

A dolgozatban taglalt kérdések:

A dolgozat fő célja a Cauchy-féle függvényegyenlet nem-reguláris azaz nem cx alakú bijektív megoldásainak felfedezése, Hamel bázisok segítségével való leírása, illetve ezek struktúraszerű jellemzése volt.

Viszont mivel ez egy középiskolás TDK-dolgozat, ezért szükségszerűen ezen kérdés tanulmányozása előtt meg kellett ismernem olyan fogalmakat, mint az injekció, szürjekció, bijekció, Hamel bázis, számosság. Ebből kifolyólag a kutatás során a konzulensem (Burai Pál) által feltett kérdések megválaszolásával és a dolgozatban szereplő tételek bizonyításával foglalkoztam. Ezen során olyan kérdéseket próbáltam meg feldolgozni mint a: „Mi az additív függvények tulajdonságai?”, „Mi a Hamel bázis és milyen alapvető tulajdonságokkal rendelkezik?”, „Milyen leképzés esetén kapunk Hamel bázisból Hamel bázist?”, „Mikor lesz egy additív bijekció nem-reguláris?” majd végezetül „Hogyan írhatóak le az additív bijekciók Hamel bázisok segítségével?”.

Sajnos az utóbbi kérdést nem sikerült maradéktalanul megválaszolnom.

A dolgozat során alkalmazott módszerek:

Mivel egy additív függvényt teljes mértékben meghatároz az additív függvény egy tetszőleges Hamel bázison felvett értékei, ezért a kutatás során általában csak az additív bijekció Hamel bázison felvett értékeit vizsgáltam.

A bizonyítások módszerét tekintve lineáris algebrát illetve az alapdefiníciókat (bijekció, Hamel bázis) használtam fel, ezek segítségével direkt és indirekt bizonyításokat végeztem.

Saját eredmények:

A dolgozatban található összes bizonyítás saját munka. Ezek közül kivételt képez a 2. Tétel, ahol a bizonyítás második felét Maksa Gyula és Bessenyei Mihály¹ cikkijéből vettem át. Az 5. és 8. Tétel, amiket nem sikerült bizonyítanom, így ezen tételek Marek Kuczma² valamint Kandasamy Muthuvel³ cikkéből származnak. Továbbá a 6. Tétel, amit habár sikerült bizonyítanom, de ezen bizonyítást először Georg Hamel⁴ írta le.

Ezenfelül az eredmények további 2 csoportra bonthatóak. A szakirodalomban már ismert eredményekre (1, 3, 4, 7, 9, 10-es Tétel és az 1. Állítás), valamint az új eredményekre, amik a 11, 12, 13, 14 és 15-ös Tétel.

A dolgozatban az előbbieknél megfelelő minősítések minden tételnél jelezve vannak.

¹Maksa Gyula Bessenyei Mihály. *Mennyi a téglalap területe?* KöMaL 2022, áprilisi szám, 2022

²Marek Kuczma. *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*. Birkhäuser Basel, 1985

³Kandasamy Muthuvel. *Some topological properties of Hamel bases*. Real Analysis Exchange, 20(2):819 – 822, 1995

⁴G. Hamel. *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x + y) = f(x) + f(y)$* . Math. Ann., 60:459–462, 1905