

"Csúnya" egyenesek a síkon

Tudományos Diákköri
Dolgozat

Czakó Tamás
Alternatív Közgazdasági Gimnázium
Budapest
12. évfolyam

Burai Pál (Konzulens)

Tartalomjegyzék

1. A dolgozatban található eredményekről	3
2. Motiváció	3
3. Bevezetés	3
4. Additív függvények és Hamel bázisok	5
5. Additív bijekciók	17
6. További kutatási lehetőségek, tervek	21
Irodalomjegyzék	21

1. A dolgozatban található eredményekről

A dolgozatban található minden bizonyítás önálló munka. Ennek ellenére egyes eredmények már ismertek (folklór, vagy idézhető munkában találhatóak).

Az új eredményeknél előfordul, hogy a szakirodalomban már ismert általánosabb eredmény, de az itt szereplő speciális esetek ettől független, önálló munkák.

Az előbbieknek megfelelő minősítéseket minden tételnél jelezzük.

2. Motiváció

Az additív Cauchy féle függvényegyenlet

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

"szép" megoldásai az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = cx, \quad x \in \mathbb{R}$$

alakú függvények, ahol c tetszőleges valós konstans. Geometriai szemmel ezek pontosan az origón átmenő egyenesek. Az is látható, hogy a "szép" megoldások egy-egyértelmű (bijektív) leképezései a valós számegyenesnek önmagára, ha a választott c konstans különbözik nullától.

Ám vannak olyan bijektív megoldásai is a fenti egyenletnek (amik szintén "átmennek" az origón), amelyek nem cx alakúak. Ezeket "csúnya" (origón átmenő) egyeneseknek hívjuk. Ezeket a függvényeket geometriai szemmel már nem olyan egyszerű leírni, mint a "szép" megoldásokat. Nem "egyenes-szerűek" geometriai értelemben. Például a sík tetszőleges pontjához tetszőlegesen közel van az ilyen függvényeknek gráfpontja [BM22]. Azaz, minden $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ és $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy

$$\sqrt{(x - u)^2 + (v - f(x))^2} \leq \varepsilon.$$

A dolgozat célja a nem cx alakú, bijektív megoldások felfedezése, a "csúnya" egyenesek felírása Hamel bázisok segítségével és ezek tulajdonságainak vizsgálata.

3. Bevezetés

Ebben a részben összefoglaljuk az additív Cauchy egyenlettel kapcsolatos alapvető tudnivalókat. Ezek az eredmények megtalálhatóak például a [BM22] cikkben vagy pedig a [Kuc85] könyvben.

Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény lineáris, ha additív és homogén, azaz teljesíti az

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad x, y \in \mathbb{R},$$

$$f(t \cdot x) = t \cdot f(x) \quad t, x \in \mathbb{R}.$$

egyenleteket. Az ilyen függvényeket (origón átmenő) "szép" egyeneseknek nevezzük.

1. Tétel (Folklór). *Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor lineáris, ha létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $f(x) = cx$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.*

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Mivel f homogén, ezért

$$f(x) = xf(1).$$

Amelyből $c := f(1)$ választással adódik az állítás. $\square$

Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektív, additív, racionálisan homogén függvényeket (origón átmenő) "csúnya" egyeneseknek nevezzük. Ezen függvények tulajdonsága, hogy teljesítik az alábbi függvényegyenleteket:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad x, y \in \mathbb{R},$$

$$f(r \cdot x) = r \cdot f(x) \quad r \in \mathbb{Q}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Tétel (Folklór). *Ha egy függvény additív, akkor racionálisan homogén is.*

Bizonyítás. Vegyük a függvényünk helyettesítési értékét az $x = 0$ pontban.

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$$

Ezen egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $f(0) = 0$. Továbbá:

$$f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x),$$

$$-f(x) = f(-x). \quad (2.1)$$

Tehát f páratlan függvény.

Ezek után ha $x = y$, akkor:

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$f(2x) = 2f(x).$$

¹Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy $f(mx) = mf(x)$ valamilyen $m \in \mathbb{N}$ -re. Nézzük meg, hogy öröklődik-e ez a tulajdonság $(m+1)x$ -re:

$$f((m+1)x) = f(mx) + f(x),$$

$$f((m+1)x) = mf(x) + f(x) = (m+1)f(x).$$

Vagyis ha egy függvény additív, akkor homogén a természetes számok halmazán. Ebből következik, hogy:

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right)$$

Valamilyen $m, n \in \mathbb{N}$ -re. Továbbá:

$$\frac{m}{n} \cdot nf\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n} \cdot f(x)$$

Vagyis akkor a pozitív racionális számok halmazán is homogén. Végezetül a 2.1 egyenlet segítségével:

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(-x) = -\frac{m}{n}f(x)$$

Ahogy az bizonyítandó volt. □

A továbbiakban az ilyen függvények tulajdonságairól fogunk megállapításokat tenni.

4. Additív függvények és Hamel bázisok

Legyen $H \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy H Hamel-bázisa [Ham05]² $\mathbb{R}$ -nek (a racionális számok teste fölött), ha minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ felírható egyértelműen az alábbi formában:

$$x = \sum_{i=1}^{k(x)} r_i(x)h_i$$

Ahol $r_i(x) \in \mathbb{Q}$, $h_i \in H$ és $k(x) \in \mathbb{N}$. Például ha $h \in H$ akkor $h = \sum_{i=1}^{k(x)} r_i(x)h_i = 1 \cdot h$, és ez a felírás csak egyféleképpen, tehát egyértelműen valósulhat meg.

Ha nem okoz félreértést, akkor a továbbiakban $k(x)$ -et és $r_i(x)$ -et k -val és r_i -vel fogjuk jelölni.

¹A bizonyítás inentől következő részét a [BM22] cikkből vettük át.

²Georg Hamel 1905-ben ennek a fogalomnak a segítségével adta meg az additív Cauchy egyenlet összes megoldását a fenti dolgozatban.

3. Tétel (Folklór). *0 nem lehet eleme egy Hamel bázisnak sem.*

Bizonyítás. Végezzük a bizonyítást indirekt módon, azaz tegyük fel, hogy $0 \in H$. Továbbá vegyünk egy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ számot amelynek a felírásában szerepel 0.

$$x = r_0 \cdot 0 + \sum_{i=1}^k r_i h_i$$

Ekkor bármilyen $r_0 \in \mathbb{Q}$ esetén az $r_0 \cdot 0$ szorzat nullát fog adni, ami nem befolyásolja az összeg értékét. Vagyis x -nek ekkor többfajta felírása létezik, ám ez nem lehet, mert egy tetszőleges Hamel bázissal minden $x \in \mathbb{R}$ -et csak egyféleképpen lehet felírni. Vagyis $0 \notin H$. $\square$

4. Tétel (Folklór). *Tetszőleges Hamel bázisnak legfeljebb 1 racionális eleme lehet.*

Bizonyítás. Legyen H egy tetszőleges Hamel bázis, amelyben $q_1, q_2 \in H$, $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, de $q_1 \neq q_2$. Ezután írjuk fel q_1 -et mindkét racionális elem segítségével.

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{q_1}{q_2} \cdot q_2 \\ q_1 &= 1 \cdot q_1 \end{aligned}$$

Vagyis:

$$1 \cdot q_1 = \frac{q_1}{q_2} \cdot q_2$$

Mivel H Hamel bázis, ezért mindkét felírásnak egyeznie kell, viszont $\frac{q_1}{q_2} \neq 1$, vagyis ezek a felírások különböznek ami ellentmondás. Továbbá könnyen belátható, hogy kettőnél több racionális tag esetén sem lesz egyértelmű ez a felírás.

Tehát tetszőleges Hamel bázisnak legfeljebb 1 racionális eleme lehet. $\square$

A fenti állításból nem következik, hogy minden Hamel bázisnak van is racionális eleme és ez nem is igaz.

1. Állítás (Folklór). *Létezik olyan Hamel bázis, amelynek nincs racionális eleme.*

Bizonyítás. Elegendő megadni két olyan irracionális számot, amelyek lineárisan függetlenek és belőlük kikombinálható egy racionális szám.

$$q\sqrt{2} + r(\sqrt{2} - 1) = 0, \quad r, q \in \mathbb{Q}, \quad rq \neq 0$$

pontosan akkor, ha

$$\sqrt{2} = \frac{r}{r+q},$$

ami ellentmondás.

Másrészt,

$$1 \cdot \sqrt{2} + (-1) \cdot (\sqrt{2} - 1) = 1.$$

□

Ha H Hamel bázisa $\mathbb{R}$ -nek, akkor nem lesz véges, sőt, számossága megegyezik a valós számok halmazának számosságával.

5. Tétel ([Kuc85]). *$\mathbb{R}$ -nek tetszőleges Hamel bázisa nem megszámlálható számosságú.*

1. Definíció. *H Hamel bázis által generált függvénynek nevezzük azt a függvényt, amelynek alakja $f(x) = \sum_{i=1}^{k(x)} r_i f(h_i)$.*

Ez praktikusán azt jelenti, hogy a függvény értékeit egyértelműen meghatározzák egy adott Hamel bázison felvett értékei.

Georg Hamel 1905-ben megjelent [Ham05] cikkében bebizonyította, hogy az additív Cauchy egyenletnek ilyen módon lehet megadni az összes megoldását.

6. Tétel ([Ham05]). *Tetszőleges Hamel bázis által generált f függvény kielégíti az*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

additív Cauchy-féle függvényegyenletet. Megfordítva, azon függvények amelyek teljesítik az additív Cauchy-féle függvényegyenletet, azok felírhatóak egy tetszőleges Hamel bázis generált függvényeként.

Bizonyítás. Legyen adott egy H Hamel bázis és válasszunk két tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ számot amelyeknek a felírása:

$$x = \sum_{i=1}^{k(x)} r_i h_i \quad r_i \in \mathbb{Q}, h_i \in H,$$

$$y = \sum_{j=1}^{g(y)} r_j h_j \quad r_j \in \mathbb{Q}, h_j \in H.$$

Ekkor vegyük a két szám összegét a Hamel bázis által generált függvényen:

$$f(x+y) = f\left(\sum_{i=1}^{k(x)} r_i h_i + \sum_{j=1}^{g(x)} r_j h_j\right) = \sum_{i=1}^{k(x)} r_i f(h_i) + \sum_{j=1}^{g(x)} r_j f(h_j) = f(x) + f(y)$$

Tehát tetszőleges Hamel bázis által generált függvény additív.

A megfordítás rögtön adódik az additív függvények racionális homogenitásából. $\square$

A következő tétel Marek Kuczma könyvének [Kuc85] 11. fejezetének az 1-es feladatának bizonyítása.

7. Tétel ([Kuc85] feladat). *Ha H Hamel bázis és $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor a*

$$H' := \{ h' \mid h' = qh, \text{ ahol } h \in H \}$$

módon definiált halmaz is Hamel bázis.

Bizonyítás. Először bizonyítsuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ felírható egyértelműen H' segítségével. Majd bizonyítsuk be hogy H' lineárisan független.

Tegyük fel, hogy H' nem Hamel bázis, ezért van olyan $x \in \mathbb{R}$ ami nem írható fel. Vegyük ekkor az $\frac{x}{q}$ számnak a H -beli felírását:

$$\begin{aligned} \frac{x}{q} &= \sum_{i=1}^{k(x)} r_i h_i \quad \cdot q \\ x &= q \cdot \sum_{i=1}^{k(x)} r_i h_i \\ x &= \sum_{i=1}^{k(x)} r_i \cdot q h_i \\ x &= \sum_{i=1}^{k(x)} r_i h'_i \end{aligned}$$

Ám ez x -nek a H' Hamel bázis általi felírása, ami ellentmond a feltevésünknek, hogy x -nem írható fel. Ebből arra következtethetünk hogy minden $x \in \mathbb{R}$ felírható H' segítségével.

Következőnek lássuk be, hogy H' lineárisan független. Végezzük a bizonyítást indirekt módon, azaz feltételezzük hogy van olyan $x \in \mathbb{R}$ ami többféle képpen is felírható. Legyen két különböző felírása:

$$\sum_{i=1}^k r_i h'_i = \sum_{j=1}^g r_j h'_j$$

Ahol, $r_i \neq r_j$, $h'_i \neq h'_j$ valamely r_i és h'_i esetén. Ekkor:

$$\sum_{i=1}^k r_i \cdot q h_i = \sum_{j=1}^g r_j \cdot q h_j$$

$$q \cdot \sum_{i=1}^k r_i h_i = q \cdot \sum_{j=1}^g r_j h_j$$

$$x = \sum_{i=1}^k r_i h_i = \sum_{j=1}^g r_j h_j$$

Ám mivel H Hamel bázis, így x -nek csak egy felírása van, ezért a két oldal minden tagja szükségszerűen egyenlő. Ez viszont ellentmond a feltevésünknek, hogy a két felírás legalább 1 elemben eltér. Tehát H' lineárisan független, mivel minden $x \in \mathbb{R}$ csak egy alakban írható fel.

Végezetül, mivel H' lineárisan független és minden valós szám felírható vele, ezért H' Hamel bázis. $\square$

Marek Kuczma könyvének [Kuc85] 11. fejezetében található a 3-as probléma, amely azt kívánja, hogy bizonyítsuk hogy létezik olyan $q \in \mathbb{R}$ amely esetén a $H' := \{h' \mid h' = h + q \ h \in H\}$ nem lesz Hamel bázis.

Ezt könnyű bizonyítani hiszen a 3. Tétel értelmében nincs olyan Hamel bázis amelynek eleme a 0. Vagyis ha $q = -h$, akkor az új halmaz képzésekor az egyik tagot a nullába toljuk, így az új halmaz nem lehet Hamel bázis.

Ide kapcsolódik Kandasamy Muthuvel második tétele [Mut95], ahol bizonyította hogy:

8. Tétel ([Mut95]). $H + q$ akkor és csakis akkor lesz Hamel bázis, ha q valós szám H halmazbeli felírásában az együtthatók összege nem -1 , vagyis $-1 \neq \sum_{i=0}^{k(q)} r_i$.

Látható, hogy ennek a tételnek a speciális esete az előző megállapítás. Ugyanis ha $q \neq -h$, akkor q felírásában csak h együtthatója szerepel, ami pedig -1 .

Az 8. Tétel eredeti bizonyításától teljesen függetlenül egy másik úton is kijött ugyanez az eredmény. A következő tételben ennek levezetése látható.

9. Tétel (saját eredmény). *Ha H és H' Hamel bázis, ahol*

$$H' := \{h' \mid h' = h + a \quad h \in H\}$$

és $a \in \mathbb{R}$ valamint $a = \sum_{i=1}^{k(a)} q_i h_i(a)$, akkor $\sum_{i=1}^{k(a)} q_i \neq -1$.

Bizonyítás. Legyen H, H' Hamel bázis, ahol

$$H' := \{h' \mid h' = h + a \quad h \in H\},$$

ahol $a \in \mathbb{R}$ és a felírása a H Hamel bázis segítségével $a = \sum_{i=1}^{k(a)} q_i h_i(a)$.

Ekkor vegyünk egy tetszőleges $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ -et és írjuk fel H' segítségével:

$$x = \sum_{i=1}^{j(x)} r_i h'_i(x) = \sum_{i=1}^{j(x)} r_i \cdot (h_i(x) + a)$$

Ekkor ha van olyan $h_i(a) \in H$ amely nem szerepel x felírásában, akkor hozzá adjuk a kifejezéshez valamilyen $r_i \cdot (h_i(a) + a)$ alakban. Az ilyen tagoknál legyen $r_i = 0$ hogy ne változzon az összeg. Az általános megoldás levezetése érdekében most tételezzük fel, hogy x felírásában megtalálható az összes $h_i(a) \in H$, aminek segítségével a felírható. Továbbá jelölés szempontjából legyen $h_i(x) = h_i(a)$ minden $1 \leq i \leq k(a)$ esetén, az ilyen báziselemek függőségét a továbbiakban nem jelölöm, így:

$$x = \sum_{i=1}^{k(a)} r_i (h_i(x) + a) + \sum_{i=k(a)+1}^{j(x)} r_i (h_i(x) + a)$$

$$x = r_1(h_1 + a) + r_2(h_2 + a) + \cdots + r_k(h_k + a) + \sum_{i=k(a)+1}^{j(x)} r_i(h_i(x) + a)$$

Mivel a rögzített x ilyen felírása is egyértelmű.

$$\begin{aligned} x = & r_1 \left(h_1 + \sum_{i=1}^{k(a)} q_i h_i \right) + r_2 \left(h_2 + \sum_{i=1}^{k(a)} q_i h_i \right) + \cdots + r_k \left(h_k + \sum_{i=1}^{k(a)} q_i h_i \right) \\ & + \sum_{i=1}^{k(a)} q_i h_i \cdot \sum_{i=k(a)+1}^{j(x)} r_i + \sum_{i=k(a)+1}^{j(x)} r_i h_i(x) \end{aligned}$$

Ezek után újracsoportsítjuk az összeget h_i szerint:

$$\begin{aligned}
x = & h_1 \left(r_1 + q_1 \left(r_1 + r_2 + \cdots + r_k + \sum_{i=k(a)+1}^{j(x)} r_i \right) \right) \\
& \vdots \\
& + h_k \left(r_k + q_k \left(r_1 + r_2 + \cdots + r_k + \sum_{i=k(a)+1}^{j(x)} r_i \right) \right) \\
& + \sum_{i=k(a)+1}^{j(x)} r_i h_i(x)
\end{aligned}$$

Az egyszerűség kedvéért legyen:

$$\begin{aligned}
R_1 = & r_1 + q_1 \left(r_1 + r_2 + \cdots + r_k + \sum_{i=k(a)+1}^{j(x)} r_i \right) \\
& \vdots \\
R_k = & r_k + q_k \left(r_1 + r_2 + \cdots + r_k + \sum_{i=k(a)+1}^{j(x)} r_i \right)
\end{aligned}$$

Így:

$$x = h_1 R_1 + h_2 R_2 + \cdots + h_k R_k + \sum_{i=k(a)+1}^{j(x)} r_i h_i(x)$$

Mivel az összes r_i és q_i racionális szám, ezért az összes R_i is racionális lesz. Azaz megkaptuk x felírását a H Hamel bázisban. Mivel x tetszőleges valós szám, ezért az R_i és r_i $i \leq k(a) + 1$ együtthatóknak az összes racionális értéket fel kell tudni venniük az összes kombinációban. R_i értéke viszont adott x -től, így az összes r_i $1 \leq i \leq j(x)$ -től függ. Vizsgáljuk meg, hogy teljesül-e a fenti feltétel. Írjuk le az együtthatók képletét r_i -re rendezve:

$$\begin{aligned}
(1 + q_1)r_1 + \sum_{i=2}^{j(x)} q_1 r_i &= R_1 \\
q_2 r_1 + (1 + q_2)r_2 + \sum_{i=3}^{j(x)} q_2 r_i &= R_2 \\
&\vdots \\
\sum_{i=1}^{k(a)-1} q_k r_i + (1 + q_k)r_k + \sum_{i=k(a)+1}^{j(x)} q_k r_i &= R_k \\
r_{k(a)+1} &= r_{k(a)+1} \\
&\vdots \\
r_{j(x)} &= r_{j(x)}
\end{aligned}$$

Ez egy $j(x)$ változós lineáris egyenletrendszer, ami mátrix formában felírva:

$$\begin{bmatrix}
1 + q_1 & q_1 & q_1 & \cdots & q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\
q_2 & 1 + q_2 & q_2 & \cdots & q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
q_k & q_k & q_k & \cdots & 1 + q_k & q_k & \cdots & q_k \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
r_1 \\
r_2 \\
\vdots \\
r_k \\
r_{k+1} \\
\vdots \\
r_{j(x)}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
R_1 \\
R_2 \\
\vdots \\
R_k \\
r_{k+1} \\
\vdots \\
r_{j(x)}
\end{bmatrix}$$

Ennek az egyenletrendszernek csak akkor van megoldása, ha az első mátrix determinánsa nem 0 és a jobb oldali vektor nem 0. Vizsgáljuk meg a determinánst:

$$\det \begin{bmatrix}
1 + q_1 & q_1 & q_1 & \cdots & q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\
q_2 & 1 + q_2 & q_2 & \cdots & q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
q_k & q_k & q_k & \cdots & 1 + q_k & q_k & \cdots & q_k \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix} \neq 0$$

Vonjuk ki az első oszlopot a többiből, így:

$$\det \begin{bmatrix} 1+q_1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ q_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_k & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

Ezek után, adjuk hozzá az összes sort az első sorhoz:

$$\det \begin{bmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{k(a)} q_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_k & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

Végezetül, vonjuk ki az $1 \leq i \leq k$ -ik sorokból az első sor $\frac{q_i}{1 + \sum_{i=1}^k q_i}$ -szorosát:

$$\det \begin{bmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{k(a)} q_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

Ez egy diagonális mátrix, így a determináns az átlón lévő értékek szorzata:

$$\begin{aligned} 1 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \cdots + q_k &\neq 0 \\ q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \cdots + q_k &\neq -1 \\ \sum_{i=1}^{k(a)} q_i &\neq -1 \end{aligned}$$

Vagyis, annak hogy x -nek H -beli felírása Hamel bázisként viselkedjen feltétele, hogy a együtthatóinak összege nem lehet -1 .

□

Habár a 8. Állítás értelmében világosan látható, hogy egy $H + q$ képzésű halmaz mikor lesz Hamel bázis. A kutatás során nem mindig rendelkezünk ezzel a tudással, így bizonyításra került ennek az összefüggésnek egy másik speciális esete.

10. Tétel (saját eredmény). *Ha H Hamel bázis, $q \in \mathbb{Q}$ és $h_1 \in \mathbb{Q} \setminus \{-q\}$, akkor $H + q$ is Hamel bázis.*

Bizonyítás. Legyen $H' := \{h' \in \mathbb{R} \mid h' = h + q \text{ valamely } h \in H\}$, ahol $h \in H$, $h_1 \in \mathbb{Q}$ és $q \in \mathbb{Q} \setminus \{-h_1\}$.

Bizonyítsuk be, hogy bármilyen $x \in \mathbb{R}$ -nek létezik felírása. Ehhez vegyünk egy tetszőleges x -et és írjuk fel H segítségével:

$$x = \sum_{i=1}^k r_i h_i, \quad x = r_1 h_1 + \sum_{i=2}^k r_i h_i.$$

(Amennyiben h_1 nem tagja ennek a felírásnak, akkor r_1 -et nullának választva hozzáadhatjuk). Ekkor, írjuk fel r_1 -et a következő alakban:

$$r_1 = \frac{r_1 - \frac{q}{h_1} \cdot \sum_{i=2}^k r_i}{1 + \frac{q}{h_1}} \cdot \left(1 + \frac{q}{h_1}\right) + \frac{q}{h_1} \sum_{i=2}^k r_i.$$

Vegyünk észre, hogy mivel $r_i, q \in \mathbb{Q}$, ezért r_1 racionális szám. Továbbá, a nevező nem lehet 0, mert korábban kizártuk $q = -h_1$ -et, továbbá a 3. Tétel értelmében h_1 nem lehet 0. Az egyszerűség kedvéért vezessük be az $R_1 = \frac{r_1 - \frac{q}{h_1} \cdot \sum_{i=2}^k r_i}{1 + \frac{q}{h_1}}$ jelölést.

$$x = \left(R_1 \cdot \left(1 + \frac{q}{h_1}\right) + \frac{q}{h_1} \sum_{i=2}^k r_i \right) h_1 + \sum_{i=2}^k r_i h_i,$$

$$x = R_1 \cdot \left(1 + \frac{q}{h_1}\right) h_1 + q \sum_{i=2}^k r_i + \sum_{i=2}^k r_i h_i,$$

$$x = R_1 \cdot (h_1 + q) + \sum_{i=2}^k r_i \cdot (h_i + q),$$

$$x = R_1 h'_1 + \sum_{i=2}^k r_i h'_i.$$

Ezzel meg is kaptuk x -nek a H' -beli felírását.

Ezek után bizonyítsuk, hogy amennyiben $h_1 \in \mathbb{Q}$, akkor H' lineárisan független. Ha $q = 0$ akkor készen vagyunk. Tegyük fel, hogy H' nem független, azaz létezik valamilyen $x \in \mathbb{R}$ -nek egynél több felírása. Írjuk ezeket fel:

$$\sum_{i=1}^k r_i h'_i = \sum_{j=1}^g s_j h'_j.$$

Ahol $s_j \in \mathbb{Q}, \mathfrak{h}' \in H'$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k r_i \cdot (h_i + q) &= \sum_{j=1}^g s_j \cdot (\mathfrak{h}_j + q), \\ q \sum_{i=1}^k r_i + \sum_{i=1}^k r_i h_i &= q \sum_{j=1}^g s_j + \sum_{j=1}^g s_j \mathfrak{h}_j, \\ q \cdot \left(\sum_{i=1}^k r_i - \sum_{j=1}^g s_j \right) &= \sum_{j=1}^g s_j \mathfrak{h}_j - \sum_{i=1}^k r_i h_i.\end{aligned}$$

Ekkor a bal oldalon egy racionális szám, a jobb oldalon pedig ezen racionális szám H Hamel bázis szerinti felírása. Mivel ez a felírás egyértelmű, ezért ez csak valamilyen $q_1 h_1$ alakban lehetséges, vagyis az összes irracionális $h, \mathfrak{h}$ -nak és ezek együttthatóinak ki kell esnie, illetve $h_1 = \mathfrak{h}_1$, ezért:

$$\begin{aligned}q \cdot (r_1 - s_1) &= s_1 h_1 - r_1 h_1 \\ q \cdot (r_1 - s_1) &= -h_1 \cdot (r_1 - s_1)\end{aligned}$$

ez viszont csak akkor lehetséges, ha $q = -h_1$ ám ez ellentmondás. Vagyis H' lineárisan független.

Mivel H' lineárisan független és a segítségével minden valós szám felírható, ezért H' Hamel bázis. $\square$

11. Tétel (saját eredmény). *Legyen $H \subset \mathbb{R}_+$ adott Hamel bázis és definiáljuk a következő halmazokat:*

$$H_n := \{h \in H \mid n < h \leq n+1\},$$

ahol $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}^+$ és $h_1 \in \mathbb{Q}$. Ekkor

$$\tilde{H} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (H_n - n)$$

is Hamel bázist alkot.

Bizonyítás. Először is rögzítsük le, hogy $h_1 \in \mathbb{Q}$, továbbá vegyük észre, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ felírható H segítségével a következő alakban: $n = \frac{n}{h_1} \cdot h_1$. Az egyszerűség kedvéért legyen $\frac{n}{h_1} = q_n$.

Először vizsgáljuk meg, hogy vajon minden $x \in \mathbb{R}$ felírható $\tilde{H}$ segítségével? Vegyünk tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ -et és írjuk fel H segítségével:

$$x = \sum_{i=1}^k r_i h_i, \quad \text{azaz} \quad x = r_1 h_1 + \sum_{i=2}^k r_i h_i.$$

(Amennyiben h_1 nem tagja ennek a felírásnak, akkor r_1 -et nullának választva hozzáadhatjuk). Legyen $q_{n_i} = \frac{n_i}{h_1}$, ahol n_i a megfelelő h_i -hez tartozó, H_n képzési szabályának megfelelő természetes szám. Ekkor, írjuk fel r_1 -et a következő alakban:

$$r_1 = \frac{r_1 + \sum_{i=2}^k r_i q_{n_i}}{1 - q_{n_1}} \cdot (1 - q_{n_1}) - \sum_{i=2}^k r_i q_{n_i}.$$

Vezessük be az $R_1 = \frac{r_1 + \sum_{i=2}^k r_i q_{n_i}}{1 - q_{n_1}}$ jelölést, továbbá vegyük észre, hogy mivel a négy alapművelet zárt a racionális számok halmazán, ezért R_1 racionális szám. Ekkor:

$$\begin{aligned} x &= \left(R_1 \cdot (1 - q_{n_1}) - \sum_{i=2}^k r_i q_{n_i} \right) h_1 + \sum_{i=2}^k r_i h_i, \\ x &= R_1 \cdot (h_1 - q_{n_1} h_1) - h_1 \sum_{i=2}^k r_i q_{n_i} + \sum_{i=2}^k r_i h_i, \\ x &= R_1 \cdot \left(h_1 - \frac{n_1}{h_1} h_1 \right) - \sum_{i=2}^k r_i \cdot \frac{n_i}{h_1} h_1 + \sum_{i=2}^k r_i h_i, \\ x &= R_1 (h_1 - n_1) - \sum_{i=2}^k r_i n_i + \sum_{i=2}^k r_i h_i, \\ x &= R_1 (h_1 - n_1) + \sum_{i=2}^k r_i \cdot (h_i - n_i). \end{aligned}$$

Ekkor viszont minden $h_i - n_i$ megfelel $\tilde{H}$ képzési szabályának, azaz:

$$x = R_1 \tilde{h}_1 + \sum_{i=2}^k r_i \tilde{h}_i$$

Így pedig megkaptuk tetszőleges x $\tilde{H}$ -beli felírását.

Most bizonyítsuk be, hogy $\tilde{H}$ lineárisan független. Tételezzük fel, hogy ez nem igaz, azaz felírható

$$0 = r_1 \tilde{h}_1 + r_2 \tilde{h}_2 + \cdots + r_i \tilde{h}_i + \cdots$$

úgy, hogy van legalább egy r_i ami nem egyenlő 0-val és legfeljebb véges sok különbözik nullától. $\tilde{H}$ képzési szabálya alapján alakítsuk át a kifejezést, az alábbi módon:

$$\begin{aligned}
0 &= r_1(h_1 - n_1) + r_2(h_2 - n_2) + \cdots + r_i(h_i - n_i) + \cdots \\
0 &= \sum_{i=1}^{\infty} r_i h_i - \sum_{i=1}^{\infty} r_i n_i, \\
\sum_{i=1}^{\infty} r_i n_i &= \sum_{i=1}^{\infty} r_i h_i.
\end{aligned}$$

Ekkor a bal oldalon egy racionális szám áll, így a jobb oldalon álló ki-fejezésnek is racionálisnak kell lennie. Mivel a H Hamel bázis általi felírás lineárisan független, ezért ez csak úgy valósulhat meg ha minden irracionális h_i együtthatóját 0-nak választjuk meg. Így:

$$r_1 n_1 = r_1 h_1$$

Mivel eddig az összes irracionális r_i -t 0-nak választottuk meg, ezért ha $\tilde{H}$ lineárisan függő, akkor r_1 nem lehet 0, azaz leoszthatjuk vele az egyenletet.

$$n_1 = h_1$$

Ám ez lehetetlen, mert n_i képzési szabálya ($n < h \leq n+1$) ezt nem engedi meg. Tehát ellentmondásra jutottunk, azaz $\tilde{H}$ lineárisan független.

Mivel $\tilde{H}$ lineárisan független és minden valós x felírható vele, ezért $\tilde{H}$ Hamel bázis □

5. Additív bijekciók

Az utolsó fejezetben az additív Cauchy egyenlet bijektív megoldásairól te-szünk megállapításokat.

A korábbiakból látható, hogy az ilyen függvények esetén is az a fontos, hogy egy adott Hamel bázison hogyan viselkednek. Sajnos az nem igaz, hogy egy Hamel bázis bijektív képe Hamel bázis, hiszen tetszőleges Hamel bázist leképezhetünk bijektív módon például úgy, hogy a szóban forgó bázisban egy elemet kicserélünk egy másik kétszeresére, így a képhalmaz függő lesz.

Eredeti célunk az volt, hogy teljes leírását adjuk az additív bijekcióknak, amelyet maradéktalanul sajnos nem sikerült megvalósítani.

2. Definíció. Legyen H Hamel bázis és $\sigma : H \rightarrow H$ egy bijekció. Ekkor σ -t a H halmaz egy permutációjának nevezzük. Ekkor az $f_\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_\sigma(x) := \sum_{i=1}^{k(x)} r_i \sigma(h_i)$$

függvényt a σ permutáció által generált függvénynek nevezzük.

Bebizonyítjuk, hogy f_σ bijektív megoldása az additív Cauchy egyenletnek.

12. Tétel (saját eredmény). *Amennyiben $\sigma : H \rightarrow H$ bijekció, akkor a hozzá tartozó $f_\sigma(x) = \sum_{i=1}^k r_i \sigma(h_i)$ függvény additív és bijektív.*

Bizonyítás. Azt, hogy f_σ additív, a 6. Tételhez hasonlóan beláthatjuk. Először bizonyítjuk, hogy f_σ szürjektív:

Legyen $y \in \mathbb{R}$ tetszőleges, ekkor:

$$y = \sum_{j=1}^{k(y)} r_j(y) h_j(y).$$

Ekkor $\sigma^{-1}(h_j(y)) \in H$ minden j esetében, mivel σ bijekció. Legyen:

$$x = \sum_{j=1}^{k(y)} r_j(y) \sigma^{-1}(h_j(y)).$$

Vegyük, x -en az f_σ függvényt:

$$f_\sigma(x) = \sum_{j=1}^{k(y)} r_j(y) h_j(y) = y.$$

Vagyis tetszőleges y -hoz megszerkeszthető egy $x \in \mathbb{R}$, azaz f_σ szürjektív.

Ezek után bizonyítsuk be hogy f_σ injektív. Végezzük a bizonyítást indirekt módon. Legyen $x, y \in \mathbb{R}$ és $x \neq y$. Ekkor feltételezzük, hogy:

$$f_\sigma(x) = f_\sigma(y).$$

Ezen kifejezés csak akkor igaz, ha f_σ nem injektív. Végezzük el a függvényt:

$$\sum_{i=1}^{k(x)} r_i \sigma(h_i) = \sum_{j=1}^{g(y)} r_j \sigma(h_j).$$

Ekkor két, Hamel bázis előállított számot kapunk, ám a Hamel bázis definíciójából adódóan, egy valós számnak csak 1 felírása létezik. Ezáltal szükséges, hogy $k(x) = g(y)$, $r_i = r_j$ és mivel σ bijekció, ezért $h_i = h_j$.

Ebből következtetni lehet arra, hogy $x = y$, ám ekkor ellentmondásra jutunk az alapfeltételezésünkkel. Tehát f_σ injektív.

Mivel f_σ szürjektív, injektív és additív, ezért f_σ additív és bijektív is. $\square$

13. Tétel (saját eredmény). *Az összes additív bijekció nem állítható elő egy rögzített Hamel bázis összes permutációjának generált függvényeként.*

Bizonyítás. Legyen H egy rögzített Hamel bázis, továbbá $\sigma : H \rightarrow cH$ bijekció, ahol $c \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. Jelen esetben legyen ez a hozzárendelés $h_i \mapsto ch_i$. Vizsgáljuk meg a sigma bijekció generált függvényének additivitását.

Legyen $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, továbbá

$$x = \sum_{i=1}^{k(x)} r_i h_i \quad r_i \in \mathbb{Q}, h_i \in H,$$

$$y = \sum_{j=1}^{g(y)} r_j h_j \quad r_j \in \mathbb{Q}, h_j \in H.$$

Ekkor:

$$f_\sigma(x + y) = f_\sigma \left(\sum_{i=1}^{k(x)} r_i h_i + \sum_{j=1}^{g(y)} r_j h_j \right),$$

$$= \sum_{i=1}^{k(x)} r_i f_\sigma(h_i) + \sum_{j=1}^{g(y)} r_j f_\sigma(h_j) = \sum_{i=1}^{k(x)} r_i ch_i + \sum_{j=1}^{g(y)} r_j ch_j = f_\sigma(x) + f_\sigma(y).$$

Tehát f_σ additív függvény. Továbbá, mivel a 7. Tétel alapján cH halmaz Hamel bázist alkot és σ bijekció, ezért f_σ is bijektív. Ekkor viszont a σ bijekció nem állítható elő H permutációjából, mivel $cH \notin H$. Azaz egy rögzített Hamel bázis összes permutációjának generált függvényéből nem állítható elő az összes additív bijekció. $\square$

14. Tétel (saját eredmény). *Ha $f_\sigma(x) = \sum_{i=1}^k r_i \sigma(h_i)$ ahol $\sigma : H \rightarrow H$ bijekció, és van olyan $\sigma(h) \neq h$, illetve $\sigma(\tilde{h}) = \tilde{h}$, valamilyen $h, \tilde{h} \in H$ esetén, akkor $f_\sigma(x)$ nem cx alakú.*

Bizonyítás. Végezzük a bizonyítást indirekt módon, vagyis tételezzük fel, hogy $f_\sigma(x) = cx$ alakú, valamilyen $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén. Legyen továbbá $\sigma(h) \neq h$ és $\sigma(\tilde{h}) = \tilde{h}$ valamilyen $h, \tilde{h} \in H$ esetén. Ekkor

$$\begin{aligned} f_\sigma(h) &= c \cdot h, \\ f_\sigma(1 \cdot h) &= c \cdot h, \\ 1 \cdot \sigma(h) &= c \cdot h \\ \frac{\sigma(h)}{h} &= c. \end{aligned} \tag{12.1}$$

Továbbá,

$$\begin{aligned} f_\sigma(\tilde{h}) &= c \cdot \tilde{h}, \\ f_\sigma(1 \cdot \tilde{h}) &= c \cdot \tilde{h}, \\ 1 \cdot \sigma(\tilde{h}) &= \tilde{h} = c \cdot \tilde{h}, \\ 1 &= c. \end{aligned} \tag{12.2}$$

Ekkor, ha a (12.1) és (12.2)-es egyenletet egymással egyenlővé tesszük, akkor a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(h)}{h} &= 1, \\ \sigma(h) &= h. \end{aligned}$$

Ám ez ellentmondás, mert az elején kizártuk, hogy $\sigma(h) \neq h$. Ebből következik, hogy $f_\sigma(x)$ nem cx alakú. $\square$

15. Tétel (saját eredmény). *Ha H Hamel bázis, akkor létezik olyan additív bijekció, amely nem $f_{c\sigma}$ alakú, ahol $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és σ H egy permutációja.*

Bizonyítás. Legyen H egy rögzített Hamel bázis, ekkor legyen $c\sigma : H \rightarrow cH$ valamilyen $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén. Továbbá legyen

$$\tau : H \rightarrow H + a, \quad \tau(h) := h + a, \quad h \in H,$$

ahol $a = \sum_{i=1}^{j(a)} q_i h_i$, $a \in \mathbb{R}$ és $\sum_{i=1}^{j(a)} q_i \neq -1$. Vegyük észre hogy cH és $H + a$ is Hamel bázis, így $c\sigma$ és τ generált függvénye additív bijekció.

Végezzük a bizonyítást indirekt módon, vagyis feltételezzük, hogy a két generált függvény felírása megegyezik az összes $x \in \mathbb{R}$. Írjunk fel egy tetszőleges h_n -t, ami nem eleme a felírásának.

$$\begin{aligned} f_{c\sigma}(h_n) &= f_\tau(h_n), \\ c\sigma(h_n) &= \tau(h_n), \\ c\sigma(h_n) &= h_n + a. \end{aligned}$$

Ekkor a bal oldalt egy olyan felírás található amiben csak 1 bázis elem szerepel, míg a jobb oldalon egy olyan amiben legalább 2 (1 amivel h_n -et írjuk fel és legalább még egy amivel a -t). Mivel egy felírás H segítségével egyértelmű, ezért a két kifejezés nem feleltethető meg egymásnak ami ellentmondás. Vagyis találtunk egy additív bijekciót ami nem $f_{c\sigma}$ alakú. $\square$

6. További kutatási lehetőségek, tervek

Amint korábban írtuk, a cél az additív bijekciók teljes jellemzése volt. Ha ez elkészül, akkor az additív injekciók jellemzése a cél, majd ezen jellemzések segítségével szeretnénk megoldani egy olyan függvényegyenletet, amely additív bijekciókat és injekciókat tartalmaz. Ez az egyenlet a kulcs a homogén, illetve, eltolható kvázi-aritmetikai kifejezések problémájának megoldásához.

Hivatkozások

- [BM22] Maksa Gyula Bessenyei Mihály. *Mennyi a téglalap területe?* KöMaL 2022, áprilisi szám, 2022.
- [Ham05] G. Hamel. *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x + y) = f(x) + f(y)$.* Math. Ann., 60:459–462, 1905.
- [Kuc85] Marek Kuczma. *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities.* Birkhäuser Basel, 1985.
- [Mut95] Kandasamy Muthuvel. *Some topological properties of Hamel bases.* Real Analysis Exchange, 20(2):819 – 822, 1995.