

VÉGTELEN TAGSZÁMOK ÖSSZEGE

Szerző: Hetényi Klára, Szent Margit Gimnázium 12. osztály

Konzulens: Dr. Szilágyi Brigitta, BME Matematika Intézet,
Geometria Tanszék



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

Tartalomjegyzék

1. Absztrakt	2
2. Bevezetés	3
3. Riemann átrendezési tétele	5
4. Alapok, fogalmak	6
5. Ismert abszolút és feltételesen konvergens sorok	7
5.1. Négyzetszámok reciprokösszege	7
5.2. Geometrikus sor	9
5.3. Alternáló harmonikus sor	10
6. Geometriai becslések, bizonyítások	11
6.1. A négyzetszámok alternáló reciprokösszege	11
6.2. A köbszámok reciprokösszege	13
6.3. A köbszámok alternáló reciprokösszege	14
6.4. Faktoriálisok köbeinek reciprokösszege	15
6.5. N csúcsú sokszög	17
6.6. Derékszögű háromszögek spirálja	19
6.7. Háromszög	22
6.8. n az n -ediken	23
6.9. Fizikai megközelítés	24
7. Összefoglalás	26
8. Jövőbeli tervek	27
9. TDK bíráló kérdése	28

1. Absztrakt

Végtelen sok valós számot összeadva előfordulhat, hogy az eredmény egy véges szám, sőt a tagok sorrendjét megváltoztatva különböző értéket kaphatunk végeredményül. Az utóbbit Riemann átrendeződési tétele fogalmazza meg. A végtelen összegek, azaz végtelen sorok lehetnek divergensek, abszolút konvergenssek, vagy feltételesen konvergenssek. Különböző kritériumok alapján tudjuk ezt meghatározni. E sorokat lehet geometriai alakzatként vizualizálni. A kutatás során geometriai módszereket alkalmazva adtam becsléseket abszolút konvergens végtelen sorokra. Ezeket papírral készített kockákkal és négyzetekkel, illetve fakockákkal modelleztem.

2. Bevezetés

Az összeadás műveletét már kisgyermek korunk óta ismerjük, illetve használjuk a mindennapokban. Matematikai tanulmányaink során felfogtuk, hogy az összeadás kommutatív műveletek közé tartozik, azonban mindezek során véges tagot adtunk össze. Végtelen tagszám esetén a kommutativitás nem mindig teljesül.

Már az ókor óta ismert, hogy végtelen valós szám összege véges lehet, azaz konvergál. Egy példa erre Zénon (i.e. 5. sz) paradoxona [1] [4]: Akhilleusz és egy teknős versenyt fut, távolságuk s_0 , a teknős javára. Akhilleusz t_0 idő alatt futja le az s_0 távolságot, eközben a teknős $\frac{s_0}{2}$ távolságot fut. Utána Akhilleusz fut $\frac{s_0}{2}$ távolságot, a teknős pedig $\frac{s_0}{4}$, és így tovább. Utoléri-e Akhilleusz a teknőst?

Valamennyi gondolkodás után rájövünk, hogy nincsen egyértelmű válasz. Ha belegondolunk, a távolság mindig a felére csökken, ezért mindig lesz közöttük távolság, viszont ki lehet számolni, hogy $2s_0$ után utoléri Akhilleusz a teknőst.

Legyen $x = \frac{1}{2}$ és $s_0 = 1$, ekkor a megtett út:

$$s(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \dots \quad (1)$$

Tudjuk, hogy:

$$1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \dots) \quad (2)$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \dots = \frac{1 - x^n}{1 - x}. \quad (3)$$

Mivel $0 < \frac{1}{2} < 1$ Ha $n \rightarrow \infty$, akkor $x^n \rightarrow 0$, ezért:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}. \quad (4)$$

Ha $x = \frac{1}{2}$, akkor ez az összeg egyenlő 2-vel. Az utóbbi paradoxonban használt sor a geometrikus sorok közé tartozik, amelyek összegképlete algebrailag és geometriailag is bizonyítható.

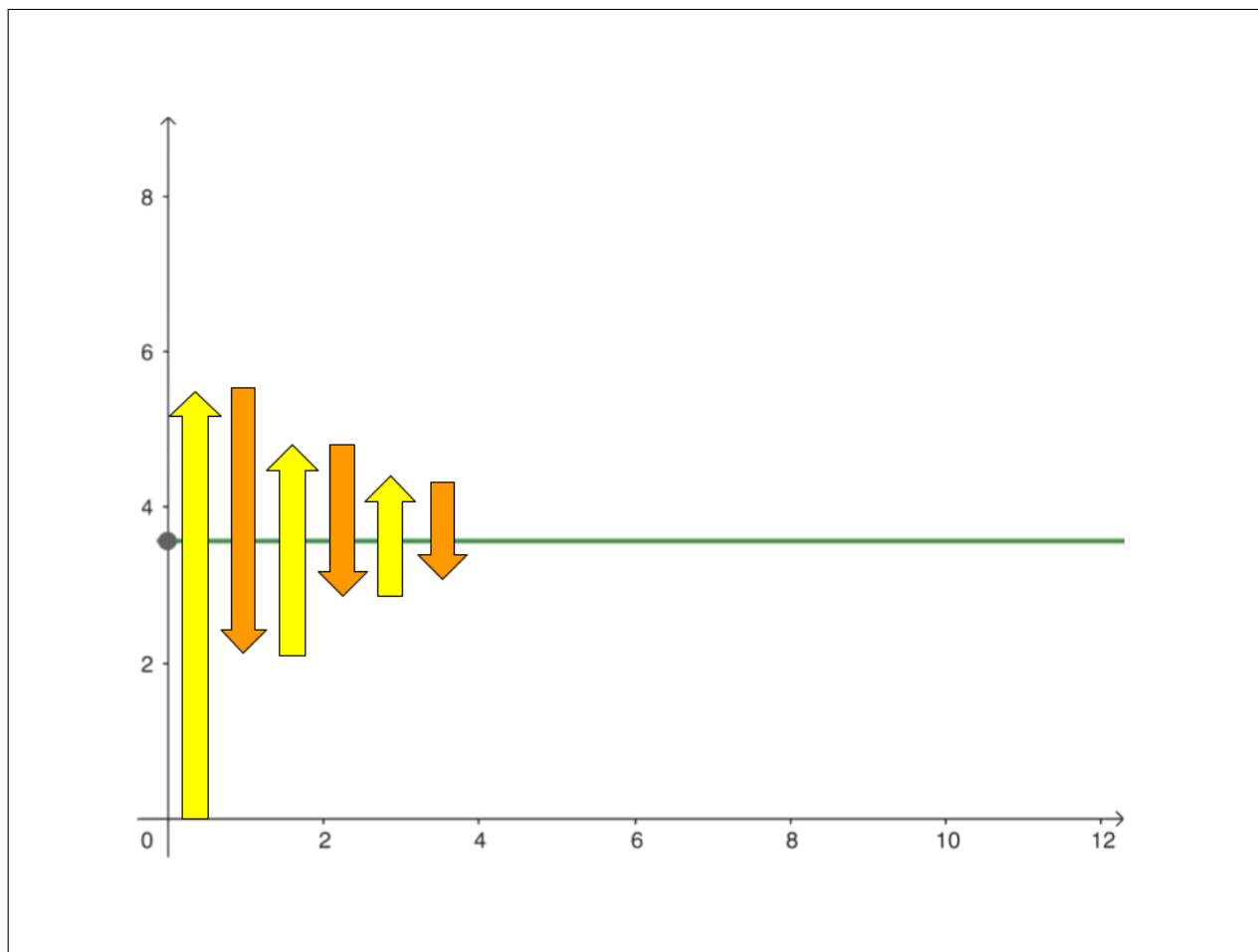
A konvergens sorok is két kategóriába sorolhatók: feltételes- és abszolút konvergensek lehetnek. Bernhard Riemann újrendeződési tétele alapján tudjuk, hogy az összeadás kommutativitása nem mindig adott.

A kutatás során a kevésbé ismert konvergens sorokra adtam becslést. Középiskolai tanulmányaink során nagyobb a hangsúly a pontos kiszámoláson, és kevésbé a becslésen, így a kutatás során lehetőségem volt megtanulni viszonylag korrekt módon becsülni. Erre optimális módszer volt a geometria, hiszen modellalkotás során mintákat felfedezve végtelen tagot figyelembe véve adtam meg válaszaimat.

3. Riemann átrendezési tétele

Tétel: A feltételesen konvergens sorok összege a tagok átrendezésével bármely valós számmal egyenlő lehet, vagy a pozitív vagy negatív végtelennel.

Bizonyítás: Állítsuk abszolút értékben csökkenő sorrendbe az adott sort és jelöljük ki egy tetszőleges valós számot. Adjuk össze addig a pozitív tagokat, amíg a számnál nagyobb lesz, utána vonjunk ki addig, amíg a számnál kisebb. Ezt a műveletet folytatva egyre közeledünk a számhoz, ekkor konvergál.



1. ábra. **A tétel ábrázolása** A sárga nyilak a pozitív tagokat, a narancssárga nyilak a negatív tagokat ábrázolják.

4. Alapok, fogalmak

Végtelen sor: végtelen tagszám összege

Konvergenzia: amikor egy végtelen sor összege egy valós számhoz tart

Abszolút konvergenzia: ha $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergál, az adott sor abszolút konvergens

Feltételes konvergenzia: ha egy sor konvergens, de nem abszolút konvergens, az adott sor feltételesen konvergens

Divergenzia: ha egy végtelen sor összege nem konvergens, a sor divergens

Harmonikus sor: a természetes számok reciprokösszege

Alternáló sor: olyan sor, amelynek az elemeinek előjelei váltakoznak

Leibniz-kritérium: ha a a_n sorozat elemei monoton csökkenőek és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ sor konvergens. [3]

Konvergenciakritériumok: Ezekkel határozhatjuk meg, hogy egy sor konvergens-e. Konvergenciakritériumok például: összehasonlító kritérium, gyökkritérium, és a hányados kritérium. Megtalálhatók minden alap analízis könyvben [3], [4].

A konvergenzia szükséges, de nem elégséges feltétele az, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (5)$$

5. Ismert abszolút és feltételesen konvergens sorok

5.1. Négyzetszámok reciprokösszege

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (6)$$

Leonhard Euler (1735) bizonyítását [2] fogom bemutatni.

1. lemma:

$p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ n -ed fokú polinomnak legyenek $x_1, x_2, \dots, x_n$ a gyökei.

Ekkor

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad (7)$$

Lemma bizonyítása: Ha fölírjuk gyöktényezős alakban a polinomot,

$$p_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) = 0 \quad (8)$$

és vesszük x^{n-1} együtthatóját zárójelbontás után:

$$-a_n(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = a_{n-1}. \quad (9)$$

Tétel bizonyítása:

Használjuk föl a p_n polinomot azzal a feltétellel, hogy egyik gyök sem nulla. Ekkor oszthatjuk a polinomot x^n -el:

$$-a_0 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) = a_1 \quad (10)$$

a lemma alapján.

Vegyünk egy páros kitevőjű, alternáló polinomot, amelynek nemnulla gyökei vannak:

$$q_n = b_0 + b_1 x^2 + \dots + (-1)^n b_n x^{2n} = 0. \quad (11)$$

A $2n$ darab gyöke: $\pm r_1, \pm r_2, \dots, \pm r_n$

Ekkor:

$$b_0 \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \dots + \frac{1}{r_n^2} \right) = b_1. \quad (12)$$

Vegyük a szinusz függvény Taylor-sorát, és osszuk x -el, hiszen $x \neq 0$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots + \dots \quad (13)$$

Az

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \dots = 0 \quad (14)$$

egyenlet valós gyökei: $(\pm k\pi)_{k=1}^\infty$.

Emiatt:

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi^2} + \frac{1}{3\pi^2} \dots = \frac{1}{6}. \quad (15)$$

Ha kiemelünk π^2 -et:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots = \frac{\pi^2}{6}. \quad (16)$$

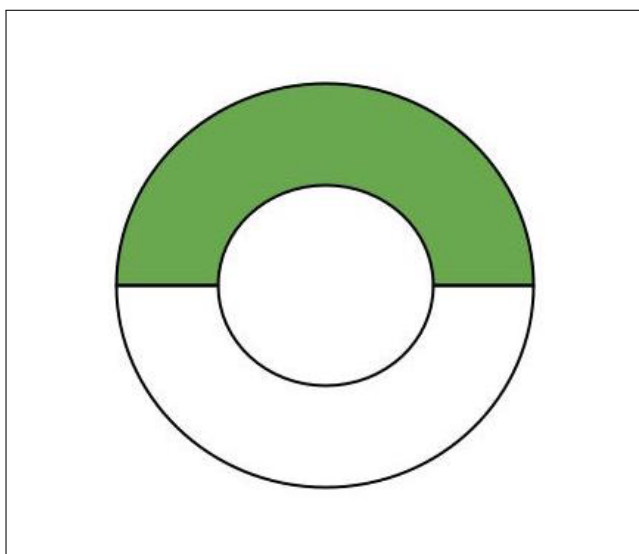
5.2. Geometrikus sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a-1} \quad (17)$$

ha

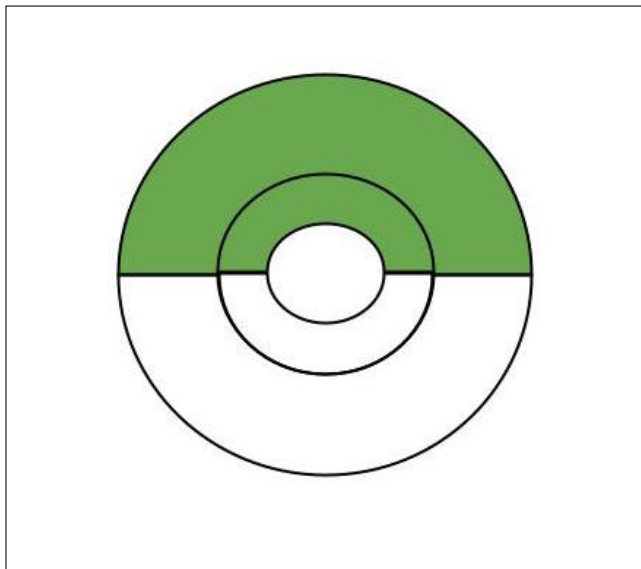
$$|a| \geq 1. \quad (18)$$

Geometriai bizonyítást mutatok be. Vegyünk egy kört, bontsuk n részre és jelöljük meg egy részt a következő módon:



2. ábra. Eljárás első lépése.

Ismételjük meg a belső körrel az eljárást:



3. ábra. Eljárás második lépése.

Ebben az esetben $a = 3$, és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$. Általános esetben látható, hogy az összeg $\frac{1}{a-1}$ -hez tart.

5.3. Alternáló harmonikus sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2 \quad (19)$$

Az e alapú logaritmus Taylor-sorába behelyettesítve kapjuk meg a bizonyítást:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \ln(1+x) \quad (20)$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2. \quad (21)$$

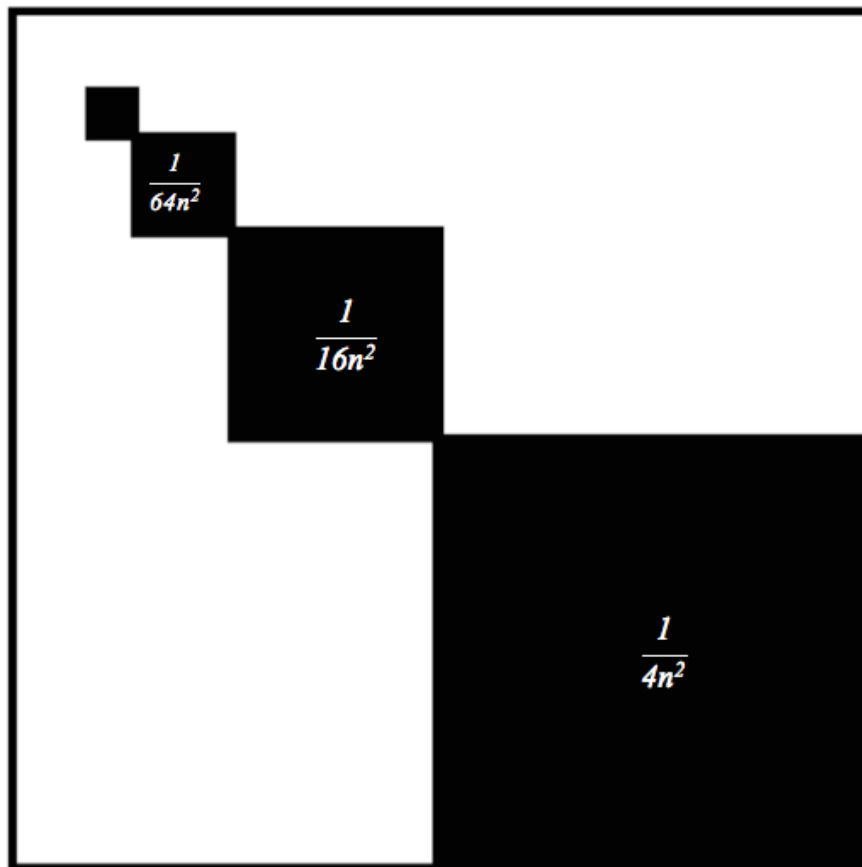
6. Geometriai becslések, bizonyítások

Itt következik az egyéni munkám. Többnyire ha geometriai alakzatokkal ábrázoltam a sorokat, integrálással kerestem meg területüket. Ehhez kellett keresnem közelítő görbéket. Konvergáló összegeknél ilyen alakban lennének: $f(\sum_{n=0}^k a_k) = \dots$. Ezek megtalálása viszonylag nehéz, ezért többnyire velük megegyező zérushelyű görbéket alkalmaztam. A becsléseken kívül saját bizonyítások is találhatók.

6.1. A négyzetszámok alternáló reciprokösszege

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \quad (22)$$

Vizualizáljunk minden páratlan tagot négyzetként, ezekből vonjuk ki a $\frac{1}{2^x(2k+1)}$ oldalhosszú négyzeteket.



4. ábra. $\frac{1}{n}$ oldalú négyzet. MS Paint-el ábrázolva.

Minden négyzetnek $\frac{2}{3}$ -a maradt, ezért:

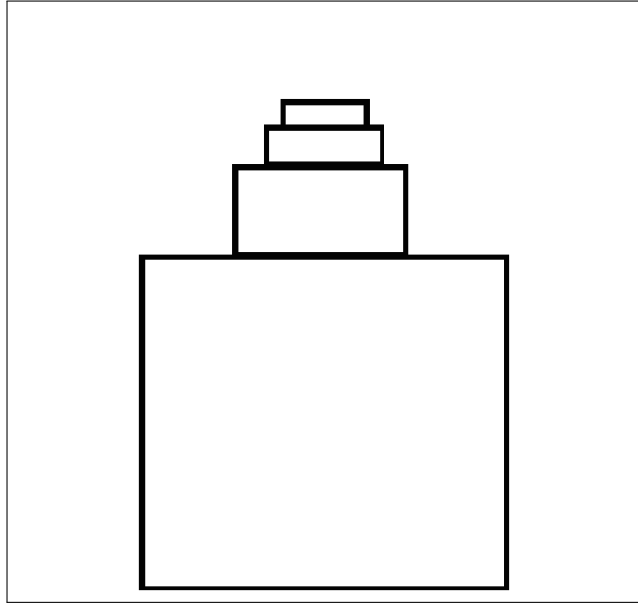
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} \quad (23)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} \right) \quad (24)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}. \quad (25)$$

6.2. A köbszámok reciprokösszege

Ha belegondolunk, minden tag egy $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n^2}$ oldalú téglalap. Ha ezeket a hosszabbik oldalain állva egymás fölé helyezzük, egy $\frac{\pi^2}{6}$ magasságú tornyot kapunk.

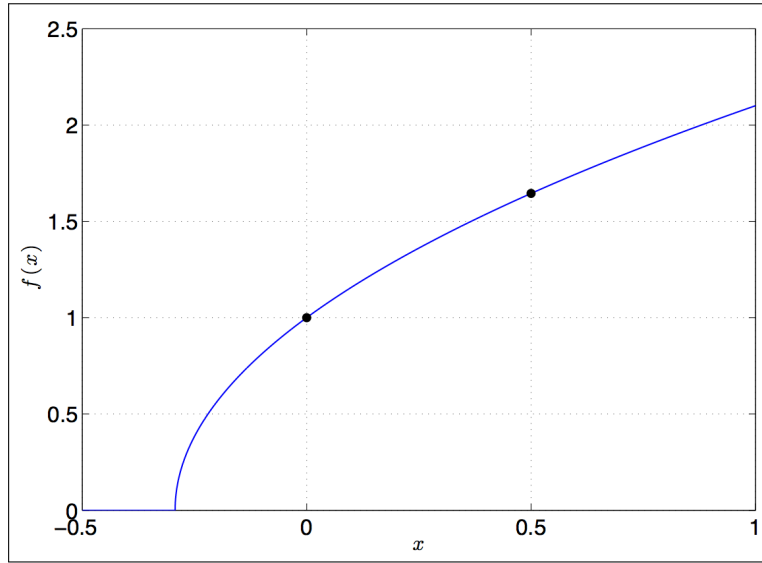


5. ábra. A tagok által alkotott alakzat GIMP-el ábrázolva.

A közelítő görbe:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi^4 - 36}{18}x + 1} \quad (26)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\frac{\pi^4 - 36}{18}x + 1} \right) dx. \quad (27)$$



6. ábra. **Köbszámok összege közelítő görbéje.** Ez a görbe illeszkedik az első téglalap (négyzet) csúcsára, illetve a $(\frac{1}{2}, \frac{\pi^2}{6})$ koordinátájú pontra.

6.3. A köbszámok alternáló reciprokösszege

Vizualizáljuk kockaként a tagokat. Az első kockát állítsuk az egyik csúcsára.

Használjunk fel az 1-esből egy $\sqrt{2}$ oldalú szabályos háromszög alapú piramist, melynek magassága $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tudjuk, hogy $T = \frac{ah}{3}$.

$T = \frac{3}{4}$, azaz háromnegyedét használtuk fel az első kockának.

A többi kockát ugyanígy a csúcsukra állítva adjuk hozzá, illetve vonjuk ki ebből.

Az újabb piramis magassága:

$$\sqrt{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) \quad (28)$$

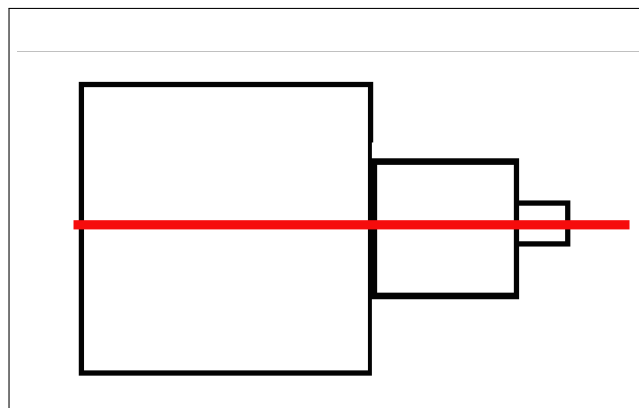
$$T = \frac{ah}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) \quad (29)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4}. \quad (30)$$

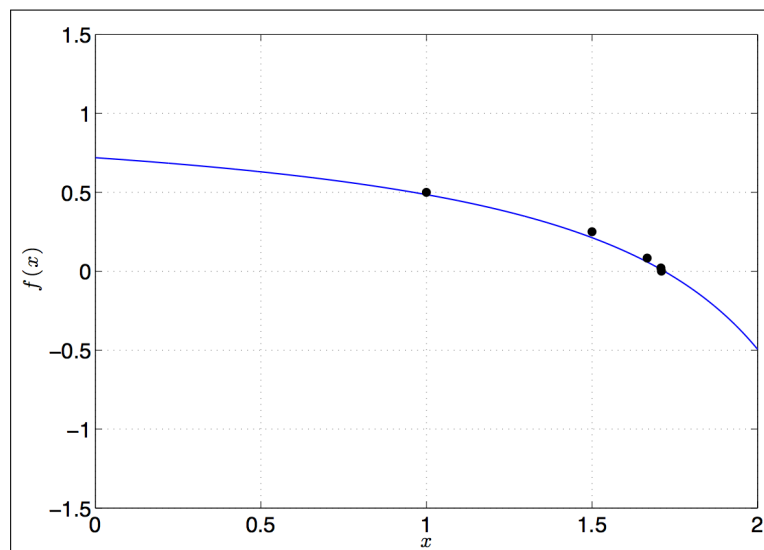
6.4. Faktoriálisok köbeinek reciprokösszege

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!^3} \quad (31)$$

Ismét kockaként fogjuk ábrázolni a tagokat. Ha egymásra rakjuk, a magasság $(e - 1)$ -hez tart. Vetítsük síkra, rajzoljuk be a szimmetriatengelyt és ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszeren az egyik felét:



7. ábra. A tagok által alkotott alakzat GIMP-el ábrázolva, középen a szimmetriatengely.



8. ábra. Faktoriálisok köbeinek reciprokösszegére illeszkedő görbe.

Hogy felső közelítő összeget kapjunk, a csúcsokat közelítsük görbével (8. ábra):

$$y = 1,1 \left(\frac{1}{x - 1,1 \times e} + 1 \right). \quad (32)$$

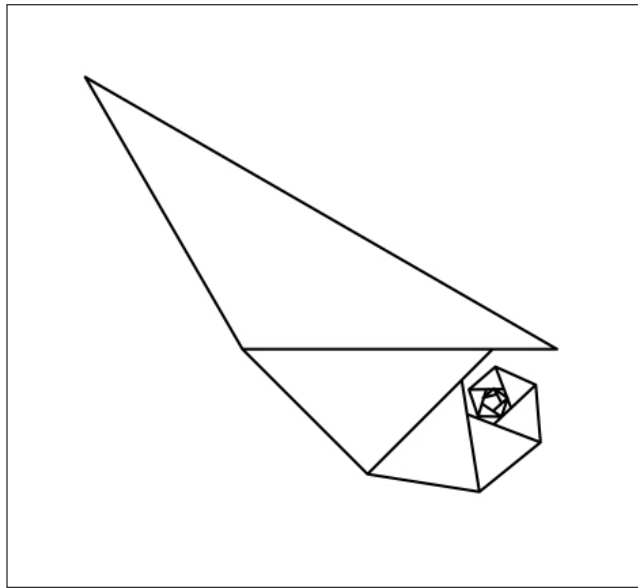
Ebből a forgástest térfogata:

$$V = \int_0^{e-1} 1,1^2 \left(\frac{1}{x - 1,1 \times e} + 1 \right)^2 dx. \quad (33)$$

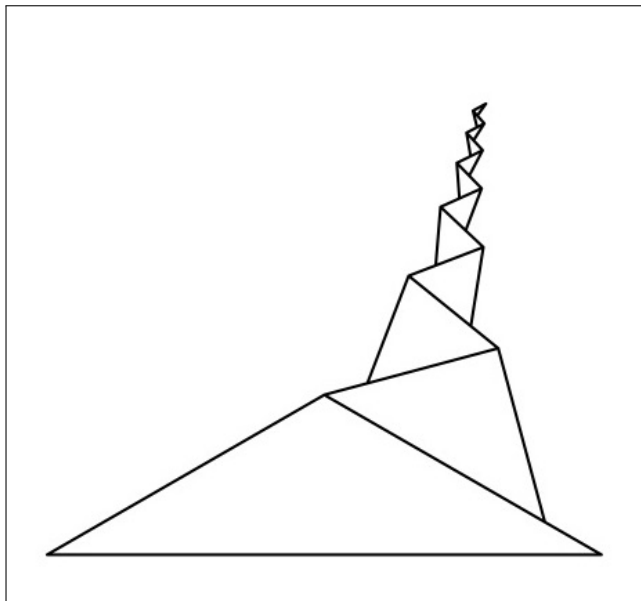
6.5. N csúcsú sokszög

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2n^4} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \quad (34)$$

A sor geometriailag olyan n -csúcsú sokszögek $\frac{1}{n}$ -ed részének összege, amelyeknek a köréírt körének sugara $\frac{1}{n^2}$.



9. ábra. **A tagok által alkotott spirál.** Pythonnal ábrázolva, első 15 elemet tartalmazza. Nem volt optimális, mivel a spirál fedi önmagát



10. ábra. **A tagok által alkotott másik alakzat** Pythonnal ábrázolva, első 15 elemet tartalmazza.

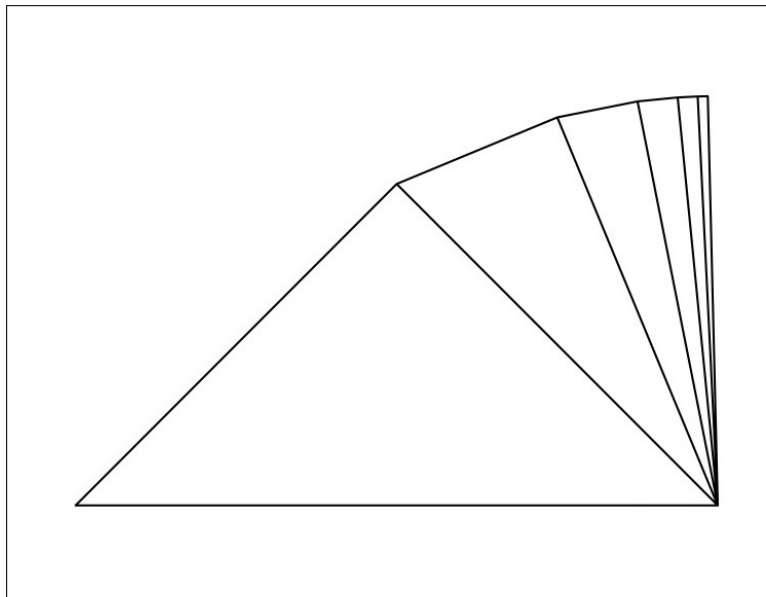
Erre a sorösszegre csak gyengébb becslést voltam képes adni. A magasság biztos kisebb, mint $\frac{\pi^2-9}{6} \times \sin \frac{\pi}{6}$. A sor közel $\frac{1}{3}$ -a $\frac{\sqrt{3}}{9}$ alapú, $\frac{\pi^2-9}{12}$ magasságú háromszögnek.

Ezért:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right) \approx \left(\frac{\sqrt{3}(\pi^2 - 9)}{324} \right). \quad (35)$$

6.6. Derékszögű háromszögek spirálja

Rajzoljunk egy $\sqrt{2}$ átfogójú, egyenlő szárú, derékszögű háromszöget. Az egyik befogóját használjuk fel egy újabb háromszög átfogójaként, és e háromszögnek az egyik szöge $\frac{\pi}{8}$ nagyságú, azaz a fele az előzőnek. Folytassuk a végtelenségig az eljárást, és számoljunk területet.



11. ábra. **Első 5 elem.**

Látható, hogy a szög felírható geometrikus sorként:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\pi}{2}. \quad (36)$$

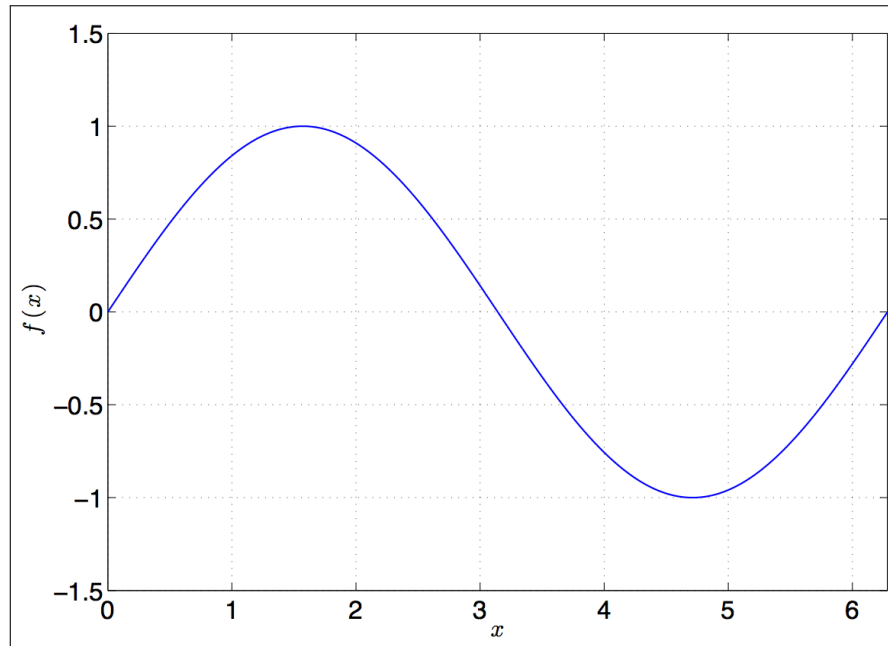
Vizsgáljuk a k -adik (k 0-tól kezdődik) háromszögnél az oldalakat. Segítségként ábrázoljuk a szinusz és koszinusz függvényeket.

Az átfogó:

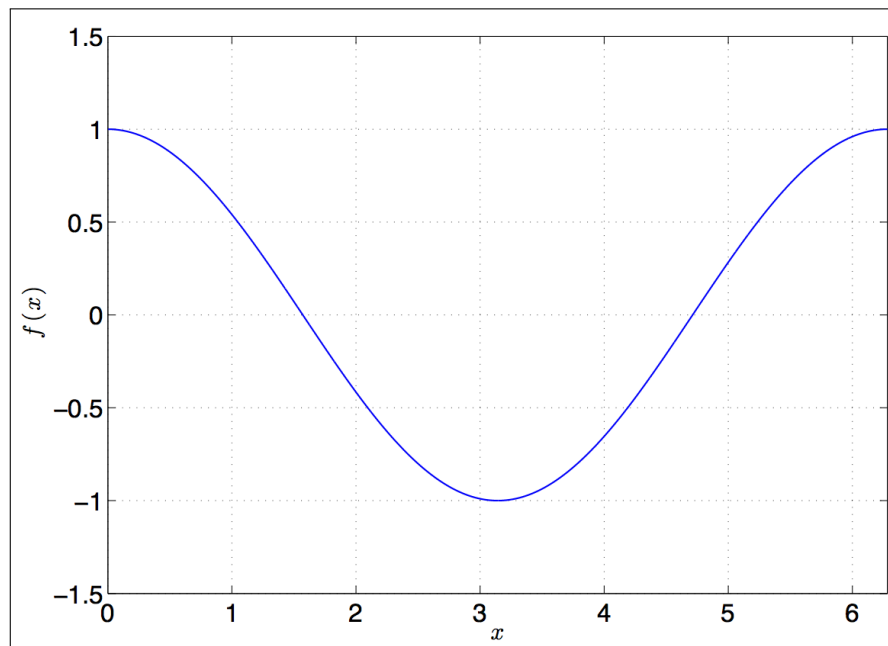
$$c = \sqrt{2} \prod_{n=0}^{k-1} \cos \left(\frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2^n} \right). \quad (37)$$

A hosszabbik befogó:

$$a = \sqrt{2} \prod_{n=0}^k \cos \left(\frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2^n} \right) = c \times \cos \left(\frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2^k} \right). \quad (38)$$



12. ábra. **Szinusz görbe.** Látható, hogy ha $\alpha \rightarrow 0$ akkor $\sin x \rightarrow 0$



13. ábra. **Koszinusz görbe.** Látható, hogy ha $\alpha \rightarrow 0$ akkor $\cos x \rightarrow 1$

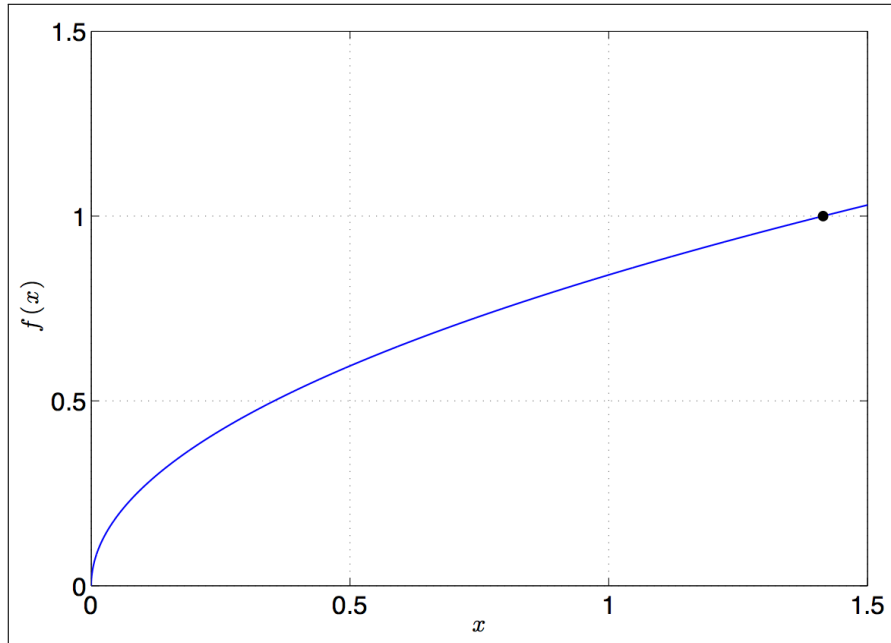
A rövidebbik befogó:

$$b = \sqrt{2} \left[\prod_{n=0}^{k-1} \cos \left(\frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2^n} \right) \right] \times \sin \left(\frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2^k} \right) = c \times \sin \left(\frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2^k} \right). \quad (39)$$

A rövidebbik befogó hossza tart a 0-hoz. A hosszabbiknál megfigyelhető, hogy ha $\alpha \rightarrow 0$

akkor $a \rightarrow c$. Tudjuk, hogy ha $k > 0, a, b, c < 1$. Ezért, felső becslésként a közelítő görbe:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \sqrt{x}. \quad (40)$$



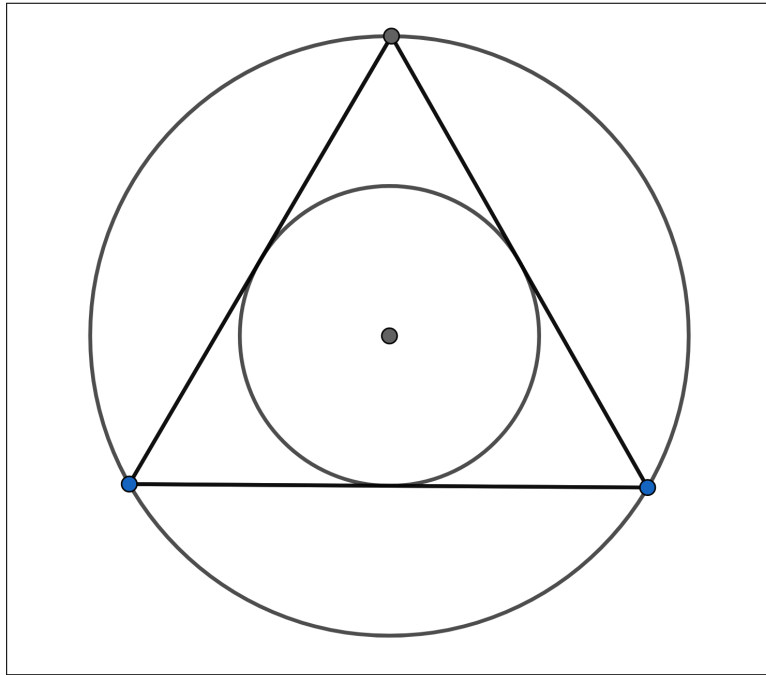
14. ábra. Közelítő görbe Illeszkedik rá a $(\sqrt{2}, 1)$ koordinátájú pont.

Ebből a terület:

$$T = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \sqrt{x} dx. \quad (41)$$

6.7. Háromszög

Vegyünk egy szabályos háromszöget, melynek a köréírt kör sugara 1. Rajzoljuk meg a beírt kört, abba egy háromszöget, utána megint a beírt kört...



15. ábra. **Első háromszög.**

Tudjuk, hogy az első háromszög oldalhossza $a = \sqrt{3}$, köréírt körének sugara 1.

A továbbiakkét két területképlet alapján lehet számolni:

$$T = \frac{a^3}{4R} = \frac{3ar}{2}. \quad (42)$$

Ebből:

$$r = \frac{a^2}{6R} = \frac{1}{2R}. \quad (43)$$

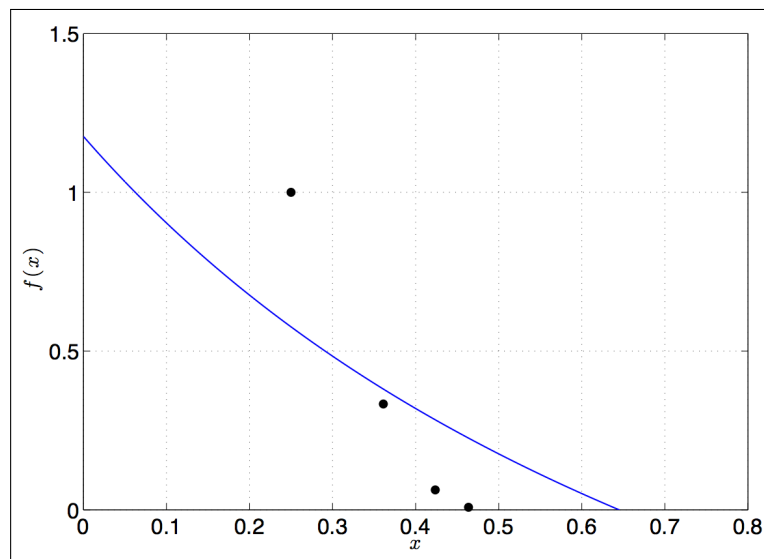
Látható, hogy ez egy geometrikus sor lesz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \sqrt{3}. \quad (44)$$

6.8. n az n -ediken

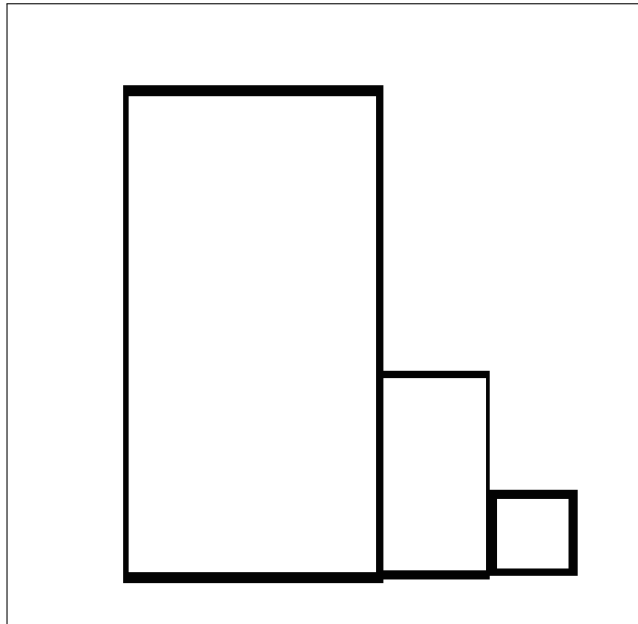
Az első kivételével ábrázoljuk téglalapokkal a sor tagjait úgy, hogy az egyik oldal hossza $\frac{1}{n^2}$ és keressünk illeszkedő görbét:

$$f(x) = 3 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{6}{\pi^2} \right) \quad (45)$$



16. ábra. **Közelítő görbe.** Látható, hogy az első pár csúcs nem teljesen illeszkedik a görbére, viszont a görbe zérushelye a $(\frac{\pi^2-6}{6}, 0)$ pont.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^{\frac{\pi^2}{6}} 3 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{6}{\pi^2} \right) dx + 1. \quad (46)$$



17. ábra. A tagok által alkotott alakzat GIMP-el ábrázolva.

6.9. Fizikai megközelítés

A fizika tudományában is megjelennek a végtelen sorok. Egy példa erre végtelen darab ellenállás, vagy kondenzátor kapacitása. A dolgozatban a kondenzátoros változat fog szerepelni. A kondenzátorok kapcsolódhatnak sorba, párhuzamosan, vagy vegyesen.

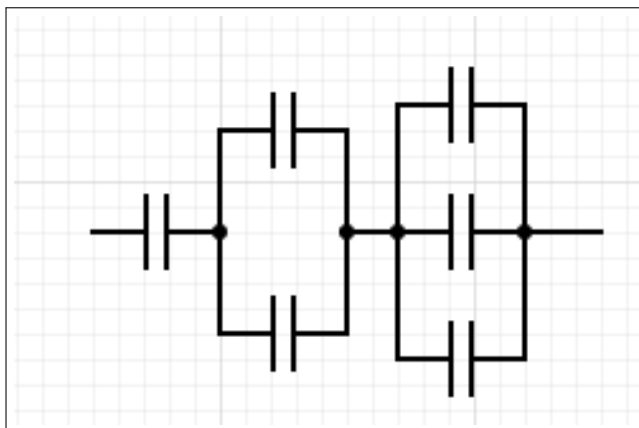
Soros kapcsolás esetén a kapacitás reciprokosan összeadódik:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \quad (47)$$

Párhuzamos kapcsolás esetén a kapacitás egyenesen összeadódik:

$$C_e = C_1 + C_2 + \dots \quad (48)$$

Az egész nevezőjű reciprokösszegeket, be tudjuk mutatni kondenzátorok segítségével. Vegyünk végtelen C kapacitású kondenzátort és végezzük el a következő eljárást: kapcsoljunk össze 1 kondenzátort sorba 2 párhuzamosan kapcsolt kondenzátorral, utána az előbbieket sorba 3 párhuzamos kondenzátorral, stb. A párhuzamos kondenzátorok kapacitása általánosan: $C_e = kC$, ahol k a darabszámuk. Az eredő kapacitás a harmonikus sor:



18. ábra. **Kapcsolási rajz.**

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C} + \frac{1}{2C} + \frac{1}{3C} \dots = \frac{1}{C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty \quad (49)$$

Ha $\frac{1}{C_e} \rightarrow \infty$ akkor $C_e \rightarrow 0$.

Ha variáljuk a párhuzamosan kapcsolt kondenzátorokat, előállíthatunk más sorösszegeket is.

7. Összefoglalás

A dolgozatban 7 sorra sikerült geometriai becslést adnom, miután megismerkedtem a végtelen sorok témájával és azzal, hogy milyen módon lehet becsülni. Középiskolai tanulmányaim során ritkábban fordult elő a becslés, ezért a kutatás során fejlesztettem ezt a képességemet. Becsléseim során végtelen tagszámot veszek figyelembe, ahelyett, hogy a "túl kicsi" elemeket elhagyagolnám. A sorokat téglalapokkal, kockákkal és háromszögekkel modelleztem. Fakockákat, papírnégyzeteket építettem, illetve Python és Geogebra segítségével is ábrázoltam függvényeket. A kutatás során gyakran használtam integrálást is, melyet nemrég tanultam az iskolában.

8. Jövőbeli tervek

Továbbiakban is szeretnék foglalkozni ezzel a témával: előbb megtanulnám kezelni a szummás függvényeket, hogy pontosabb görbékkel közelítsem meg az összegeket, illetve meg szeretném próbálni más módszerekkel is (pl. algebra) becslést találni. A pontosabb becslések után lehet az összegek pontos meghatározása a cél. A végtelen sorok témáján belül a spirálok fogtak meg a legjobban, így többnyire azokkal foglalkoznék. Azért is, mivel az eddigi kutatásomban a spirálokra volt a legnehezebb becslést adnom. Ehhez tervezem jobban megismerni a polár-koordinátarendszert. A spirálokon kívül minél több szögfüggvényt tartalmazó, és majd komplex számos sorral tervezek foglalkozni. Végül tervezek minél több kreatív bizonyítást alkotni, a mindennapi élet, illetve más tudományágak problémáit használva.

9. TDK bíráló kérdése

Kérdés: Hogyan lehetne "javítani" a becsléseken?

A TDK dolgozatomban a becslésekben geometriát alkalmazok: alakzatként ábrázolom a sorokat, és egy függvénnyel ráközelítek az alakzatra, ezért mindig van valamennyi hiba a módszeren keresztül kapott összegekben. TDK után algebrai módszerekkel is alkottam becslést a nevezetes közepeket használva, ezek általában precízebbnek bizonyultak.

Hivatkozások

- [1] Simonovits András (2007) *Végtelen sorok felfedezése I.*, Középiskolai Matematikai Lapok
- [2] Simonovits András (2007) *Végtelen sorok felfedezése II.*, Középiskolai Matematikai Lapok
- [3] George B. Arfken, Hans J. Weber, Frank E. Harris (2021) *Mathematical methods for physicists: A Comprehensive Guide*, Elsevier
- [4] Tom M. Apostol (1967) *Calculus*, John Wiley and Sons, 2nd ed.