

TDK

Körök ekvioptikus görbéi

Berze Kiara

Témavezető: Csima Géza
adjunktus
BME Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

**BME
2023**

Contents

1	Körök	4
1.1	Kör izoptikusa	4
1.2	Két egyenlő sugarú kör ekvoptikusa	5
1.3	Három vagy több egyenlő sugarú kör	7
1.4	Különböző sugarú körök	9
1.4.1	Két kör esete	9
1.4.2	Három kör ekvoptikusa	13
1.5	Ekvoptikus pontok száma	16
1.6	Záró gondolatok	18

Bevezetés

Az izoptikus görbe azon pontoknak a helye amelyekből egy görbe, két érintője által bezárt α szögből látszik.

Máshogyan megfogalmazva:

Definíció 0.0.1 *Legyen adott egy C folytonos síkgörbe. Ekkor azon pontok halmazát, ahonnan ez a görbe adott α szög alatt látszik, a C görbe α **szögű izoptikus** görbéjének nevezzük.*

Definíció 0.0.2 *Legyen adott $n \in \mathcal{N}$ $n \geq 2$ folytonos síkgörbe. Ekkor azon pontok halmazát, ahonnan a görbék egyenlő szög alatt látszanak, a görbék ekvoptikus görbéjének nevezzük.*

Az izoptikus görbékkel manapság egyre szélesebb körben foglalkoznak a világ különböző tájairól. Feljegyzéseket már 1704-től lehet találni La Hire nevéhez köthetően illetve a későbbiek során 1837-ben Chasles által. Az izoptikus görbe elnevezés Taylor által 1884-re datálható, a görög isos vagyis "egyenlő" és optikos vagyis "optika" szavakból ered. [1] Az Aequationes Mathematicae nevű újságban jelent meg ezen kívül kutatás a témában. [2] A legfőbb kiindulási pontom azonban Csima Géza tanárúr kutatómunkája volt amely egyébként forrásként szolgált az imént említett újságcikk megszületéséhez is. [3]

A dolgozatom során azt fogom feldolgozni, hogy 2-dimenziós euklideszi geometriában kettő illetve kettőnél több kör esetén mi lesz azon pontok halmaza amelyekből az alakzatok megegyező α szögből láthatóak.

A felépítés tekintetében először bevezetem az izoptikus majd ekvoptikus görbe definícióját hiszen ezen fogalmak adják a dolgozatom alappillérét. Nehézségi sorrendben vizsgáltam a különböző eseteket ezért is kezdtem a legalapvetőbbel, egy kör izoptikusának vizsgálatával. Ezt követi két egyenlő sugarú kör esete, majd három egyenlő sugarú kör esete. Ezek után nehezebb vizekre eveztem és különböző sugarú körök esetén vizsgáltam ekvoptikus görbéket, hogyan néznek ki, hogyan lehet kiszámolni őket.

Kutatási módszernek elsősorban a GeoGebra számítógépes programot használtam amiben egész egyszerűen lehet síkban ábrázolni geometriai alakzatokat illetve függvényeket írni, ezen kívül még Wolfram Mathematica-t is használtam. Elinté papíron kísérleteztem és ábrázoltam vázlatosan az eredményeket illetve elképzeléseimet, majd ellenőrzés és pontos ábrázolás céljából áttértem a fentebb említett programokra.

Chapter 1

Körök

1.1 Kör izoptikusa

Tétel 1.1.1 *Azon pontok halmaza a síkban, melyből egy r sugarú kör adott α szög alatt látszik, egy*

$$R = \frac{r}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

sugarú eredetivel koncentrikus kör.

BIZONYÍTÁS:

Tekintsünk egy O origó középpontú, r sugarú kört. Legyen P az izoptikus görbe egy pontja. Tudjuk, hogy a külső P pontból a körhöz húzott érintők és a kör sugara, derékszöget zárnak be az $E_{1,2}$ érintési pontokban. Ezek alapján kirajzolódik két derékszögű háromszög, PE_1O és PE_2O , aminek az egyik befogója a PE_1 és PE_2 érintő szakasz, a másik befogója OE_1 és OE_2 , valamint az átfogója OP szakasz lesz. Azt is tudjuk, hogy OP felezi az α szöget amiből a körre tekintünk, tehát a derékszögű háromszögek P csúcsában lévő szögek $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

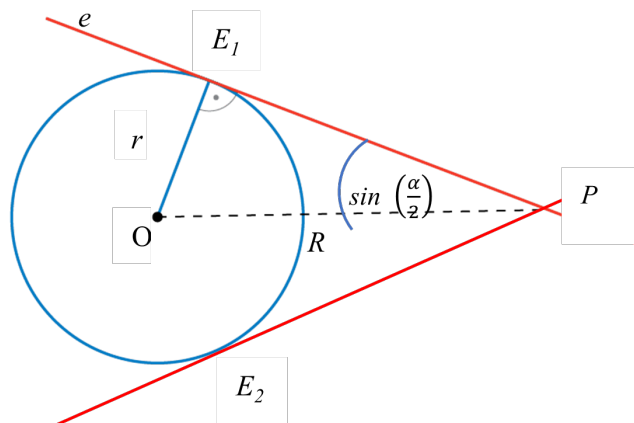


Figure 1.1: 1.1 ábra

Szögfüggvények segítségével tudjuk, hogy:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{|OE|}{|OP|} = \frac{r}{|OP|}$$

$$R := |OP| = \frac{r}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \text{const.}$$



Figure 1.2: $\alpha = 50^\circ$ 1.2 ábra

1.2 Két egyenlő sugarú kör ekvioptikusa

Mely pontokból fog két nem koncentrikus azonos sugarú kör ugyanabból a szögből látszani?

Mint láttuk, egy kör izoptikus görbéje szintén egy kört formál. A két kör azonos szöghöz tartozó izoptikus görbéinek metszéspontjai fogják megadni a keresett választ. Az, hogy hány pontot kapunk függ attól, hogy mekkora szögből tekintjük a köröket illetve, hogy mekkora távolságra vannak egymástól (ez jelenthet 0, 1 vagy 2 pontot). A kialakult metszéspontokra igaz, hogy egyenlő távolságra vannak a körök középpontjaitól azaz a metszéspontok a két kör középpontjának felező merőlegesére fog esni.

Lemma 1.2.1 *Két azonos sugarú, nem koncentrikus kör ekvioptikus görbéje a két kör hatványvonalának körökön kívül eső része.*

BIZONYÍTÁS:

A számítás során felhasználjuk, hogy a körökhöz tartozó izoptikus görbék sugarai jelen esetben (két egyenlő sugarú kör esetében) egyenlőek lesznek.

Legyen adottak a $K_1(x_1; y_1)$ és $K_2(x_2; y_2)$ középpontú r sugarú körök amelyekhez tartozó izoptikus görbék sugarai

$$\frac{r}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

akkor az ekvioptikus pontokat megkaphatjuk:

1. izoptikus görbék metszéspontja

A két izoptikus görbét felírjuk a kör egyenletének formájában, majd belátjuk, hogy ezek egyenlőek.

$$\left(\frac{r}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (y-y_2)^2 = \left(\frac{r}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) \quad (1.1)$$

Felbontjuk a zárójeleket.

$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2 \quad (1.2)$$

Egy oldalra rendezzük az azonos változókat.

$$2xx_2 - x_2^2 - 2xx_1 + x_1^2 = 2yy_1 - y_1^2 - 2yy_2 + y_2^2 \quad (1.3)$$

Egy oldalra kiemelünk és szorzattá alakítunk, minden mást a másik oldalra írjuk.

$$2x(x_2 - x_1) + 2y(y_2 - y_1) = x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 \quad (1.4)$$

2. K_1K_2 felező merőlegese a keresett egyenes egy pontja a K_1K_2 felezőpontja, $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ normálvektora az $\frac{1}{2}K_1K_2 = \left(\frac{x_2-x_1}{2}, \frac{y_2-y_1}{2}\right)$

$$\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)x + \left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right)y = \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right)\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) \quad (1.5)$$

A zárójeleket felbontva az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$\frac{(x_2 - x_1)x}{2} + \frac{(y_2 - y_1)y}{2} = \frac{x_1x_2 + x_2^2 - x_1^2 - x_1x_2}{4} + \frac{y_1y_2 + y_2^2 - y_1^2 - y_1y_2}{4} \quad (1.6)$$

Az egyes összevonások után mindkét oldalt 4-el szorozva:

$$2x(x_2 - x_1) + 2y(y_2 - y_1) = x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 \quad (1.7)$$

A fentiek alapján a felező merőleges egyenlete és izoptikus görbék egyenletének metszéspontjai megegyeznek.

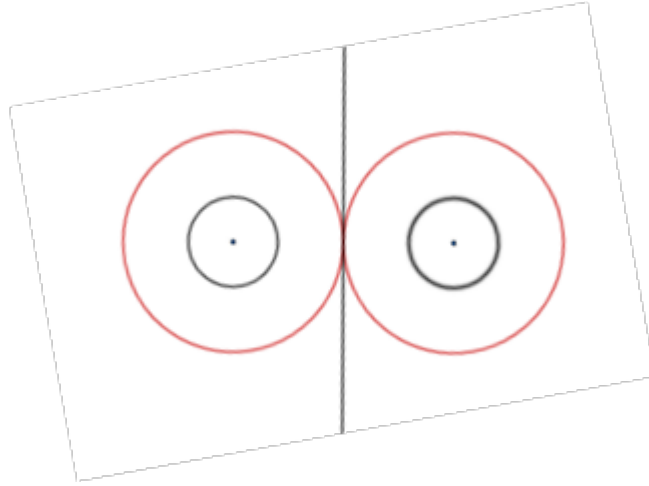


Figure 1.3: 1.3 ábra

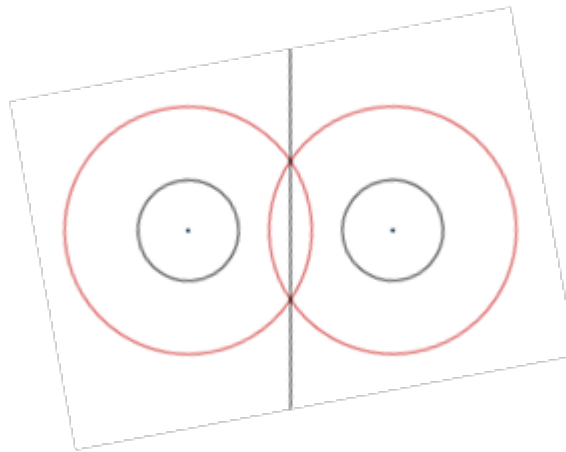


Figure 1.4: 1.4 ábra

1.3 Három vagy több egyenlő sugarú kör

Két kör esetén egyszerű dolgunk volt hiszen bárhol helyezkednek el a síkban, a középpontjaik mindig egy egyenesre fognak esni. Azonban ha kettőnél több kört vizsgálunk, a középpontjaik nem feltétlenül esnek egy egyenesre. Vegyük sorra a két eshetőséget.

I. Tekintsünk $n \in \mathbb{N}^+(n > 2)$ egyenlő sugarú kört melyek középpontjai egy egyenesre illeszkednek. Ebben az esetben a felező merőlegesek párhuzamosak lesznek és nem lesz metszéspontja az ekvoptikusoknak, így nem lesz megoldás.(1.5 ábra)

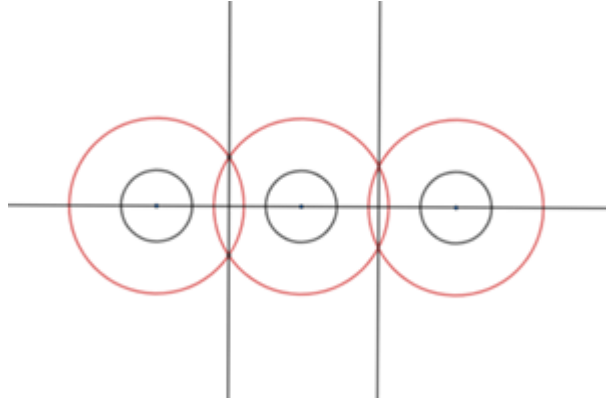


Figure 1.5: 1.5 ábra

II. Ha a körök középpontjai általános helyzetben vannak, például három kör esetében egy háromszöget alkotnak, akkor már létezhet az ekvoptikus.(1.6 ábra)

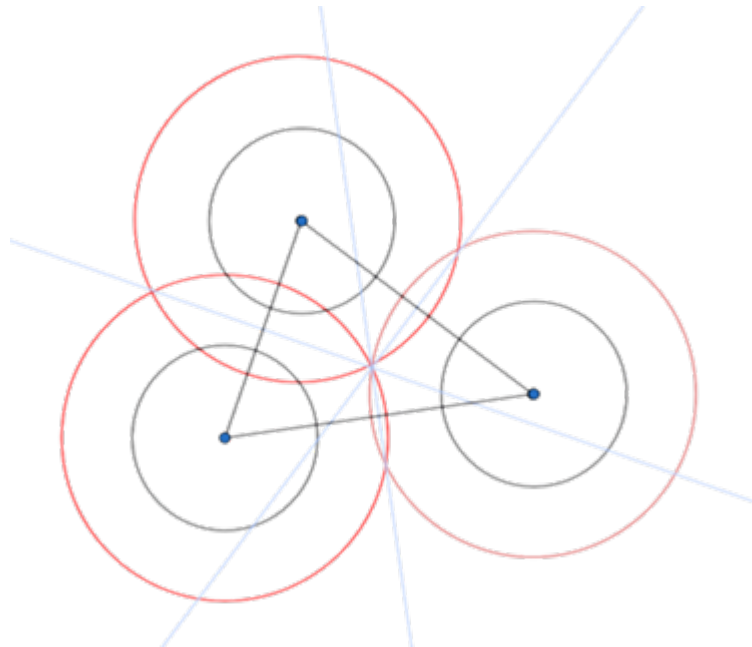


Figure 1.6: 1.6 ábra

A három körpárhoz tartozó ekvoptikusok megegyeznek a középpontok által meghatározott háromszög oldalfelő merőlegeseivel, melyekről ismert, hogy egy ponton mennek át, a háromszög köré írható kör középpontján. Ha ez a pont a körökön kívül található, akkor egyetlen ekvoptikus pontja a van köröknek, ha belül, akkor nem létezik ekvoptikus. Ezen érvelés alapján:

Tétel 1.3.1 *Tekintsünk $n \in \mathcal{N}, n > 2$ azonos sugarú kört. Ezen körök ekvoptikusa pontosan akkor nem üres halmaz, ha a körök középpontjait konciklikusan helyezzük el, azaz a középpontok egy körre esnek és ekkor az ekvoptikus ezen kör középpontja lesz, ha ezen pont nem esik egy körbe sem.*

Megjegyzés 1.3.2 A körök izoptikus görbéi egyébként egy szép "virágot" formálnak, ha a középpontok egyenlő távolságra helyezkednek el egymástól egy kör mentén. (1.7 ábra)

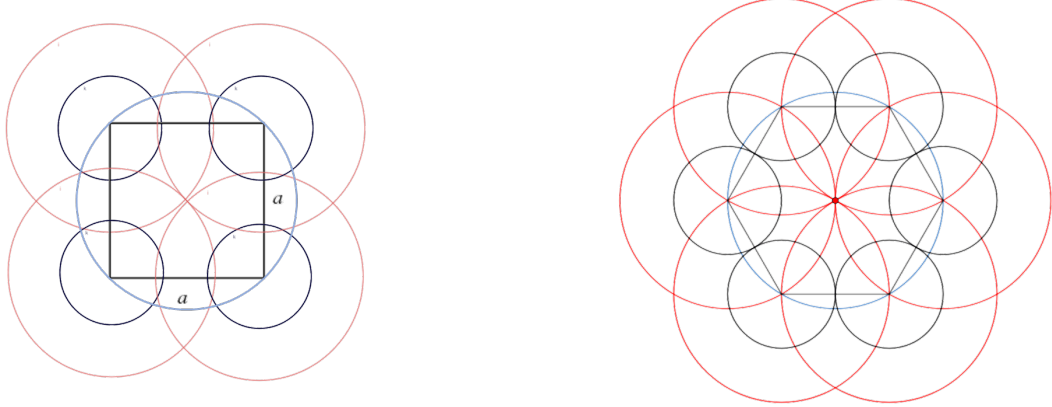


Figure 1.7: 1.7 ábra

1.4 Különböző sugarú körök

1.4.1 Két kör esete

Két különböző sugarú kör esetében is az izoptikus görbék metszéspontjai alkotják az ekvoptikus görbét. Az alábbi 1.8 – 1.13 folyamatábrákon láthatjuk a keletkező metszéspontokat.

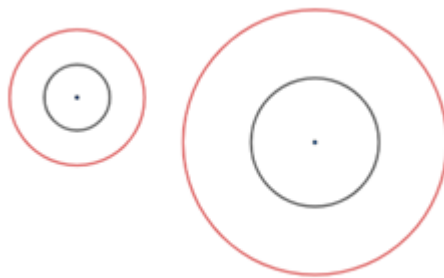


Figure 1.8: 1.8 ábra

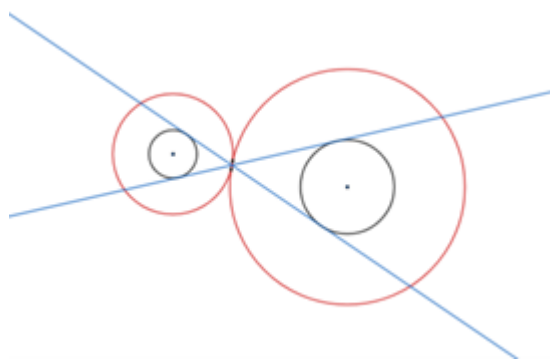


Figure 1.9: 1.9 ábra

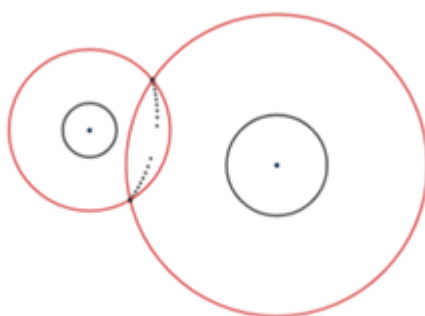


Figure 1.10: 1.10 ábra

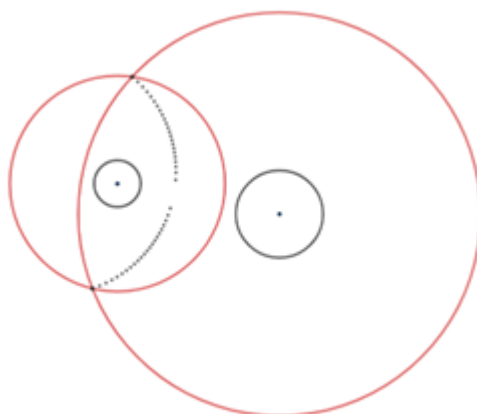


Figure 1.11: 1.11 ábra

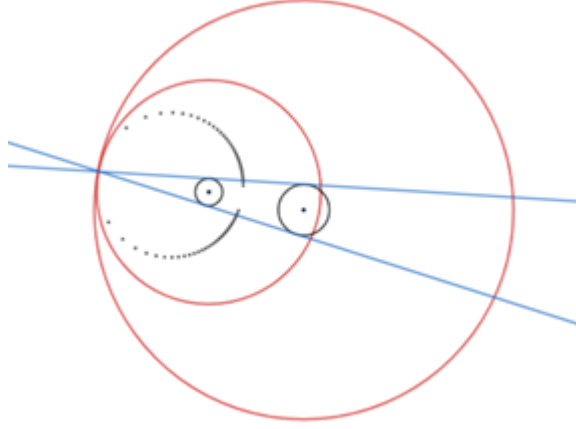


Figure 1.12: 1.12 ábra

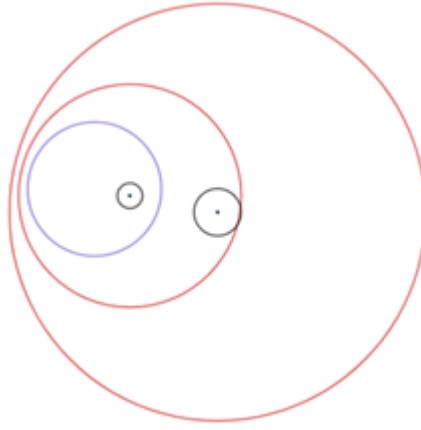


Figure 1.13: 1.13 ábra

Két kör esetén amikor az ekvioptikus pontokat keressük, vagyis az összes olyan pontot amelyből a két kör azonos szögből látszik azonban a szög nagysága elhanyagolható, akkor a keresett pontok egy kör ívére fognak illeszkedni mindig. Először is vegyünk egy $A(u_1; v_1)$ középpontú r_1 sugarú kört és egy $B(u_2; v_2)$ középpontú r_2 sugarú kört és tegyük fel, hogy például $r_2 \neq r_1$. Ekkor a két kör α izoptikus görbéi felírhatók az alábbi módon:

$$eq1 : (x - u_1)^2 + (y - v_1)^2 = \frac{r_1^2}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (1.8)$$

$$eq2 : (x - u_2)^2 + (y - v_2)^2 = \frac{r_2^2}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (1.9)$$

Az 1.8 – at r_1^2 -el az 1.9 – et pedig r_2^2 -vel elosztva az alábbi egyenlőséget írhatjuk fel:

$$\left(\frac{x-u_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{y-v_1}{r_1}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \left(\frac{x-u_2}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{y-v_2}{r_2}\right)^2 \quad (1.10)$$

Az oldalak egyenlőek, ezért vizsgáljuk először egy oldalra rendezve csak az x-et tartalmazó részt. Nézzük csak a bal oldalt.

$$\left(\frac{x-u_1}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{x-u_2}{r_2}\right)^2 \quad (1.11)$$

Bontsuk fel a zárójeleket.

$$\frac{x^2 - 2xu_1 + u_1^2}{r_1^2} - \frac{x^2 - 2xu_2 + u_2^2}{r_2^2} \quad (1.12)$$

Hozzuk közös nevezőre a törtet, majd rendezzük őket.

$$\frac{r_2^2(x^2 - 2xu_1 + u_1^2)}{(r_1r_2)^2} - \frac{r_1^2(x^2 - 2xu_2 + u_2^2)}{(r_1r_2)^2} \quad (1.13)$$

$$\frac{r_2^2x^2 - r_2^22xu_1 + r_2^2u_1^2 - r_1^2x^2 + r_1^22xu_2 - r_1^2u_2^2}{(r_1r_2)^2} \quad (1.14)$$

Tegyük fel, hogy $r_2 \neq r_1$:

$$\frac{r_2^2 - r_1^2}{(r_1r_2)^2}x^2 - \frac{2u_1r_2^2 - 2u_2r_1^2}{(r_1r_2)^2}x + \frac{u_1r_2^2 - u_2r_1^2}{(r_1r_2)^2} \quad (1.15)$$

Osszuk el mindkét oldalt x^2 együtthatójával:

$$x^2 - 2\frac{u_1r_2^2 - u_2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}x + \frac{u_1r_2^2 - u_2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (1.16)$$

Ha teljes négyzet lenne az egyenletünk, így nézne ki:

$$\left(x - \frac{u_1r_2^2 - u_2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\right)^2 = x^2 - 2x\frac{u_1r_2^2 - u_2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{u_1^2r_2^4 - 2u_1r_2^2u_2r_1^2 + u_2^2r_1^4}{r_2^4 - 2r_2^2r_1^2 + r_1^4} \quad (1.17)$$

Itt látható, hogy az utolsó tag nem egyezik az 1.16 egyenlet utolsó tagjával. Tekintsük meg az említett két tag számlálójának különbségét miután közös nevezőre hoztuk a két tagot és átvittük őket az egyenlet jobb oldalára.

$$u_1^2r_2^4 - 2u_1u_2r_1^2r_2^2 + u_2^2r_1^4 - (r_2^2 - r_1^2)(u_1^2r_2^2 - u_2^2r_1^2) \quad (1.18)$$

Felbontjuk a zárójeleket.

$$u_1^2r_2^4 - 2u_1u_2r_1^2r_2^2 + u_2^2r_1^4 - u_1^2r_2^4 + u_1^2r_2^2r_1^2 + u_2^2r_1^2r_2^2 - u_2^2r_1^4 \quad (1.19)$$

Látható, hogy a $u_1^2r_2^4$ és $u_2^2r_1^4$ tagok kiesnek. Ezek után szorzattá alakítjuk a maradékot.

$$r_1^2 r_2^2 (u_1^2 - 2u_1 u_2 + u_2^2) = r_1^2 r_2^2 (u_1 - u_2)^2$$

Hasonlóan az y -os tagra:

$$r_1^2 r_2^2 (v_1^2 - 2v_1 v_2 + v_2^2) = r_1^2 r_2^2 (v_1 - v_2)^2 \quad (1.20)$$

Az 1.20 egyenlet alapján megfogalmazhatjuk az alábbi tételt:

Tétel 1.4.1 *Legyen adott a síkon a $K_1(u_1, v_1)$ és $K_2(u_2, v_2)$ r_1 és r_2 sugarú körök. Ekkor a két kör ekvioptikusa egy kör, melynek középpontja $K\left(\frac{u_1 r_2^2 - u_2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\right)$ sugara pedig $R = \frac{r_1 r_2 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}}{r_2^2 - r_1^2}$.*

Megjegyzés 1.4.2 *Ezt a kört megkaphatjuk a két körünk külső és belső érintőinek metszéspontjából, ugyanis ez a két pont pontosan megadja az ekvioptikus körünk átmérőjét (lásd 1.8 - 1.13 ábrák). Ez alapján könnyen megtalálható a kör középpontja és sugara is. Ezt legegyszerűbben az ismert elemi geometriai szerkesztések útján kapjuk meg. A fenti eredményre találhatunk utalást [4] munkában.*

1.4.2 Három kör ekvioptikusa

Lemma 1.4.3 *Tekintsünk három, páronként különböző sugarú $O_1(u_1, v_1)$ $O_2(u_2, v_2)$ $O_3(u_3, v_3)$ középpontú kört. Ekkor a két-két körhöz tartozó ekvioptikus körök középpontjai mindig egy egyenesre esnek.*

BIZONYÍTÁS:

Elkészítjük a két ekvioptikus kör középpontjára illeszkedő egyenest. Ehhez irányvektorként a két középpontot összekötő irányvektort használjuk, pontként pedig az egyik középpontot. Ez az egyenes felírható egy determináns segítségével is (egyenes).

Tehát először az előzőek alapján $(k_1; k_2)$ körök ekvioptikus köreinek középpontja:

$$K_{1,2} : \left(\frac{u_1 r_2^2 - u_2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \frac{v_1 r_2^2 - v_2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) \quad (1.21)$$

Az r_3 és r_2 sugarakhoz tartozó körök ekvioptikusának a középpontja:

$$K_{2,3} : \frac{r_2^2 u_3 - r_3^2 u_2}{r_2^2 - r_3^2}, \frac{r_2^2 v_3 - r_3^2 v_2}{r_2^2 - r_3^2} \quad (1.22)$$

Aztán ezt felhasználva felírunk egy általános kör egyenletet.

$$\left(x - \frac{u_1 r_2^2 - u_2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right)^2 + \left(y - \frac{v_1 r_2^2 - v_2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right)^2 = \left(\frac{r_1 r_2 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}}{r_2^2 - r_1^2} \right)^2 \quad (1.23)$$

Ezután meghatározzuk az irányvektort.

$$K_{2,3}K_{1,2} = \left(\frac{r_2^2 u_1 - r_1^2 u_2}{-r_1^2 + r_2^2} - \frac{r_3^2 u_1 - r_1^2 u_3}{-r_1^2 + r_3^2}, \frac{r_2^2 v_1 - r_1^2 v_2}{-r_1^2 + r_2^2} - \frac{r_3^2 v_1 - r_1^2 v_3}{-r_1^2 + r_3^2} \right) \quad (1.24)$$

Az egyenes felírásához az irányvektoros egyenletet használhatjuk. Ekkor a lehetséges egyszerűsítések elvégzése után az egyenest amit kaptam $Ax + By + C = 0$ alakban írtam fel, ahol az A, B és C az alábbiak:

$$A = -r_2^2 v_1 + r_3^2 v_1 + r_1^2 v_2 - r_3^2 v_2 - r_1^2 v_3 + r_2^2 v_3 \quad (1.25)$$

$$B = r_2^2 u_1 - r_3^2 u_1 - r_1^2 u_2 + r_3^2 u_2 + r_1^2 u_3 - r_2^2 u_3 \quad (1.26)$$

$$C = r_3^2(-u_2 v_1 + u_1 v_2) + r_2^2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + r_1^2(-u_3 v_2 + u_2 v_3) \quad (1.27)$$

Észrevehető, hogy a kapott egyenlet felírható egy 4x4-es mátrix determinánsaként:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & 0 \\ 1 & u_1 & v_1 & r_1^2 \\ 1 & u_2 & v_2 & r_2^2 \\ 1 & u_3 & v_3 & r_3^2 \end{vmatrix}$$

Az előbb vizsgált egyenesnél érdekes kérdés, hogy az elhelyezkedése pontosan hogyan is függ a körök elhelyezkedésétől és sugarától. Ha az egyenest leíró determináns jobb felső 0 elemét z-re cseréljük, egy síkot kapunk, mely három térbeli pontra illeszkedik. Ezen sík z=0 síkkal vett metszete adja az előbbi egyenest.

Ezeket a pontokat úgy kapjuk meg, hogy az eredeti körök középpontjait "emeljük fel" a hozzájuk tartozó sugarak négyzetével. Ekkor kapunk 3 új pontot amelyek meghatároznak egy síkot a térben. Tehát a lényeg, hogy van 3 középpontunk egy 2dimenziós koordináta rendszerben, és ezek fölött van 3 pont amelyek alkotnak egy új síkot a térben.(1.14 és 1.15 ábra, felül illetve oldal nézet)

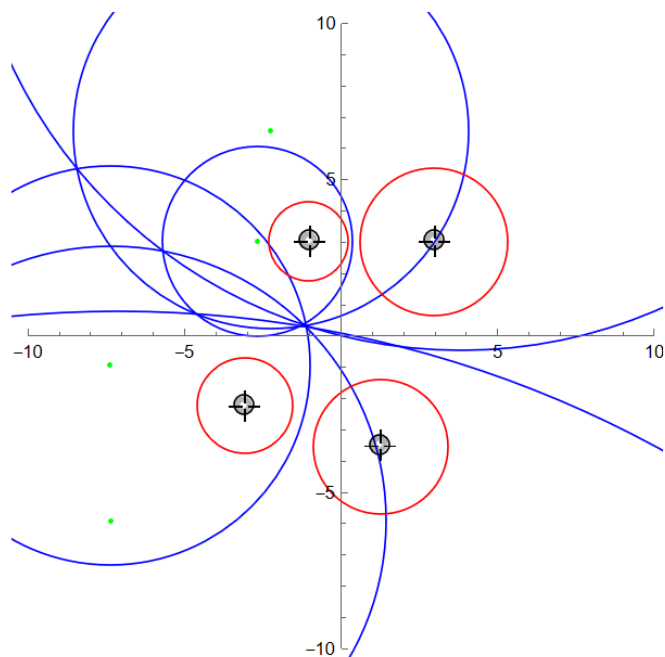


Figure 1.14: 1.14 ábra

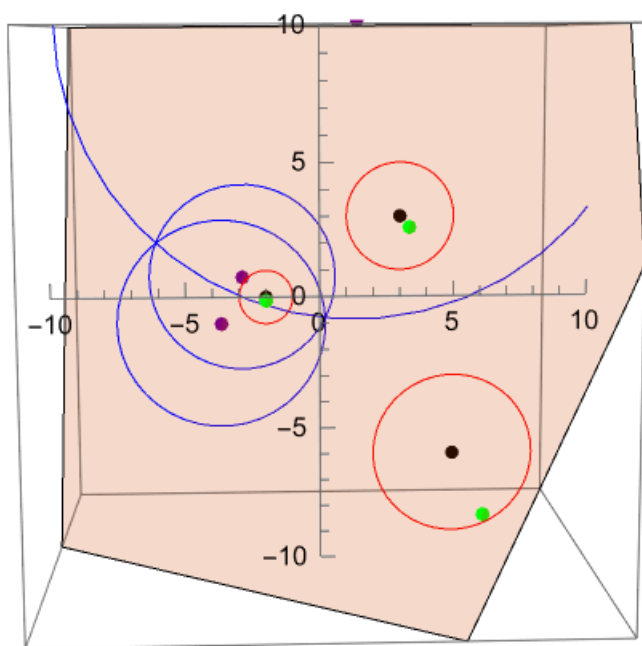


Figure 1.15: 1.15 ábra

Ábra magyarázat: A fekete pontok az eredeti körök középpontjai amelyek a piros körök, a kék körök az ekvoptikus görbék melyeknek a lila pontok a középpontjaik, a zöld pontok az r^2 -el felemelt fekete középpontok. A barack színű sík a három zöld pont által meghatározott sík.

1.5 Ekviptikus pontok száma

A következőkben vizsgáljuk az ekviptikus pontok számát. Ehhez felírunk két ekviptikus egyenletet 0-ra rendezett formában majd kivonjuk őket egymásból, ezáltal megkapjuk a körök hatványvonalát és csak elsőfokú és konstans tag marad, ami egy egyenes egyenletét adja meg.

$$\left(x - \left(\frac{u_1 r_2^2 - u_2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(\frac{v_1 r_2^2 - v_2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\right)\right)^2 - \left(\frac{r_1 r_2 \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}}{r_2^2 - r_1^2}\right)^2 \quad (1.28)$$

$$\left(x - \left(\frac{u_3 r_2^2 - u_2 r_3^2}{r_2^2 - r_3^2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(\frac{v_3 r_2^2 - v_2 r_3^2}{r_2^2 - r_3^2}\right)\right)^2 - \left(\frac{r_3 r_2 \sqrt{(u_3 - u_2)^2 + (v_3 - v_2)^2}}{r_2^2 - r_3^2}\right)^2 \quad (1.29)$$

Az alábbi három sor rendre az x,y együtthatóit és a konstans tagját adja meg ezen egyenesnek.

$$\begin{aligned} & -\frac{2r_1^2(r_3^2(u_1 - u_2) + r_1^2(u_2 - u_3) + r_2^2(-u_1 + u_3))}{(r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 - r_3^2)} \\ & -\frac{2r_1^2(r_3^2(v_1 - v_2) + r_1^2(v_2 - v_3) + r_2^2(-v_1 + v_3))}{(r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 - r_3^2)} \\ & \frac{r_1^2(r_3^2(u_1^2 - u_2^2 + v_1^2 - v_2^2) + r_1^2(u_2^2 - u_3^2 + v_2^2 - v_3^2) + r_2^2(-u_1^2 + u_3^2 - v_1^2 + v_3^2))}{(r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 - r_3^2)} \end{aligned}$$

Megállapíthatjuk, hogy mind a háromban van egy r_1^2 szorzó és azonos a nevezőjük. Ezekkel egyszerűsíthetjük az egyenesünk egyenletét. Ha kifejezzük mondjuk y-t

$$\begin{aligned} y = & \frac{r_3^2(u_1^2 - u_2^2 + v_1^2 - v_2^2 - 2u_1x + 2u_2x)}{2(r_3^2(v_1 - v_2) + r_1^2(v_2 - v_3) + r_2^2(-v_1 + v_3))} + \\ & + \frac{r_2^2(-u_1^2 + u_3^2 - v_1^2 + v_3^2 + 2u_1x - 2u_3x)}{2(r_3^2(v_1 - v_2) + r_1^2(v_2 - v_3) + r_2^2(-v_1 + v_3))} + \\ & + \frac{r_1^2(u_2^2 - u_3^2 + v_2^2 - v_3^2 - 2u_2x + 2u_3x)}{2(r_3^2(v_1 - v_2) + r_1^2(v_2 - v_3) + r_2^2(-v_1 + v_3))} \end{aligned} \quad (1.30)$$

és ezt beírjuk az egyik kör egyenletébe, akkor egy másodfokú kifejezést kapunk, melynek lehetséges gyökei az ekviptikus pontok x koordinátái.

Ekkor a másodfokú kifejezés együtthatói a következőképpen alakulnak:

$$a = \frac{1}{(r_3^2(-v_1+v_2)+r_2^2(v_1-v_3)+r_1^2(-v_2+v_3))^2}((r_3^4((u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2)-2r_2^2r_3^2((u_1-u_2)(u_1-u_3)+(v_1-v_2)(v_1-v_3))+r_1^4((u_1-u_3)(u_2-u_3)+(v_1-v_3)(v_2-v_3)))+r_2^4((u_1-u_3)^2+(v_1-v_3)^2)+2r_1^2r_3^2((u_1-u_2)(u_2-u_3)+(v_1-v_2)(v_2-v_3)+r_1^4((u_2-u_3)^2+(v_2-v_3)^2)))$$

$$b = \frac{1}{(r_3^2(-v_1+v_2)+r_2^2(v_1-v_3)+r_1^2(-v_2+v_3))^2}(-r_3^4(u_1+u_2)((u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2)-r_2^4(u_1+u_3)((u_1-u_3)^2+(v_1-v_3)^2)-r_1^4(u_2+u_3)((u_2-u_3)^2+(v_2-v_3)^2)+r_1^2r_3^2(2u_2^3-u_2^2u_3+u_1^2(-u_2+u_3)+u_3(v_1-v_2)^2+u_1(-u_2^2+u_3^2+(v_2-v_3)^2)-u_2(u_3^2+v_1^2+2v_1v_2-2v_2^2-4v_1v_3+2v_2v_3+v_3^2))+r_2^2(r_1^2(u_1^2(u_2-u_3)-u_2^2u_3+u_2(-u_3^2+(v_1-v_3)^2)+u_1(u_2^2-u_3^2+(v_2-v_3)^2)+u_3(2u_3^2-v_1^2+4v_1v_2-v_2^2-2(v_1+v_2)v_3+2v_3^2))+r_3^2(2u_1^3+u_2^2u_3-u_1^2(u_2+u_3)+u_3(v_1-v_2)^2+u_2(u_3^2+(v_1-v_3)^2)-u_1(u_2^2+u_3^2-2v_1^2+v_2^2-4v_2v_3+v_3^2+2v_1(v_2+v_3))))$$

$$c = \frac{1}{4(r_3^2(-v_1+v_2)+r_2^2(v_1-v_3)+r_1^2(-v_2+v_3))^2}(r_3^4(u_1^4+(u_2^2+(v_1-v_2)^2)^2-2u_1^2(u_2+v_1-v_2)(u_2-v_1+v_2))+r_2^4(u_1^4+(u_3^2+(v_1-v_3)^2)^2-2u_1^2(u_3+v_1-v_3)(u_3-v_1+v_3))+r_1^4(u_2^4+(u_3^2+(v_2-v_3)^2)^2-2u_2^2(u_3+v_2-v_3)(u_3-v_2+v_3))+2r_1^2r_3^2(-u_2^4+u_1^2(u_2^2-u_3^2-(v_2-v_3)^2)-(v_1-v_2)^2(u_3^2+(v_2-v_3)^2)+u_2^2(u_3^2+v_1^2+2v_1v_2-2v_2^2-4v_1v_3+2v_2v_3+v_3^2))-2r_2^2(r_1^2(-u_2^2(u_3+v_1-v_3)(u_3-v_1+v_3)+(u_3^2+u_3v_1-u_3v_2+v_1v_2-(v_1+v_2)v_3+v_3^2)(u_3^2-u_3v_1+u_3v_2+v_1v_2-(v_1+v_2)v_3+v_3^2)+u_1^2(u_2^2-(u_3+v_2-v_3)(u_3-v_2+v_3)))+r_3^2(u_1^4+(u_2^2+(v_1-v_2)^2)(u_3^2+(v_1-v_3)^2)-u_1^2(u_2^2+u_3^2-2v_1^2+v_2^2-4v_2v_3+v_3^2+2v_1(v_2+v_3))))$$

Az a, b és c együtthatóknak mint látható, ugyanaz a nevezőjük, ezért azzal beszorozhatjuk az egész egyenletet. Az új együtthatók a_1 , b_1 és c_1 .

$$a_1 = r_3^4((u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2)-2r_2^2(r_3^2((u_1-u_2)(u_1-u_3)+(v_1-v_2)(v_1-v_3))+r_1^2((u_1-u_3)(u_2-u_3)+(v_1-v_3)(v_2-v_3)))+r_2^4((u_1-u_3)^2+(v_1-v_3)^2)+2r_1^2r_3^2((u_1-u_2)(u_2-u_3)+(v_1-v_2)(v_2-v_3))+r_1^4((u_2-u_3)^2+(v_2-v_3)^2)$$

$$b_1 = -r_3^4(u_1+u_2)((u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2)-r_2^4(u_1+u_3)((u_1-u_3)^2+(v_1-v_3)^2)-r_1^4(u_2+u_3)((u_2-u_3)^2+(v_2-v_3)^2)+r_1^2r_3^2(2u_2^3-u_2^2u_3+u_1^2(-u_2+u_3)+u_3(v_1-v_2)^2+u_1(-u_2^2+u_3^2+(v_2-v_3)^2)-u_2(u_3^2+v_1^2+2v_1v_2-2v_2^2-4v_1v_3+2v_2v_3+v_3^2))+r_2^2(r_1^2(u_1^2(u_2-u_3)-u_2^2u_3+u_2(-u_3^2+(v_1-v_3)^2)+u_1(u_2^2-u_3^2+(v_2-v_3)^2)+u_3(2u_3^2-v_1^2+4v_1v_2-v_2^2-2(v_1+v_2)v_3+2v_3^2))+r_3^2(2u_1^3+u_2^2u_3-u_1^2(u_2+u_3)+u_3(v_1-v_2)^2+u_2(u_3^2+(v_1-v_3)^2)-u_1(u_2^2+u_3^2-2v_1^2+v_2^2-4v_2v_3+v_3^2+2v_1(v_2+v_3))))$$

$$c_1 = \frac{1}{4}(r_3^4(u_1^4+(u_2^2+(v_1-v_2)^2)^2-2u_1^2(u_2+v_1-v_2)(u_2-v_1+v_2))+r_2^4(u_1^4+(u_3^2+(v_1-v_3)^2)^2-2u_1^2(u_3+v_1-v_3)(u_3-v_1+v_3))+r_1^4(u_2^4+(u_3^2+(v_2-v_3)^2)^2-2u_2^2(u_3+v_2-v_3)(u_3-v_2+v_3))+2r_1^2r_3^2(-u_2^4+u_1^2(u_2^2-u_3^2-(v_2-v_3)^2)-(v_1-v_2)^2(u_3^2+(v_2-v_3)^2)+u_2^2(u_3^2+v_1^2+2v_1v_2-2v_2^2-4v_1v_3+2v_2v_3+v_3^2))-2r_2^2(r_1^2((u_3^2+u_3(v_1-v_2)+(v_1-v_3)(v_2-v_3))(u_3^2+u_3(-v_1+v_2)+(v_1-v_3)(v_2-v_3))+u_1^2(u_2^2-u_3^2+(v_2-v_3)^2)-u_2^2(u_3+v_1-v_3)(u_3-v_1+v_3))+r_3^2(u_1^4+(u_2^2+(v_1-v_2)^2)(u_3^2+(v_1-v_3)^2)-u_1^2(u_2^2+u_3^2-2v_1^2+v_2^2-4v_2v_3+v_3^2+2v_1(v_2+v_3))))$$

Másodfokú egyenletek esetén a gyökök számáról a diszkrimináns dönt, ezért azt vizsgáljuk. Nagyon bonyolult kifejezést kapunk, aminek egyszerűsítéséhez Wolfram Mathematica-t használtam. Az egyszerűsítés során a kapott kifejezést szorzattá alakítottuk. Az előjelet nem befolyásoló tagok elhagyása után az alábbi kifejezés adódik:

$$-(r_3^2((u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2)-r_1^2((u_2-u_3)^2+(v_2-v_3)^2))^2+2r_2^2(r_3^2((u_1-u_2)^2+(v_1-v_2)^2)+r_1^2((u_2-u_3)^2+(v_2-v_3)^2))((u_1-u_3)^2+(v_1-v_3)^2)-r_2^4((u_1-u_3)^2+(v_1-v_3)^2)^2$$

Ez a rész tehát a diszkrimináns előjeldöntő része. A fenti kifejezésben érdemes szem előtt tartani, hogy például az r_3 sugarú kör középpontjával szemben az (u_1, v_1) és (u_2, v_2) pontokat összekötő oldal áll, melynek hossz négyzete éppen $((u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2)$. Legyen a sugárral súlyozott oldalhossz négyzete rendre p , q és r :

$$\begin{aligned} p &= r_3^2((u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2) \\ q &= r_2^2((u_1 - u_3)^2 + (v_1 - v_3)^2) \\ r &= r_1^2((u_3 - u_2)^2 + (v_3 - v_2)^2). \end{aligned} \tag{1.31}$$

A fenti kifejezés ekvivalens azzal, hogy

$$2(pq + pr + qr) - (p^2 + q^2 + r^2)$$

Ennek az előjelét vizsgáljuk.

$$2(pq + pr + qr) - (p^2 + q^2 + r^2) < 0$$

Mindkét oldalához hozzáadva $2(p^2 + q^2 + r^2) - t$, a bal oldalon éppen $(p + q + r)^2$ jön ki. Ebből már gyökvonás (mindenki pozitív) és 3-al osztás után adódik az alábbi tétel.

Tétel 1.5.1 *Ha a szemközti csúcsok köré írt kör sugárral súlyozott oldalhosszak négyzetének számtani és négyzetes közepének aránya nagyobb, mint $\sqrt{2/3}$, akkor 2 ekvoptikus pont van, ha egyenlő, akkor 1, ha pedig kisebb, akkor nincs.*

1.6 Záró gondolatok

Habár így is nagyon érdekes felfedezéseket tettünk, van még mit kutatnunk bőven a témában. Számomra is maradtak megválaszolatlan kérdések. Amikor négy vagy annál több kört és ekvoptikus görbéiket tekintjük, vannak bizonyos esetek, amikor az ekvoptikus görbék egy pontban metszik egymást. (1.16) Azonban eddig nem sikerült semmilyen összefüggést, esetleg számolás menetét felfedeznem az említett pont elhelyezkedésében.

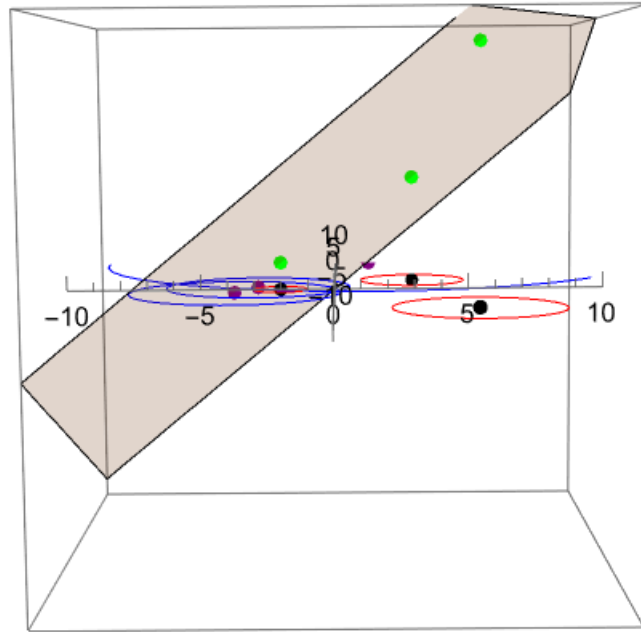


Figure 1.16: 1.16 ábra

Ami kérdés itt felmerül az az, hogy ha a keletkezett síkunkon tetszőlegesen választunk egy pontot, és tekintjük a vetületét az x,y síkon, amely egy negyedek kör középpontja lesz, akkor ez az említett negyedek kör ekvoptikusa is be fog-e épülni a már meglévők közé és lesz-e velük közös metszéspontja. Ha tetszőlegesen elhelyezkedő három kört vizsgálunk, akkor kiderül, hogy az ekvoptikusaik középpontjai mindig egy egyenesre illeszkednek.

Bibliography

- [1] <https://mathcurve.com/courbes2d.gb/isoptic/isoptic.shtml>
- [2] Cieřlak, W., Mozgawa, W. : On curves with circles as their isoptics, *Aequationes mathematicae* **96**, 653–667, 2022.
- [3] Csima, G.: Isoptic curves and surfaces, disszertáció, 2017
- [4] Odehnal, B. : Equioptic curves of conic section, *J. Geom. Graphics* **14/1**, 29-43, 2010.