BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

GEOMETRIAI TANSZÉK

DISZKRÉT ELEMEKBŐL ÁLLÓ TORNYOK ÖSSZEOMLÁSÁNAK KÍSÉRLETI ÉS ELMÉLETI MODELLEZÉSE

TUDOMÁNYOS DIÁK KONFERENCIA

PESTI PATRIK

BERTY MÁRTON

DÉR ALEX

KONZULENSEK:

DR. SZILÁGYI BRIGITTA

EGYETEMI DOCENS

DR. VÁRKONYI PÉTER

EGYETEMI TANÁR

BUDAPEST, 2023

Abstract

With the evolution of architectural and engineering solutions, not only are tower- and chimney-like tall structures becoming more prevalent, but constructions composed of discrete elements - such as various container towers, brick or stone structures, and installations crafted for visual appeal – have also increased in size. The demolition of these structures often occurs via controlled collapses. In these scenarios, understanding the tilting process and the subsequent spatial distribution of debris is of critical importance, especially when the collapse might endanger surrounding individuals, buildings, historical monuments, or natural formations.

In our work, we primarily focus on towers constructed from discrete elements that transmit only compressive forces. These towers are tilted around a fixed axis and the discrete elements are experimentally modelled using simple rectangular-shaped bodies. We develop a mathematical model to describe the tilting of such towers and the fractures that occur during the tilting, as well as to estimate the spatial distribution of the resulting debris. In addition, we formulate a time-stepped numerical simulation based on contact dynamics. In the conclusion, we will compare the experimental results with the two theoretical models.

Kivonat

Az építészet és a mérnöki megoldások fejlődésének köszönhetően nemcsak a torony- és kéményszerű magas épületek válnak egyre gyakoribbá, hanem a diszkrét elemekből álló konstrukciók – mint például különféle konténertornyok, téglából vagy kőből falazott szerkezetek, illetve látványosság céljából készített alkotások – is növekednek méretben. Ezen struktúrák bontása gyakran kontrollált összeomlasztással történik. Ilyenkor a dőlési folyamat és az ezt követő törmelék térbeli eloszlásának ismerete kritikus jelentőségű, különösen, amikor az omlás veszélyeztetheti a környékbeli embereket, épületeket, történelmi emlékműveket vagy természeti képződményeket.

Munkánk során főként azon tornyok vizsgálatára koncentrálunk, melyek diszkrét, csak nyomóerőt közvetítő elemekből épülnek fel. A tornyokat egy fixált kezdeti tengely mentén eldöntjük, és a diszkrét elemeket, egyszerű téglatest alakú hasábokkal kísérletileg is modellezzük. Készítünk egy matematikai modellt az ilyen tornyok dőlésének és a dőlés során keletkező töréseknek a leírására, valamint az ebből eredő törmelékek térbeli eloszlásának becslésére. Emellett egy kontakt dinamikán alapuló időlépéses numerikus szimulációt is kidolgozunk. Zárásként összehasonlítjuk a kísérleti eredményeket és a két elméleti modellt.

Tartalom

1. Bevezetés 6

1.1 Előszó 6

1.2 Irodalom 6

1.3 A dolgozat célja és felépítése 7

1.4 Jelölésrendszer 8

2. A vizsgált jelenség bemutatása 8

2.1 A tornyok felépítése és a döntés definiálása 8

2.2 Megfigyelések 9

3. Leíró modell 11

3.1 Inga szerű szakasz 11

3.1.1 Törés pontjának meghatározása 11

3.1.2 Csatolt ingaszerű mozgásleírás 14

3.2 Szétcsúszási szakasz 14

4. Kontakt dinamikán alapuló szimuláció 21

4.1 Az eljárás elve 21

4.2 Az ütközések fizikai modellezése 21

4.2.1 Normális pattanási erőlökés 21

4.2.2 Tangenciális pattanási erőlökés 23

4.3 Szimulációt végző program függvényei 26

5. Kísérleti modellezés 28

5.1 Tornyok eldöntése 29

5.1.1 A mérés menete 29

5.1.2 A mérés kiértékelése 29

5.2 Tapadási súrlódási együttható mérése 30

5.2.1 A mérés menete 30

5.2.2 A mérés kiértékelése 30

5.3 Csúszási súrlódási együttható 31
5.3.1 A mérés menete 31
5.3.2 A mérés kiértékelése 31
5.4 Pattanási tulajdonságok mérése 32
5.4.1 A mérés menete 32
5.4.2 A mérés kiértékelése 32
6. Eredmények összehasonlítása 33
7. Összegzés 38
8. Köszönetnyilvánítás 38
9. Irodalomjegyzék 39

1. Bevezetés

1.1 Előszó

Az építészet és a mérnöki megoldások fejlődésének köszönhetően egyre gyakoribbá váltak a torony-, kéményszerű magas épületek és a diszkrét elemekből álló konstrukciók – mint például különféle konténertornyok, téglából vagy kőből falazott szerkezetek, illetve látványosság céljából készített alkotások – sőt ezek méretben is növekedtek. Ezen struktúrák bontása gyakran kontrollált összeomlasztással történik. Ilyenkor a dőlési folyamat és az ezt követő törmelék térbeli eloszlásának ismerete kritikus jelentőségű, különösen, amikor az omlás veszélyeztethet embereket, épületeket, történelmi emlékműveket vagy természeti képződményeket.

1.2 Irodalom

A témához kapcsolódva több kutatás is született már különböző megközelítésekkel. Az alábbiakban ezek közül térnénk ki néhány, a dolgozatunk számára is releváns munkára.

Találhatunk olyan cikket, amely különböző törmelékhalmazok mozgását vizsgálja és dokumentálja [6]. A kutatás során 4-12 kg tömegű kőhalmazt csúsztattak le adott geometriájú lejtőn, és vizsgálták a törmelékhalom eloszlását a lecsúszást követően, különös tekintettel a legmesszebb eljutó elemekre. Ezen kívül ugyanezen lejtőkön leengedtek köveket egyesével is, és rögzítették a lejtőtől vett távolságot. A vizsgálat során használt kövek mérete egyenként 2 mm és 40 mm között változott. Továbbá végeztek kísérleteket zúzott (szögletes, durva felületű), illetve lekerekített, koptatott felületű kövekkel külön-külön. A legmesszebbre eljutott elemekre vonatkozó megállapításaik a következők:

1. A legmesszebbre jutott elemek mozgása, a lejtőtől való végső távolsága független az egyszerre lecsúsztatott kőmennyiségtől, illetve a többi kőelemtől.

2. Az egyenként lecsúsztatott kődarabok maximális eljutási távolsága és az egy tömegben lecsúsztatott kőtömegből a legmesszebbre jutott elemek maximális távolsága nem tér el egymástól jelentősen.

Folytonos anyagú épületek összeomlását gyakran végeselem szimulációk segítségével lehet modellezni. Két ilyen gyakori módszert olvashattunk a [8]. publikációban.

Az egyik az elemeróziós (element erosion) módszer, mely azon alapul, hogy a szerkezetet tetszőlegesen kicsit részekre osztjuk fel, majd minden kis résznek vizsgáljuk a terhelését. Ha a terhelés meghaladja azt a kritikus mértéket, melyet már nem képes az anyag elviselni, akkor a kis elem eltávolításra kerül és a szimuláció folytatódik a többi elemmel. Nagy előnye ennek a módszernek, hogy az elemek eltávolításával nem nő meg a műveletigénye a folyamatnak, hanem ugyanakkora marad. Hátránya viszont, hogy csökken a térfogat, a rendszer energiája és az ütközések lekövetése sem lehet nagy bizonyosságú.

A másik módszer a node-split, mely során nem kerül egy elem sem eltávolításra. Ebben a módszerben az előzőhöz hasonlóan kis elemekre van felosztva a szerkezet, azonban itt a csúcsokon van a hangsúly. Ezek terhelését vizsgáljuk, amely, ha a kritikus értéket eléri akkor szétválik két csúccsá. A többi pont érintetlenül marad a rendszerben. A módszer hátránya, hogy nagyságrendekkel megnövekedett idő kell a teljes folyamat szimulálásához, hiszen minden kis elem rendelkezik 8 csúccsal, melyeket külön kell definiálni. Óriási előnye azonban, hogy nem változik a rendszerben az energia, a térfogat és a tömeg.

Kimondottan tornyok dőléséről is léteznek kutatások. Ezek gyakran folytonos anyageloszlású tornyokról számolnak be [7]. Létezik egy kutatás, amely diszkrét elemű kockákból épített tornyok (kockák egymásra pakolásával készített tornyok) dőlésére is kitér [1]. Azonban a szerzők azzal a közelítéssel dolgoznak, hogy a torony nagyon vékony. A szintek egymáshoz való elhelyezkedésével nem foglalkoznak, ami, ahogy később látni fogjuk, fontos paraméter lesz számunkra. Továbbá, csak addig vizsgálják a dőlést, míg a törés be nem következik. A következményeket nem analizálják.

1.3 A dolgozat célja és felépítése

Ezek fényében célunk az volt, hogy valamivel komplexebb összeállítású, diszkrét torony összeomlását vizsgáljuk bizonyos feltételek mellett. A dolgozat felépítése a következő:

Először definiáljuk az általunk vizsgált tornyot és dőlést. Ezek alapján készítünk egy több szakaszból álló matematikai modellt az ilyen tornyok dőlésének, a dőlés során keletkező töréseknek és az azt követő mozgásoknak a leírására, valamint az ebből eredő törmelékek térbeli eloszlásának becslésére. Majd egy kontakt dinamikán alapuló időlépéses numerikus szimulációt is kidolgozunk. Ezek után bemutatjuk a mérési és kiértékelési eljárásainkat, melyek segítségével a döntést vizsgáltuk és az egyéb releváns paramétereket meghatároztuk. Végezetül össze fogjuk hasonlítani az elméleti modellt, a kontakt dinamikán alapuló szimulációt és a mérési eredményeket.

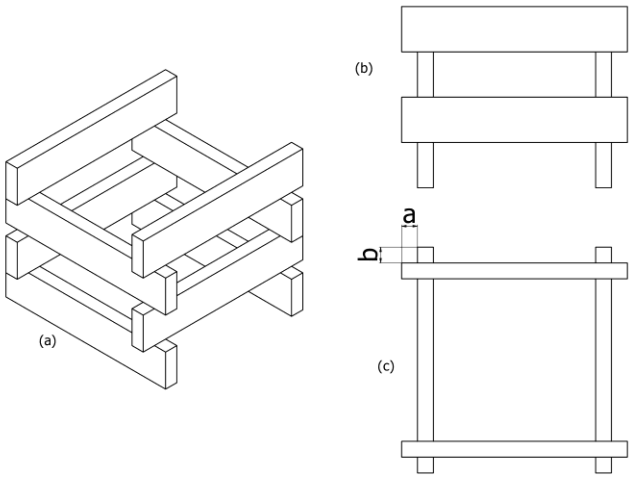
1.4 Jelölésrendszer

A dolgozat során a vektor és skalármennyiségek jelölésére az alábbi szabályok fognak vonatkozni.

- A skalár mennyiségeket vékony betűvel jelöljük pl.: C; α_0
- A vektorokat félkövérrel, pl.: $\boldsymbol{v}$; $\boldsymbol{F_{g0}}$
- Az „A” pontból „B” pontba mutató vektor jele: $\boldsymbol{r_{A,B}}$
- Egy vektor (pl.:$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r_{A,B}}$) adott koordinátáját vékony karakterrel a következőképpen fogjuk jelölni: v_x, r_{A,B_x}
- Egy definiált $\boldsymbol{v}$ vektor előjeles hosszát „v”- vel jelöljük (ennek pl. szögsebességeknél, forgatónyomatékoknál van jelentősége síkbeli mozgás esetén, ahol azok értéke megegyezik a vektor „z” koordinátájával. Ilyenkor $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ és $M_z = M$).

2. A vizsgált jelenség bemutatása

2.1 A tornyok felépítése és a döntés definiálása

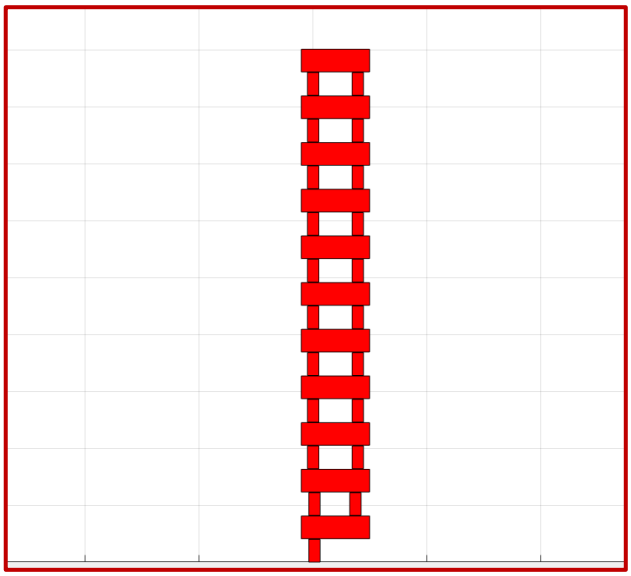


2.1-es ábra

A vizsgált tornyot egységes, téglatest alakú elemekből építettük fel [2.1-es ábra]. Az elemekből szinteket képeztünk és ezeket egymásra helyeztük. Egy szint két párhuzamos azonos magasságban lévő elemből állt. Továbbá két egymással szomszédos szint elemei, hosszirány szerint mindig merőlegesek voltak egymásra. Az [2.1.a ábrán] lévő torony tehát négy rétegből áll. Az elsődleges különbség az általunk épített tornyok között a magasságuk volt, ezt a korábban említett szintek számával fejeztük ki. Esetünkben ez többnyire 20-40 szintes tornyokat jelentett. A korábban leírt struktúra szerint kétféle tornyot építettünk. Az első típus teljesen szabályos, ebben minden második réteg pontosan a kettővel alatta lévő réteg felett helyezkedik el. Az [2.1.c ábrán] „a”-val és „b”-vel

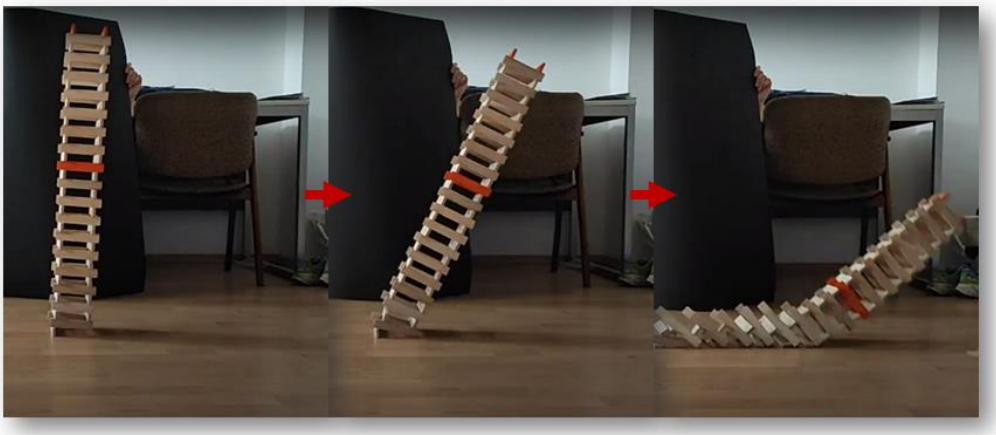
jelölt méret bármely két egymást követő rétegben ugyanakkora és megegyezik egy elem legrövidebb élének nagyságával. A második típusban valamelyik, a döntés irányára merőleges szinten lévő elempár valamennyivel bentebb lett tolva. Ez a mesterséges hiba segítségével vizsgáltuk a torony lehetséges megtörését a döntés során.

A döntést a következőképpen képzeltük el: Egy a torony alján lévő elem meghibásodik így tartó feladatának ellátására képtelenné válik. Mi most ezért azt fogjuk feltételezni, hogy az egyik alsó elem hiányzik [2.2-es ábra]. Kísérletek során ezt, az egyik alapozó elem gyors eltávolításával értük el. A tartóelem hiányában pedig a torony elkezd az ottmaradt tartóelem éléből képzett tengely mentén dőlni (Megjegyzés: A továbbiakban azt a szintet, ami a torony alján helyezkedik el és hiányzik egyik eleme, „0. szintnek” fogjuk hívni.).



2.2-es ábra

2.2 Megfigyelések



2.3-as ábra

Néhány torony döntése után a következőket vehetjük észre: A dőlés alapvetően két részére osztható [2.3-as ábra]. Egy ingaszerű kezdeti dőlési szakaszra, mely során a megmaradt alapelem fixen marad. Ez addig tart amíg az alapelem ki nem csúszik vagy az első szint annyira el nem fordul, hogy eléri a talajt. Méréseink során a talaj eléréséig az alap kicsúszását nem tapasztaltuk. A talaj 1. elérésének pillanatát innentől a „megakadás pillanatának” fogjuk hívni.

Ekkor vagy az új érintkezési pontok által kijelölt tengely körül kezd el dőlni a torony, vagy elkezd szétcsúszni. Amennyiben nem csúszik szét azonnal, abban az esetben is már kis szögelfordulás után át fogunk lépni ebbe a szakaszba. A szétcsúszás végén éri el a törmelék a nyugalmi helyzetet.

Most picit nézzük meg mi történik, ha a torony megtörik dőlés közben. Legyen ez természetes vagy egy tudatosan belerakott szűkítés miatt. [2.4-es ábra]

2.4-es ábra

Ebben az esetben azt láthatjuk, hogy az első szakaszban megtörik a torony, de amíg el nem éri a megakadási pillanatát, az alaprész és a letörőrész érintkezési pontja fix marad. Egy csatolt fizikai ingához hasonló mozgást kezd el végezni. Ezt a mozgásformát feltételezzük az első elméleti leírásban is. Ezt követően, ha a törés mértéke megfelelően nagy volt, a torony felső része akár „visszafelé” az eredeti dőlésiránnyal ellentétesen is elmozdulhat.

A méréseket és különböző kimeneteiket részletesebben a nekik dedikált szekcióban fogjuk tárgyalni.

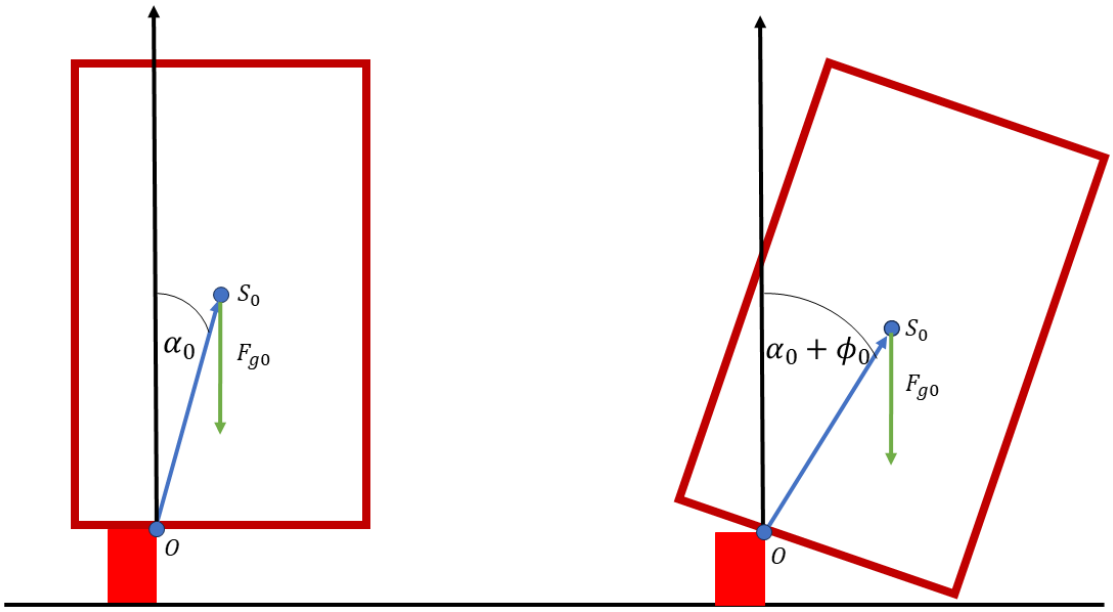
3. Leíró modell

3.1 Inga szerű szakasz

3.1.1 Törés pontjának meghatározása

Ebben a szakaszban, a mozgást síkmozgásként írjuk majd le, mert a torony mozgása a forgástengellyel párhuzamosan elhanyagolhatónak tekinthető. Ezt a fix, 0 sebességű forgástengelyt „O”-val fogjuk jelölni a torony tömegközéppontját pedig S_0-lal [3.1-es ábra]. Emellett, ahogy már korábban is utaltunk rá, feltételezni fogjuk a tapadást az elemek között. Ez egyszerűsíti a modellalkotást, és amennyiben szükséges egy biztonsági ellenőrzést is megtehetünk a releváns pontokban az erők kiszámolásával. Ezzel ellenőrizve, hogy tényleg tapadás lép fel.

Először tegyük fel, hogy a torony képes egyben, törés nélkül dőlni.



3.1-es ábra

Írjuk fel a torony szöggyorsulását az „O”-körül, a csillapító erőket elhanyagolva! (Itt a légellenállást és a különböző deformációkból adódó csillapítást értjük csillapító erőkön. A légellenállás elhanyagolást megtehetjük, mert a sebességek viszonylag kicsik és a torony tömege viszonylag nagy a homlokfelülethez képest.)

$$\ddot{\phi}_0 = \frac{F_{g0}\,|\boldsymbol{r_{O,S2}}\,|}{I_0} sin(\alpha_0 + \phi_0\ ),$$

(3.1.)

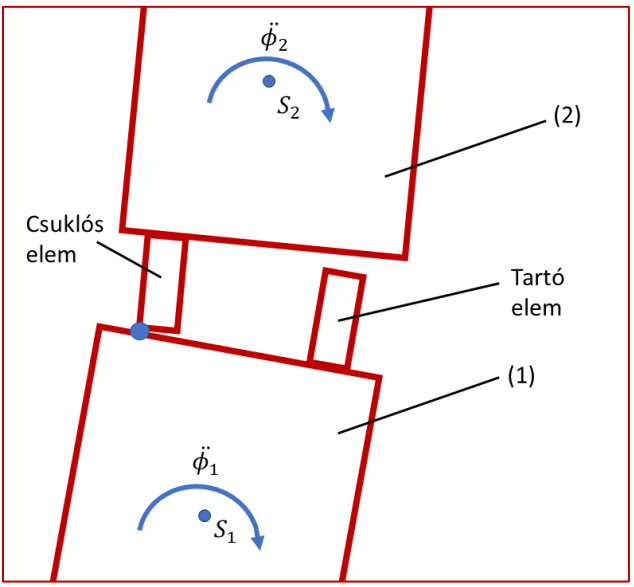
ahol F_{g0} a teljes dőlő toronyra ható gravitációs erő, I_0 a teljes torony „O”-ra vett tehetetlenségi nyomatéka, α_0 az a szög, melyet az „O”-ból S_0-ba húzott vektor bezár a függőlegessel a nyugalmi állapotban és ϕ_0 a szög, mellyel megdőlt a tornyunk.

A *(3.1.)* egyenlőség két oldalát beszorozva $\dot{\phi}$-vel, majd azt követően integrálva kapjuk, hogy:

$$(\dot{\phi}_0)^2 = C - 2\frac{F_{g0}|\boldsymbol{r_{O,S2}}\,|}{I_0}\cos(\alpha_0 + \phi_0\ ).$$

(3.2.)

Ez eddig szinte ekvivalens a standard fizikai inga kilengését leíró differenciálegyenlettel, melyet [1]-ben is megtalálhatunk. Ennek segítségével a szögsebesség kifejezhető expliciten a dőlés szögéből.

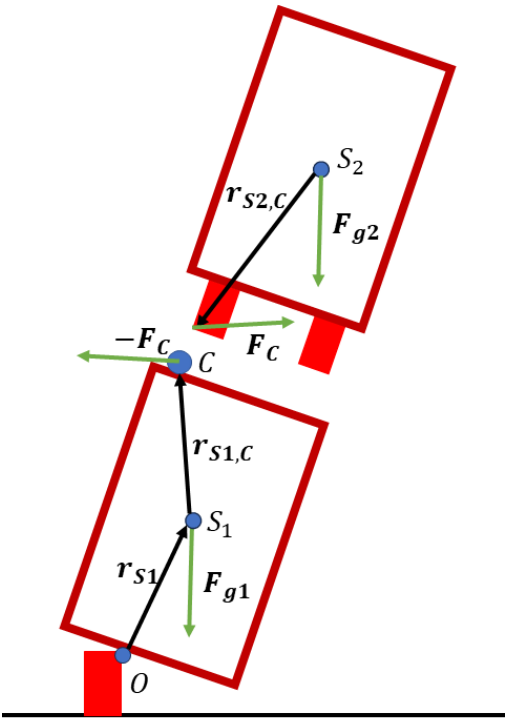


3.2-es ábra

Most vizsgáljuk meg, hogy egy adott pillanatban létrejön-e törés a torony adott szintjénél. Azt elfogadjuk, hogy a tornyot felépítő elemek összenyomhatatlanok és mindig „elég” nyomóerőt tudnak kifejteni, viszont húzóerő kifejtésére képtelenek. Emiatt tornyaink valamivel könnyebben megtörnek, mint a [7]-ben látható folytonos kémények.

Bontsuk fel a tornyot két részre: a vizsgált lehetséges törési szint alattira (1-es testre) és felettire (2-es testre), a torony pedig dőljön az ábrán látható módon [3.2-es ábra]. Ekkor számoljuk ki mekkora lenne a felső és alsó rész szöggyorsulása, ha csatolt ingák lennének, ahol a csukló a bal elem alján helyezkedik el. (Megjegyzés: jelenleg a szögsebességek előjelhelyesen szerepelnek számításainkban, azaz negatív értéket vesznek fel a [3.2-es ábra] szerint.). Továbbá nevezzük a bal oldali elemet innentől csuklós elemnek, míg a jobb oldalit tartó elemnek. Ha $\ddot{\phi}_1 - \ddot{\phi}_2 > 0$, akkor a felső test „szöggyorsulna az alsó felé”. Ez nem gond, mert a jobb oldali tartó elem ekkor nyomóerőt fog kifejteni az alatta és a felette lévő testre úgy, hogy azok

szöggyorsulása megegyezzen. Amennyiben $\ddot{\phi}_1 - \ddot{\phi}_2 < 0$, akkor a felső test szögeltérése nő az alsóéhoz képest, azaz lemarad. Ennek megakadályozásához húzóerőt kell kifejtenie a tartó elemnek. Erre viszont nem képes. Mindebből következik, hogy a torony törni fog. $A\ \ddot{\phi}_1, \ddot{\phi}_2$ mennyiségeket a következőképpen határozhatjuk meg:



3.3-as ábra

Írjuk fel $\ddot{\phi}_1, \ddot{\phi}_2$-t a forgásdinamika alapegyenlete segítségével. $\ddot{\phi}_1, \ddot{\phi}_2$ értéke független a síkra merőleges forgástengely pozíciójának megválasztásától, ezért az (1)-es testre vonatkozó *(3.3.)*-as egyenletet az „O”-köré, míg a (2)-es testre vonatkozó *(3.4)*-es egyenletet a tömegközéppontja köré írjuk fel.

$$\ddot{\boldsymbol{\phi}}_{\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{r_{S1}} \times \boldsymbol{F_{g1}} - \boldsymbol{r_{S1,C}} \times \boldsymbol{F_c}}{I_1},$$

(3.3.)

$$\ddot{\boldsymbol{\phi}}_{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{r_{S2,C}} \times \boldsymbol{F_c}}{I_2},$$

(3.4.)

ahol a [3.3-as ábra] alapján $\boldsymbol{r_{S1}}; \boldsymbol{r_{S1,C}}; \boldsymbol{r_{S2,C}}$ az adott vektorok, $I_1; I_2$ rendre a két rész adott tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka, $\boldsymbol{F_g1}$ az alsó testre ható gravitációs erő és $\boldsymbol{F_C}$ a képzeletbeli csuklóban ható erő.

Továbbá írjuk fel a kényszerfeltételünket az ábra paraméterei alapján, mely jelen esetben azt fejezi ki, hogy a „C” pont gyorsulása „O”-ból és „S_2”-ből számítva is ugyanaz lesz.

$$\ddot{\boldsymbol{\phi}}_{\mathbf{1}} \times \boldsymbol{r_C} - \dot{\boldsymbol{\phi}}_{\mathbf{0}}^{\ \mathbf{2}} * \boldsymbol{r_C} = \frac{\boldsymbol{F_{g2}} + \boldsymbol{F_c}}{m_2} + \ddot{\boldsymbol{\phi}}_{\mathbf{2}} \times \boldsymbol{r_{S2,C}} - \dot{\boldsymbol{\phi}}_{\mathbf{0}}^{\ \mathbf{2}} * \boldsymbol{r_{S2,C}}.$$

(3.5.)

Itt azért $\dot{\boldsymbol{\phi}}_{\mathbf{0}}^{\ \mathbf{2}}$ jelenik meg mind a két oldalon, mert azt feltételeztük, hogy eddig a pontig a torony, törés nélkül dőlt. Most a (*3.2 ; 3.3 ; 3.4 ; 3.5*) egyenletekből alkotott egyenletrendszer segítségével a következő mátrixos összefüggés írható fel:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ F_{cx} \\ F_{cy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & -r_{S1,C_y} & r_{S1,C_x} \\ 0 & I_2 & r_{S2,C_y} & -r_{S2,C_x} \\ r_{C_y} & -r_{S2,C_y} & \frac{1}{m_2} & 0 \\ -r_{C_x} & r_{S2,C_x} & 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_{S1_x} * F_{g1_y} \\ 0 \\ \dot{\phi}_0{}^2 * r_{S2,C_x} - \dot{\phi}_0{}^2 * r_{C_x} \\ \dot{\phi}_0{}^2 * r_{S2,C_y} - \dot{\phi}_0{}^2 * r_{C_y} \end{bmatrix}.$$

(3.6.)

Innen megtudhatjuk, hogy az adott szint törni fog-e egy adott szögnél. Ha a törési szög kisebb, mint az a szög, amennyit a torony dőlne megakadásig, akkor a leíráshoz át kell térnünk egy csatolt ingaszerű modellre.

3.1.2 Csatolt ingaszerű mozgásleírás

Itt egy numerikus szimulációt készítünk. A szimuláció azon fog alapulni, hogy a torony részeinek pozíciója alapján és a sebességállapotuk ismeretében a gyorsulásállapotuk is meghatározható lesz. Ehhez nagyon egyszerűen a (*3.6.*)-os összefüggést fogjuk felhasználni, csak kicseréljük benne az eddig közös $\dot{\phi}_0$ tagot $\dot{\phi}_1$ –re és $\dot{\phi}_2$ -re. Innen kapjuk, hogy adott pillanatban:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ F_{cx} \\ F_{cy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & -r_{S1,C_y} & r_{S1,C_x} \\ 0 & I_2 & r_{S2,C_y} & -r_{S2,C_x} \\ r_{C_y} & -r_{S2,C_y} & \frac{1}{m_2} & 0 \\ -r_{C_x} & r_{S2,C_x} & 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_{S1_x} * F_{g1_y} \\ 0 \\ \dot{\phi}_2{}^2 * r_{S2,C_x} - \dot{\phi}_1{}^2 * r_{C_x} \\ \dot{\phi}_2{}^2 * r_{S2,C_y} - \dot{\phi}_1{}^2 * r_{C_y} \end{bmatrix}.$$

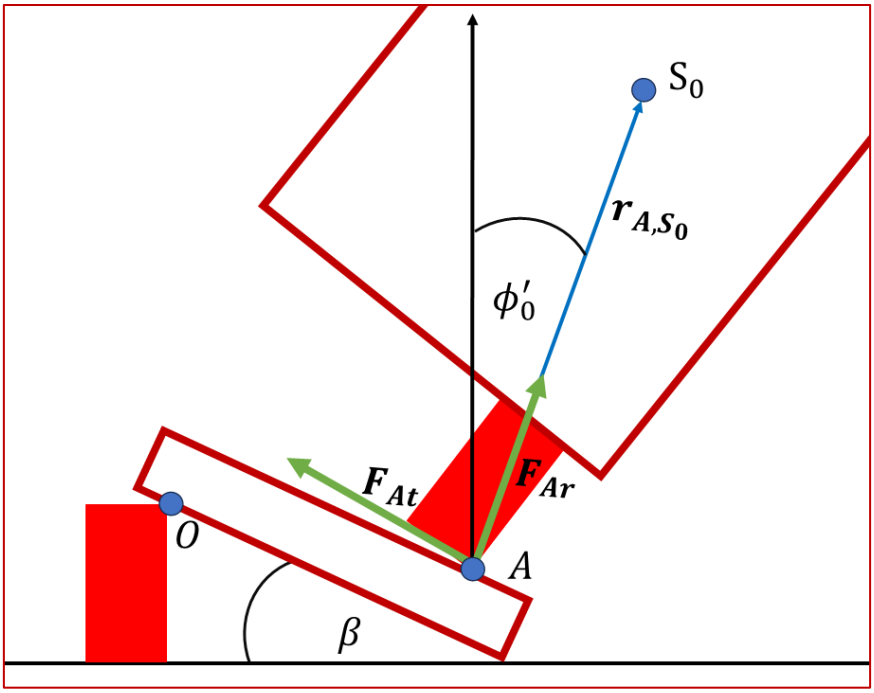
(3.7.)

Ennek segítségével a mozgást pedig egy Explicit-Euler-féle módszert felhasználó szimulációval le tudjuk írni. Ha javítani szeretnénk a pontosságon vagy gyorsítani szeretnénk a szimulációt, alkalmazhatjuk a Runge-Kutta-metódusokat is [9]. Ez ténylegesen felgyorsítja a szimuláció futását, de tapasztalataink szerint egy ilyen ingánál, még a szimpla Euler-féle módszerek is bőven megfelelőek.

3.2 Szétcsúszási szakasz

Ez a szakasz a megakadást követően valósulhat meg és egyelőre csak a törés nélkül dőlő tornyokra fogjuk vizsgálni. A megakadást követően még lehetséges, hogy a torony egy új tengely körül ingaként dől mindaddig, amíg meg nem csúszik az alapjánál. Azért csak a torony alját vizsgáljuk, mert jó közelítéssel ott fog a dőlés irányába először megcsúszni. A mérések

során ezt tapasztaltuk és a [1]-kutatásban látott közelítés, mely a tornyot nagyon vékonynak feltételezi, is ezt kapja eredményül. Először határozzuk meg, mekkora szögnél kezdődik a megcsúszás szakasza. Ehhez számoljuk ki a torony alján ható erőt [3.4-es ábra].



3.4-es ábra

Az alapnál ható erő sugárirányú komponense (ez párhuzamos lesz a megakadás pontjából a dőlő test súlypontjába mutató vektorral):

$$F_{Ar} = F_{g0} * \cos(\phi_0') - \dot{\phi}_0' * \left|\boldsymbol{r_{O,S0}}\right| * m_0.$$

(3.8.)

A tangenciális komponens:

$$F_{At} = F_{g0} * \sin(\phi_0') - \ddot{\phi}_0' * \left|\boldsymbol{r_{O,S0}}\right| * m_0.$$

(3.9.)

Innen:

$$\boldsymbol{F_A} = \begin{bmatrix} F_{Ar} * \sin(\phi_0') - F_{At} * \cos(\phi_0') \\ F_{Ar} * \cos(\phi_0') + F_{At} * \sin(\phi_0') \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(3.10.)

Az alapon a csúszás létrejön, ha:

$$\frac{F_{A_x} * \cos(\beta) - F_{Ay} * \sin(\beta)}{F_{Ax} * \sin(\beta) + F_{Ay} * \cos(\beta)} < \mu_s.$$

(3.11.)

Továbbá előfordulhat, hogy nem a torony csúszik meg a temporálisan stabilan lévő megakadt elem felszínén, hanem az akadt elem a padlón. Ennek a határát hasonló módon lehet vizsgálni. Ezenkívül meg kell jegyezni, hogy vékony tornyok esetében, ahogy [1]-ben is láthatjuk, a torony alján ható erő komponenseinek aránya független a torony magasságától és tömegétől. Ezen okoknak köszönhetően a mért tornyaink is körülbelül ugyanannál a szögnél törtek meg (kb. $\phi'_0 \approx 45°$).

Fontos elmondani, hogy ettől a ponttól kezdve sok közelítést fogunk alkalmazni, mert ezt a szakaszt egy nagyobb komplexitás jellemzi. Ezenkívül a 4-es fejezetben a szimuláció segítségével pontosabban is modellezhető a mozgás ezen szakasza.

Most vizsgáljuk meg mi történik, miután a torony elkezd ténylegesen szétcsúszni. Ekkor azt tapasztalhatjuk, hogy a torony lecsúszó része (ide minden beletartozik a 0. és első szinten kívül) rövid idő alatt földet ér, amikor is a függőlegessel egy δ szöget fog bezárni. Mivel a folyamat rövid idő alatt történik meg, így azt mondjuk, hogy jó közelítéssel igaz a következő:

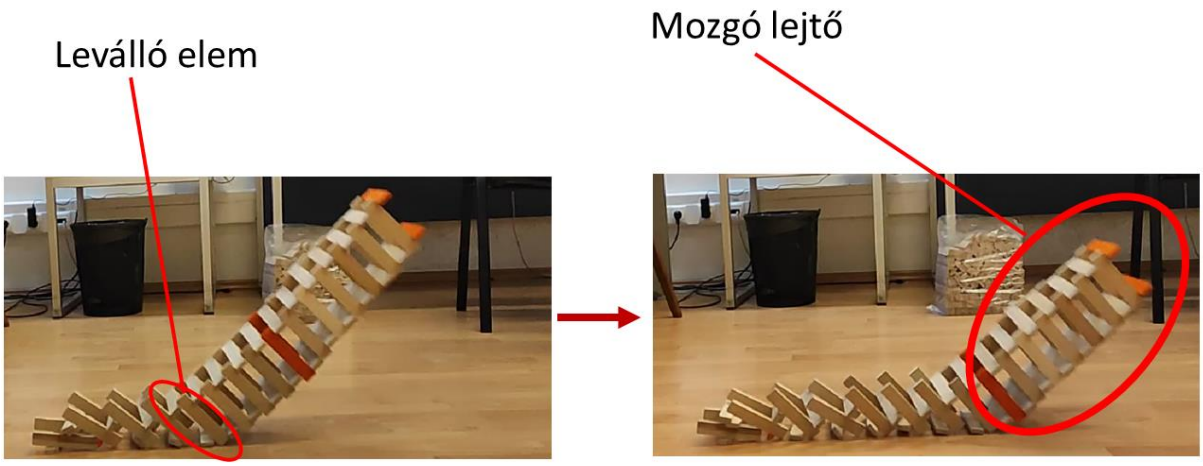
$$\delta = \phi'_{0max} + \dot{\phi}'_{0max} * t_{erkezesi},$$

(3.12.)

ahol ϕ'_{0max}, $\dot{\phi}'_{0max}$ rendre a szétcsúszás pillanatában a szög és a szögsebesség, míg $t_{erkezesi}$ az az idő, ami alatt a torony korábbi paramétereivel szabadesés formájában leérne a földre.

Ebben a közelítésben elhanyagoljuk, hogy a szétcsúszás elején még létrejön valamilyen fajta tartóerő az ideiglenes alap (1.szint) és a torony többi része között.

Most térjünk rá a torony mozgására földet érés után! A következőket fogjuk látni [3.5-ös ábra]:



3.5-ös ábra

A torony elkezd dőlni és látszatra olyan, mintha minden elem egy lejtőn csúszna le, melynek szöge közelítőleg konstans marad. Ezt kvalitatívan azzal magyarázhatjuk, hogy a már a földön lévő elemek meggátolják, hogy a még torony formájú rész alja az ábrán balra kicsússzon, sőt adott szögben egymást megtámasszák az elemek, így habár csak részlegesen, de minden irányú elfordulást gátolhatnak. A közelítés egy feltétele az, hogy adott pillanatban a „virtuális" lejtőnk elemei azonos sebességgel haladjanak, hiszen minden rajta lévő elemnek ugyanannyit kell „lefelé csúsznia". Ezt mérésekkel igazolni fogjuk. Ezen feltételezések alapján egy egyszerűsített modell készíthető, amelynek segítségével meg tudjuk becsülni a dőlés irányában az elemek eloszlását.

Az elmélethez használt feltételezések: A mozgó lejtőben lévő elemek sebessége közel azonos. Ez persze addig igaz, amíg egy új elem le nem ér a „lejtő aljára". Ekkor feltesszük, hogy az picit megpattan, majd vízszintes sebességet nyer arányosan a korábbi sebességéhez képest. Majd a következő pillanatban ütközik a lejtővel, hiszen hozzá képest megnőtt a sebessége. Ezáltal energiája egy részét továbbadja a mozgó lejtőnek. Ezzel egyidőben azt mondjuk, hogy levált a lejtőről. Emellett jegyezzük meg, hogy a nyert függőleges sebességgel nem foglalkozunk, mert az úgyis hamar elvész, vagy valamilyen úton-módon vízszintes mozgássá alakul (az előbb említett módon.). Továbbá definiáljuk az „x" irányt, mint az a vízszintes irány, mely a dőlés irányába mutat.

Ezek alapján a következő rekurzív összefüggést írhatjuk fel leválást követően a mozgó lejtő és a leváló szint sebességére:

$$v_{T(i+1)} = \sqrt{v_{T(i)}^2 + 2 * \Delta s_x * a_{1x}} * \left(\left(\frac{(N-i) + (1+k) + c * k}{1 + N - i} \right) \right),$$

$$v_{Sz(i+1)} = \sqrt{v_{T(i)}^2 + 2 * \Delta s_x * a_{1x}} * \left(\frac{(N-i) + (1+k) - (N-i) * c * k}{1 + N - i} \right),$$

(3.13.)

ahol $v_{T(i)}$ és $v_{Sz(i)}$ rendre a mozgó lejtőnek (torony) és a leszakadó szintnek az „x" irányú sebessége a leszakadás pillanatát követően. N a szintek maximális számát jelöli. Δs_x az elmozdulás mértékét jelöli „x" irányba, míg a_{1x} az ilyen irányú gyorsulást. A c és k tagok pedig a megpattanást leíró illesztendő értékek.

A fent látható rekurzív képletek tagjai a következőt jelentik:

- $\sqrt{v_{T(i)}^2 + 2 * \Delta s_x * a_{1x}}$ azt mutatja, meg ha a mozgó lejtő elmozdulása Δs_x, akkor mekkora lesz az új sebessége. Ez egyszerűen egy feltételezett konstans gyorsulásnál a négyzetes úttörvény eredménye.

  $$a_{1x} = (g * \left(\sin(\delta) - \mu_{d(e-e)} * \cos(\delta)\right) * \cos(\delta),$$

  (3.14.)

  ahol $\mu_{d(e-e)}$ a csúszási súrlódási együttható az elemek között.

- $v_{valami} * \left(\frac{(N-i)+(1+k)+c*k}{1+N-i}\right)$ tag pedig egy adott pattanási együtthatójú ütközés utáni sebeségét hivatott megadni. Ez egy standard számítás abban az esetben, ha a testek kiterjedését elhanyagoljuk és a [2]-es forrás is tartalmazza, amelyben egy szint tömegével egyszerűsítettük a történet. Továbbá „k" azt mondja meg, hogy a leváláskor mekkora extra vízszintes sebességet kap a leváló elem. Ahogy már korábban is említettük, ezt követően ütközik azonnal a mozgó lejtővel, melyek vízszintes sebessége közt az aranyossági szám „c"-lesz.

Észre lehet venni, hogy „$k - t, c - t$" sokszor csak arányossági számnak hívjuk. Ennek az az oka, hogy ez nem egy valódi pattanási szám. Csak akkor lehetne az, ha a két objektum kiterjedés nélküli lenne, viszont most mi mégis ezzel az értékkel számolunk, mert jó közelítő eredményt fog adni. Még meg kell jegyezni, hogy ezek miatt „k és c" értéke illesztett érték lesz.

Természetesen ahhoz, hogy a rekurzív képletünk értelmezhető legyen meg kell adni egy tagjának az értékét. Ez $v_{T(0)}$ lesz, melynek értékét a következőképpen tudjuk becsülni. Az együtt mozgó elemek által képzett lejtő vízszintes sebessége valószínűleg nem lesz nagyobb, mint a lejtővé válást megelőző pillanatban a legnagyobb vízszintes sebességű elem sebessége. Ez a legnagyobb sebességű pont a torony csúcsa lesz. Továbbá a lejtő $v_{T(0)}$ valószínűleg nagyobb lesz, mint a torony tömegközéppontjának a sebessége. Ezt szimplán azért állíthatjuk, mert a torony alacsonyról esik le a lejtővé válás előtt. Emiatt a 0. pattanás során nem kéne sok energiát veszítenie és a forgási energiájának egy része mozgási energiává alakulhat. Ezek alapján mi azt fogjuk mondani, hogy

$$v_{T(0)} = \frac{V_{sx} + V_{xmax}}{2},$$

(3.15.)

ahol V_{sx} a tömegközéppont horizontális sebessége, míg V_{xmax} a legnagyobb „x" irányú sebessége a toronynak a lejtővé válást megelőző pillanatban.

Ezek természetesen nagyvonalú becslések, de a mérések alapján reálisnak látszanak. A jövőben ennek további, részletesebb vizsgálata érdemes lehet a pontosabb eredmények érdekében.

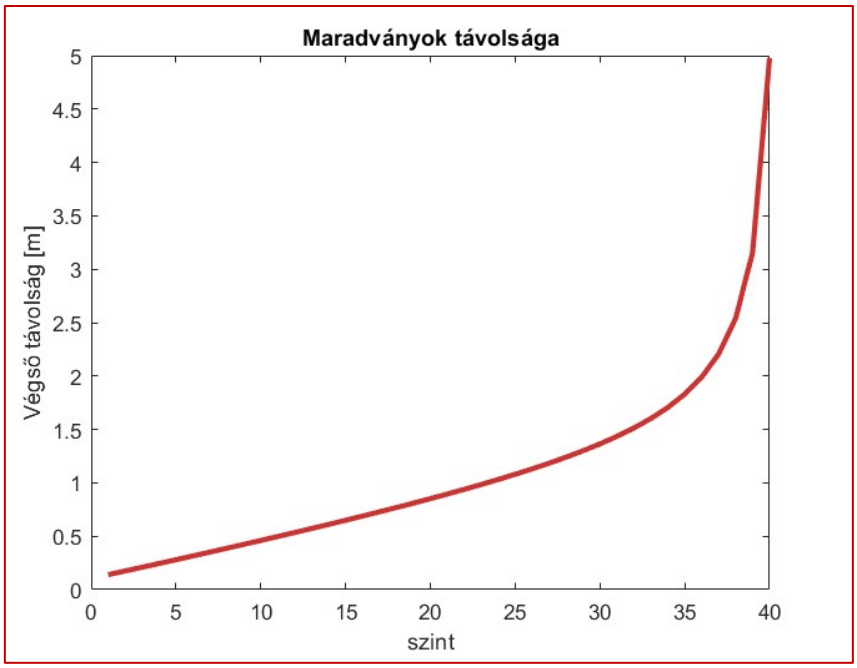
Most határozzuk meg, milyen messze is fognak kerülni elemeink. Ehhez feltételezzük azt, hogy ha a leszakadó szint és a lejtő elváltak egymástól, akkor onnantól kezdve a leszakadó elemek már csak a talajon fognak csúszó mozgást végezni. Ekkor az „i." szint elemei az „O"-hoz képest a következő távolságban fognak véglegesen megállni:

$$s_i = s_O + \frac{h_i}{\sin(\delta)} + \frac{v_{Sz(i)}^2}{2 * g * \mu_{d(e-t)}},$$

(3.16.)

ahol „s_O" a legalsó elem távolsága az origótól, amikor a torony elkezdett mozgó lejtőként csúszni. A „h_i" az adott szint eredeti magasságával feleltethető meg, $\mu_{d(e-t)}$ pedig a talaj és az elemek közti súrlódási együttható.

Ez egy az alábbihoz hasonló törmelékeloszlást fog nekünk mutatni [3.6-os ábra]. Ezt csak azért mutatnánk most meg az olvasónak a 6. fejezet előtt, hogy legyen elképzelése az említett eloszlás karakterisztikájáról, hiszen ez kevésbé egyértelmű. A [3.6-os ábra] azt mutatja, hogy az adott szintek milyen messze kerültek a dőlés megkezdésének pontjától vízszintesen.



3.6-os ábra

Amennyiben a torony megtörik a dőlés során, gyakran azt látjuk, hogy a felső rész azonnal megcsúszik és leesik. Ez akár a dőléssel ellenkező irányba is történhet. Ekkor a törmelék eloszlását úgy lehetne becsülni, mintha két mozgó lejtőnk lenne, melyek közül az egyik magasabbról és más sebességállapottal kezdte mozgását. Ekkor viszont a használandó $v_{T(0)}$ meghatározása egy nehezebb feladat. Mi ebben a dolgozatban ezzel nem fogunk foglalkozni már részletesebben. Ettől függetlenül 6. fejezetben nézünk ilyen eloszlásra példát.

Továbbá meg kell jegyezni, hogy eddig a dőlés irányára merőleges eloszlásról nem esett szó. Ennek fő indoka az, hogy az eddigi elméletben vizsgált „szebb” dőléseknél ez elhanyagolható volt. Hiszen ilyen irányú sebességet a törmelék úgy tudna szerezni, ha leérkezéskor egy adott értéknél nagyobb szöget zárna be a dőlés síkjával. Ez gyakran nem valósul meg, vagy ha igen, akkor is a viszonylag kicsi pattanási együttható miatt nem lesz képes nagy ilyen irányú sebességre szert tenni. Emellett a mozgó lejtő szakaszában az „egymásra rakódott” elemek tovább gátolhatják ezt a fajta elmozdulást.

4. Kontakt dinamikán alapuló szimuláció

4.1 Az eljárás elve

Ennek az eljárásnak a célja az, hogy készítsünk egy olyan szimulációs modellt, mely egyesével számolja a diszkrét elemek között fellépő erőket és ezáltal megfigyelhetővé teszi a mozgást. Mi ezt a szimulációt 2D-ben fogjuk elkészíteni kontakt dinamika alkalmazásának segítségével. Az elképzelés a következő:

A szimuláció időlépéses lesz, mely során minden pillanatban a korábbi sebességek és a gravitációs erő alapján újra számoljuk az elemek pozícióját és sebességállapotát. Ha két elem egy időlépés során átfedésbe kerülne, akkor ezt fel fogjuk oldani különféle reakcióerőkkel az érintkezés helyének és a relatív sebességek függvényében. Ezt követően tovább léptetjük időben a szimulációt.

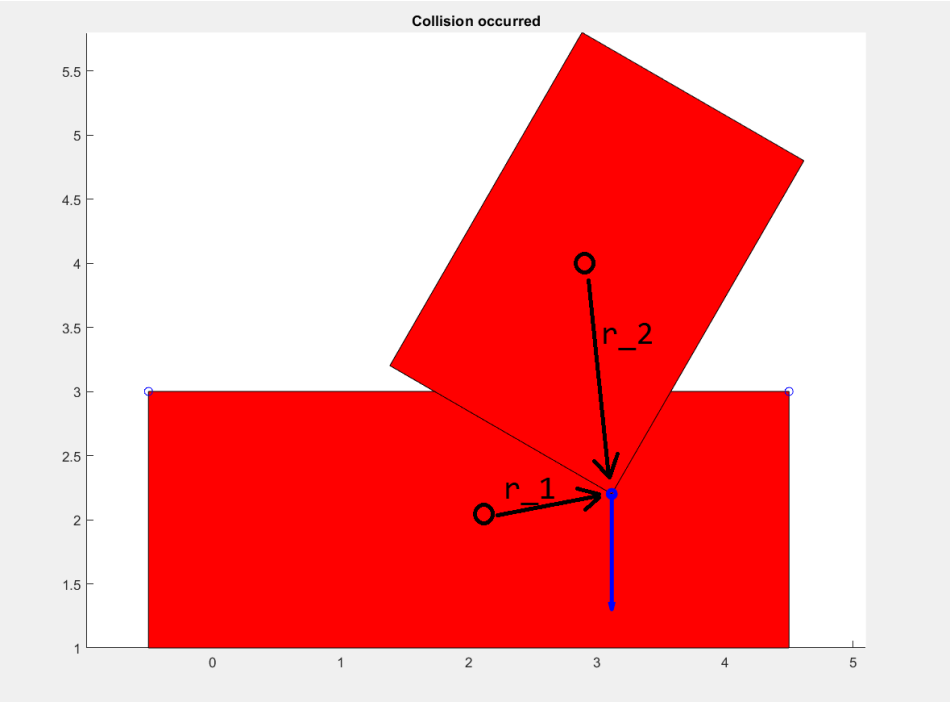
Még meg kell jegyezni, hogy ez az eljárás a dőlés kezdeti inga szerű szakaszában pontatlanabb értékeket fog adni, az ütközések feloldásának metódusa miatt. Ettől függetlenül az elakadást követő szétcsúszási szakasz leírására jól fog már működni, hiszen az interakciókat robusztusabb módon fogja kezelni az elemek közt mint, ahogy azt a korábbi modellben tettük.

4.2 Az ütközések fizikai modellezése

4.2.1 Normális pattanási erőlökés

Először nézzük meg, hogy mi is történik két objektum ütközésekor. A szimulációban ezt a reakciót a ***collision_respons*** függvény fogja kiszámolni és végrehajtani.

Az ütközéskor mindig két objektumot vizsgálunk. Az [4.1-es ábrán] a kék vektor jelzi az ütközéskor a pattanást létrehozó erőlökést. Természetesen az ábrával ellentétben az előbb említett erő támadáspontja nagyon közel van a penetrált téglalap felszínéhez, így a programban bátran mondhatjuk azt, hogy ahol a penetráló csúcs elhelyezkedik, ott hat ez a normálerő ((ezt valamennyire még finomítani fogjuk, de erre csak az ütközés determinálására használt függvény elemzése során fogunk visszatérni).



4.1-es ábra

Itt az általunk használt, alap fizikai modell a pattanási együtthatókon alapul. Ez egy ismert modell, a [2],[11]-források is részletesen tárgyalják és alkalmazzák őket. A pattanási együttható megadja a kapcsolatot az ütközési felületekre merőleges relatív sebességkomponensek megváltozása és az eredeti relatív sebesség közt, az ütközés pontjában.

$$\Delta \boldsymbol{v_{rel\perp}} = -(1 + c) * \boldsymbol{v_{rel\perp}},$$

(4.1.)

ahol "c" a pattanási együttható.

továbbá jelölje

- $\boldsymbol{J}$ az erőlökést
- $\boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{J}$-vel egyirányú normálvektort
- $\boldsymbol{v_1^-}; \boldsymbol{v_2^-}; \boldsymbol{\omega_1^-}; \boldsymbol{\omega_2^-}$ a két test ütközés előtti sebességeit
- $\boldsymbol{v_1^+}; \boldsymbol{v_2^+}; \boldsymbol{\omega_1^+}; \boldsymbol{\omega_2^+}$ az ütközés utáni sebességeket
- "$m_1; m_2$" a két test tömegét
- $I_1; I_2$ pedig azok tehetetlenségi nyomatékát

Ekkor $\Delta \boldsymbol{v_1} = \frac{\boldsymbol{J}}{m_1}; \Delta \boldsymbol{v_2} = \frac{-\boldsymbol{J}}{m_2}; \Delta \boldsymbol{\omega_1} = \frac{\boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{J}}{I_1}; \Delta \boldsymbol{\omega_2} = -\frac{\boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{J}}{I_2}$.

(4.2.)

A relatív sebességet pedig megkaphatjuk a következőképpen:

$$\boldsymbol{v_{rel\perp}} = \boldsymbol{n} * \left(\boldsymbol{v_1^-} * \boldsymbol{n} + \boldsymbol{\omega_1^-} * (\boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{n}) - \boldsymbol{v_2^-} * \boldsymbol{n} - \boldsymbol{\omega_2^-} * (\boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{n})\right).$$

(4.3.)

A *(4.1,4.2,4.3)* egyenlőségekből kapjuk:

$$-(1+c) * \boldsymbol{n} * \frac{\boldsymbol{v_1^-} * \boldsymbol{n} + \boldsymbol{\omega_1^-} * (\boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{n}) - \boldsymbol{v_2^-} * \boldsymbol{n} - \boldsymbol{\omega_2^-} * (\boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{n})}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{(\boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{n})^2}{I_1} + \frac{(\boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{n})^2}{I_2}} = \boldsymbol{J}.$$

(4.4.)

Az új sebességértékek:

$$\boldsymbol{v_1^+} = \boldsymbol{v_1^-} + \frac{\boldsymbol{J}}{m_1}; \boldsymbol{v_2^+} = \boldsymbol{v_2^-} - \frac{\boldsymbol{J}}{m_1}; \boldsymbol{\omega_1^+} = \boldsymbol{\omega_1^-} + \frac{\boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{J}}{I_1}; \boldsymbol{\omega_2^+} = \boldsymbol{\omega_2^-} - \frac{\boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{J}}{I_2}.$$

(4.5.)

Legalább is ezek lennének az értékek, ha nem lenne súrlódás. Surlódás azonban van, ezért nézzük, miként fogunk súrlódást modellezni.

4.2.2 Tangenciális pattanási erőlökés

Először szögezzük le, hogy innentől kezdve a korábbi $\boldsymbol{J}$-t (a merőleges erőlökést) konstansnak vesszük. Ezt úgy értsük, hogy értéke a súrlódástól független lesz, továbbá a segítségével fogjuk tudni a súrlódási erőlökést meghatározni. Természetesen a súrlódási erőlökés hat egyes pontok normális irányú sebességére is, így ez már nem fog teljesen megfelelni a standard pattanási együttható modelljének, hanem egy enyhén más közelítésként működik. Ettől függetlenül ez a numerikus eljárásban ez nem okoz számunkra komoly hibát.

Először vezessünk be néhány a fejezetre jellemző jelölést:

- legyen a tangenciális relatív sebesség: $\boldsymbol{v_{reltan}}$,
- a súrlódás erőlökése: $\boldsymbol{J_f}$,
- a csúszási súrlódási együttható: μ_d,

- míg a tapadási: μ_s.

Innentől kezdve a Coulomb súrlódási törvényből kiindulva feltételezzük, hogy adott $\boldsymbol{J}$ esetén $\boldsymbol{J_f}$ számítható a következőképpen: $\boldsymbol{J_f} = \boldsymbol{J} * \mu_{adott}$. A csúszás és a tapadási erőlökést figyelembe véve három esetet fogunk megkülönböztetni az ütközések során.

I: A testek gyorsan haladnak nagy tangenciális sebességgel egymáshoz képest:→Csúszás

II: A csúszási súrlódás miatt az ütközés során a $v_{reltan} = 0$-val és tapadás következik.

III: Szintén 0 lesz v_{reltan}, de utána azonnal megcsúszik.

Nézzük meg, hogyan dönthetjük el, melyik esetről van szó!

A pattanás kezdeti „α”-ad részében először feltételezzük, hogy csúszási súrlódás lép fel. Az első szakaszban a csúszási súrlódás erőlökését az alábbi módon számolhatjuk ki:

$$\boldsymbol{J_{fd}^-} = -|\boldsymbol{J}| * \mu_d * \frac{\boldsymbol{v_{reltan}}}{|\boldsymbol{v_{reltan}}|} * \alpha,$$

(4.6.)

ahol $\alpha \in R, [0,1]$, míg $\boldsymbol{J_{fd}^-}$ a pattanás első részében ható súrlódási erő. Feltételezzük, ha $\boldsymbol{J_f}$-nek eddig $\boldsymbol{J_{fd}} * \alpha$-szorosa következett be, akkor $\boldsymbol{J}$-nek is α-szorosa hatott az objektumra. Ebből meghatározzuk, hogy mekkora α-nál lesz $\boldsymbol{v_{reltan}} = 0$.

Emellett legyen $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{J_f}$-irányú egységvektor

Ezt a következőképpen tehetjük meg:

$$v_{reltan} = v_{reltan1}^- + \alpha\frac{\boldsymbol{J}}{m_1} * \boldsymbol{t} - v_{reltan2}^- + \alpha\frac{\boldsymbol{J}}{m_2} * \boldsymbol{t} + \boldsymbol{\omega_1^-} \times \boldsymbol{r_1} * \boldsymbol{t} + \alpha\frac{\boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{J}}{I_1} \times \boldsymbol{r_1} * \boldsymbol{t}$$
$$- \boldsymbol{\omega_2^-} \times \boldsymbol{r_1} * \boldsymbol{t} + \alpha\frac{\boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{J}}{I_2} \times \boldsymbol{r_2} * \boldsymbol{t} = 0.$$

(4.7.)

(*Megjegyzés: $v_{reltan} = \boldsymbol{v_{rel}^-} * \boldsymbol{t}$)

Ebből

$$\alpha = \frac{-v_{reltan1}^{-} + v_{reltan2}^{-} - \boldsymbol{\omega_1^-} \times \boldsymbol{r_1} * \boldsymbol{t} + \boldsymbol{\omega_2^-} \times \boldsymbol{r_1} * \boldsymbol{t}}{\left(\frac{\boldsymbol{J}}{m_1} + \frac{\boldsymbol{J}}{m_2} + \frac{\boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{J}}{I_1} \times \boldsymbol{r_1} + \frac{\boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{J}}{I_2} \times \boldsymbol{r_2}\right) * \boldsymbol{t}}.$$

(4.8.)

Ha α tényleg 0 és 1 közötti szám, akkor a $II\ vagy\ III$ lehetőség él. Ha ez nem igaz, akkor azt mondjuk, hogy $\alpha = 1$ és

$$\boldsymbol{J_f} = \boldsymbol{J_{fd}^-}.$$

(4.9.)

Ez volt az I. lehetőség.

Innentől kezdve tegyük fel, hogy $0 < \alpha < 1$. Nézzük meg, ha $\boldsymbol{J_{fd}^-}$ és $\boldsymbol{J}$ is hatott már a testekre, mekkora impulzus kéne még, hogy v_{reltan} továbbra is 0-a legyen.

Tegyük fel, hogy csak $\boldsymbol{J}$ és $\boldsymbol{J_{fd}^-}$ hat a testekre. Ekkor egyszerűen, az előzőek alapján kiszámolható, hogy a reakció végén mekkora lesz a relatív tangenciális sebesség. Legyen ez $\boldsymbol{tmpv_{reltan}}$. Azért tmp mert a valóságban nem az lesz. Viszont azt ki tudjuk számolni, hogy még mekkora erőlökésnek kell hatnia, hogy $\Delta v_{reltan} = -tmpv_{reltan}$ teljesüljön. Ez az erőlökés legyen $\boldsymbol{J_{fs}^+}$, ami

$$\boldsymbol{J_{fs}^+} = \frac{-\boldsymbol{tmpv_{reltan}}}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{(\boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{n})^2}{I_1} + \frac{(\boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{n})^2}{I_2}}.$$

(4.10.)

Ekkor azt mondjuk, hogy ha $J * \mu_s * (1 - \alpha) > |\boldsymbol{J_s^+}|$, akkor a II. eset áll fenn és

$$\boldsymbol{J_f} = \boldsymbol{J_{fd}^-} + \boldsymbol{J_{fs}^+}.$$

(4.11.)

Ha ez sem igaz, akkor a III. esethez érünk és a 2. szakaszban, ható súrlódási erő az csúszási lesz.

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{fd}}^{+} = -\frac{\boldsymbol{tmpv}_{\boldsymbol{reltan}}}{|\boldsymbol{tmpv}_{\boldsymbol{reltan}}|} * \mu_d * \boldsymbol{J} * (1-\alpha).$$

(4.12.)

Ekkor

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{fd}}^{-} + \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{fd}}^{+}.$$

(4.13.)

Inenntől $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}$-et *(4.6.-4.13.)* segítségével meg tudjuk határozni. A sebességek az ütközések után a következőek lesznek:

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{1}}^{+} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{1}}^{-} + \frac{\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}}{m_1}; \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{2}}^{+} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{2}}^{-} - \frac{\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}}{m_1}; \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{1}}^{+} = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{1}}^{-} + \frac{\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{1}} \times (\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}})}{I_1}; \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{2}}^{+} = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{2}}^{-} - \frac{\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{1}} \times (\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}})}{I_2}.$$

(4.14.)

Megjegyzés: Természetesen ez a súrlódás modell sem tökéletes. A valóságban előfordulhat, hogy valami megtapad, majd megint megcsúszik, majd megtapad és így tovább. Emellett az a feltételezés, hogy a pattanás elején az elem mindig csúszik, szintén nem feltétlen igaz minden esetben.

4.3 Szimulációt végző program függvényei

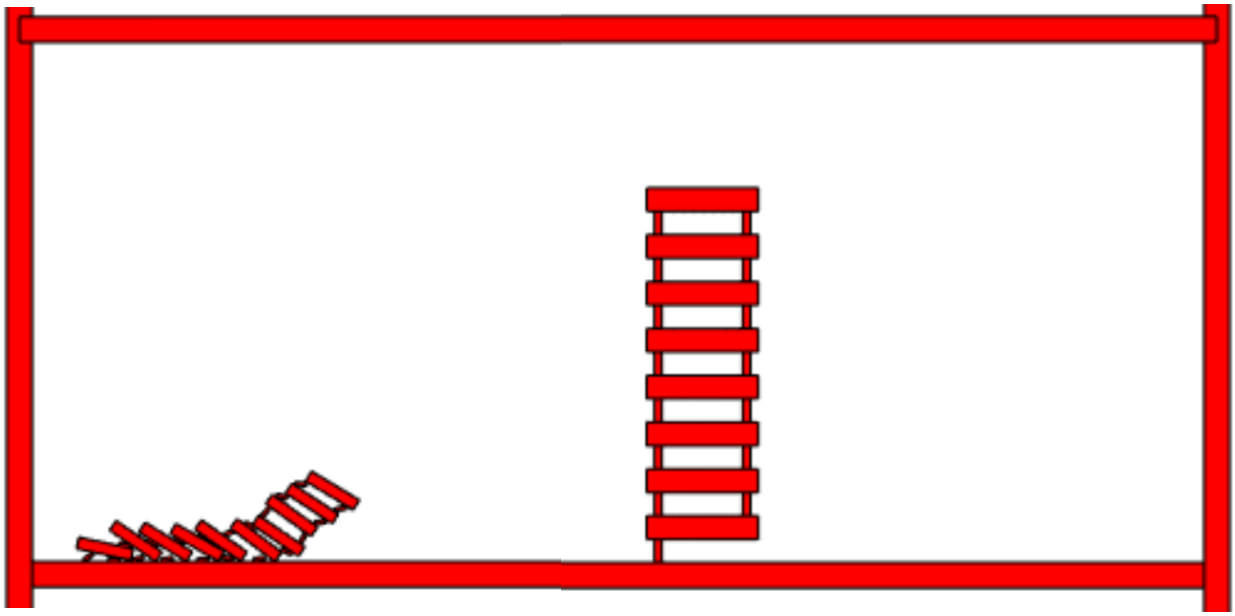
A kódot mi MATLAB környezetben készítettük el mely beépített funkciói hozzájárultak az ábrázoláshoz [5] és a programtest megírásához. Ez vázlatosan a következően nézett ki:

A 4.1-ben leírt eljárást egy ***box*** nevezetű függvény valósítja meg, mely kis időközönként kiszámolja a testek sebességállapotát, majd továbbítja azt és az elemek pozícióit további függvényeknek. A ***box*** függvény ütközéseiben két fő csoport vesz részt. Az objektumok (építő elemek), melyek számát és paramétereit a felhasználó adja meg és korlátok. A korlátokból 4 van. 4 végtelen tömegű téglalap melyek fixek és körülveszik a szimulációs teret. A függvény minden iterációban először megnézi, hogy volt-e ütközés az objektumok között. Ezt úgy teszi, hogy minden lehetséges objektumpárt megvizsgál. Ebben a ***find_penetration*** függvény segít nekünk. Ha ütközés történt akkor ez a függvény visszaad nekünk egy true értéket, az ütközés normál vektorát, annak támadáspontját és az ütközés mélységét (milyen mélyen metszik egymást a téglalapok). Az ütközés detektálását követően a releváns paraméterek bekerülnek a ***collision_respons*** függvénybe. Ez a függvény a 4.2.-ben leírt elméleti algoritmus alapján visszaadja az ütközés utáni sebesség és az új pozíció értékeket (pozíció alatt csak annyit értünk, hogy arrébb tolja a penetráló mélység egy részével a téglalapokat. Ezzel feloldva az átfedést.

Ezt követően a ***box*** függvényen belül frissülnek is ezek az értékek. Majd az adott iterációban végigmegy az összes többi lehetséges párosításon is és ott is végrehajtja a szükséges ütközésválaszokat. Ezek után elvégzi ugyan ezt csak az objektumok és a korlátok között. Majd frissíti a pozíciókat a sebességek függvényében és eltárolja őket egy listában.

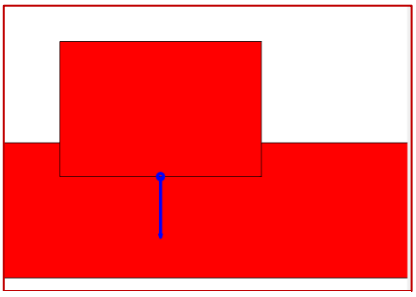
Fontos megjegyezni, hogy egy lépésben több ütközés is történhet így sokat segíthet a szimuláció pontosságán, ha kisebb időt foglal magába egy iteráció.

Végül a korábban említett pozíció adatokat betölti a ***create_rotating_multyrectangle_sim2gif_2_print*** függvénybe, ami kirajzolja, illetve elmenti a szimulációnkat [4.2-es ábra].



4.2-es ábra

A ***find_penetration*** függvény először kiértékeli a két vizsgált téglalap csúcsait a ***calculate_corners*** függvény segítségével, majd megnézi, hogy valamelyik csúcs nincs-e a másik téglalap belsejében. Ebben a ***point_in_rectangle1*** függvény segít. Ha az előző függvény igazat ad vissza, akkor ütközés történt. Ekkor ez a belső csúcs lesz általában a penetration_point. Ezt követően a ***calculate_normal_paralel*** függvény segítségével megállapítja a normálvektort, a penetrált oldal két csúcsát plusz a penetráció mélységét. Itt az esetek egy jó részében végez is, kivéve, ha a téglalapok szinte párhuzamosak [4.3-as ábra]. Ekkor az új



4.3-as ábra

penetration point a nagyjából közös felület középpontján fog elhelyezkedni. Ennek köszönhetően tudjuk oldalukra ejteni a téglalapjainkat, továbbá így nyugalomba tudnak kerülni egy idő után a talajon. Jelenleg 0.05 radián szögeltérésnél már párhuzamosnak vesszük a két oldalt.

A szimulációhoz elkészített metódusok rövid leírása

A ***calculate_corners*** függvény egy rotáció mátrix segítségével, egy téglalap méreteinek és az eredeti x tengellyel párhuzamos oldalának az azzal bezárt szöge segítségével, megadja a téglalap csúcsait.

A ***point_in_rectangle1*** függvény az adott oldalegyenesek segítségével meghatározza, hogy egy pont a téglalapon belül vagy kívül helyezkedik-e el, ehhez a [4]-ben is leírt „Separating axis theorem”-et használja fel.

A ***calculate_normal_paralel*** függvény meghatározza a penetrációhoz legközelebbi oldalt és az arra merőleges normálvektor a penetráció pontja és a penetrált téglalap csúcsai segítségével.

A ***collision_respons*** függvény a korábban már említett paraméterek szerint a fizikai modell segítségével meghatározza az ütközés utáni paramétereit az abban résztvevő téglalapoknak.

A ***create_rotating_multyrectangle_sim2gif_2_print*** függvény létrehozza az animációt a szimulációról. A paraméterei benne olvashatók. Egy segítő függvénye a ***draw_rotated_rectangle*** függvény.

A ***draw_rotated_rectangle*** függvény a pozíció, a szög és a méretek segítségével megrajzolja a téglalapot az animációhoz [5].

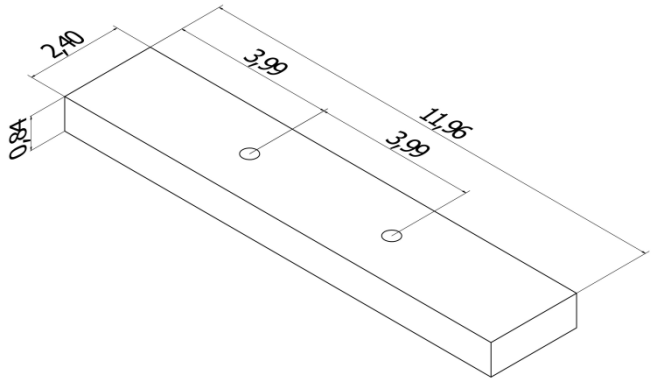
5. Kísérleti modellezés

Három jelenséget mértünk, tornyok konkrét eldőlését a maradványokkal együtt, súrlódási együtthatót és az elemek pattanási együtthatót. A mérésekről videó felvételek és szükséges esetben fényképek készültek, a mérések kiértékelése ezek alapján történt.

5.1 Tornyok eldöntése

5.1.1 A mérés menete

A tornyot a 2.1-es szekcióbal leírtak alapján építettük fel a téglatest alakú elemeinkből [5.1-es ábra]. Ezek keményfából készültek. A felületük nem volt a fűrészelés után külön megmunkálva. Ez alól kivételt képez néhány darab, aminek a felületét vízfestékkel színesre festettünk a felvételen való jobb követhetőség érdekében.



5.1-es ábra

A torony eldöntése a következő módon történt. Az egyik elemre készítettünk két lyukat. átvezettünk és megkötöttük egy vékony, körülbelül másfél méter hosszú zsinórt. Ezt az elemet építettük be mindig legalulra. Maga a döntés folyamata a következő volt:

1. Felépítettük az adott tornyot.
A torony mögött elhelyeztünk egy fekete színű lapot háttérnek.

2. Elhelyeztük a kamerát a torony magasságában, a torony előtt, a torony méreteihez képest viszonylag távol.

3. A torony mellett elhelyezkedett a döntést végző ember, majd a kamerát kezelő személy jelére (a felvétel indítása után) kirántotta a zsinórral a preparált legalsó elemet.

4. A dőlés után a felvételt leállítottuk, majd a torony törmelékéről fénylépet készítettünk.

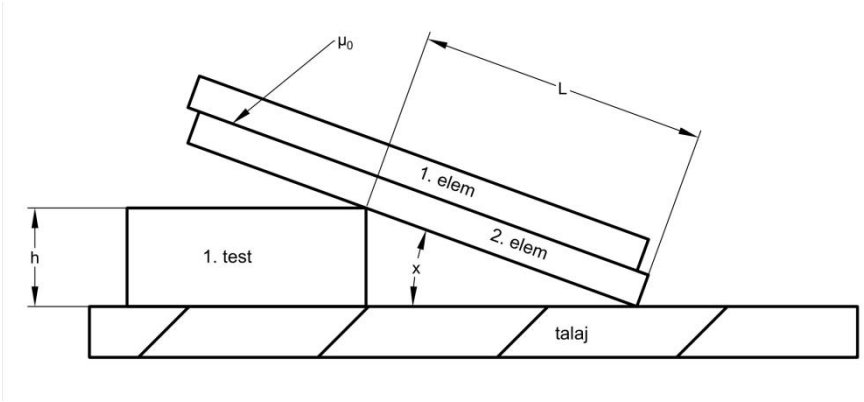
5.1.2 A mérés kiértékelése

A dőlésről készült videókat a Tracker [3] nevezetű programmal dolgoztuk fel.

Az eldőlés után a törmelékről készült képet egy Python programmal dolgoztuk fel. Beolvastunk egy képet, kalibráltuk (megadtuk a léptéket, a torony kezdeti helyét és a dőlés irányát), majd bejelöltük a képen minden elem helyét. A program készített ez alapján egy fájlt, amiben szerepelnek az egyes elemek koordinátái.

5.2 Tapadási súrlódási együttható mérése

5.2.1 A mérés menete



5.2-es ábra

A mérést a következőképpen végeztük. Az [5.2-es ábrán] látható módon elhelyezünk egymáson két elemet, melyek között μ_0 tapadási súrlódási együttható van, majd a 2. elem talajjal érintkező sarkát addig toltuk az 1. test felé, hogy az 1. elem éppen ne csússzon meg rajta. Ekkor a második elemen bejelöltük az 1. testtel érintkező pontját, majd megmértük ennek az elem sarkától vett távolságát (L hossz). Az 1. test magassága h, ezt is megmértük.

5.2.2 A mérés kiértékelése

A tapadási súrlódási együttható értéke (μ_0) megegyezik az x-el jelölt szög tangensével. A mért értékekből ez az alábbi összefüggéssel számítható, az ábra jelöléseivel:

$$\sin(x) = \frac{h}{L},$$

(5.1.)

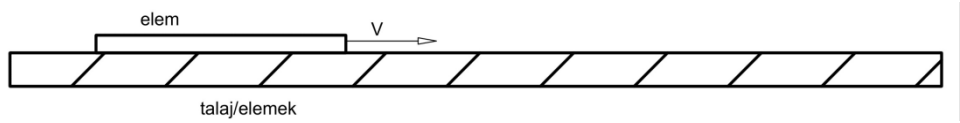
ebből

$$\mu_0 = \tan\left(\arcsin\left(\frac{h}{L}\right)\right).$$

(5.2.)

5.3 Csúszási súrlódási együttható

5.3.1 A mérés menete



5.3-as ábra

Egy elemet elhelyezünk a padlón (talajon), majd V sebességgel, forgás nélkül ellöktük [5.3-as ábra]. A mozgásáról videó felvétel készült, ez alapján értékeltük ki később a mérést.

5.3.2 A mérés kiértékelése

A súrlódási együttható meghatározásához ki kell számolni a test kezdeti V sebességét. Ezt megtehetjük az elem által megtett út és a megálláshoz szükséges idő ismeretében, a négyzetes úttörvény segítségével. Ezen adatokat a videó alapján a Tracker [3] program segítségével megállapíthatjuk.

Az elem mozgása során egyenletesen lassul. A kezdeti mozgási energiája a súrlódás miatt vész el, tehát

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 = m \cdot g \cdot d \cdot \mu_{cs},$$

(5.3.)

ahol

m: az elem tömege [kg],

V: a test kezdeti sebessége [m/s],

g: a gravitációs gyorsulás [m/s^2],

d: a megállásig megtett út [m],

μ_{cs}: a keresett csúszási súrlódási együttható [-].

Ebből:

$$\mu_{cs} = \frac{V^2}{2 \cdot g \cdot d}.$$

(5.4.)

5.4 Pattanási tulajdonságok mérése

5.4.1 A mérés menete

A pattanási tulajdonságok mérése a következő volt. Adott magasságból leejtettünk egy elemet, lehetőleg úgy, hogy minél kevésbé forogjon, és az esésről videó felvételt készítettünk.

5.4.2 A mérés kiértékelése

A pattanások jellemzésére a pattanási együtthatót használtuk amely, ahogy korábban is említettük az alábbi módon van definiálva:

$$c = \frac{v_{után}}{v_{előtt}},$$

(5.5.)

ahol

c: a pattanási együttható [-],

$v_{után}$: a test pattanás utáni sebessége [m/s],

$v_{előtt}$: a test pattanás előtti sebessége [m/s].

Azzal a közelítéssel élve, hogy a test a sebességét a helyzeti energiájából nyeri, illetve a sebessége helyzeti energiává alakul:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{után}^2, \qquad mgH = \frac{1}{2}mv_{előtt}^2,$$

(5.6.)

ahol

h: a test súlypontjának leesés utáni maximális magassága [m], (ilyen magasra emelkedik),

H: a test súlypontjának leesés előtti magassága [m], (ilyen magasságból ejtettük le),

g: a gravitációs gyorsulás [m/s^2].

Ezekből a sebességek

$$v_{után} = \sqrt{2gh}, \qquad v_{előtt} = \sqrt{2gH}. \tag{5.7.}$$

Így a pattanási együttható

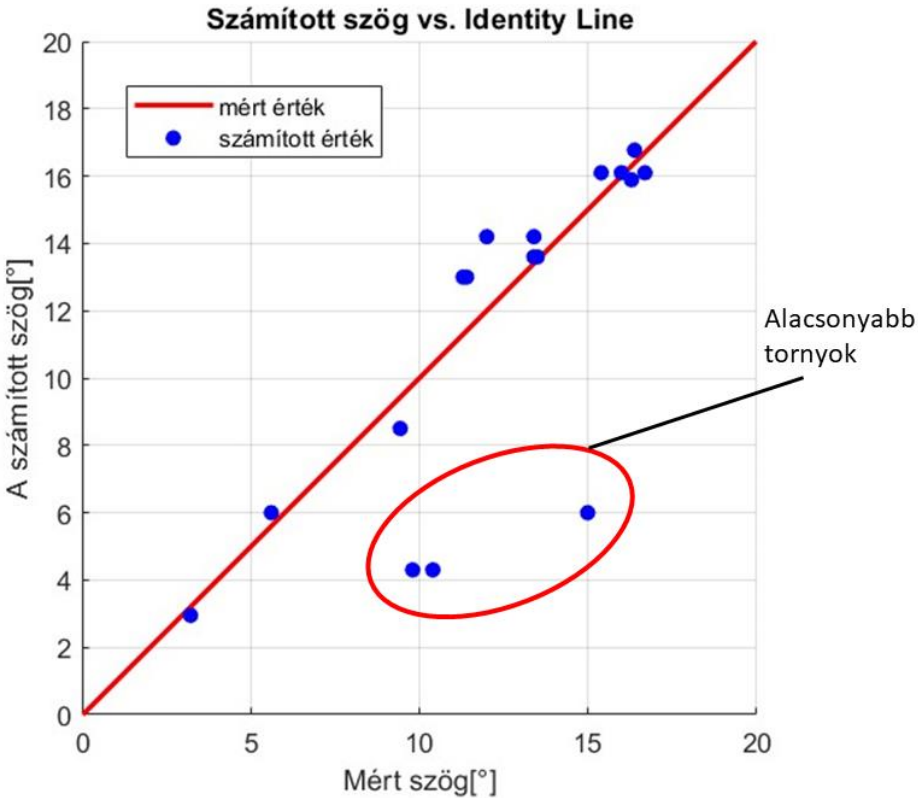
$$c = \frac{v_{után}}{v_{előtt}} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{H}}. \tag{5.8.}$$

A pattanási együtthatót tehát a tudjuk a test leejtésének és visszapattanásának magasságából számítani. Ezeket az értékeket a mérésről készült videófelvétel alapján a Tracker [3] program segítségével állapítottuk meg.

6. Eredmények összehasonlítása

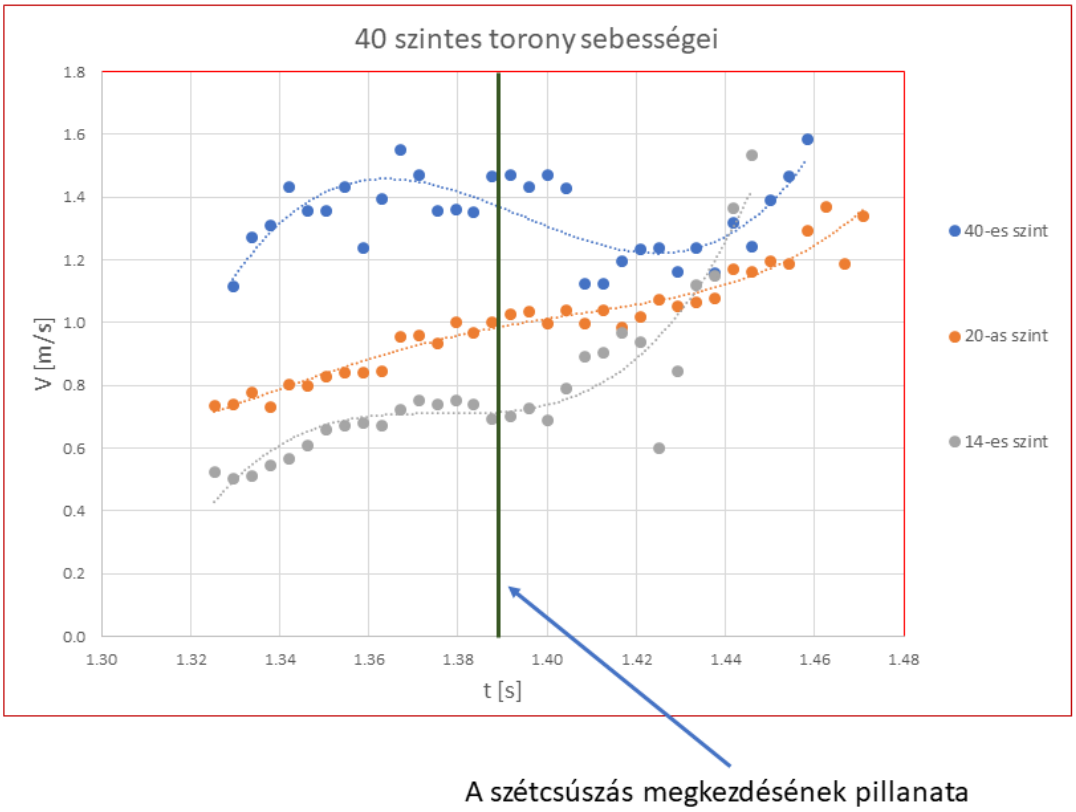
Először hasonlítsuk össze az eredeti elméleti modell 1. szakaszát (3.1-es fejezet) és a valóságot. Ez a szakasz az inga/csatolt ingaszerű szakasz. Mérés közben nehéz lenne megmondani, hogy pontosan mikor törik meg a torony, vagy azt, hogy milyen paramétereknél kezd el megtörni, mert az nem látványos. Helyette nézzük azt, hogy amennyiben megtört a torony az elakadás pillanatában, mekkora szöget zár be egymással az alsó és a felső rész. Ezt egy identity-line segítségével szemléltetjük [6.1-es ábra], ahol minél közelebb van a számított érték az y=x egyeneshez, annál pontosabbnak mondható.

Azt láthatjuk, hogy a pontok nagyrésze szépen illeszkedik az egyenesre, kivétel néhányat. Ezek az egyenes alá esnek. Ennek valószínűleg az oka az, hogy ilyenkor alacsonyabb (kb. 20 szintes) tornyok döntését vizsgáltuk. *(3.1.)* egyenlőségből következik, hogy az alacsonyabb tornyok nagyobb szögsebességgel és szöggyorsulással dőlnek, ezért az elemek megcsúszhatnak a tetején. Ekkor azok hátrébb kerülnek a torony tetején, ezáltal lehúzva azt. Ennek következménye, hogy nagyobb rés nyílik a szintek között, mint az elméletileg várt.



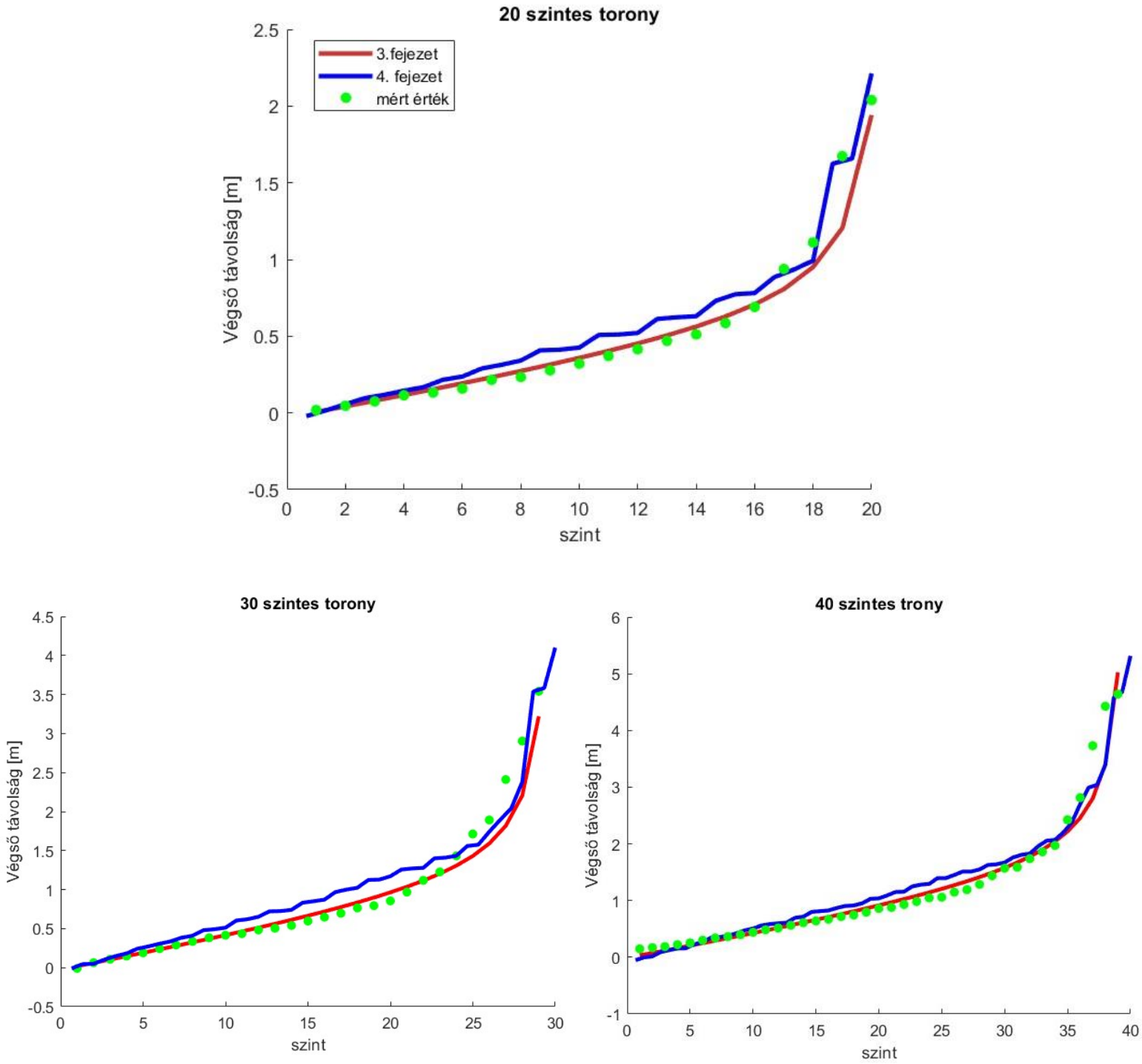
6.1-es ábra

Most lépjünk eggyel tovább és nézzük meg egy törés nélkül dőlő torony különböző szintjeinek „x” irányú sebességkomponensét [6.2-es ábra]. (A sebességek itt is a korábban említett Tracker software segítségével lettek megmérve.). Ahhoz, hogy a mozgó lejtőre felírt egyenleteink jól működjenek, a 3.2 fejezetben található feltevésnek is jónak kell lennie, miszerint a szétcsúszás kezdetével szintek sebességének közelítenie kell egymáshoz. Szerencsére tényleg ezt látjuk. Ezzel tovább is mehetünk a törmelék vizsgálatára.



6.2-es ábra

Nézzünk meg három különböző magasságú, törés nélkül dőlő torony „x”-irányú törmelékeloszlásának átlagait a torony szintjei szerint, majd hasonlítsuk össze 3. és 4. fejezet modelljei által adott eredményekkel az origók összeillesztését követően [6.3-as ábra].

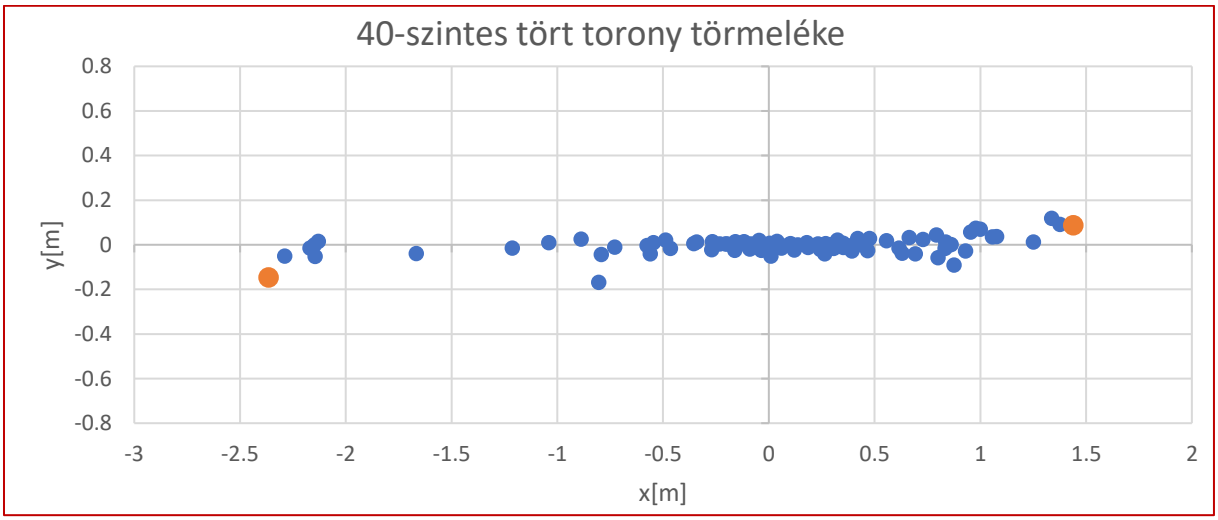


6.3-as ábra

A grafikonokon, habár a 3. fejezet rekurzív képletéből adódó piros és a 4. fejezet kontaktdinamikai szimulációjából kapott kék értékek görbeként vannak ábrázolva, értékeik diszkrétek. A 3. fejezet modelljénél az illesztett értékek: $k = 0.28; c = 0.08$. Továbbá a 4-ből számolt pontoknál, rá kellett tennünk egy 1.2-es szorzót az értékekre, hogy a látható grafikont kapjuk. Ennek részben biztosan a szimulációs eljárás az oka. Ezen túl még a pattanási

együttható bizonytalansága és a konstans értékek mérési meghatározásának hibája állhat hátterében.

Még nézzünk meg egy példát arra, mi történhet, ha a toronyban elég nagy törés keletkezik. Elég nagy törés alatt azt értjük, hogy az akadási pillanatot megelőzően követően a torony felső részének szögsebessége ellentétes előjelű lesz az alsó részével. Ezáltal az akadást követően a toronyrészek ellentétes irányba fognak dőlni. Ekkor törmelék mért eloszlása a talajon a következőképpen nézhet ki [6.4-es ábra]:



6.4-es ábra

Itt a torony a 10. szint környékén tört meg. Ez azt jelenti, hogy a felső letörő rész 30 elem magas volt. Az elakadásnál mind a számított, mind a mért nyílásszög a szintek között 16° környékén volt. A [6.4-es ábrán] (0,0) pont a torony alapjának pozícióját jelöli a dőlés megkezdésekor. Azt láthatjuk, hogy a dőlés irányára merőlegesen még most is kicsi az elmozdulás, pedig ez már egy összetettebb jelenség. Továbbá érdemes megjegyezni, hogy a maximális elemek közti távolság (narancssárga foltok) kisebb, mint egy szimpla lejtőként dőlő toronynál. Itt ez a maximális távolság 3.7[m] volt. Több ilyen mérést végrehajtva azt kaptuk, hogy ezen maximális távolságok átlaga 3.5[m] környékén volt. Ez nagyon közel áll a 30 szintes torony egyszerű dőlésénél mért maximális távolsághoz. Ettől függetlenül itt egyértelmű konklúziót még nem szabad levonni. Az viszont szépen látszik, hogy a két irányú dőlés miatt az elemek maximális távolsága kisebb, mint azonos magasságú törés nélkül dőlő tornyok esetében.

Megjegyzés: Néhány a tornyok dőlésével kapcsolatos videó megtekinthető a [10]-es linken.

7. Összegzés

Kutatásunkban egy komplex feladatot valósítottunk meg a tornyok dőlésének vizsgálatával. A munkának volt kísérletező, modellépítő és szimuláló szakasza is. Ki kellett dolgozni a toronyépítés metódusát, a dőlés mozzanatát, azt, miként történjen a felvétel. A képfeldolgozás szakaszában meg kellett valósítani a felvételek elemzését, hogy le tudjuk írni a dőlés folyamatát. Történt kontaktdinamikai szimuláció, készült elméleti modell is. A kutatási kérdések megválaszolására irányuló különböző metódusok azt is szolgálták, hogy az egyik eljárással kapott eredményeket a másikkal összvessük, validáljuk.

Azt láthatjuk, hogy metódusainkkal a kezdeti dőlési szakasz jól leírható. Emellett a kontaktdinamikai szimuláció és az elméleti modell is szépen leírja a dőlés irányába történő törmelékek elhelyezkedését, ha a torony egyenletesen törés nélkül dől. Amennyiben viszont a törés bekövetkezik a 3.2 fejezet elméleti modellje már pontatlanabbá, a paraméterek meghatározása nehézkessé válik.

A kutatást nyitott témájából adódóan több irányba folytatható. Érdemes lehet a jövőben több, egyéb típusú dőlést is vizsgálni. Például, ha a torony megfelelően törik, akkor leesést követően a saját súlya alatt szétfoszolhat, mely alapja sok kontrollált összeomlasztásnak [12]. Ennek a leírása egy alapvetően más modellt igényelne. Ezenkívül a jelenlegi modellek is javíthatóak (ilyen a 3.2 leírt szétcsúszás modellje). Tovább lehet pontosítani a fizikai leírást és érdemes lenne egy hibabecslési metódust is létrehozni a pontosság vizsgálatához. A 4. fejezetben leírt szimulációs program ugyancsak fejleszthető. Az ütközések feloldásának finomításával a mozgás első szakaszát is jobban le lehet írni, emellett a súrlódási modell is tökéletesíthető.

Összességében a dolgozatban bemutatott modelleket eredményesnek mondhatjuk. Sőt, a kapott eredményeknek gyakorlati felhasználásai is lehetnek.

8. Köszönetnyilvánítás

Ezennel megköszönnénk Dr. Szilágyi Brigittának és Dr. Várkonyi Péternek a segítségét, melyet a dolgozat elkészítése alatt nyújtottak nekünk.

9. Irodalomjegyzék

[1] Varieschi, Gabriele, and Kaoru Kamiya. "Toy models for the falling chimney." American Journal of Physics 71.10 (2003): 1025-1031. https://doi.org/10.1119/1.1576403

[2] Kavan, Ladislav. "Rigid body collision response." Vectors 1000.2 (2003).

[3] Tracker nyílt forráskódú videófeldolgozó program OSP(Open Source Physics) által

https://physlets.org/tracker/

[4] Huynh, Johnny. "Separating axis theorem for oriented bounding boxes." URL: jkh. me/files/tutorials/Separating% 20Axis% 20Theorem% 20for% 20Oriented% 20Bounding% 20Boxes. pdf (2009).

[5] https://www.mathworks.com/help/vision/ug/draw-shapes-and-lines.html Matlab dokumentáció

[6] Tadashi, K. A. W. A. I., Nakase HItoshi, and Moriguchi Shuji. "Influence Of Particle Shape Of Falling Rock-mass On The Maximum Travel Distance." (2019).

[7] Bundy, Francis P. "Stresses in freely falling chimneys and columns." *Journal of Applied Physics* 11.2 (1940): 112-123. https://doi.org/10.1063/1.1712742

[8] Michaloudis, Georgios, et al. "Modelling structural failure with finite element analysis of controlled demolition of buildings by explosives using LS-DYNA." High Performance Computing in Science and Engineering'09: Transactions of the High Performance Computing Center, Stuttgart (HLRS) 2009. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010. 539-551.

[9] Butcher, John. "Runge-kutta methods." Scholarpedia 2.9 (2007): 3147.

[10] Videók toronydőlésekről https://drive.google.com/drive/folders/1GxUCwdj2-8hdnXetuDZOCUShKxvffIT_?usp=drive_link

[11] Seifried, Robert, Werner Schiehlen, and Peter Eberhard. "The role of the coefficient of restitution on impact problems in multi-body dynamics." Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics 224.3 (2010): 279-306.

[12] https://www.youtube.com/watch?v=d77LbF6gk70