavítania azt, amit a professzor írt fel a táblára. Itt most olyan hibás jelenetekről van szó, amiről a filmkészítőknek vélhetően nem volt tudomásuk.

Nézzünk meg példaként egy konkrét matematikai hibát a *Pi* című film egyik jelenetében. A π számjegyeinek pontatlanságáról már tettem említést korábban, ezen kívül jelen volt még egy jelenet amiben szerepelt több hiba is. Max a matematika és a természet közötti összefüggést keresi, így idővel rátalál az aranymetszésre és a Fibonacci-spirálra. A film közepén Max a számítógépszobában dolgozva kezd bele egy monológba az aranymetszésről. Megemlít híres személyeket, akik ismerték (konkrétan Pitagorasz és Leonardo da Vincit), és még a természetben lévő előfordulását is említi. A jelenetben elővesz egy lapot, amin be is mutatja az aranymetszést és tulajdonságait. Viszont az arány felírását sajnos elrontotta, ami egy viszonylag komoly hiba.



2. ábra: Képkocka a *Pi* filmből: hibás arányfelírás

A 2. ábrán bemutatott képkockán jól látszik, hogy a téglalap oldalát felosztotta egy nagyobb és egy kisebb szakaszra az aranymetszés alapján. Majd a következő aránypár felírását látjuk: $A:B :: A:A+B$. A képlet rossz. Az a kisebbik baj, hogy egy zárójel lemaradt $A+B$ körül, a nagyobbik baj, hogy ennek a felírásnak így nincs értelme. Az A szakasz hossza nem tud úgy aránylni a B szakaszhoz, mint az $A+B$ -hez (a téglalap hosszabbik oldalához), csak akkor, ha $A=0$, de ez nyilván értelmetlen. Az aranyarány helyes felírásához meg kell cserélni az egyik oldalt: $A:B :: (A+B):A$, azaz egész $(A+B)$ úgy aránylik a nagyobbik részhez (A), ahogy a nagyobbik rész (A) a kisebbik részhez (B). Ezt az arányfelírást viszont az eredeti forgatókönyvben, amit valószínűleg a forgatással ellentétben nem kapkodás közepette írtak le, jól írták fel az aranyaránynak megfelelően [20].

A *Good Will Hunting*-ban is szerepelt egy jobban észrevehető matematikai félremondás, annak ellenére hogy több valódi matematikus is dolgozott a film meghatározó jelenetein. Lambeau professzor előadása után megemlítette a diákoknak, hogy a végtelen folyosó táblájára írt egy Fourier-transzformációt. Később viszont kiderült hogy a táblára gráfelméleti problémákat írt fel. Ez a kettő pedig értelemszerűen nem ugyanaz. Ennek a félremondásnak különböző okai is lehetnek. Miután felvették a jelenetet, valószínűleg azután megváltoztatták a matematikai tartalmat gráfelméletté. Leforgatták a gráfelmélettel foglalkozó jeleneteket a folyosón majd elfelejtették újra forgatni a rossz jelenetet Lambeau beszédével. Ezt az is alátámasztja hogy a filmet két hónap alatt forgatták le és az egyetem is csak korlátozott ideig tudta a helyszínt biztosítani. Vélhetően ebben a kapkodásban nem tudták újraforgatni a rossz jelenetet.

Az $X+Y$ -ban nem matematikai jellegű a hiba, de érdekesség, hogy a főszereplő Nathan több matematikai olimpiai tesztet is kitölt a film folyamán. Ezek között több feladatsor a valóságban is létezett. A filmben a legnehezebb feladatként hivatkozott feladat valóban létezik és tényleg az 1996-os év ötödik feladatáról van szó, de a valóságban ez nem az első, hanem a második forduló 5. feladata. Továbbá pontatlanság van a diákolimpiák számozása és helyszíne kapcsán is. A filmben az 59. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia döntőjén járnak Cambridge-ben. Az 59. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia döntője azonban 2018-ban volt a romániai Kolozsváron. A filmet 2014-ben mutatták be és Nathan is a 2013 január 31-es lapot töltötte ki a film elején, a 2013-as diákolimpia egyébként Kolumbiában volt.

Az eddig bemutatott hibák a film eredeti változatában is jelen vannak, de a kutatás folyamán többször is belefutottam szinkronizálási hibákba is. Itt a filmek magyar nyelvű változatában mondtak a szereplők rosszul matematikai szakszavakat, amiket eredeti nyelven még jól szerepelnek. Ez is arról tanúskodik hogy gyakran a matematikai rész fontosságába nem gondolnak bele a szinkronizálás közben.

Például a *Pi* film korábban már bemutatott hibás jelenetében is van egy félrefordítási hiba, az hangzik el az aranymetszésről, hogy “Geometrikusan a derékszögű háromszögön szemléltethető a legjobban”. Ami egyértelműen nem igaz, hisz az aranymetszést szakaszokkal vagy az aranytéglalap segítségével lehet szemléltetni, ezek az alakzatok is láthatóak a jelenetben az említett háromszög helyett. Eredeti nyelven így hangzik el ez a mondat a filmjelenetben: “Best represented geometrically as the golden rectangle.” A fordítás közben a négyzetből valahogy háromszög lett.

Persze lehet, hogy egy szakértő számára ezek a hibák, félrefordítások zavaróak tudnak lenni, de semmiképp sem olyan hibák, amik a film élvezeti értékét csökkentik. Ráadásul az átlagnéző ezeket a hibákat természetesen nem veszi észre. Sajnos a filmkészítők (és szinkronstúdiók) is tudják ezt a tényt, ezért sem törekszenek a teljesen pontos matematikai ábrázolásokra még a komoly matematikai elemeket felsorakoztató filmekben sem.

5 Két film részletes matematikai elemzése

Az előző fejezetekben inkább általánosságban volt szó a matematikai tartalmú filmekről, a filmjeleneteknek is csak részletei voltak megemlítve egy-egy tulajdonság kiemelésére. Nem került sor egy adott film részletbe menő elemzésére. A következő két alfejezetben két filmet vizsgálok meg részletesebben és mutatom be a bennük lévő matematikai tartalmat. Ez a két film a *Good Will Hunting* és a *21-Las Vegas ostroma*.

5.1 Good Will Hunting

A *Good Will Hunting*-ot többször is ideális filmként szokták említeni matematikai szempontú elemzésre, mivel megfelelő egyensúlyban van benne a matematika a cselekménnyel. A film szereplői fiktív karakterek, és alapvetően nem matematikával kapcsolatos a bonyodalom, így nem kellett rákényszeríteni a filmre a matematikát. Ugyanolyan teljes lenne a történet, ha matematika helyett más tudományterületet használtak volna (például fizikát) Will tehetségének bemutatására. A *Good Will Hunting* egy közismert és elismert film (két Oscar-díjjal is elismerték), így sok ember matematikaképét formálhatta a megjelenése óta eltelt 16 évben [1, 2, 8].

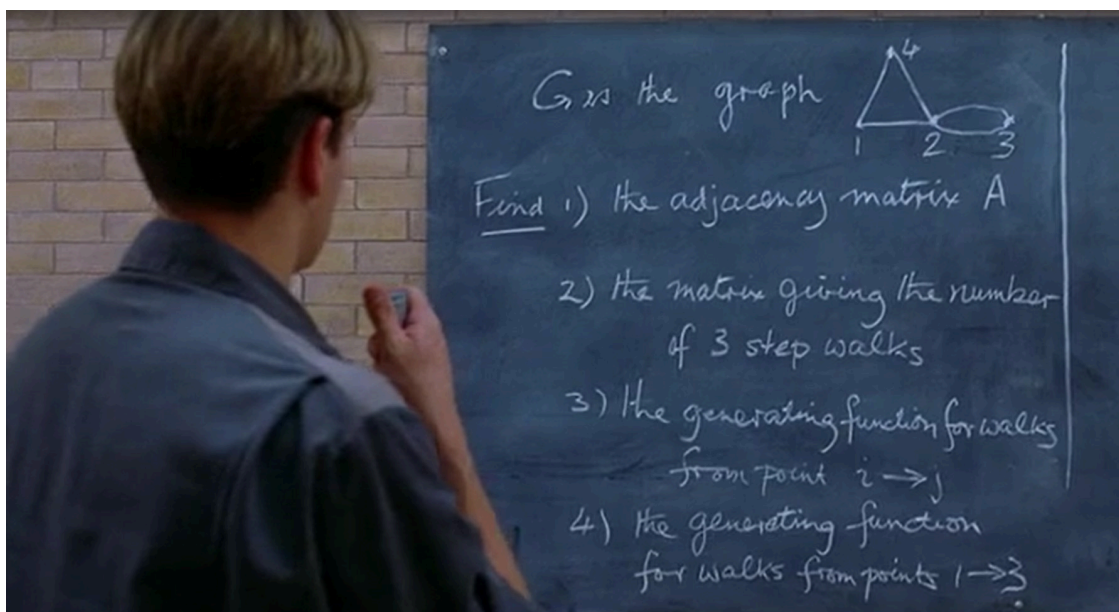
A film főszereplője Will Hunting (a továbbiakban csak Will) egy fiatal fiú, aki kitűnik zsenialitásával környezetéből. Dél-Bostonban él szegény környezetben, különböző végzettség nélkül is vállalható munkákat végezve. Így kerül Will az MIT-ra takarítani. Ezen a neves egyetemen tanít Lambeau professzor és segédje, Tom is. Az egyetemen Lambeau professzor felismeri Will tehetségét egy véletlen találkozás folyamán, és megpróbál segíteni Willnek tehetsége kibontakoztatásában.

Lambeau öltözködési és viselkedési stílusa meglehetősen laza. Bár előszeretettel viccelődik a hallgatókkal, de oktatói munkáját komolyan végzi, és Will jövőjével is odaadással foglalkozik. A filmből kiderül, hogy Lambeau professzor egy Fields-érmes matematikus, ami a 40 év alatti matematikusok legkomolyabb elismerése.

Tom Lambeau professzor szárnysegédje, mindig követi a professzort. Tom természetileg alacsony, viselkedése zárkózott, ritkán szólal meg, egyértelműen Lambeau professzor mögé van rendelve, mellékszereplő.

Rajtuk kívül jelen rövid ideig még egy matematikus jut szerephez a filmben. Alexander egy idősebb kutatója a tanszéknek, aki egy matematikai probléma megoldását vázolja Lambeau csoportjának, azonban azok szkeptikusak a megoldás helyességét illetően. Ekkor Will minden erőlködés nélkül egy sokkal egyszerűbb bizonyítást mutat a problémára. Alexander megalázva érzi magát, hogy a fiatal zseni így leiskolázta, Tom nyugtatgatni próbálja, és a szerencsének tulajdonítja Will sikerét. Ennek ellenére Alexander sértetten lép ki a teremből. Lambeau pedig láthatóan örül fiatal felfedezettje sikerének. A jelenet pontosan mutatja be a matematikusok tipikus munkamódszerét, nevezetesen, hogy a matematikusok sokszor járnak össze, vitatják meg eredményeiket és

dolgoznak kollektíven egy-egy problémán. Szintén jól rávilágít a matematikus szakma azon viszontagságaira, hogy hiába dolgozik valaki akár éveket is egy-egy bizonyításon, ha egy másik matematikus hamarabb ad megoldást a problémára vagy egyszerűbb módszert talál. Ekkor az évek kemény munkája nem fog tudni kellő nyilvánosságot kapni, és megfelelő elismerést hozni a matematikusnak. Térjünk vissza a film elejére, ahhoz az ikonikus jelenethez, amikor Will meglátja a Lambeau professzor által a folyosóra kiírt gráfelméleti problémát takarítás közben (3. ábra). A probléma annyira elgondolkodtatja hogy később otthon a tükörrre felírva meg is oldja a problémát (ezzel a vizuális dísszel már korábban foglalkoztunk).



3. ábra: Képkocka a *Good Will Hunting* filmből

Másnap Will visszatér az egyetemre takarítani, és amikor senki sem látja, felírja a megoldásokat a tábla jobb oldalára. Amikor az egyetem hallgatói észlelik, hogy valakinek sikerült megoldania a problémát, amit egyiküknek sem sikerült, rögtön figyelmeztetik Lambeau professzort. A professzor éppen egy osztálytalálkozóán volt, és nagyon meglepte, hogy valaki meg tudta oldani a rendkívül nehéz problémát. Sietve elindult a folyosóra kihelyezett táblához, hogy saját szemével győződhessen meg arról, hogy tényleg a helyes megoldás került fel a táblára. Lambeau megrökönyödve konstatálja, hogy a megoldás helyes, de a megoldó személye egyelőre rejtély marad.



4. ábra: Képkocka a *Good Will Hunting* filmből

Elemezzük ki hát matematikai szempontból a táblára felírt feladatot, hogy valóban olyan nehéz-e a probléma, mint amilyennek a film beállítja. A dolgozatban csak a feladat első két részfeladata lesz bemutatva, mert ennek a nehézségi szintje kezelhető középiskolai tudással, és kerülhet feldolgozásra egy középiskolai matematika szakkörön. Ugyan a két filmkockán (3. ábra és 4. ábra) szereplő táblaképek kissé különböznek, mintha a második filmjelenet táblájára sietve írták volna fel a feladatot, de maga a tábla tartalma nem változott. A táblára felírt probléma magyarra fordítva:

Adott egy G gráf.

Határozd meg

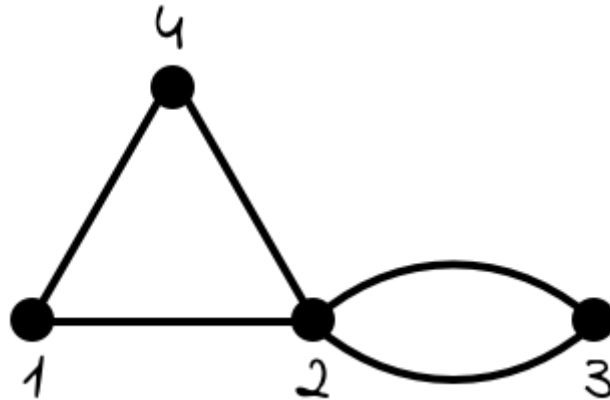
1, az A szomszédsági mátrixot;

2, azt a mátrixot, amely megadja a 3 hosszúságú séták számát;

3, az $i \rightarrow j$ séták generátorfüggvényét,

4, az $1 \rightarrow 3$ séták generátorfüggvényét!

A táblán szerepel a G gráf is, egy 4 csúcsú gráf, ahol élek vannak a következő csúcsok között: (1,2), (1,4), (2,4) és (2,3). A (2,3) között kettős él van. A gráf tehát a következő:



Az első feladatnál a gráf szomszédsági mátrixának felrajzolása nem egy kifejezetten nehéz feladat. Minden gráfhoz tartozik egy ún szomszédsági mátrix, ami a csúcsok közötti kapcsolatokat (éleket) kódoljai. A mátrix általánosságban mennyiségek (jelen esetben számok) egy téglalap alakú táblázatba való rendezése, ha egy mátrixnak van m sora és n oszlopa, akkor ez egy $m \times n$ -es mátrix. Egy gráf szomszédsági mátrixa négyzetes mátrix, azaz ugyanannyi sora és oszlopa van: $n \times n$ -es, ahol n a gráf csúcsainak száma. A sorok és oszlopok az egyes csúcsoknak felelnek meg, és az i -edik sor j -edik sorába írt szám jelöli, hogy az i -edik csúcsból a j -edik csúcsba hány él fut. Ha a gráf irányítatlan, akkor a hozzátartozó mátrix szimmetrikus, hisz i -ből j -be ugyanannyi él vezet, mint j -ből i -be.

A szomszédsági mátrix fogalmának megértése után könnyen felírható már a G gráf szomszédsági mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A szomszédsági mátrixra úgy is tekinthetünk, mint egy olyan mátrix, aminek i -edik sorának j -edik eleme az i és j csúcsok közötti 1 hosszúságú séták számát adja meg, azaz hányféleképpen tudok eljutni i -ből j -be úgy, hogy egyetlen egy élt használhatok csak. A második feladat arra kérdez rá, hogyan tudjuk megadni a csúcsok közötti lehetséges 3 hosszúságú séták számát. Egy ilyen séta csúcsok és élek váltakozó sorozata, mely az i csúcsban kezdődik és a j csúcsban végződik, és minden csúcs szomszédos az őt

megelőző és öt követő éllel, illetve minden él két végpontja az öt megelőző és az öt követő csúcs, egy három hosszúságú sétában. Ennek a feladatnak a megoldásához nem kell egyenként leszámolni a lehetséges 3-hosszúságú sétákat, hanem komolyabb matematikai megfontolás tud eredményre vezetni. Belátható, hogy a mátrix, ami megadja a 3 hosszúságú sétákat a szomszédsági köbe lesz. A 2-hosszúságú séták számát a szomszédsági mátrix négyzete adja meg. Ennek indoklásához a mátrixszorzás fogalmát kell megérteni, ami középiskolások számára is emészthető lehet.

Az eredménymátrix (A^2) i -edik sorának j -edik elemét úgy kapjuk, hogy a bal oldali mátrix (A) i -edik sorát skalárisan szorozzuk a jobb oldali mátrix (szintén A) j -edik oszlopával. Miért adja meg ez a jó eredményt? Össze kell számolni, hogy hány 2-hosszúságú séta vezet i -ből j -be, egy kettő hosszúságú sétát kaphatok, ha először i -ből elmegyek valamelyik csúcsba (k -ba), majd onnan j -be. Rögzített k -ra, hány olyan két hosszúságú séta van, ami i -ből j -be megy k -n keresztül? Természetesen $a_{ik} \cdot a_{kj}$, ahol a_{ik} és a_{kj} a szomszédsági mátrix megfelelő elemei. Az összes 2-hosszúságú séta leszámolásához ezt kell az összes k -ra összegeznem, ami pontosan az első mátrix i -edik oszlopának és a második mátrix j -edik oszlopának skalárszorzata.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ugyanezen az elven kapom a kettő hosszúságú séták számából a három hosszúságú séták számát, hiszen i -ből j -be úgy tudok eljutni 3-hosszúságú sétán, ha előbb i -ből elmegyek k -ba 2-hosszúságú sétán, majd k -ból j -be egy lépésben. Hasonló elven tehát a 3-hosszúságú séták számát megkapom, ha az A^2 mátrixot (ami a 2-hosszúságú séták számát tartalmazza az előbbieket alapján) megszorozom az A mátrixszal, így megkapom eredményül az A^3 mátrixot.

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 12 & 7 \\ 2 & 12 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

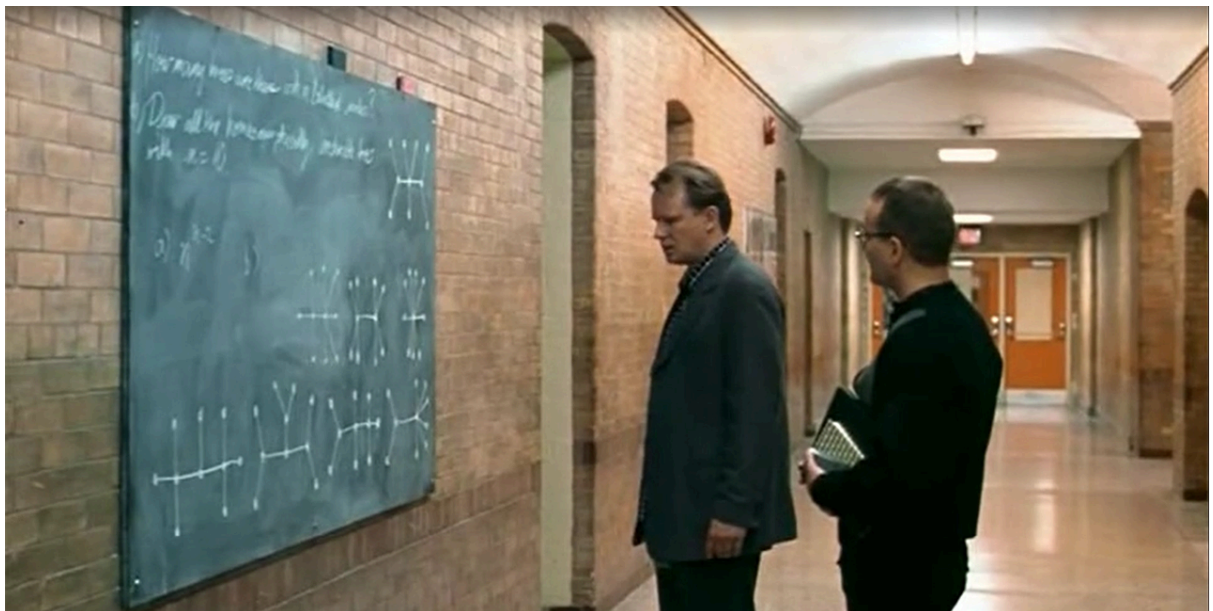
Ez az eredménymátrix a jó válasz a második feladatra, amit Will fel is írt a táblára az első feladat megoldásával együtt. A fenti leírás alapján rekurzív érveléssel könnyen látszik (és

teljes indukciós bizonyítással be is látható), hogy általában is igaz, hogy az l hosszúságú séták számát az szomszédsági mátrix l -edik hatványa tartalmazza. A feladat nem triviális matematikát tartalmaz, de az érvelés még középiskolai matematika tudással is befogadható, további előny, hogy rendkívül hasznos fogalmakat ismerhet meg a tanuló a feladat megoldása során (n -hosszúságú séta, mátrixszorzás, mátrixhatványozás).

Will természetesen a 3. és 4. feladatot is sikeresen megoldotta. A dolgozat keretéből a generátorfüggvény-módszer ismertetése mára kimutat, de a többi tanulmányokban az első két feladatrészzel együtt ez is megtekinthető [4, 7].

Visszatérve a filmhez: mivel Lambeau professzor nem tudta meg, hogy ki oldotta meg a feladatokat, ezért kiírt még egy gráfelméleti problémát a táblára. Az újabb alkalom szerencsét hozott: a professzor és Tom fülöncsípték a rejtélyes problémamegoldót, meglátták Willt a táblánál dolgozni. Először azt hitték, hogy a takarító fiú pusztán csak firkál a táblán. Ami első látszatra annak tűnik, mivel Will öltözeke és a mellette lévő felmosóvödör egyértelműen egy takarítóra jellemző. Ezért elindultak felé azzal a céllal, hogy kérdőre vonják cselekedetét. Erre Will menekülőre fogja, Lambeau követi, és a folyosó elágazásánál Will eltűnik. Tom lemaradt, mert a figyelme a táblára felírt gráfokra terelődött. Lambeau is visszament a táblához, és ekkor jött rá hogy a takarító Will oldotta meg titokban a feladatokat. A mostani kihívást is jól teljesítette Will, az oktatók megdöbbenve konstatálták, hogy ezúttal is helyes megoldást látnak a táblán.

Ez az újabb feladat teljes egészében befogadható középiskolás diákok számára is, így könnyen tudja a szakkör-terv részét képezni.



5.ábra: Képkocka a *Good Will Hunting* filmből

Bár a jelenetben a táblát csak oldalról mutatják, de ez elég is ahhoz hogy le lehessen olvasni a feladatokat és a felírt megoldásokat is.

A feladat magyarra fordítva:

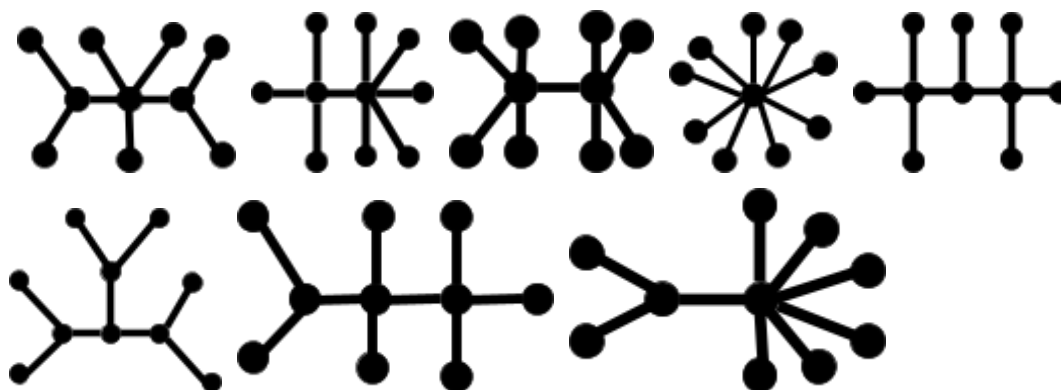
a, Hány n -csúcsú fa létezik, ha a csúcsok számozottak?

b, Rajzold le az összes homeomorfikusan felbonthatatlan fát $n = 10$ esetén!

A táblára Will a következő megoldásokat írta:

a, n^{n-2}

b,



Az *a* feladatra felírt válasz egy közismert leszámplálási tétel, a Cayley-formula. A formula helyességét legkönnyebben a Prüfer-kóddal lehet bizonyítani. Ez a bizonyítás kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést ad a számozott fák száma és az $n - 2$ hosszúságú (1 és n közötti egész elemeken) számsorozatok között. A Prüfer-kód konstrukciója könnyen elmondható középiskolások számára.

Az könnyen látszik, hogy minden fához egyértelműen létezik egy Prüfer-kód. A másik irány, hogy minden Prüfer-kódhoz is egyértelműen létezik egy fa már kicsit több belegondolást igényel, de egy haladó középiskolás matek szakkörön elfogadható nehézségű. Most a bizonyítás ismertetésétől a dolgozatban eltekintünk.

A *b* feladat szintén tanulságos a középiskolások számára, több érdekes fogalom is megismertethető a példa alapján. Először is a nagyon bonyolultnak tűnő "homeomorfikusan felbonthatatlan" fogalmát kell tisztázni. Szerencsére ez sokkal egyszerűbb, mint amilyennek hangzik. Egy fa homeomorfikusnak tekinthető, ha nincs másodfokú csúcsa. Ezek után az ilyen 10 csúcsú fák szisztematikus megtalálása és felrajzolása már nem okoz akkora gondot.

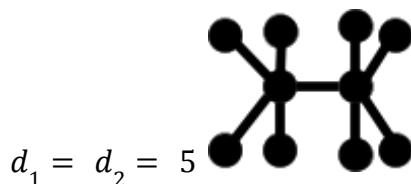
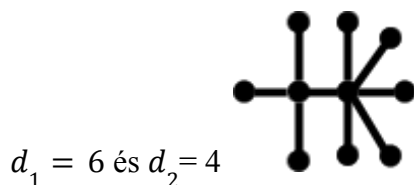
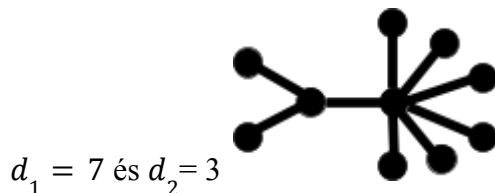
A fa 10 db csúcsból áll, egy fa élei száma a csúcsok számánál eggyel kevesebb, azaz 9. A foksámok összege a fában pedig 18, mivel a 10 csúcsú fának 9 éle van, összfokszám pedig egyszerű érvelés alapján mindig az élek számának kétszerese. Fontos tisztázni, hogy egy fának vannak levél és nemlevél csúcsai. A levél egy olyan csúcs, aminek fokszáma egy, a nemlevél (belső csúcs) fokszáma pedig nagyobb mint egy. Ha l db levél van egy 10 csúcsú fában, akkor $10 - l$ nemlevélnek kell lennie. Mivel homeomorfikusan felbonthatatlan fákat keresünk, ezért a nemlevelek fokszáma nem lehet kettő sem, azaz a foksámuk legalább 3. Így a fa foksámösszege legalább $l + 3 \cdot (10 - l) = 30 - 2l$, tehát $30 - 2l \geq 18$. Az egyenlőtlenségből egyből adódik, hogy $l \geq 6$. Azaz 6-nál kevesebb levél nem szerepelhet a fán.

Most szisztematikusan végig kell nézni a lehetséges fákat a levelek és nemlevelek száma alapján:

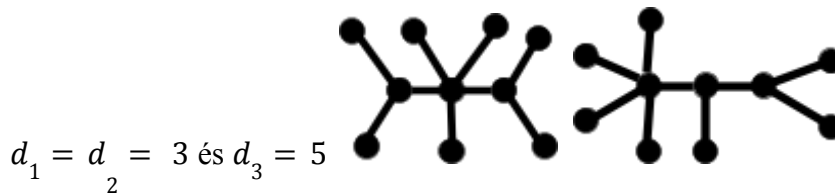
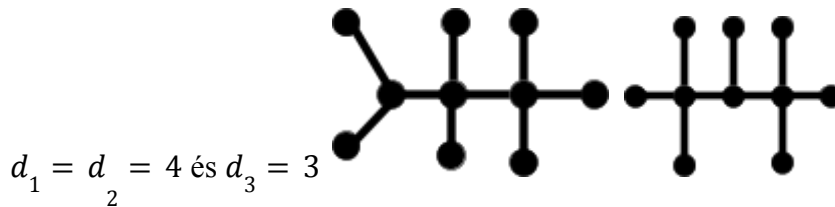
- $l = 10$: Nem létezhet ilyen fa, kell minimum 1 darab nemlevél a levelek egyben tartásához.



- $l = 9$: Egyszerű csillag alakzat.
- $l = 8$: Két nemlevél van tehát, ezek fokszáma legyen d_1 és d_2 . Könnyű látni, hogy $d_1 + d_2 = 18 - 8 = 10$, továbbá $d_1 \geq d_2 \geq 3$. Ezen feltételek figyelembevételével 3 különböző homeomorfikusan felbonthatatlan fa írható fel:

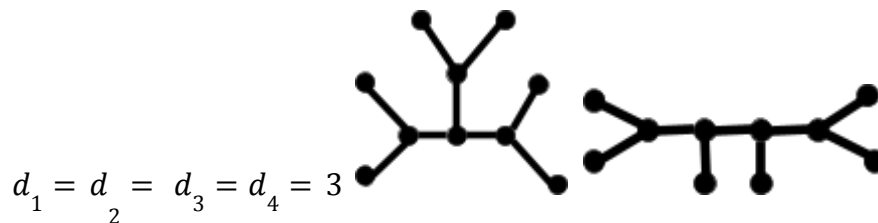


- $l = 7$: A három nemlevél fokszámainak összege: $d_1 + d_2 + d_3 = 11$, tehát $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq 3$. Ezek a feltételek alapján két különböző fokszámsorozatú lehetőség írható fel. Ezekből 4 homeomorfikusan felbonthatatlan fa keletkezik, attól függően hogyan helyezkednek el a csúcsok egymáshoz viszonyítva:



Ez az utóbbi fa nem szerepelt Will megoldásában a filmben, mivel megzavarták a feladat megoldása közben

- $l = 6$: A négy nemlevél fokszámainak összege: $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 12$, tehát $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq d_4 \geq 3$, ami csak akkor lehet, ha $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 3$. Ez alapján két homeomorfikusan felbonthatatlan fa létezik, szintén a csúcsok egymáshoz való elhelyezkedése alapján:



Ez az utóbbi fa szintén nem szerepelt Will megoldásában a filmben, mivel megzavarták a feladat megoldása közben.

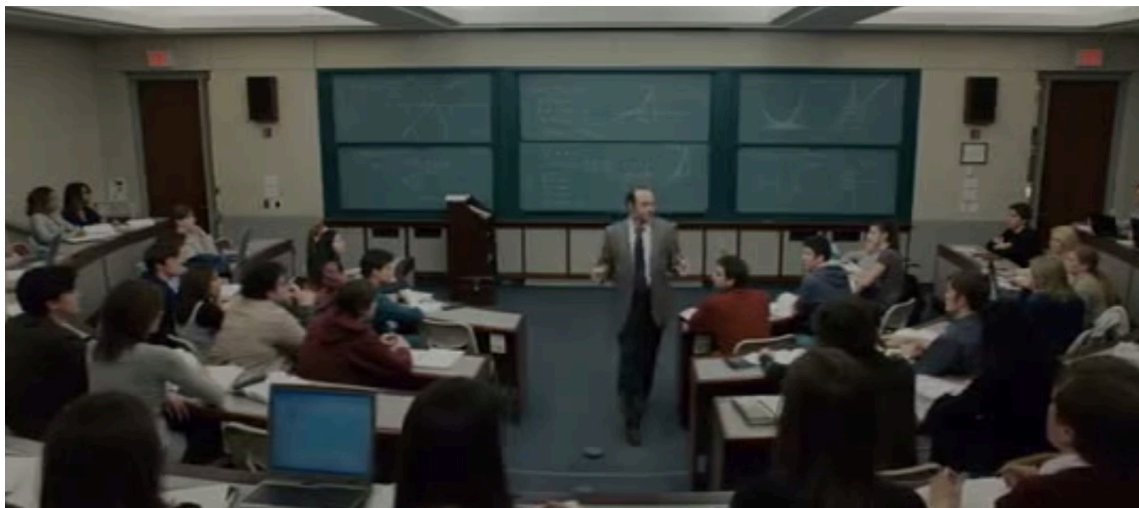
A szisztematikus és megfontolt leszámolási módszerrel megtaláltuk tehát mind a 10 fát. Ahogy említettem Will csak nyolcat írt fel ezek közül a táblára, vélhetően azért, mert Lambeau professzor és Tom megjelenése miatt abba kellett hagynia a fák felrajzolását.

5.2 21-Las Vegas ostroma

A *Good Will Hunting* gráfelmélete után most térjünk át egy másik filmhez, amiben szintén egy matematikai probléma alapján sikerült egy fiatal elme tehetségét felfedezni -

szintén az MIT-n. A *21-Las Vegas ostroma* film főszereplője Ben, egy 21 éves egyetemista, aki a neves bostoni egyetemre az MIT-ra jár (a film alapjául megtörtént eset szolgál). Matematikában nagyon kiemelkedő, elsőosztályú fejszámoló, tanulmányai mellett egy helyi öltönyboltban dolgozik, hogy finanszírozni tudja megélhetését. Élete nagy célja, hogy bejusson a Harvard orvosi karára. Rengeteg időt és energiát fektet tanulmányaiba, hogy elérje álmát. A jövőbeli orvosi tanulmányai finanszírozásához viszont szüksége van körülbelül 300 000 dollárra. Az öltönyboltban szerzett béréből nem tudná ezt a szükséges pénzt előteremteni, így tanulmányi ösztöndíjakra pályázik. Be is adta jelentkezését a Robinson-ösztöndíjra, de miután személyesen is beszélt a pályázatot elbíráló professzorral, azután az ösztöndíj elnyerését lehetetlennek tekintette.

Ekkor tűnik fel azonban a váratlan segítség, Micky Rosa matematikaprofesszor személyében. Micky Rosa oktató-kutató munkája mellett egy Blackjack (más néven huszonegy) kártyajátékra szakosodott nagy sikerű csapatot vezet titokban, amelynek tagjai különböző tehetséges egyetemista diákok. Tehetségüket bizonyítja, hogy Ben elődje a csapatot végül azért hagyta el, mivel a Googlenél kapott egy jól fizető állást.



6.ábra: Képkocka a *21-Las Vegas ostroma* filmből

A professzor előadását tartja meg az egyetem hallgatóinak, amikor Bennel megvitatják Newton munkásságának eredetiségét. A professzor elpoénkodja a válaszadást, de Bennek feladja a Monty Hall-paradoxont. Ezzel tesztelve a fiú tudását és mutatja be a csoport többi tagjának a problémát. Én is a továbbiakban erről a problémáról fogok írni.

A probléma paradox jellege miatt rendkívül érdekes és középiskolai tudással átlátható, sőt, a megoldása is könnyűszerrel megérthető. A paradoxon egy amerikai vetélkedőről, illetve annak Monty Hall nevű nevű játék mesteréről kapta a nevét. A vetélkedőben a játékosnak három becsukott ajtó közül kell egyet választania. Az egyik ajtó mögött található a főnyeremény, ami egy vadonatúj autó. A másik kettő mögött pedig a műsor eredeti változatában egy-egy kecske van (a film magyar szinkronjában tragacsnak fordították). Miután a játékos választ egy ajtót, a játékmaster kinyit egy másik ajtót, ami mögött egy kecske található (azt könnyű belátni, hogy ezt a játékmaster megteheti.

Mindig lesz olyan ki nem választott ajtó, ami mögött kecske van, ezt a játékmester gondtalanul ki tudja nyitni). Miután az ajtót kinyitotta, a játékmester felajánl a játékosnak még egy választást, az eredeti döntése helyett cserélhet, és választhatja a másik még nem nyitott ajtót is. A felmerülő (matematikai) kérdés pedig, hogy érdemes-e átpártolni egy másik ajtóhoz, vagy jobban jár-e a játékos, ha ragaszkodik az eredeti döntéséhez? Ha valaki először hallja ezt a feladványt, akkor általában arra a döntésre jut, hogy nincs jelentősége annak, hogy vált-e vagy nem, 50-50% az esély arra, a két még ki nem nyitott ajtó közül hol van az autó, és hol a kecske. Az emberek többsége tehát nem váltana, kitartana első megérzése mellett. Ha viszont matematikai precizitással megvizsgáljuk a kérdést, könnyen belátható, hogy ez nem így van, vegyük tehát alaposabban szemügyre a kérdést.

Legyen a három ajtó A , B és C . A három ajtó mögött háromféleképpen tudnak elhelyezkedni nyeremények, vagy az A vagy a B vagy a C mögött van az autó (és a másik kettő mögött pedig a kecske), mindegyik eset valószínűsége megegyezik. Jelölje $P(i)$ annak a valószínűségét, hogy az i ajtó mögött van a kecske, ekkor $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$. Tegyük fel hogy az A ajtót választottuk, nyerési valószínűségünk az előbb elmondottak szerint természetesen $\frac{1}{3}$. Annak a valószínűsége, hogy a B vagy a C ajtók valamelyik mögött van a főnyeremény pedig $\frac{2}{3}$. A játékmester - miután kiválasztottuk az A ajtót - ki fog nyitni egy ajtót. Ha egy olyan ajtót nyitna ki, ami mögött az autó van, akkor értelmét vesztené a vetélkedőműsor. Nyilván mindig olyan ajtót nyit ki, ami mögött kecske van, ezt mindig meg tudja tenni függetlenül attól, hogy az A ajtó mögött mi van, hiszen a ki nem választott két ajtó legalább egyike mögött kecske van. Mivel a játékmester kinyitott egy vesztes ajtót, ezért a megmaradt két ajtó valamelyike mögött van az autó, de a két esemény nem $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűségű. Ha úgy döntünk, hogy nem váltunk ajtót, akkor megmarad az $\frac{1}{3}$ esélyünk. Viszont ha ajtót változtatunk, akkor csakis abban az egy esetben veszíthetünk, ha az eredetileg választott ajtó mögött volt a főnyeremény (ez $P(A) = \frac{1}{3}$ valószínűségű). Az autót pedig akkor nyerhetjük meg ajtóváltással, ha eredetileg olyan ajtót választottunk, ami mögött kecske volt (ennek valószínűsége $\frac{2}{3}$), hisz ebben az esetben a másik két ajtó egyike mögött autó, a másik mögött kecske van, de a kecskés ajtót már kinyitotta a játékmester. Valószínűségszámítási meggondolással könnyen belátható tehát, hogy megéri ajtót váltani, ezzel megduplázzhatjuk a nyerési esélyünket. Az ember első gondolatmenete pedig szembe megy az ember megérzéseivel. Ilyen döntéshelyzetben megjelenik az izgalom, a félelem és a feszültség, ami mellett nem lehet átgondolni a döntés fontosságát. Ezek a jellemzők miatt fontos a probléma filmben lévő megjelenése, ugyanis tisztán a matematikai eredményekre való hallgatás az, ami a nagyobb nyeremény esélyéhez vezet. Ez a személyiség fontos még a BlackJack stratégiáknál is [6].

6 Szakkörterv: “Matematika a filmvásznon”

A kigyűjtött matematikai tartalmú filmek több különböző témában és helyzetben mutatják be a matematikát. A filmekben megjelenő matematikai jelnetek rávilágítanak a matematika fontosságára, érdekességére, ezáltal motiválni lehet a diákokat, és vonzóbbá lehet tenni számukra bizonyos matematikai fogalmakat, témákat a középiskolások számára. Továbbá a filmek és az azok szereplői szemszögéből való problémamegoldás sokszínűvé és élvezetessé teszik a tanulást. Ez a felismerés vezetett oda, hogy “Matematika a filmvásznon” címmel szakkörtervet készítsek, amit ebben a fejezetben részletesen bemutatok, a szakkörhöz elkészített 9+1 diasort pedig a dolgozat függelékeként csatolok. Matematikai filmeket felhasználva már készültek tantervek korábban nagyobb létszámmal kísérletezve [11].

A 2. fejezetben bemutatott 16 film megnézése megerősített abban, hogy egyes filmeket, filmjeleneteket érdemes egy-egy tanórára vagy szakkörre is bevinni. “Matematika a filmvásznon” címmel szakkörtervet készítettem, ami 9+1 db kb. 45 perces szakköri foglalkozás megtervezéséből állt.

A szakköri foglalkozások egy-egy film köré csoportosulnak, és minden szakköri órához egy-egy diasort is készítettem. Tekintettel arra, hogy a szakkörök jellege miatt a mozgóképnek és a vizuális elemeknek nagyon hangsúlyos szerep van, ezért a számítógépes prezentációk jelentik a legjobb megoldást az anyag feldolgozásához. A kilenc elkészített prezentáció mindegyike egy filmet dolgoz fel, a tizedik pedig egy “válogatás” prezentáció, amit a BME Science Camp+ Matematika szakkör keretében adtam elő.

A kilenc szakkörön feldolgozásra javasolt film, amik alapján a prezentációkat is készítettem: *21-Las vegas ostroma*, *A számolás joga*, *Az ember, aki ismerte a végtelent*, *Egy csodálatos elme*, *Fermat szobája*, *Good Will Hunting*, *Kódjatszma*, *Mutasd meg, ki vagy* és *Pi*. Ezek a prezentációk PDF formátumban megtekinthetőek a szakdolgozathoz tartozó mellékletben. A prezentációk hossza a hozzá tartozó feladatokkal együtt általában 45 percesek, néhány közülük rövidebb, a *Good Will Hunting*-hoz tartozó anyag viszont 90-100 perc alatt dolgozható fel, tehát annak feldolgozására csak több szakköri foglalkozás keretében van lehetőség. A diasorok közül végül ötöt be is mutattam saját középiskolámban matematika fakultációs óráin 2023 szeptemberében és októberében. Ez az öt diasor pedig az alábbi öt matematikai tartalmú filmmel foglalkozik: *21-Las Vegas ostroma*, *Az ember, aki ismerte a végtelent*, *Egy csodálatos elme*, *Good Will Hunting* és *Pi*. A tizedik válogatás-diasort pedig ahogy korábban említettem a BME Science Camp+ Matematika szakkörön mutattam be 60 percen nagyjából 40 érdeklődő középiskolásnak.

A szakköri prezentációk, a tanulói és tanári visszajelzések is megerősítettek abban, hogy a filmjelenetek bemutatásával közelebb lett hozni a diákokhoz nemcsak az adott film szereplőit, helyszíneit de a kapcsolódó sokszor mély matematikát is érdekesebben lehet

bemutatni. Ezért is helyeztem el az összes prezentációba kettő darab filmjelenetet, amiket le is játszottam a szakkörön. Legtöbb esetben ezek a filmjelenetek a filmben szereplő matematikát és a hozzá kapcsolódó problémát hivatottak bemutatni, de úgy is fel lehet őket használni, hogy az adott film hangulatát és szereplőit mutassa be a kivágott jelenet, ezzel is közelebb hozván a diákhöz azt a világot, amiben a problémát meg kell oldaniuk. Ez a világ pedig nagyon változatos tud lenni minden egyes film esetén, ami szintén előny, hiszen így érdekesebben be lehet mutatni a filmbeli problémát, mintha csak egy tankönyvben lévő papírra lenne az leírva.

A szakkörtervhez és a kapcsolódó előadásokhoz készített prezentációk forrásanyaga részletesen megtalálhatóak a függelékjegyzékben. Ezek az előadások túlnyomó részben az angol vagy a magyar Wikipédia alapján készültek el, a korábban felsorolt forrásanyagokon felül. A videók és a képanyagok egy része pedig a szóban forgó filmből lettek kivágva és felhasználva. Ezek a filmek a dolgozat feltöltése idejében megtalálhatóak magyar nyelven a Videa (<https://videa.hu>) internetes videómegosztó platformon. Ez alól kivétel a Good Will Hunting film, aminek magyar nyelvű verzióit 2023.07.30-án eltávolították és a Fermat szobája, ami csak eredeti nyelven van feltöltve, így a hozzátartozó filmjelenet is csak magyar nyelvű felirattal van ellátva.

Az összes filmjelenet, ami szerepel a prezentációkban megtalálható a csatolmányban, azzal a névvel, melyik filmmel foglalkozó prezentáción belül előfordul.

6.1 Előzetes kérdőíves felmérés

A saját középiskolámban előadott öt szakköri foglalkozást megelőzően egy kérdőívet tölttettem ki a szakkörön résztvevő osztálytársaimmal (11 fő). Ezzel a kérdőívvel kívántam felmérni a diákok tájékozottságát a matematikai témájú filmekkel és matematikusokkal kapcsolatban. A kérdőívben a diákoknak az alábbi négy kérdésre kellett választ adniuk (név nélkül):

1. Milyen filmeket ismersz, amikben valamilyen tudományos területtel foglalkozó tudós vagy kutató jelen van?
2. Milyen filmeket ismersz, amikben kifejezetten matematikus vagy matematikával foglalkozó személy szerepel?
3. Milyen híres tudósokat vagy kutatókat tudsz mondani? Sorolj fel, amennyit tudsz!
4. Milyen híres matematikusokat tudsz mondani? Sorolj fel, amennyit tudsz!

A diákok válaszait (helyesírási hibák javítása után) a 3. táblázat foglalja össze. A megadott válasz melletti zárójelben az adott válasz gyakorisága van feltüntetve. A foglalkozásokon részt vevő 11 tanulótól az alábbi 4 kérdésre összesen 87 értékelhető válasz érkezett. A kitöltött válaszlapok megtalálhatóak a mellékletben.

	Válaszok:
1. Milyen filmeket ismersz, amikben valamilyen tudományos területtel foglalkozó tudós vagy kutató jelen van?	<i>Oppenheimer</i> (4), <i>Agymenők</i> (3), <i>Csillagok között</i> vagy <i>Interstellar</i> (3), <i>Avatar</i> (2), Nem írt semmit a tanuló (2), <i>Doktor Murphy</i> (1), <i>Frankenstein</i> (1), <i>Venom</i> (1), <i>Vissza a jövőbe I, II, III</i> (1)
2. Milyen filmeket ismersz, amikben kifejezetten matematikus vagy matematikával foglalkozó személy szerepel?	Nem írt semmit a tanuló (9), <i>Oppenheimer</i> (1), <i>Venom</i> (1)
3. Milyen híres tudósokat vagy kutatókat tudsz mondani? Sorolj fel, amennyit tudsz!	Albert Einstein (10), Isaac Newton (6), Nikola Tesla (4), Arisztotelész (2), Oppenheimer (2), Johannes Kepler (2), Teller Ede (2), Galileo Galilei (2), Blaise Pascal (2), Neumann János (2), Nem értékelhető válasz (2), Marie Curie (1), Alan Turing (1), Szent-Györgyi Albert (1), Kopernikusz (1), Thomas Edison (1), Mikola Sándor (1)
4. Milyen híres matematikusokat tudsz mondani? Sorolj fel, amennyit tudsz!	Thalész (10), Püthagorasz (10), Nem értékelhető válasz (3), Eukleidész (1), Albert Einstein (1), Arisztotelész (1), Neumann János (1), Galileo Galilei (1), Erdős Pál (1), Bolyai János (1), Bolyai Farkas (1)

3. táblázat: A szakkört megelőző kérdőív kérdései és a hozzá tartozó válaszok gyakoriság szerint rendezve

Az 1. kérdésre adott válaszok alapján kirajzolódik, hogy az éppen aktuálisan a mozikban futó filmek aktualitásuk miatt jobban megmaradnak a diákokban (ld. *Oppenheimer*), de sok régebben megjelent filmet is fel tudtak eleveníteni. A válaszok között megtalálható sorozatcímek is: *Agymenők* és a *Doktor Murphy*, ami mutatja, hogy a fiatalabb generáció érdeklődése elmozdult a sorozatok felé. Megjegyzem, hogy az utóbbi sorozatban tudósok helyett inkább orvosok szerepelnek, így nem mondható helyes válasznak, akkor sem ha sorozatra irányult volna a válasz.

A 2. kérdésre talán meglepő módon csak két filmcímet írtak le válaszként a diákok, és ez a kettő film (*Oppenheimer* és *Venom*) sem foglalkozik matematikusokkal, így ezek nem mondhatók helyes válasznak. A válaszok hiánya rámutat arra, hogy a középiskolai

korosztály kevésbé ismeri a jelen dolgozatban feldolgozott filmeket. Ez hátrány lehet abból a szempontból, hogy kevésbé érezhetik maguknak a szakkörön megjelenő filmjeleneteket, ugyanakkor előnyként is felfogható, hiszen így a filmhez újdonságként viszonyulnak, és nagy érdeklődéssel tudnak odafigyelni az adott témakör bemutatását hivatott eddig nem látott filmjelenetre. A megtartott szakkörök alapján úgy érzem, hogy inkább ez utóbbi hatás érvényesült. Kiemelném még, hogy a BME Matematika szakkörén is feltettem ugyanezt a kérdést, és ott többen is említettek matematikával kapcsolatos filmeket, elhangzott többek között a *Good Will Hunting*, az *Egy csodálatos elme* és a *Számolás joga* is.

A 3. kérdésre összesen 39 értékelhető válasz érkezett, legtöbben az iskolai tanulmányokban szereplő tudósokat írtak, de például Oppenheimer nevének a leírása is minden bizonnyal az idén megjelent sikeres film hatására történt.

A 4. kérdésre tíz különböző matematikus nevét adták meg összesen a diákok. Érdekes, hogy a válaszadók közül egy kivételével mindenki megadta válasznak Thalészt és Püthagorasz, akiknek a nevéhez fűződik egy-egy már általános iskolában is jól ismert tétel. Tekintve, hogy a 2. kérdésben sem igazán tudtak matematikusokról szóló filmeket felsorolni, így talán kevésbé meglepő, hogy nem kerültek elő az iskolai tanulmányokban nem szereplő olyan matematikusok, akik életéről filmet készítettek, mint Srínivásza Rámánudzsán, John Nash vagy Katherine Johnson. Az általam kidolgozott szakkör keretében viszont az említett matematikusok élettörténetével és matematikai jelentőségével megismerkedhettek a diákok kapcsolódó filmjelenetek és prezentációim segítségével.

6.2 Szakköri foglalkozások felépítése

Az alábbiakban megmutatom, hogy hogyan építettem fel a szakköri foglalkozásokat, illetve a hozzájuk kapcsolódó prezentációkat. Példaként vegyük *A számolás joga* című filmet és a filmhez készített előadást (Függelékben: *A_számolás_joga.pdf*). Ez egy valós történetet feldolgozó életrajzi film, a benne szereplő három női főszereplő közül Katherine a matematikus. A film első jelenete, melyben a még kislány Katherine egy másodfokú egyenlet megoldását írja fel a táblára, tökéletes a zseni lány jellemzésére és a szakkörön másodfokú egyenlet bevezetéséhez vagy ismételéséhez is jó alapot szolgáltat. Igaz, a filmben Katherine nem a másodfokú egyenlet megoldóképlete segítségével oldotta meg a táblára felírt problémát, de az ő megoldását kontrasztba lehet hozni a másodfokú egyenlet megoldóképletével és így könnyebben bemutatni a diákoknak. Mivel a filmjelenet segítségével a másodfokú egyenlet felépítését és megoldóképletét lehet bemutatni, ezért érdemes ezt a filmet gimnáziumon belül a 10. évfolyamra bevinni, amikor vennék a tanterv szerint is a másodfokú egyenleteket tanulják a diákok, későbbi évfolyamokon pedig az ismételéshez szolgáltat jó alapot.

A prezentációk felépítését *A számolás joga* diasoron (A_számolás_joga.pdf) keresztül fogom bemutatni, aminek a struktúrája a következő:

1.dia: Címdia

2.dia: Szereplők jellemzése és a film bemutatása

3.dia: Egy filmjelenet (A_számolás_joga_3.dia.mp4), ami bemutatja a film szereplőit és hangulatát

4.dia: Segítő kérdések a filmjelenet kielemezéséhez

5.dia-6.dia: A filmben szereplő matematika jellemzése általánosságban

7.dia-11.dia: A filmben szereplő egyenlet kielemezése és megoldása a másodfokú egyenlet megoldóképletével

12.dia: Filmjelenet (A_számolás_joga_12.dia.mp4), ami bemutatja a matematikai problémát és jelen esetben annak a megoldását.

13.-15.dia: A film főszereplőinek életrajzi adatainak feltüntetése

16.dia: Záró dia

A filmjelenetek videóként való beágyazása előadásba egy nagyon fontos elem, ez segíthet a diákoknak a főszereplővel azonosulni, beleélni magukat a film környezetébe és hangulatába. Minden diasorba beágyaztam ezért két darab filmjelenetet. Az első filmjelenet (a példánkban a 3.dia) célja, hogy bemutassa az adott film világát, megismertesse a szereplőket, és egy kevés matematikát is mutasson. A szakköri foglalkozások második filmjelenete (a példánkban a 12. dia) hivatott bemutatni a filmbeli matematikai problémát és/vagy annak megoldását. A szakköri foglalkozások megtartása után a résztvevő diákokkal személyes beszélgetéseket folytattam, amiből kiderült, hogy a filmek segítségével történő tanítás jelentősen jobban felkelti a diákok figyelmét egy-egy matematikai témakör iránt, mint a hagyományos tanórák.

A kiválasztott filmek különböző mélységű és bonyolultságú matematikai problémákat tartalmaznak, ezt - az ajánlott évfolyammal együtt - részletesen a 4. táblázat tartalmazza.

Film címe	Matematikai tartalom	Ajánlott évfolyam
21 - Las Vegas ostroma	Isaac Newton munkássága/ életrajza Fibonacci-sorozat Monty Hall-paradoxon Valószínűségszámítási paradoxonok	11.
A számolás joga	Katherine Johnson életrajza Másodfokú egyenlet	10.
Az ember, aki ismerte a végtelent	Srínivásza Rámánudzsán munkássága és életrajza Partíciók Hardy-Rámánudzsán szám (1729)	9.
Egy csodálatos elme	John Forbes Nash életrajza Játékelmélet	9.-12.
Fermat szobája	Pierre de Fermat munkássága (Fermat-tételek) és életrajza Évariste Galois munkássága és életrajza David Hilbert munkássága és életrajza Szöveges feladatok logikai megoldásokkal Goldbach-sejtés	10.
Good Will Hunting	Gráfelmélet Mátrixok szorzása Cayley-formula és Prüfer-kód	12.
Kódjátzsma	Alan Turing élete és munkássága Kriptográfia Kombinatorika	11.
Mutasd meg, ki vagy	Egyismeretlenes szöveges feladat	9.
Pi	A π , és az a köré épülő témakörök (története, kör jellemzői)	9.

4 .táblázat: A kilenc foglalkozásból álló matematika szakkör anyaga (a feldolgozott film címe, a filmben szereplő oktatásban felhasználható tananyag és az adott tananyag bemutatására ajánlott évfolyam)

7 Összefoglalás

A dolgozatomban elsősorban a matematika és matematikusok filmbeli megjelenését vizsgáltam, és az ezek alapján készített szakkörterv segítségével hoztam közelebb a matematikát a gimnáziumi diákok számára. A dolgozatomban az alábbi négy kérdéskörre kerestem a választ:

A: Hogyan és miért jelenik meg a matematika a filmekben? Milyen szerepe van a matematikának a filmek cselekményében?

B: Milyen módon ábrázolják a matematikusokat a filmekben? Milyen sztereotípiákra erősítenek rá a filmek?

C: Mennyire hitelesek a filmek matematikai tartalma szóban és írásban? Azonosíthatóak-e matematikai pontatlanságok?

D: Hogyan és milyen sikerrel alkalmazhatók a populáris kultúrában ismert filmek a középiskolai matematikaoktatásban?

Az A kérdésre való válaszként elmondható, hogy bár a választott filmekben a matematika központi jelentőségű, ennek ellenére a matematika inkább csak díszlet a filmekben, egy dramatizálási eszközként jelenik meg, de önmagában a matematikai tartalomnak nincsen kulcsfontosságú szerepe a cselekmény alakításában. Ez persze nem is várható el közönségfilmekről. Ezt a megállapításomat Korándi József és Mérő László munkái is megerősítik [1, 2, 12].

A matematikusok ábrázolása (B kérdés) kapcsán elmondható, hogy a filmekből kirajzolódó matematikuskép változatos ugyan, de néhány fő - sokszor sztereotipikus - jellemvonás megfigyelhető. A filmekben nagyon sokszor jelenik meg a matematikus mint a társadalommal magát nehezen megértetni képes különc zseni. Megállapítottuk, hogy ha matematikus jelenik meg egy filmben, az szükségszerűen szakmájában kiváló. A matematikus ábrázolás pozitív eleme, hogy a filmekben (ahogy a valóságban is) a matematikusok számára központi jelentőségű a fiatal tehetségek felkarolása és a mentor-mentorált viszonyrendszer.

A C kérdés kapcsán elmondható, hogy bár a gyűjtésben olyan filmek szerepelnek, amikben központi szervező erőként jelenik meg a matematika, de így is több esetben felfedezhető volt bizonyos fokú matematikai pontatlanság. Annak ellenére is, hogy több film esetén köztudott, hogy matematikus szakértők is dolgoztak a film matematikai tartalmú jelenetein. A filmek eredeti változatait a magyar szinkronos változattal összevetve láthatjuk, hogy több matematikai pontatlanság adódott a filmek magyarra fordítása, illetve szinkronizálása kapcsán is. Fontos hangsúlyozni, hogy ezek a matematikai hibák sem a filmek művészeti, sem élvezeti értékét nem befolyásolják.

A D kérdésre adható válasz, hogy a középiskolai matematika oktatásban hasznos eszköz filmek bemutatása, és azokra építő tananyag kidolgozása. Az általam készített kilenc szakköri foglalkozásból álló “Matematika a filmvásznon” szakkörterv tanulsága, hogy a filmek segítségével közelebb hozható a középiskolások számára a matematika. A szakkör hallgatóságából érkezett visszajelzések alapján a diákok motiváltabbá váltak, és könnyebben tudtak befogadni nehezebb matematikai tartalmakat is, emellett pedig matematikatörténettel és mozgóképismerettel is gazdagodtak.

Köszönetnyilvánítás

Itt szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Molontay Rolandnak az érdekes témajavaslatért, az irodalmi források rendelkezésemre bocsátásáért, a biztatásért, az előadásokra való felkészítésért, a dolgozat megszövegezésében nyújtott hatalmas segítségéért és a dolgozat gondos átnézéséért. Köszönettel tartozom Bednárikné Kiss Krisztina matematika tanáromnak, akinek ajánlására ismerkedtem meg a TDK-val, és azért hogy adott át nekem tanórákat a szakkörök megtartásához, ami nélkül nem lett volna teljes a kutatás. Köszönetet mondok Lángné Lázi Mártának a lehetőségért, hogy egy nagyobb nézőközönségnek is bemutathattam ezt az érdekes témakört a Science Camp+ Matematika szakkör kereteiben, családtagjaimnak a rengeteg türelmükért, biztatásukért és osztálytársaimnak, akik részt vettek szakköreimen és rengeteget motiváltak engem a kutatás megírása közben.

8 Irodalomjegyzék

- [1] Korándi József, A matematika és a média kapcsolatának vizsgálata, PhD disszertáció, Debrecen, 2012, URL: <https://dea.lib.unideb.hu/bitstreams/4cfe5a4f-9a2f-4d38-8ef2-a7ae4af31b66/download>
- [2] Korándi József, Média és matematika, elektronikus jegyzet, 2013, URL: <https://mathdid.elte.hu/pic/tamopmatmed.pdf>
- [3] University of Waterloo, Top 8 movies about mathematicians, 2021, URL: <https://uwaterloo.ca/math/news/top-8-movies-about-mathematicians>
- [4] Harvard University, Mathematics in Movies, URL: <https://people.math.harvard.edu/~knill/mathmovies/> (Utoljára megtekintve: 2023.11.02)
- [5] Burkard Polster és Marty Ross, MMDB The Mathematical Movie Database, URL: <https://www.qedcat.com/moviemath/> (Utoljára módosítva: 2020 június 22, Utoljára megtekintve: 2023 szeptember 04)
- [6] Köhalmi Krisztina, Hollywoodi matematika, szakdolgozat, 2014, URL: https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_mattan/2014/kohalmi_krisztina.pdf
- [7] Gábor Horváth, József Korándi, Csaba Szabó, Mathematics in Good Will Hunting II: Problems from the students perspective, 2013, URL: <https://dea.lib.unideb.hu/server/api/core/bitstreams/e9e52667-dacb-45fb-98ee-3913a5b92f5d/content>
- [8] Maths in “Good Will Hunting”, 2016, URL: <https://lifethroughamathematicianseyes.wordpress.com/2016/08/29/maths-in-good-will-hunting/>
- [9] Janice Paula, Mathematical fiction for senior students and undergraduates, Novels, plays, and film, 2006, URL: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ744036.pdf>
- [10] F. A. Ficken, The Use of Films and Television in Mathematics Education, 1958. URL: <https://www.jstor.org/stable/2310716>
- [11] Cinematek Paradiso Erasmus+ program, 2018, URL: http://storage.eun.org/resources/upload/820/20180905_173105718_820_Guide_CINEMATHEPA_RADISE_scx_HU.doc
- [12] Mérő László, A matematika és a film, FilmVilág folyóirat 2003 októberi szám, URL: https://www.filmvilag.hu/xista_frame.php?cikk_id=2198

- [13] Carmen M. Latterell, Janelle L. Wilson, Popular Cultural Portrayals of Those Who Do Mathematics, 2004, URL: <https://scholarship.claremont.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1516&context=hmnj>
- [14] Mécs Anna, Matt Damon és a szakállas, szemüveges fura figurák, blogbejegyzés, 2013, URL: https://csanna.blog.hu/2013/11/01/matt_damon_es_a_szakallas_szemuveges_fura_figurak
- [15] communiTV, Top 5 Mathematician Movies, URL: <https://www.youtube.com/watch?v=FiIpE221dFY>
- [16] communiTV, Top 10 Mathematician Movies, URL: <https://www.youtube.com/watch?v=5FscrLqsVpA>
- [17] <https://roundranking.com/ranking/world-university-rankings.html#world-2023>
- [18] Pannonscript.com, URL: <http://www.pannonscript.com/index.html#NamedAnchor6> (utolsó frissítés: 2023 január 23)
- [19] Math Tutor DVD, Math at the movies, URL: <https://www.mathtutordvd.com/public/Math-at-the-Movies.cfm>
- [20] The Internet Movie Script Database (IMSDb), Pi by Darren Aranofsky, URL: <https://imsdb.com/scripts/Pi.html>
- [21] Wikipedia: Mathematics Genealogy Project, utolsó módosítási dátum: 2023.10.09, URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_Genealogy_Project

9 Függelékjegyzék

A kutatás szerves részét képezik a dolgozat mellékletei, különös tekintettel a “Matematika a filmvásznon” szakkörre készített tíz prezentáció. Az összes melléklet megtalálható az alábbi linken:

https://drive.google.com/drive/folders/1BneCFix2UMDIjoZU952gw6X4ud_LO3tQ?usp=drive_link

Prezentációk (a “Matematika a filmvásznon” szakkör anyaga):

21-Las_Vegas_ostroma.pdf

A_számolás_joga.pdf

Az_ember,_aki_ismerte_a_végtelent.pdf

Egy_csodálatos_elme.pdf

Fermat_szobája.pdf

Good_Will_Hunting.pdf

Kódjátszma.pdf

Mutasd_meg,_ki_vagy.pdf

Pi.pdf

Science_Camp+_prezentacio.pdf

Filmjelenetek:

21-Las_Vegas_ostroma_4.dia.mp4

21-Las_Vegas_ostroma_9.dia.mp4

A_számolás_joga_3.dia.mp4

A_számolás_joga_12.dia.mp4

Az_ember,_aki_ismerte_a_végtelent_4.dia.mp4

Az_ember,_aki_ismerte_a_végtelent_7.dia.mp4

Egy_csodálatos_elme_2.dia.mp4

Egy_csodálatos_elme_6.dia.mp4

Fermat_szobája_6.dia.mp4

Fermat_szobája_11.dia.mp4

Good_Will Hunting_3.dia.mp4

Good_Will Hunting_23.dia.mp4

Kódjátsszma_3.dia.mp4

Kódjátsszma_5.dia.mp4

Mutasd_meg,_ki vagy_3.dia.mp4

Mutasd_meg,_ki vagy_6.dia.mp4

Pi_2.dia.mp4

Pi_6.dia.mp4

Válaszlapok:

Scan1.pdf

Scan2.pdf

Scan3.pdf

Scan4.pdf

Scan5.pdf

Scan6.pdf

Scan7.pdf

Scan8.pdf

Scan9.pdf

Scan10.pdf

Scan11.pdf

Függelék forrás:

Fuggelek_forras.pdf