

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNY EGYETEM



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI KONFERENCIA DOLGOZAT

Szinkronizáció és topológia vizsgálata az európai nagyfeszültségű villamoshálózatokon

Szerző:

BENEDEK Kristóf

Budapesti Műszaki és

Gazdaságtudomány Egyetem,

Természettudományi Kar, Fizika Intézet

Témavezető:

DR. ÓDOR Géza

tudományos tanácsadó

EK Komplex Rendszerek

Laboratóriuma

A TDK dolgozat követelményeinek megfelelő vizsgamunka.

Készült

az

EK Komplex Rendszerek Laboratóriuma

csoportban



Energiatudományi
Kutatóközpont

2024. május 21.

Szerzőségi nyilatkozat

Alulírott, BENEDEK Kristóf, kijelentem, hogy a „Szinkronizáció és topológia vizsgálata az európai nagyfeszültségű villamoshálózatokon” című dolgozatban bemutatott munka a sajátom. Kijelentem továbbá, hogy:

- Ezt a munkát teljes egészében az egyetem mesterképzésének programja alatt végeztem.
- Ahol mások publikált munkáit tanulmányoztam, ez mindig egyértelműen be van jelölve.
- Ahol mások munkáiból idéztem, ott mindig megadom a forrást. Az ilyen idézetek kivételével ez a dolgozat teljes egészében saját munkám.
- Minden segítséget és forrást elismertem.
- Ahol a dolgozat másokkal közösen végzett munkára épül, ott pontosan leírtam, hogy mások mit csináltak, és én miben járultam hozzá.

„Ha tudnánk, mit csinálunk, azt nem neveznénk kutatásnak.”

Albert Einstein



A 2016-os Európai nagyfeszültségű hálózat egy ábrázolása, ahol a közösségek kezdenek elkülönülni. A csomópontok színezése és mérete fokszám alapján történt.

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNY EGYETEM

Fizika Intézet

Természettudományi Kar

Kivonat

TDK dolgozat

Szinkronizáció és topológia vizsgálata az európai nagyfeszültségű villamoshálózatokon

BENEDEK Kristóf

Hálózatok stabilitás dinamikájának vizsgálata fontos kutatási területnek számít, legyen szó neurális hálókról, energia hálózatokról vagy kommunikációs-, szociális hálókról. Energia-hálózatok esetében a dinamikai instabilitások kaszkád meghibásodásokhoz vezethetnek, amikor egy komponens vagy alrendszer hibája láncreakciót indít el a többi komponens vagy alrendszerben, aminek végeredményeként széles körű áramszünet vagy kimaradás következik be. Ezen meghibásodások modellezése és megértése fontos mind gazdasági, fenntarthatósági és nemzetbiztonsági szempontból is. Vizsgálatuk csatolt oszcillátor sokaságra alkalmazott másodrendű Kuramoto-egyenletek megoldásával történik. A tanulmány első részében a kaszkád dinamika tulajdonságait vizsgáljuk: a rendszer termalizálása után engedélyezzük egyetlen vonal túlterhelését, ami annak elszakadásához vezet, és követjük a későbbi túlterheléseket a küszöbértékekkel szemben. A kaszkádhibák valószínűségi eloszlásai a szinkronizációs pont közelében hatványfüggvény-farkakat mutatnak [1].

A tanulmány további részeiben meghatározzuk a súlyozott 2016-os és 2022-es európai áramhálózatokat, illetve majd ezek érzékeny gráfelemeit két különböző módszerrel: az összefüggő közösségek közötti hidakat határozzuk meg, illetve kiemeljük a "gyenge" csomópontokat, amelyek az ún. "lengési-egyenlet" legkisebb helyi szinkronizációját mutatják. Utóbbi esetben ugyanannyi elkerülő utat adunk a gyenge csomópontokhoz, hogy az megegyezzen a hidak számával, és összehasonlítjuk a szinkronizációt, a kaszkádhibák viselkedését a dinamikai javulással a tiszta topológiai változásokkal. Emellett összehasonlítjuk az eredményeket a hálózatok olyan változataival, ahol a hidakat eltávolítottuk, hasonlóan az elszigeteléshez, illetve hálózatok olyan változataival, ahol éleket véletlenszerű helyeken hozzáadunk-eltávolítunk [2, 3].

Abstract

TDK thesis

Study of synchronization and topology on the European high voltage power-grid

BENEDEK Kristóf

The investigation of the dynamics of network stability is considered an important research area, whether it concerns neural networks, energy networks, or communication and social networks. In the case of energy networks, dynamic instabilities can lead to cascade failures, where a fault in one component or subsystem triggers a chain reaction of faults in other components or subsystems, resulting in widespread power outages or disruptions. Controlling these failures is crucial from economic, sustainability, and national security perspectives. Their study is usually done by solving second-order Kuramoto equations applied to a coupled oscillator ensemble.

In the first part of the study, the properties of cascade dynamics are examined: after the system thermalizes, we allow the overload of a single line, which leads to its disconnection, and we track subsequent overloads against threshold values. The probability distributions of cascade failures exhibit power-law tails near the synchronization point [1].

In the further parts of the study, we identify the weighted European power grids of 2016 and 2022, as well as their sensitive graph elements using two different methods: we determine bridges between connected communities and highlight "weak" nodes that show the smallest local synchronization of the "swing equation." In the latter case, we provide an equal number of bypasses to the weak nodes to match the number of bridges, and we compare synchronization levels, and cascade failure behavior with dynamic improvements, and pure topological changes. Additionally, we compare the results with network variations where bridges are removed, similar to isolation, and with network variations where edges are randomly added or removed at random locations [2, 3].

Köszönetnyilvánítás

Szeretném köszönetemet kifejezni elsősorban témavezetőmnek, dr. Ódor Gézának, akitől rengeteget tanultam a munka során, miközben bebarangoltuk a hálózatok világának egy kis szegletét. Köszönet illeti a csoport további tagjait a segítségért és a közös munkáért, dr. Hartmann Bálintot, Papp Istvánt, Shengfeng Deng-t és Jeffrey Kelling-t, illetve belső konzulensemnek, dr. Török Jánost, a folyamatos segítségnyújtásért és nyitottságért. Nem utolsósorban, köszönet szüleimnek és testvéremnek a bátorításért és a támogatásért.

Tartalomjegyzék

Szerzőségi nyilatkozat	i
Kivonat	iii
Köszönetnyilvánítás	v
Tartalomjegyzék	vi
1. Bevezető	1
2. Módszerek és modellek	4
2.1. Nagyfeszültségű energiahálózat leírása másodrendű Kuramoto modellel . . .	4
2.1.1. Masszív Kuramoto egyenletek szinkronizáció leírására	4
2.1.2. Kaszkád meghibásodások szimulációja	6
2.2. Általános fogalmak és mértékek	6
3. Heterogenitás empirikus hálózati adatokban	10
3.1. A tanulmányozott hálózatok gráfelméleti leírása	10
3.1.1. A tanulmányozott hálózatok általános tulajdonságai	10
3.1.2. A hálózatok modellezése és súlyozása	11
3.2. Az európai és észak-amerikai hálózatok topologikus jellemzése	14
3.3. A hálózatok topografikus struktúrája	17
4. Topologikus változások hatása elektromos hálózatokra. Szinkronizációs és kaszkád szimulációk eredményei.	21
4.1. Szinkronizáció és annak javítása topologikus változtatásokkal	22
4.1.1. Híd kapcsolatok közösségek között	22
4.1.2. Kerülő utak (bypass) létrehozása lokális szinkronizáció alapján	23
4.2. Topologikus változtatások összevetése. Frusztrált szinkronizáció és kiméra állapotok.	25
4.2.1. A 2016-os európai hálózat	26
4.2.2. A 2022-es európai hálózat	29

5. Frusztrált szinkronizáció, kiméra állapotok vizsgálata.	35
5.1. Hálózatok spektrális vizsgálata	35
5.2. Gráf ciklikusságának és a szinkronizáció összefüggései	38
5.3. Saját munka részletezése	41
6. Következtetések, kitekintés	42
Függelék	45
A. Függelék a 2. fejezethez	45
B. Függelék a 4. fejezethez	46
Irodalom	47

Rövidítések listája

Magyar megfelelő		Angol megfelelő
PL	Hatvány függvény	Power Law
SOC	Kritikus önszerveződés	Self Organized Criticality
Bp	Kerülőút	Bypass
Ran	Véletlenszerű	Random
Br	Híd	Bridges
HV	Nagyfeszültségű	High Voltage
DC	Egyenáram	Direct Current
AC	Váltakozó áram	Alternating Current
GP	Griffiths fázis	Griffiths Phase
EU16	2016-os európai nagyfeszültségű hálózat	2016 European HV network
EU22	2022-es európai nagyfeszültségű hálózat	2022 European HV network
US16	2016-os Észak-amerikai nagyfeszültségű hálózat	2016 USA HV network

1. fejezet

Bevezető

Az elmúlt évtizedben, az energiaszektor jelentős változásokon ment és megy keresztül. Ez egyrészt a megjelenő új technológiáknak és a folyamatosan növekvő energia igénynek, másfelől a fejlődő iparnak tudható be. Emiatt az elektromos hálózatok modellezése központi kérdéssé vált a komplex rendszerek, a fizika más területei, de akár gazdasági szempontból is. Ezen hálózatok struktúrája, változatossága és heterogenitása miatt tökéletes jelöltek komplex rendszerek vizsgálati alanyaiként [4–6]. A tradicionális energiaforrásokról történő átállás egy sor kihívást jelent, melyek az energiahálózatok robusztusságát, stabilitását teszik próbára a dinamikában megjelenő fluktuációkon és perturbációkon keresztül. Ennek következtében ezen rendszerek vizsgálatánál lényeges, hogy megérthessük, hogyan lehet ezeket ellenállóbbá tenni a kaszkád meghibásodások, azaz a nagy méretű áramkimaradásokkal szemben. Míg az intuíció azt sugallhatja, hogy, például, magas terheltségű vonalak kapacitásának növelése vagy ezek mentén új vonalak hozzáadása javítaná a hálózat stabilitását, addig ez nem mindig igaz a valóságban, sőt akár rosszabb szinkronizációt is eredményezhet a *Braess paradoxon*nak [7, 8] köszönhetően. A közelmúltban megjelent egy topológiai elmélet, amely felfedi a hálózati struktúra és a linearizált teljesítményáram egyenáramú közelítése esetén a Braess mechanizmus kulcsát és előrejelzi a braessi rácskiterjesztéseket [9]. Jelen kutatási eredmények ezt a tanulmányt terjesztjük ki dinamikus váltakozó áramú (AC) hálózatra és megmutatjuk, hogy a paradoxon nem jelentkezik a szinkronizációs pont közelében, ahol önszerveződés vezérli a rendszert.

A statisztikus fizika és az ezredforduló hajnalán megjelent hálózattudomány együttese alkalmas erre a feladatra. Ezen módszerek alkalmazásai között olyan komplex rendszerek is megtalálhatóak, melyek mindennapjainkban is előfordulnak, mint például a tömegközlekedés, a szociális hálózatok, az internet és a telekommunikáció, de egzotikusabbakra is alkalmazhatóak, mint az idegrendszer, a vírus terjedés és az ökoszisztémák. Eszköztárával és a fizika más területeivel, statisztikus fizika, dinamikai rendszerek, karöltve új jelenségek vizsgálatát teszi lehetővé, köztük a magasfeszültségű áramhálózatok modellezését és numerikus szimulációját is.

A múltban számos modellt javasoltak a nagyfeszültségű áramhálózatok leírására. Ezek

között találhatók egyenáramú, homokdomb modellekhez hasonló [10–12], vagy fibrált nyálabszerű tárgyalások [13, 14]. Ezek a tanulmányok nehéz-farkú hatványfüggvény eloszlásokat és kritikus önszerveződést mutattak ki. Később megjelentek a váltakozóáramú modellek, amelyek a másodrendű Kuramoto-modell egyenleteire alapozva [15], azok egy speciális formáját használják, az ún. lengési ("swing") egyenleteket. Ezen modellel leírt rendszerek stabilitás és szinkronizációs problémája egy aktív kutatási területnek számít [16–19].

A hálózat topológiájától függően, a Kuramoto modell mutathat teljes vagy részleges szinkronizációt, amit a való életben is megfigyelhetünk. A részleges szinkronizáció főként erősen heterogén rendszerekben fordul elő. Gyakran ritka régió effektust is mutatnak ezek a területek [20], amelyek befolyásolhatják a szinkronizációs dinamikát. Mivel itt a komponensek állapota más, mint a rendszer többi részében, ezek gyorsabban vagy lassabban fejlődnek, befolyásolva a globális dinamika ütemét és a szinkronizációs paramétert. Megjelenésük ún. *Griffiths fázisok* kialakulásához vezethet [21]. Más vizsgálatok [22, 23], megmutatták, hogy a kaszkád meghibásodások terjedése megállítható új utak (élek) vagy csomópontok hálózathoz történő adásával.

A dolgozatban élek teljesítmény küszöbértékével kiegészített másodrendű Kuramoto modellt [24, 25] használunk kaszkád dinamika modellezésekhez, bármiféle linearizáció nélkül. Kaszkád meghibásodás akkor következik be egy energia hálózatban, amikor egy komponens szabálytalan viselkedése más alegységek anomális dinamikájához vezet és ezek együttese egy kiterjedt áramkimaradást és a hálózat szétesését eredményezik. Ezt észben tartva, a szimuláció két lépésből áll: először termalizáljuk a rendszert, amikor él-meghibásodás nem engedélyezett, majd ezután következik a kaszkád dinamika maga, ahol adott él küszöbértéken túli terhelése esetén azt elvágjuk (2.1.2. alfejezet) és ezen meghibásodások nagyság- és valószínűség eloszlását követjük.

A modellezés egyik legnagyobb kihívását a hálózat gráfjának meghatározása jelenti, mivel valóság-hű eredményekhez szükségünk van a ennek pontos infrastruktúrájára és paramétereire. Gyakran az ilyen típusú adat nem nyílt forrású, illetve nyílt forrású adatbázisok gyakran hiányosak és ezért ezek összefűzésére, a nem létező paraméterek intra- és extrapolációjára van szükség. Ezek ismeretében előállítható az energiahálózat gráfja, illetve a gráf paramétereinek ismeretében súlyokat is rendelhetünk az egyes élekhez.

A dolgozat további részeiben bemutatjuk a 2016-os és 2022-es európai és észak-amerikai hálózatok modellezésének részleteit. Előállítjuk a modell alapjául szolgáló gráfokat, pótoljuk az esetenkénti hiányos adatbázisokat és súlyozzuk a kapott gráfot. Megvizsgáljuk a gráfok általános tulajdonságait. Az kapott rendszereken elemezzük a kaszkád meghibásodások tulajdonságait és meghatározzuk a hálózat gyenge pontjait két módszerrel: statikus hálózatelemzéssel, gráfelméleti módszerekre alapozva (közösség analízis, klaszterezettség, foksám-eloszlás), illetve dinamikus módszerrel, amely a Kuramoto egyenletek megoldását használja a legalacsonyabb lokális szinkronizációt mutató csomópontok megtalálásához. Miután a hálózat gyenge elemeit azonosítottuk, két módszerre is javaslatot teszünk,

hogyan lehet ezeket a pontokat erősíteni, a hálózatot módosítani úgy, hogy az eredményül kapott rendszer robusztusabb legyen. Ennek valós alkalmazási potenciálja is van, hiszen energiahálózatok módosítása és fejlesztése költséges, illetve az energia ellátás biztonsága és megbízhatósága minden ország esetén fontos.

A fent említett eljárások által módosított hálózatok eredményeit összehasonlítjuk egymással és az eredeti rendszerrel, és egy kiterjedt elemzést adunk a gráfokat illetően, amely feltárja egyes komponensek szinkronizációja és topográfiája közti összefüggéseket. Az elemzés során azt találjuk, hogy a rendszerek nagymértékű heterogenitásának ellenére (súlyokban, élhosszokban és foksám-eloszlásban), azok dinamikáját jellemző tulajdonságaik univerzálisnak tűnnek. Az univerzalitás mértéke természetesen csak közelítő jellegű, ahogyan különböző korábbi tanulmányok is megállapították [6, 26–28].

2. fejezet

Módszerek és modellek

Ebben a fejezetben a a gráfok főbb vizsgálati módszerei kerülnek bemutatásra.

2.1. Nagyfeszültségű energiahálózat leírása másodrendű Kuramoto modellel

2.1.1. Masszív Kuramoto egyenletek szinkronizáció leírására

Energiahálózatok szinkronizációjának időfejlődését inerciával rendelkező mechanikai elemekre az úgynevezett lengési (swing) egyenletek által adják [29]. Ez formálisan egyenértékű a másodrendű Kuramoto-egyenlettel [15] $\theta_i(t)$ fázisú N oszcillátorokból álló hálózatra. A rendszer átírható egy specifikusabb alakba, ahol dimenziótlanított elektromos paraméterek szerepelnek:

$$\ddot{\theta}_i + \alpha \dot{\theta}_i = P_i + \frac{P_i^{max}}{I_i \omega_G} \sum_{j=1}^N W_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i). \quad (2.1)$$

Ebben az egyenletben α csillapítási tényező amely a a felvett teljesítményt, vagy a rendszer azonnali válaszát jellemzi [26], a $K := P_i^{max}$ -t globális kontroll paraméterként definiáljuk, amely a csomópontok közötti maximális átvitt teljesítményhez kapcsolódik, a $I_i = I$ tehetlenséget és a generátor névleges frekvenciáját, ω_G -t, állandó értéken tartjuk főként ismereteink hiányossága miatt. W_{ij} a hálózat szomszédsági mátrixa, melynek elemei 0-k, vagy az adott csomópontok közti él súlyának megfelelő érték. Ezeknek a súlyoknak a részletes számítási módja a 3.1.2. fejezetben tárgyalta.

$P_i := \omega_i^0$ -val jelöljük, az i -edik oszcillátor saját frekvenciájával arányos, $[1/s^2]$ fordított időnégyzet dimenziót hordozó, i -edik csomópont be/kiáramlását leíró tagot. Az egyszerűség kedvéért feltételezhetjük, hogy $\omega_i(0)$ ugyanabból az eloszlásból származik, mint ω_i^0 , és numerikusan $\omega_i(0) = \omega_i^0$ -t állítunk be, ami azt jelenti, hogy $[s]=1$.

A felírt modell egy kapcsolt differenciálegyenlet-rendszer, melynek analitikus megoldása nem lehetséges valós méretű hálózatokra. A dolgozat dinamikai eredményei numerikusak, melyeket ahol lehetett összevetettünk empirikus adatokkal. A numerikus szimuláció egy jól optimizált C++ és CUDA programozási nyelvekben íródott kód segítségével történik, melyeket a magyar szuperszámítógép rendszer gépein, illetve a labor lokális klaszterén futtatunk.

Az előzőleg bemutatott egyenletekben megjelenő paramétereknek a tanulmányban a következő beállításokat használtuk: a disszipációs tényező (α) értéke 0.4-ként lett kiválasztva, hogy megfeleljen az áramhálózatokra vonatkozó elvárásoknak, azonban teszteltük a $\alpha = 3.0$ esetet is, amely egy stabilizáló lineáris visszacsatolást leíró rendszert képes modellezni [1, 30].

Az általános differenciálegyenletek megoldásához az adaptív Bulirsch-Stoer integrátort használtuk [31], amely pontosabb eredményeket nyújt nagy K csatolási értékeknél, mint a negyedrendű Runge–Kutta módszer. A nemlinearitás kaotikus zajt vezet be, még a sztochaszticitás nélkül is, így de-szinkronizációs átmenet következik be K csökkentésével. A megoldások emellett függenek az aktuális kvencselt ω_i^0 sajátfrekvencia kiosztástól is. A mérhető mennyiségek átlagaiban észszerű fluktuációk eléréséhez jelentős számítási erőforrásokra volt szükségünk, mint például GPU HPC gépeiknek grafikus kártyáinak igénybevételére a numerikus szimulációkhoz. Erősebb szinkronizációs megoldások eléréséhez az kezdeti állapot szinkronállapotként lett beállítva: $\theta_i(0) = 0$, azonban lehet más egyenletes véletlenszerű eloszlásokat is vizsgálni, például: $\theta_i(0) \in (0, 2\pi)$ véletlen fázis-kiosztást. A kezdeti frekvenciák pedig $\dot{\theta}_i(0) = \omega_i^0$ -nak voltak megválasztva.

A fázisátmenet tulajdonságainak jellemzéséhez a fázisrendezettségi paramétert $R(t)$ és az $\Omega(t)$ frekvenciaszórást, azaz a frekvencia-rendezettségi paramétert vizsgáltuk. A Kuramoto fázisrendezettségi paraméter:

$$z(t_k) = r(t_k) \exp [i\theta(t_k)] = \frac{1}{N} \left| \sum_j \exp [i\theta_j(t_k)] \right| \quad (2.2)$$

Kiátlagolva a mintákra:

$$R(t_k) = \langle r(t_k) \rangle \quad (2.3)$$

illetve a frekvenciák varianciájára azt kapjuk, hogy:

$$\Omega(t_k, N) = \frac{1}{N} \left\langle \sum_{j=1}^N (\bar{\omega}(t_k) - \omega_j(t_k))^2 \right\rangle, \quad (2.4)$$

ahol $\bar{\omega}(t_k)$ a megfelelő mintában az időlépéshez tartozó átlag frekvenciát jelenti, ahol $t_k = 1 + 1,08^k$, $k = 1, 2, 3, \dots$. A minta átlagok százaz nagyságrendű sajátfrekvencia-realizációkra lettek kiszámolva minden különböző kontroll paraméter esetén, illetve a valószínűségi a kaszkád hibák eloszlási függvényeinek becsléséhez kb. $\simeq 20.000$ realizáció kiszámítására

volt szükség, hogy a kaoticitásból származó fluktuációk elfogadható mértékűre csökkenjenek.

2.1.2. Kaszkád meghibásodások szimulációja

A Kuramoto egyenletek numerikus megoldását a küszöb dinamikával bővítettük ki, hogy modellezni tudjuk a kaszkád meghibásodásokat. Az élek teljesítmény-túlterhelése esetén, azokat eltávolítottuk a kaszkád hiba szimuláció során. Ez a módszer hasonló a [1, 32] bemutatottakhoz.

A termalizálást követően, amelyet egy fázisrendezett állapotból indítottunk és amelyben a vonal meghibásodások nem voltak engedélyezve, perturbáljuk a rendszert egy véletlenszerűen kiválasztott él eltávolításával, amellyel egy vonal meghibásodást szimulálunk. Ezt követően, ha a szomszédos csomópontok közötti vonalakon kialakuló teljesítmény nagyobb, mint egy küszöbérték:

$$F_{ij} = |\sin(\theta_j - \theta_i)| > T, \quad (2.5)$$

a vonal túlterheltként lett kezelve, és véglegesen eltávolítottuk ezt az élet a gráfból. Megmértük a különböző $\omega_i(0)$ sajátfrekvencia értékekre vonatkozóan az egyes szimulált áramkimaradás-kaszkádok vonalhibáinak nagyságeloszlását és valószínűség eloszlását

A kritikus pont környékén általában olyan hatványszerű eloszlásokat várunk, mint

$$p(N_f) \sim N_f^{-\tau}. \quad (2.6)$$

2.2. Általános fogalmak és mértékek

A következő alfejezetben néhány, hálózattudomány szempontjából fontos fogalmat vezetünk be.

Ha komplex rendszereket szeretnénk megérteni, akkor először arra kell rájönnünk, hogy azok komponensei hogyan hatnak kölcsön egymással. Az ehhez szükséges matematikai háttér a gráfelmélet szolgáltatja.

Egy hálózatot szerkezetileg tekintve egy gráfként foghatunk fel.

2.2.1. Definíció ((Irányítatlan) Gráf). Egy $G = (V, E)$ párt gráfnak nevezzük, ahol V egy olyan halmaz, amelynek elemeit csúcsoknak (vagy csomópontoknak), E pedig párosított csúcsok halmaza, amelynek elemeit éleknek (vagy vonalaknak) nevezik.

Amennyiben V halmazban N elem van, úgy a hálózat csúcsainak száma N , vagy azt is szoktuk mondani, hogy a hálózat nagysága N . Többféle gráfot is megkülönböztetünk, úgy mint egyszerű, irányított, páros, ciklikus, összefüggő, szétkapcsolt, teljes gráf.

Fokszám. Bármely csúcs egyik kulcs mennyisége a fokszáma, mely megadja, hogy hány másik csúccsal van kapcsolatban. Az i -edik csomópont fokszámát k_i -vel jelöljük. Egy gráfban pedig:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i \quad (2.7)$$

él van. Míg a fokszám egyes csúcsokat jellemez, a teljes hálózatra az *átlag fokszámot* szoktuk használni

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i, \quad (2.8)$$

illetve a fokszám eloszlást, p_k mely megmutatja, hogy egy véletlenül választott csomópontnak a fokszáma k legyen:

$$p_k = \frac{N_k}{N} \quad (2.9)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1, \quad (2.10)$$

ahol N_k a k fokszámmal rendelkező csúcsok száma.

Szokás még használni a kumulatív fokszám eloszlást is, γ_c , mely megmutatja azon csomópontok számát melyek fokszáma kisebb mint K :

$$P(k_i > K) = C \cdot e^{-\frac{k_i}{\gamma_c}} \quad (2.11)$$

Ahogy más munkák megmutatták [33], egy hálózat, melynek kumulatív fokszám eloszlása $\gamma_c > 3/2$ sérülékeny, míg ha $\gamma_c < 3/2$ akkor a robusztus.

Szomszédsági mátrix. Egy hálózat teljes leírásához nyomon kell követnünk a hálózat kapcsolatait. Ennek legegyszerűbb módja, ha az élek teljes listáját adjuk meg. Matematikailag a hálózatot a szomszédsági mátrixán keresztül reprezentálhatjuk. Egy N csomópontból álló irányított hálózat szomszédsági mátrixa N sorból és N oszlopból áll, elemei a következők:

- $A_{ij} = 1$, ha a j csomópont kapcsolatban van i csomóponttal.
- $A_{ij} = 0$ más esetben.

A szomszédsági mátrix tulajdonsága:

$$k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij} = \sum_{j=1}^N A_{ji} \quad (2.12)$$

Bizonyos esetekben használhatunk más mátrixot is, pl. a rendszer súly mátrixát, amelyben a 0-s elemek ugyancsak az élek hiányát és a nem zérus elemek pedig a kapcsolatok meglétét fejezik ki.

(Legrövidebb) Útvonal. Egy gráfban egy útvonal i_0 és i_n csomópont között nem más, mint n darab él rendezett listája, $P = (i_0, i_1), (i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{n-1}, i_n)$. Ekkor az útvonal hossza n . Az i és j csúcsok közti *legrövidebb útvonal* pedig az a lista, amelyik a lehető legkevesebb élet tartalmazza. Két csúcs között több útvonal, sőt több ugyanolyan hosszúságú útvonal is létezhet. A legrövidebb útvonalat i és j között szokták még i és j *távolságának* is hívni. A teljes hálózat esetében, általában az *átlagos legrövidebb úthosszra* vagyunk kíváncsiak, mely matematikailag megadható, mint

$$L = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{j \neq i} d(i, j), \quad (2.13)$$

ahol $d(i, j)$ az i és j csomópont távolsága. Egy *Erdős-Rényi* (véletlen) gráfban, ugyanannyi N csomóponttal és éllel, azt az összefüggést kapjuk az átlagos legrövidebb úthosszra, hogy:

$$L_r = \frac{\ln N - 0,5772}{\ln \langle k \rangle} + 1/2 \quad (2.14)$$

Általában nem találkozunk véletlen gráfokkal a való életben, de gyakran mennyiségek analitikusan csak esetükben számíthatók, vagy analitikus képlet csak esetükben létezik, így általában hasonlítási alapként szokták az ilyen gráfokat használni.

Elmondható, hogy átlagos legrövidebb úthossz számítása komplex, nagy gráfokban összetett feladatnak számít és numerikusan költséges. Olyan algoritmusokat használnak rá, mint pl. *Dijkstra-algoritmus*.

Klaszterezettség együttható. Ez a mennyiség azt írja le, hogy adott csúcsok szomszédai mennyire kapcsolódnak egymáshoz, azaz milyen közel vannak a csúcsok szomszédai által feszített részgráfok a teljes gráfhoz:

$$C_i = \frac{2 \cdot L_i}{k_i(k_i - 1)}, \quad (2.15)$$

ahol, L_i az i -edik csomópontot k_i szomszédjával összekötő élek száma. C_i értéke 0 és 1 közötti. A teljes hálózatra újfent ezen mennyiség átlaga az érdekes:

$$C = \frac{1}{N} \sum_i 2n_i/k_i (k_i - 1) \quad (2.16)$$

Közösségek. Modularitási hányados. Egy hálózatban közösségeknek nevezzük azokat az algráfokat, amelyek csomópontjai között több él van, mint a közösség csomópontjai és a gráf többi eleme között. Közösség meghatározásra számos algoritmus létezik. Mi tanulmányaink során *Leiden* és *Louvain* algoritmusokat használtunk, mivel ezek hálózat mérettel történő

skálázódása, gyorsasága és stabilitása az egyik legjobb. A Louvain algoritmus az ún. *modularitás* optimalizálásán alapul, míg a Leiden algoritmus [34] egy kiterjesztett modularitási együttthatót használ, melyben a felbontási tényező kontroll paraméterként viselkedik. Erősen moduláris vagy ritka hálózatoknál, úgy tűnik, hogy a Leiden algoritmus nem ad jobb eredményt a Louvain módszerénél. Egy hálózat modularitási hányadosa a következőképpen definiálható [35, 36]:

$$Q = \frac{1}{N\langle k \rangle} \sum_{ij} \left(A_{ij} - \Gamma \frac{k_i k_j}{N\langle k \rangle} \right) \delta(g_i, g_j), \quad (2.17)$$

Szakzsargonban, az egyes közösségeket összekötő, súlyozott hálózat esetén legnagyobb súllyal rendelkező, éleket *hidaknak* (bridge) is szoktuk nevezni.

Kis-világ együtttható (small-world-ness). Ahogy korábban említettük, bizonyos hálózatokat, például véletlen gráfokat, referenciaként szoktuk használni. Így bevezethetjük a *kis-világ együttthatót* [37], ami megmutatja mennyire hasonlít egy adott gráf egy véletlen gráfhoz, mely ugyanannyi éllel és csomóponttal rendelkezik. Más szóval, ha $\sigma > 1$ akkor könnyebb, ha $\sigma < 1$, akkor nehezebb elérni a szomszédokat, mint azonos méretű véletlen gráf esetén:

$$\sigma = \frac{C/C_r}{L/L_r} \quad (2.18)$$

Gráf dimenziója. A gráf dimenziója, a szélességi bejárás (breadth-first search) algoritmus által mérve, a következő módon definiált

$$\langle N_r \rangle \sim r^d, \quad (2.19)$$

ahol N_r azoknak a csomópontoknak a száma, amelyek topológiai (más néven "kémiai") r távolságra vannak egymástól.

3. fejezet

Heterogenitás empirikus hálózati adatokban

3.1. A tanulmányozott hálózatok gráfelméleti leírása

Ebben az alfejezetben a tanulmányozott hálózatok pusztán statikus, szerkezeti úton vizsgált és topologikus tulajdonságait írjuk le a 2.2. alfejezetben bevezetett mértékeken keresztül. Az egyik központi kérdés, amely a vizsgálatokat motiválja, hogy mi a magyarázata az empirikusan megfigyelt hatványfüggvény eloszlást mutató meghibásodásoknak, mennyiségeknek és létezik-e univerzalitás a nyilvánvalóan különböző hálózatok között, melyet a statisztikus fizika csak a termodinamikai határesetben jósol, illetve mi az a pont, ahol az univerzalitás, ha létezik, megszűnik? Az a kérdés is foglalkoztat bennünket, hogy mi a hálózatok topologikus és paraméterekbeni heterogenitásának szerepe, illetve létezik-e közöttük összefüggés.

3.1.1. A tanulmányozott hálózatok általános tulajdonságai

Vizsgálataink során főként három nagyfeszültségű elektromos hálózattal foglalkoztunk: a 2016-os európai (EU16) és észak-amerikaival (US16), illetve a 2022-es európaival (EU22). A 2016-os hálózatok adatbázisaként a SciGRID projekt szolgált [38, 39], illetve a 2022-es adatbázis magját a PyPSA [40] nevű python csomag forrásfájljai alkotják. Minden esetben a szimulációkat és a vizsgálatokat a hálózatok legnagyobb összefüggő komponensére végeztük el. A fentebb bevezetett mennyiségeket és mértékeket kiszámoltuk ezen gráfok esetén:

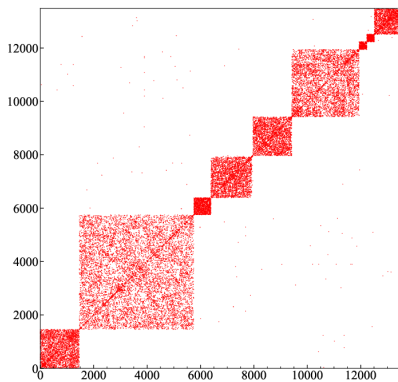
A 3.1. táblázatban a Q modularitási értékek nagyok. Ezt ugyancsak szemléltethetjük a gráfok szomszédsági mátrixainak ábrázolásával.

Egy másik lehetőség a hálózat vizualizálására annak elrendezésének megjelenítése. Erre a Gephi gráf vizualizációs software-t [41] használtuk.

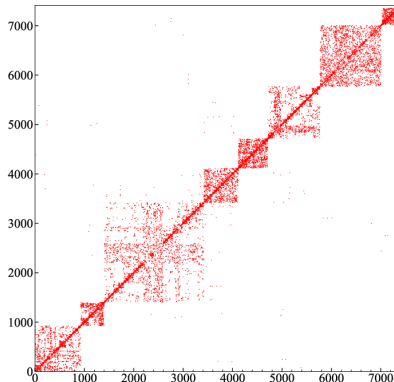
A hálózatok kumulatív fokszám-eloszlásának illesztését lásd a A. fejezetben.

Hálózat	E	N	$\langle k \rangle$	γ_c	Q	Közösség #	L	L_r	C	C_r	σ
EU16	18393	13478	2,729	1,504	0,924	28	49,50	9,396	0,099	0,000203	92,702
EU22	10298	7411	2,779	1,640	0,849	12	46,83	8,653	0,098	0,000375	48,420
USA16	20880	14990	2,786	1,548	0,927	22	47,50	9,321	0,102	0,000186	107,785

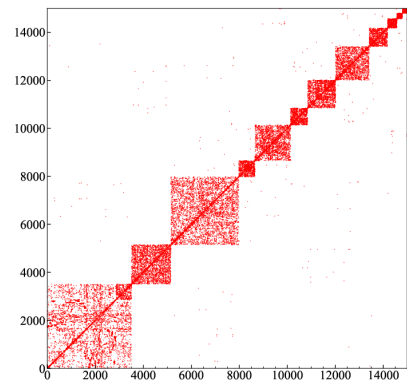
3.1. táblázat. Gráf mennyiségek a 2016-os európai és észak-amerikai, illetve 2022-es európai hálózatokra. Az alsó r index a megfelelő mennyiséget jelöli egy olyan véletlen gráf esetén, amely ugyanannyi élel és csomópontot tartalmaz, mint a neki megfelelő valós háló.



(a) EU16



(b) EU22



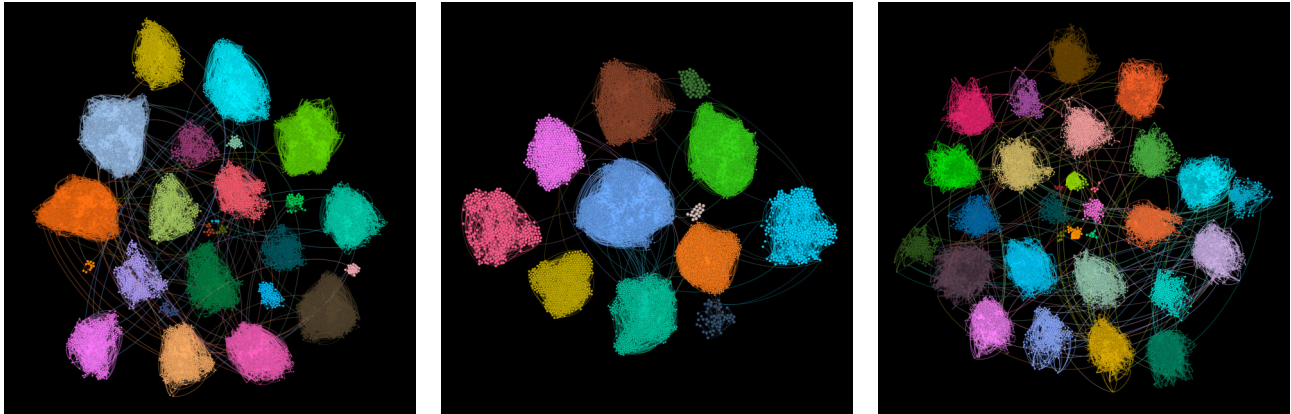
(c) US16

3.1.1. ábra. A vizsgált hálózatok szomszédsági mátrixai, ahol a csomópontokat közösségek szerint rendeztük. Az ábrák jól mutatják a rendszerek moduláris jellegét. Az EU22-es hálózat elüt szerkezetileg a 16-os hálózattól, ami sokkal sűrűbben kapcsolt. Ez látszik a 3.1. táblázatban a modularitási együtthatóból is.

3.1.2. A hálózatok modellezése és súlyozása

Annak érdekében, hogy részletes szinkronizációs számításokat végezhessünk, a gráfot súlyozni kell. Elektromos hálózatoknál ez az élek admittanciáinak meghatározását jelenti. Az egyik lehetséges megoldás az, hogy használjuk a hálózat fizikai paramétereit, amennyiben ismertek. A 2016-os gráfok adatainak alapja a **SciGRID projekt**, amely az ENTSO-E 2016-os adatpublikációján és OpenStreetMap (.osm) fájljából származó adatokon alapszik. Mivel az adatok beszerzése .osm fájljából nem mindig lehetséges, az eredményül kapott adatbázis hiányos lehet. A 2022-es hálózat alapja pedig a PyPSA [40] forrásfájljai, melyek az interaktív **ENTSO-E** térkép elemzésével készültek. A hálózat modellezéséhez, pontosabban a hiányos adatok kiegészítéséhez, valamilyen feltételezésekkel kell élnünk. Mivel a súlyok admittancia értékektől függenek, ezért elsődleges feladat az élek feszültség szintjeinek meghatározása. Ezek után ismert karakterisztikus értékekből (lásd 3.2. táblázatot) és az élek hosszúsága alapján kiszámíthatók lesznek a további paraméterek, így az admittancia értékek is.

Ahogy említettük az elektromos hálózat struktúráját tekintve egy gráfként értelmezhető, ahol a csomópontok a generátorok (energiaforrások) vagy terhelések (fogyasztók), míg


(a) EU16, $\Gamma = 0,0001$, 25 közösség

(b) EU22, $\Gamma = 0,01$, 12 közösség

(c) US16, $\Gamma = 0,001$, 30 közösség

3.1.2. ábra. A vizsgált hálózatok elrendezésének vizualizálása Gephi-vel. Az ábra a hálózatok hierarchikus elrendezését mutatja közösségekre, azokon belül foksám és modularitásra optimalizálva. A közösségek megtalálásához modularitás optimalizáló Leiden algoritmust használtuk amelynek a felbontási paramétere és a kapott közösségek száma az alábbiak felirataiban található. A hálózatok modularitását a 2.2. egyenlet megoldásával kapjuk. Az ábrákon jól elkülönülnek a hálózat jobban és kevésbé kapcsolt részei, megerősítve a modularitási együtthatóra kapott eredményeket. Az ábrázoláshoz a Circle Pack Layout, Fruchtmann Reingold és Force Atlas 2 algoritmusokat használtuk.

a transzmissziós vonalak a gráf élei. Ismét hangsúlyozzuk, hogy vizsgálataink a nagyfeszültségű hálózat legnagyobb összefüggő komponensére vonatkoznak. A ismert feszültségadatok lehetővé teszik a többi becslését. A legnagyobb komponens elérhető feszültségeinek átlagolása eredményezi az ismert élek átlagos feszültségét, $\bar{V}$ -t. A legegyszerűbb lehetséges feltételezésként ezt az értéket helyettesítettük be minden ismeretlen él feszültség szintjének. Tapasztalataink alapján javaslatot tehetünk a releváns mennyiségek (például az ellenállás, reaktancia és kapacitás) karakterisztikus értékeire a feszültség szint függvényében. A használt értékeket lásd a 3.2. táblázatban.

3.2. táblázat. Releváns fizikai mennyiségek jellemző értékei az modellezett európai áramhálózatokban.

Feszültség [kV]	R_c [Ω /km]	X_c [Ω /km]	C_c [nF/km]	P_c [MW]
120	0,0293	0,1964	9,4	170
220	0,0293	0,2085	9,0	360
380/400	0,0286	0,3384	10,8	1300

Az elektromos paramétereket az élek különböző feszültség szintekre osztásával és a számítások a hálózat közös feszültség szintjén történő végzésével meghatározhatók. Az elemzés során a hálózatokban három feszültség szintet azonosítottuk, ahogy a 3.2. táblázat is mutatja: 120 kV, 220 kV, 380 kV. A kategóriák közötti határokat a szomszédos feszültség szintek aritmetikai középértékeként határoztuk meg, és egy él a legközelebbi kategóriához tartozó jellemző paraméterekkel rendelkezik. Azaz minden olyan él, amely 120 kV alatt van, az első kategóriához tartozik, minden olyan él, amely 380 kV felett van, a 380 kV kategóriához

tartozik. Az összes többi él kategóriája az előre meghatározott határokhoz levő közelsége alapján dől el. A legnagyobb népességgel rendelkező feszültség szintek, 220 kV és 400 kV, kb. 90%-át teszik ki az élnek.

Miután eldöntöttük egy él feszültségosztályát, kiszámíthatjuk a releváns mennyiségeket a következőképpen:

$$R_{ij} = \left(\frac{U_c}{U_{ij}} \right)^2 \cdot L_{ij} \cdot R_{c_k} \quad (3.1)$$

$$X_{ij} = \left(\frac{U_c}{U_{ij}} \right)^2 \cdot L_{ij} \cdot X_{c_k} \quad (3.2)$$

$$P_{ij} = P_{c_k}, \quad (3.3)$$

ahol R_{c_k} , X_{c_k} a kategória k jellemző értékei, és $U_c = 220$ kV az európai hálózat közös feszültség szintje. Az él súlyát meghatározhatjuk, mint

$$W_{ij} = \frac{P_{ij}}{X_{ij}} / \left\langle \frac{P}{X} \right\rangle, \quad (3.4)$$

ahol P_{ij} az él névleges teljesítménye a saját feszültség szintjén, és X_{ij} az impedanciája. A normalizációs faktort a teljes hálózatra kiszámított ezen arány átlagának választottuk.

Kiszámoltuk az EU16 és az US16 Észak-Amerika-i áramhálózat admittancia valószínűségi eloszlásait. Ennek az eredményeképpen az 2016-os észak-amerikai hálózat esetében 9527 (45%), míg az 2016-os európai és 2022-es európai hálózatok esetében 5167 (28%), illetve 40 (0.3%) új él admittancia (Y) értékét becsültük meg. Ahogy a 3.1.3. ábrán is látható, az US16 és EU16 nehéz farkakat (heavy tails) mutatnak, amelyeket PL alakú függvényekkel illeszthetők $10^2 < Y < 10^4$ [1/ohm] tartományban, amelyet a következő exponensek jellemeznek: $x_{EU16} = 2,03(3)$, $x_{US16} = 2,05(5)$.

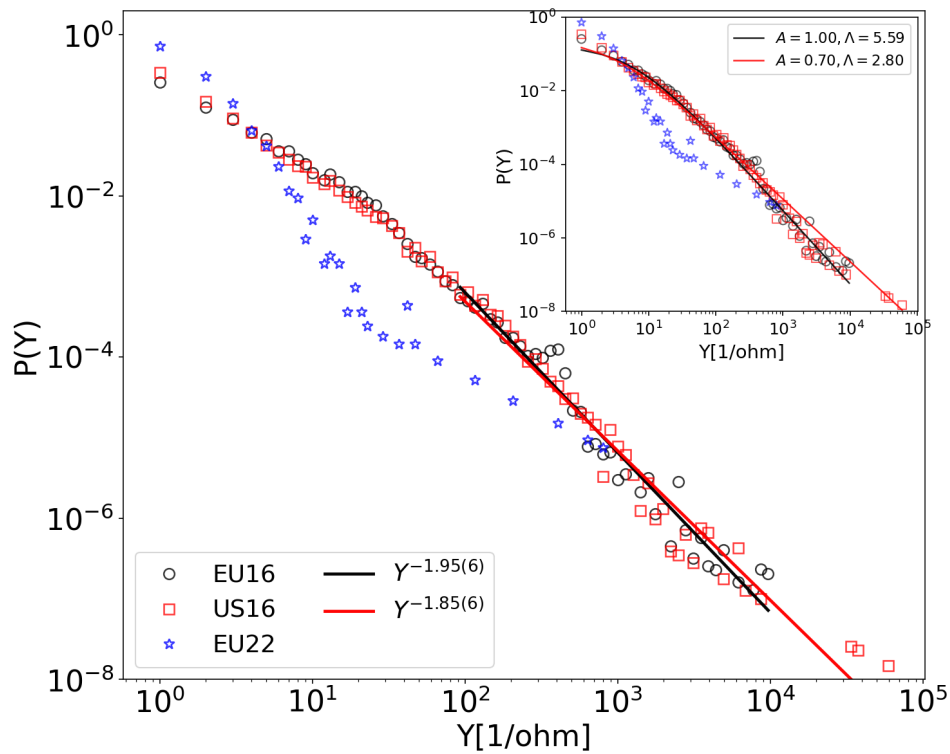
Továbbá, a Lomax-II [42], ami a Pareto eloszláshoz hasonló formában van:

$$p(Y) = \frac{A}{\Lambda} \left[1 + \frac{Y}{\Lambda} \right]^{-(A+1)}, \quad Y \geq 0, \quad (3.5)$$

akár az alacsony Y tartományt is jól leírja, magas jósági tényezővel: $R^2 = 0,987$ az EU16 esetében és $R^2 = 0,994$ az US16 esetében, amint az a 3.1.3. ábra betét grafikonján is látható. Az EU22 adatainál azonban más viselkedést tapasztalunk a középső Y tartományban, amely valószínűleg hiányzó adatok miatt következik be, és nem próbáltunk numerikus illesztést alkalmazni.

Ezek a nehéz farkú eloszlások az admittanciák növekedésének következményei a hálózatok rövid élhosszai miatt, amelyek néhány méteres értékeket is felvehetnek.

Az EU22 gráf hiányossága nyilvánvaló, mivel csak 10298 él található benne, szemben az



3.1.3. ábra. A 2016-os európai (kör), észak-amerikai (négyzet) SciGRID és a 2022-es EU (csillagok) hálózatokra kiszámított admittancia valószínűségi eloszlásai. Szaggatott vonal: legkisebb négyzetekkel módszerrel illesztett PL az EU16 esetében, pontozott vonal: az US16 esetében, a tartományban: [100...10000] 1/ohm. Az betét ábra ugyanezt az adatot mutatja, illesztve az 3.5. egyenlettel, amely jól működik a 10 [1/ohm] tartományig.

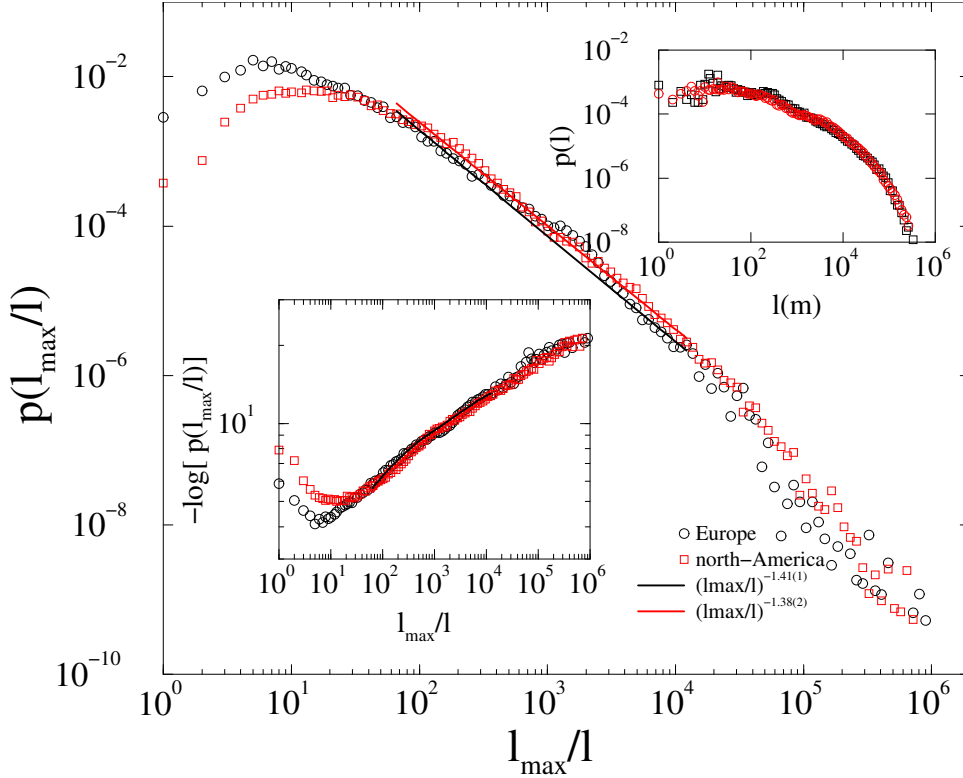
EU16 esetében, ahol 18393 él található. Mindez annak ellenére, hogy az EU22 tartalmazza Észak-Afrika és a Közel-Kelet területeit is, lásd a 3.3.2. ábrát.

Elemeztük a 2016-os SciGRID adatbázisok éleinek hosszát és ezek eloszlását. A 3.1.4. ábra mutatja a $l_{\max}/l$ valószínűségi eloszlásokat, amelyek arányosak lennének az admittanciákkal, ha a kábelek a karakterisztikus ellenállása egyenlő lenne.

Az eloszlások nagyon hasonlóak, de a farok gyorsabban lecsapódik, mint az admittancia eloszlások esetében, amelyeket egy nyújtott exponenciális eloszlással lehet leírni. A jobb oldali mellék ábra a hosszúságok valószínűségi eloszlását mutatja méterben, log-log skálán.

3.2. Az európai és észak-amerikai hálózatok topologikus jellemzése

A kis-világ együtthatót vizsgálva azt találtuk, hogy mind az EU16, EU22 és USA16 sokkal jobban kapcsolt gráf, mint a nekik megfelelő kis-világ háló. A véletlen hálózatokhoz az EU22-es hálózat áll a legközelebb, mivel neki a legkisebb a σ együtthatója. A kumulatív



3.1.4. ábra. Az európai és észak-amerikai SciGRID hálózatok kábelek hosszának inverz valószínűségi eloszlásai. Bal oldali mellék ábra: ugyanezen adatok ábrázolva a $-\ln(p)$ skálán, hogy összevessük a nyújtott exponenciális illesztéssel, ami egyenes vonalnak felelne meg a farok részen. Jobb oldali mellék ábra: valószínűségi eloszlások a kábelek hosszának méterben.

fokszámeloszlásokat tekintve, az US16 és EU22 hálózatok törékenyek, míg az EU16 hálózat a kettő határán helyezkedik el.

Energia hálózatokban a fokszám eloszlásra a következő feltételezéssel szokás élni:

$$p(k) \propto \exp(-\gamma k) . \quad (3.6)$$

Az illesztések eredményeit a 3.2.1a. ábrán mutatjuk be.

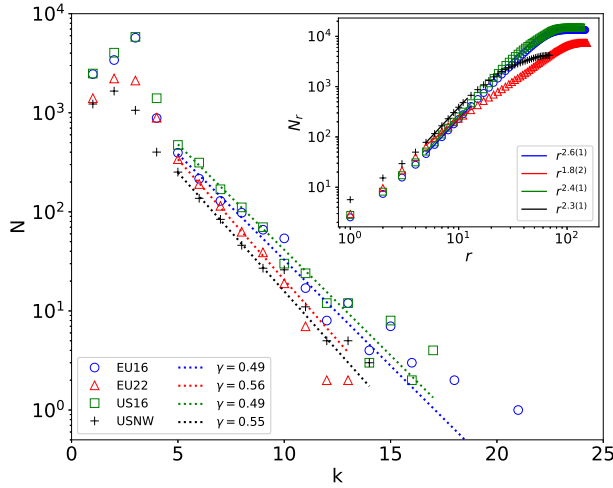
Mindhárom hálózat esetében, az élsúlyokat is figyelembe véve, részletes közösség vizsgálatot végeztünk ugyanolyan felbontási paraméterre a modularitásban, lásd 2.2. egyenletet. Az EU16 és EU22 hálózatok összehasonlítása azután vált lehetővé, hogy a 22-es hálózatban azonosítottuk azokat különböző ID-vel ellátott csomópontokat, amelyek egyes algráfokat kötöttek össze és a valóságban nem külön pontok, hanem csak az adatrepresentáció miatt voltak szétválasztva. Az ezután kapott EU22-es gráf több szempontból is hiányosnak tűnik. Nem látunk nagy fokszámmal rendelkező csomópontokat, illetve magában méretben is különbözik, ahogy az már látszott a 3.1. táblázatból is. A legnagyobb összefüggő komponens csomópontszáma csak $N_{EU22} = 7.411$, ellentétben az EU16 $N_{EU16} = 13.478$ csúcsával, annak ellenére, hogy a grafikus térkép észak-afrikai és közel-keleti csomópontokat is mutat, 3.3.2. ábra. Tehát óvatossá kell lenni az EU22 adatbázis hitelességével kapcsolatban. Elsősorban

azért mutatjuk be, hogy érdekes összehasonlítást tegyünk, és kövessük a legfrissebb európai adatokban bekövetkező topológiai változásokat.

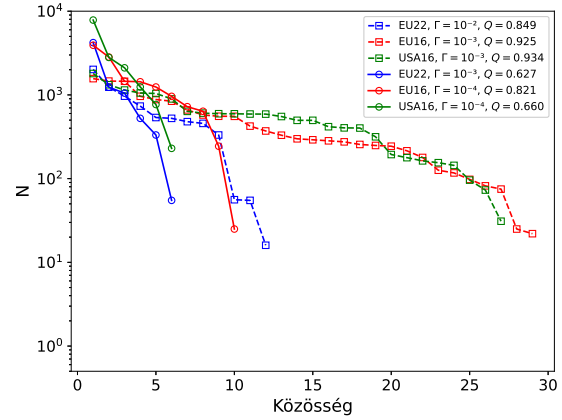
Közösség	Méret (EU22)	$\langle k \rangle$ (EU22)	Méret (EU16)	$\langle k \rangle$ (EU16)	Méret (US16)	$\langle k \rangle$ (US16)
1	924	2,72	4285	2,83	3511	2,79
2	479	2,70	2526	2,66	2829	2,98
3	2016	2,84	1527	2,67	1640	2,72
4	698	3,06	1461	2,72	1484	2,69
5	595	2,94	1455	2,69	1396	2,93
6	1059	2,66	966	2,77	1165	2,58
7	1237	2,68	638	2,57	768	2,97
8	16	2,81	289	2,06	710	2,57
9	332	2,18	277	2,99	673	2,70
10	55	2,74	26	3,07	390	2,84
11	-	-	22	3,31	230	2,43
12	-	-	6	2,66	194	2,69

3.3. táblázat. Közösség méretek és átlagos fokszámok a különböző energia hálózatokra, $\Gamma = 10^{-4}$ felbontás esetén. A méretekre itt az adott közösségben lévő csomópontok számát értjük. Ezek a struktúrák megfelelnek a 3.3.1., 3.3.2., 3.3.3. ábrákon ábrázolt térképeknek.

Az EU22 kevésbé heterogén, mint a többi hálózat, és a legnagyobb modularitást számítva, $\Gamma = 1$ esetén, $Q_{EU22} = 0,93346$ értéket kapunk 92 közösséggel. A vizsgált hálózatok közösségi szerkezetét összefoglaltuk az 3.3. táblázatban. Ahogy láthatjuk, az EU16 és US16 gráfok nagyon hasonló szerkezeteket mutatnak, ugyanannyi közösséggel a megegyező felbontásnál ($\Gamma = 10^{-4}$), és méreteloszlásuk is nagyon hasonló, ahogy azt a 3.2.1b. ábrán is láthatjuk. Az EU22 hálózat azonban eltér a közösségek alacsonyabb számában és gyorsan csökkenő eloszlásukban. Ez megerősíti fent említett megfigyelésünket, hogy az EU22 egy hiányos gráf. Ezen a hálózaton jól látszik a Γ hatása a méreteloszlásra: alacsonyabb Γ esetén gyorsabb csökkenés látható a közösségek számában.



(a) A vizsgált energia-hálózatok alapvető gráfinvariánsai. **Fő ábra:** fokszám-eloszlás, logaritmikus binézéssel. 3.6. egyenlet exponenciális illesztése $5 < k < 15$ esetén hasonló γ értékeket eredményezett. A mellék ábrán a gráfok gráfdimenzió-elemzési eredményeit mutatjuk be. Az 2.2. egyenlet formájú PL illesztések $5 < r < 20$ esetén hasonló d értékeket adnak, kivéve az EU22 esetet, amelyet piros háromszögek ábrázolnak.



(b) közösségméret-eloszlások különböző Γ felbontási paraméterek mellett a hálózatokra.

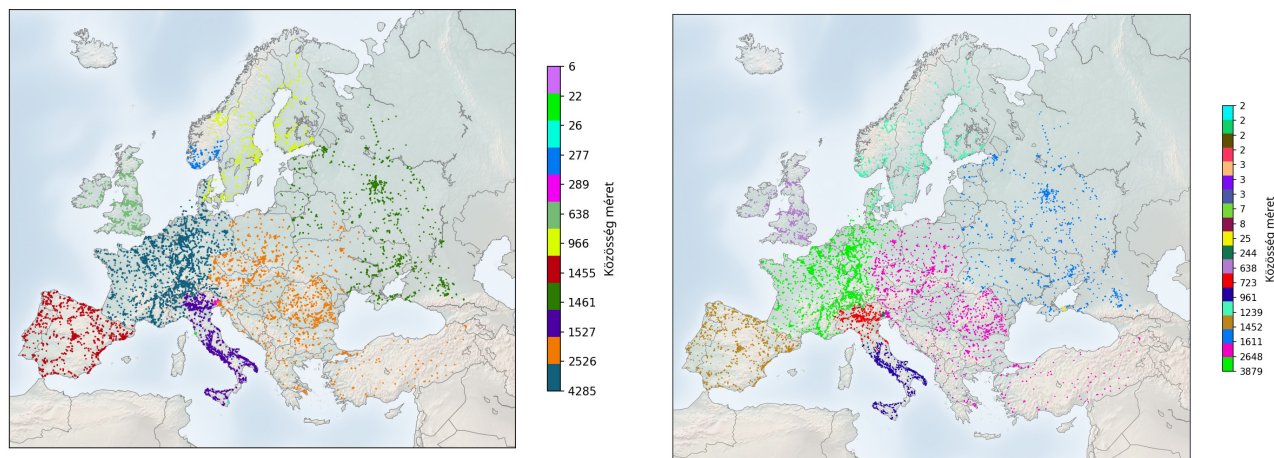
3.2.1. ábra

3.3. A hálózatok topografikus struktúrája

A hálózatok heterogenitására már fény derült bizonyos szinten a statikus, szerkezeti vizsgálatokból is, illetve a közösség elemzésekből. A vizsgálataink ezen részében kíváncsiak voltunk a közösségek és azok topográfiájának kapcsolatára. A 2.2. egyenletben bevezetett felbontási Γ paraméter nagysága befolyásolja a detektált közösségek számát és méretét. Minél kisebb a paraméter, annál finomabb a felbontás, azaz annál kisebb méretű közösségeket is felismer az algoritmus.

Az eredményeket 3.3.1.–3.3.3. ábrákon mutatjuk be. A 2016-os adatbázis legnagyobb összefüggő komponense láthatóan eltérő topológiát mutat akkor, ha a teljes adathalmazt (3.3.1a. ábra) vagy csak a 120 kV feletti éleket vesszük figyelembe (3.3.1b. ábra), noha a két reprezentáció közötti különbség mindössze 50 csomópont eltávolítása az összes 13 478-ból.

A modularitás tényező is kis különbséget mutat, azonban mindkét térképen észrevehető, hogy az Appennini-félsziget több kisebb közösségre van felosztva. Érdekes megjegyezni, hogy amikor magasabb küszöbértéket vezetünk be (pl. az alábbi 220 kV alatti vonalakat kihagyjuk), a hálózat teljesen szétesik, és "igazi" közösségekkel számolva, $\Gamma = 1$, a végeredmény modularitás együtthatója nem lehet magasabb, mint $Q_{\text{EU16-szétesett}} = 0,2499$ összesen 344 közösséggel.



(a) Az EU16 hálózat összes csomópontja 12 közösségbe osztva, figyelembe véve az admittanciák általi súlyozást. A hálózat legnagyobb összefüggő részét ábrázoltuk, amely 13 478 csúcsot tartalmaz 18 393 éllel összekötve, a modularitási együtthatót $Q \approx 0,795$ körül maximalizálva.

(b) Az EU16-os hálózat legnagyobb összefüggő komponensének csomópontjai. Kizárva a 120 kV alatti éleket és $\Gamma = 10^{-4}$ felbontást használva. Figyelembe véve az admittancia súlyokat, a gráfot 19 közösségbe oszthatjuk. A legnagyobb összefüggő komponens ekkor 13 420 csúcsból és 17 749 élből áll, a modularitási együtthatót $Q \approx 0,785$ körül maximalizálva.

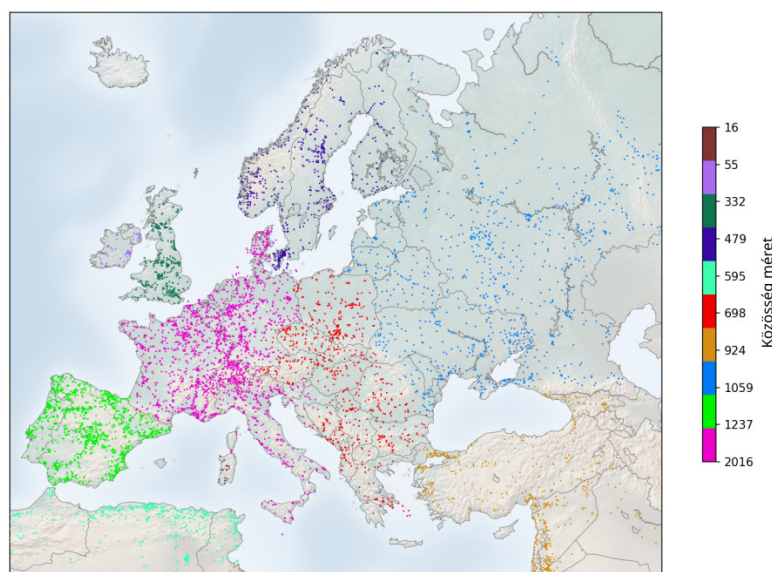
3.3.1. ábra

A 3.3.1a. ábrán könnyen azonosítható két periférikus tartománya a hálózatnak: a Brit-szigetek és az Ibériai-félsziget. Az első esetben három HV egyen irányú vonalból áll a vágási tartomány¹, míg a második esetben négy AC vonal (220 kV és 400 kV között). Az Észak-Olaszország felosztása a La Spezia - Vignole - Baggio 400 kV kapcsolaton keresztül történik, ami fontos észak-déli összeköttetés. Az dél-norvég közösség főként 330 kV vonalakkal áll, ellentétben a környező területek 400 kV alrendszerével. Végül a történelem nyomai is felismerhetők, főképp Közép-Kelet-Európában a vasfüggöny nyomvonalaként vehető ki. Elkülöníthetők az egykori Szovjetunió IPS/UPS (Integrated Power System, Unified Power System) rendszerei is.

A 3.3.1b. ábrán hasonló eredmények láthatók a Brit-szigeteken, az Ibériai-félszigeten és a Közép-Kelet-Európa és Nyugat-Európa közötti elválasztásban. A megjegyzendő különbség az, hogy Olaszország és szomszédos országai közötti vágási pont politikai határok szerint alakul ki ebben az esetben. Dánia felosztása a Ferslev és Jardelund közötti párhuzamos 400 kV élek mentén történik. Végül az egykori Szovjet államok el vannak választva az Európa többi részétől a különböző átviteli feszültségszintek mentén, amelyek 330 kV az egyik régióban és 220 kV és 400 kV a másik régióban.

A közösség detektálás részben eltérő eredményeket mutat a 3.3.2. ábrán, az EU22 hálózat esetében, ahol a HVDC (nagyfeszültségű egyenáramú) vonalak hatása hangsúlyosabb.

¹ Azon élek halmaza, amely az adott tartományt/közösséget a hálózat egészéhez kapcsolják.

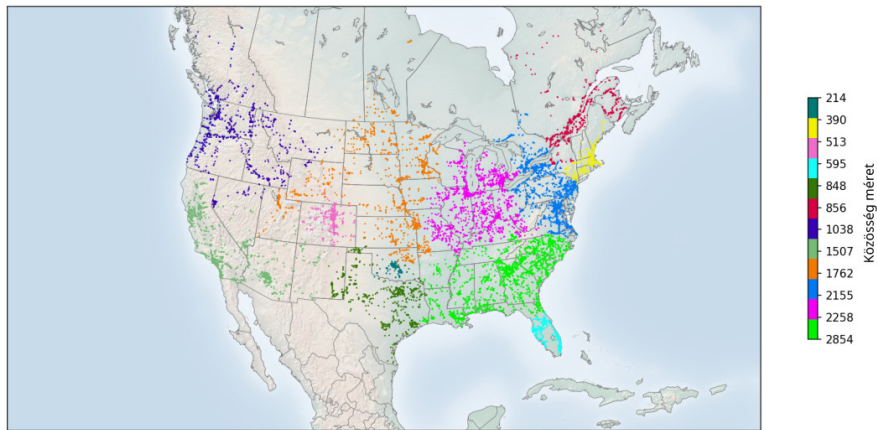


3.3.2. ábra. Az EU22-es hálózat legnagyobb összefüggő részének 10 közösségbe osztva, figyelembe véve az admittanciák általi súlyokat. A gráf legnagyobb komponense 7411 csúcsból és 10 912 élből áll, a modularitási együtthatót $Q \approx 0,854$ körül maximalizálva.

Ez egyértelműen látszik az Írország és Nagy-Britannia közötti vonalakon, Szardínia szigetén, és a Dél-skandináv régióban. Egyéb könnyen felismerhető vágási pontok láthatók Törökország nyugati határainál és Európa és Afrika között.

Az USA áramhálózatával kapcsolatban (a 3.3.3. ábra) hasonló következtetések vonhatók le. Általában fel lehet ismerni a Kelet-i, Nyugat-i és a Texas-i összekapcsolás körvonalait, de mindkét nagy terület több alrészre oszlik. A Nyugat-i tartomány északi és déli részeit 500 kV vonalak vágási pontja mentén osztódik fel, ahol a Colorado állam, amelynek nincs jelentős összekapcsolása más tartományokkal, külön közösséget alkot. Az Kelet-i tartomány három legnagyobb közössége hasonlít a domináns átviteli feszültségszintek tartományaira: 345 kV az északnyugati régióban, 161 kV, 230 kV és 500 kV keveréke a többi régióban, amelyek közül az északkeleti és floridai a legnagyobb. A térkép érdekes sajátossága, hogy a narancssárga közösség mind az keleti és nyugati részeket magába foglalja; ennek a közösségnek a gerince egy 230 kV topológiai struktúra.

Összefoglalva, bár a közösségek detektálása segít megérteni a topológiát jellemző egyedi mintákat és a heterogenitást, azonban a dinamika és a hálózat fizikai tulajdonságainak ismerete, az áramszolgáltatási rendszer tervezése és üzemeltetése terén szerzett szakértelem, illetve a történelmi események is jelentősen hozzájárulhat az elemzés narratívájához.



3.3.3. ábra. Az USA16-os hálózat legnagyobb összefüggő része 10 közösségbe osztva, figyelembe véve az admittanciák általi súlyokat. A gráf legnagyobb komponense 14 990 csúcsból és 20 880 élből áll, a modularitási együtthatót $Q \approx 0.859$ körül maximalizálva $\Gamma = 1 \times 10^{-4}$ felbontással.

4. fejezet

Topologikus változások hatása elektromos hálózatokra. Szinkronizációs és kaszkád szimulációk eredményei.

Az energiahálózatok a világ egyik legnagyobb ember által alkotott szerkezetei, melyek a növekvő energiaigényeknek, illetve a megjelenő új technológiáknak hála folyamatosan fejlődik. Az 3. fejezetben részletesen tanulmányoztuk az EU16, EU22 és US16 nagyfeszültségű elektromos hálózatokat gráfelmélet segítségével. Megmutattuk strukturális tulajdonságait és heterogenitását paraméterek és komponensek tekintetében. Felmerül a kérdés: hogyan érdemes a hálózatot fejleszteni, új elemeket hozzájuk adni úgy, hogy a szinkronizáció a hálózaton belül, melyet a 2.2. egyenlettel követhetünk nyomon, illetve a kaszkád hibák és frekvencia szórások eloszlásaival tudunk mérni, javuljon, vagy legalábbis a szórások ne növekedjenek. Ez releváns kérdés, már csak akkor is, ha alkalmazások tekintetében a megújuló energiaforrások (pl. szél-, naperőművek) hálózatba csatlakoztatására gondolunk.

A legegyszerűbb gondolat az lehet, hogy keressük meg a gráfok leggyengébb szerkezeti pontjai és erősítsük ezeket. A továbbiakban két módszert mutatunk be ilyen irányú topologikus módosításra. Az egyik módszer, hidak hálózathoz adása, mely egy statikus módszer, a gráf közösség elemzésére alapoz. A másik, kerülőutak ("bypass") kialakítása, mely a szimulációk eredményére, a lokális szinkronizáció kiértékelésére alapoz, ezáltal egy dinamikai módszer.

4.1. Szinkronizáció és annak javítása topologikus változtatásokkal

4.1.1. Híd kapcsolatok közösségek között

A hálózatelméletben a híd egy olyan kapcsolat vagy él, amely különböző közösségek vagy hálózatkomponensek csomópontjait köti össze. A hidak kritikus szerepet játszanak, hisz ezek tartják össze a hálózat legösszekötöttebb komponenseit és biztosítják az információ-dinamika áramlását különböző közösségek között. A hidak eltávolítása a hálózat széteséséhez vezethet, izolált komponensekre bontva azt, hasonlóan szinkronizációs dinamika során keletkező szigetképződéshez vagy Griffiths-fázisokhoz. Az EU16 hálózat esetén 1250 hidat választottunk ki az összes valós közösséget összekötő élük közül, azaz olyan Louvain algoritmussal, ahol a Q modularitást $\Gamma = 1$ -re maximalizáltuk. Leiden algoritmussal nem találtunk jobb eredményt, a gráfot 449 közösségre tudtuk bontani, amelyeket 1281 híd köt össze. Az EU22 hálózat esetében $\Gamma = 1$ -re 94 közösséget találtunk, amelyeket 507 híd köt össze. A módszer a stabilitás növelésére egyszerű: megkettőztük a hidakat, míg ellentétes hatás elérésére eltávolítjuk ezeket, aminek eredményeképp szigetképződési hatás lép fel és ezekben a régiókban a kaszkád kimaradások kevésbé jelentkeztek. Annak érdekében, hogy elkerüljük a szétesett hálózattal való munkát, véletlenszerűen távolítottuk el a hidakat, kezdve a legnagyobb közösségekkel, és a hidak eltávolítását addig folytattuk, amíg a hálózat még mindig összekapcsoltnak bizonyult.



4.1.1. ábra. Az itt látható (piros) csomópontok, amelyeket a kerülő algoritmussal választottunk ki (lásd 4.1.2 alfejezetet), és a közösségek közötti (fekete) hídéleken találhatók. Ezek a híd módszerrel kiválasztott csomópontok 10% -át képviselik.

4.1.2. Kerülő utak (bypass) létrehozása lokális szinkronizáció alapján

A második módszer a hálózat dinamikus stabilitási elemzését implikálja. A gyenge csomópontokat azonosítani tudjuk a *lokális rendparaméter* segítségével:

$$r_i(t) = \frac{1}{N_{i.szosz.}} \left| \sum_j^{N_{i.szosz.}} A_{ij} e^{i\theta_j(t)} \right|. \quad (4.1)$$

Ez a módszer pontosabb, mint csupán a nagy frekvenciaszórású csomópontok azonosítása [43], mivel ez egy sokaság átlagon alapszik és figyelembe veszi a szomszédos csomópontokkal való kölcsönhatást.

Miután az áramkör gyenge csomópontjait azonosítottuk, javaslatot teszünk a stabilitás javítására úgy, hogy extra éleket, úgynevezett "kerülő" kapcsolatokat hozunk létre, amelyek összekapcsolják a hálózat kritikus pontjait, így a gráfot ellenállóbbá teszik. Míg többféle módszerrel érhető el ez, mi az egyik legegyszerűbb elgondolást választottuk: úgynevezett *háromszögek* létrehozását vagy él kettőzést a gyenge szomszédok között. Mindkét módszert alkalmazzák a valós villamosenergia-hálózatok fejlesztésében az ellátás redundanciájának növelése érdekében.

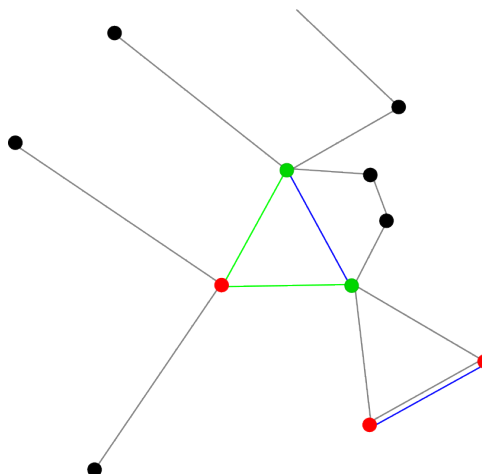
Gráfelméleti nyelven egy *háromszög* három olyan csomópont, amelyek mindegyikét éllek kötik a másik kettőhöz. A háromszögeket a globális klaszterezettségi együttható kiszámítására használják, amely a hálózat ellenállóságát jellemzi

$$C = \frac{3 \times \text{háromszögek száma}}{\text{összes tripllett száma}}, \quad (4.2)$$

Az egyenlet matematikai megfelelője a 2.15. kifejezés. Ilyen struktúrák számának növelése a gráf ellenállóságát növeli.

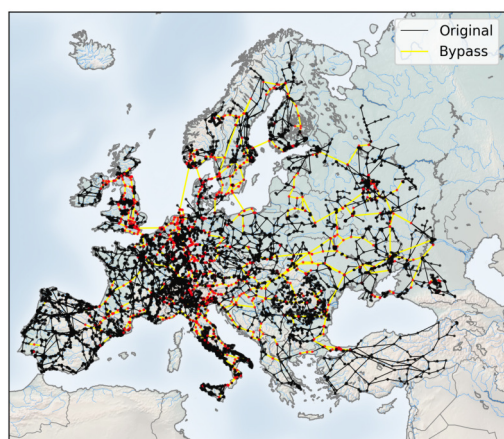
Az 4.1. egyenlet segítségével a csomópontokat különböző szinkronizációs kategóriákba soroljuk, és a legrosszabbul szinkronizált csoport kiválasztásával végrehajtunk egy úgynevezett "kerülő algoritmust". Az algoritmus a következőt teszi: végigmegy a legrosszabbul szinkronizált csomópontok listáján. Minden gyenge csomópontnál ellenőrzi annak szomszédait. Ha a szomszédok között van egy gyenge csomópont, megkettőzi a kapcsolatot közöttük. Az újonnan létrehozott kapcsolat öröklíti a megkettőzött él eredeti paramétereit. Ha a szomszédtságban nincs más gyenge csomópont, kiválasztja a két legközelebbi szomszédot, és új kapcsolatot hoz létre közöttük, létrehozva egy háromszöget. Az új él a kiválasztott gyenge csomópontokhoz csatlakozó éllek átlagos paramétereit kapja.

Ezek az újonnan hozzáadott kapcsolatokról azt reméljük, hogy növelik a hálózat ellenállóságát, mivel ha az egyik útvonalat elszakad, az energiatranszferre létezni fognak alternatív utak a gyenge csomópontok körül, és így a túlterhelések és vonalhibák elkerülhetők lesznek. Másrészt előfordulhat, hogy a megnövelt összekapcsoltság negatív hatást fejt ki, és nagyobb

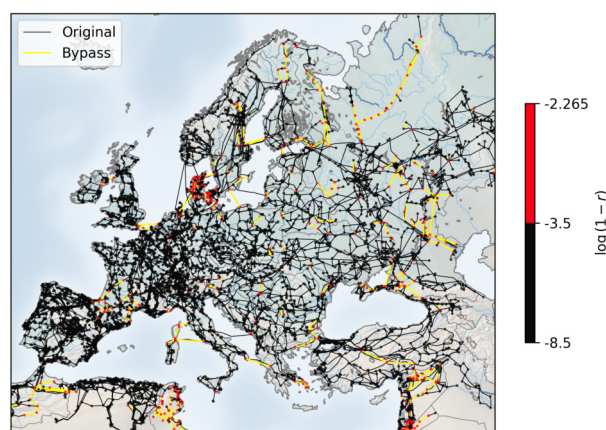


4.1.2. ábra. A kerülő algoritmus szemléltetése egy egyszerű példával. A rosszul szinkronizált csomópontokat pirossal színeztük, amelyeket a lokális Kuramoto rendparaméter r_i alapján kaptunk a termalizációs fázis végén. A zöld csomópontok a legközelebbi két szomszédot jelentik, akik nem gyengék szinkronizációs szempontból, és a leggyengébb csomópontokhoz kapcsolódnak. A piros (leggyengébb) csomópontokon keresztül végrehajtjuk a "kerülő algoritmust": vagy háromszöget hozunk létre a két legközelebbi nem gyenge csomópont segítségével (zöld háromszög, egy kék éllel), ha a szomszédságban nincs más gyenge csomópont. Ha egymás mellett két gyenge csomópont található, megkettőzzük a közöttük levő élet (szürke él megkettőzve kékkel). A kék élek a gráfhoz újonnan hozzáadott kapcsolatokat jelölik.

kaszkádhoz vezet egyes paraméter tartományokban. Szimulációs eredmények alapján ez általában alacsonyabb K csatlóási vagy nagyobb α csillapítási tényező értékeknél fordul elő, lásd a 4.2.3a ábrát.



(a) EU16



(b) EU22

4.1.3. ábra. A kerülő (bypass) algoritmus eredményei, a hozzáadott új élek sárga vonalakkal jelölve, ahol a lokális szinkronizáció, r_i alacsony értékeket mutat a (2.1.) egyenlet megoldása után. r_i a színekkel van kódolva. A piros pontok a leggyengébb csomópontok.

A kerülő algoritmus eredményeit a 4.1.3. ábrán mutatjuk be. A helyi szinkronizáció binjeinek megfelelően beállítva egy küszöbértéket, meghatározhatjuk, hány új kapcsolatot

adunk hozzá a hálózathoz. Ez a módszer összehasonlíthatóvá teszi az algoritmust a híd kapcsolatok megkettőzésének módszerével, mivel úgy parametrizálhatjuk a binek határait, hogy annyi elkerülő utat kapjunk, mint megkettőzött híd kapcsolást.

4.2. Topologikus változtatások összevetése. Frusztrált szinkronizáció és kiméra állapotok.

A 4.1. alfejezetben bemutatunk két módszert szinkronizáció javítására. Hogy illusztráljuk ezek hatékonyságát és össze vethessük őket, szimulációkat futtattunk az eredeti, módosítatlan hálózatra, a fentebb javasolt módon kiegészítettre (Bp, Br), illetve olyan hálózatra, ahol hídkapcsolásokkal azonos számú véletlenszerűen kiválasztott éleket adtunk a hálózathoz (Ran), vagy távolítottunk el (Ran-), vagy a híd éleket éppen eltávolítottuk annyira, hogy a gráf még kapcsolt maradjon (Br-). Ezen módosítások által előidézett változásokat vizsgáljuk a szinkronizációban (R), frekvencia szórásban (Ω) és kaszkád-méret eloszlásokban (N).

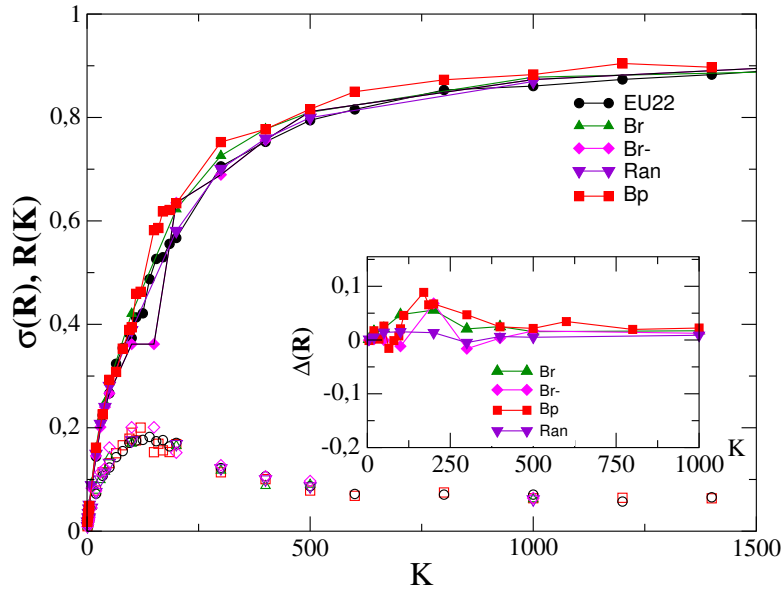
A hálózatok heterogenitása ismert arról, hogy okozhat úgynevezett frusztrált szinkronizációt [44, 45], ami azt jelenti, hogy egy adott paraméter kiosztás esetén a hálózat bizonyos tartományai szinkronizálódnak, míg mások nem. Ez kiméra állapotok [46–48] megjelenését eredményezi. A kiméra állapotok egyszerűen fogalmazva koherens és inkoherens dinamika koexistenciáját jelenti, azaz, esetünkben, míg a hálózat egésze valamilyen mértékű szinkronizációt mutat, addig lesznek közösségek, melyek ennél az átlagnál jobban vagy kevésbé szinkronizáltak. Az alábbi eredmények megmutatják, hogy ez valóban megtörténik, kiszámítva a $R(t \rightarrow \infty)$ és a variancia $\sigma(R)$ értékét a korábban meghatározott közösségekben.

A $i = 1, \dots, 12$ közösség felbontást használtuk, és meghatároztuk $R_i(t \rightarrow \infty)$ értékét, majd átlagoltuk a numerikus megoldást 100 független saját frekvenciaváltási mintával és $1200 < t \leq t_{\max} = 2000$ időlépéssel az egyensúlyi állapotban, miután egy teljes fázis szinkronizált állapotból kezdtünk.

Ahogy a 4.2.1. ábra mutatja, $R_i(t \rightarrow \infty)$ értékei különböző módon nőnek K -val a különböző közösségekben, és eltérő fluktuációs csúcsokat mutatnak, amit a mellék ábrán láthatunk. Ez azt jelenti, hogy egy adott K -val néhány közösség legalább részben szinkronizált, míg mások nem. Fontos megjegyezni, hogy az EU16 hálózat esetében a 3, 6, 7 közösségekben a Kuramoto rendparaméter közel marad 1-hez, és nincs csúcs a $\sigma(R)$ -ben [49]. Ennek az oka, hogy csak néhány csomópont található a közösségekben (lásd a 3.2. táblázatot), ami igen kicsi K csatolási állandóval szinkronizálja őket.

Másrészről, az EU22 gráf közösségei esetében a 1, 2 közösségek nagyobb K -val szinkronizálódnak, mint a teljes rendszer, tehát az egyszerű méret függőségi törvény, ami érvényes a független véges gráfokra [50], nem tűnik igaznak. Az EU22 gráf nem triviális topológiai tulajdonságai okozzák, hogy a török és az északi régiók kevésbé szinkronizálódnak egy adott

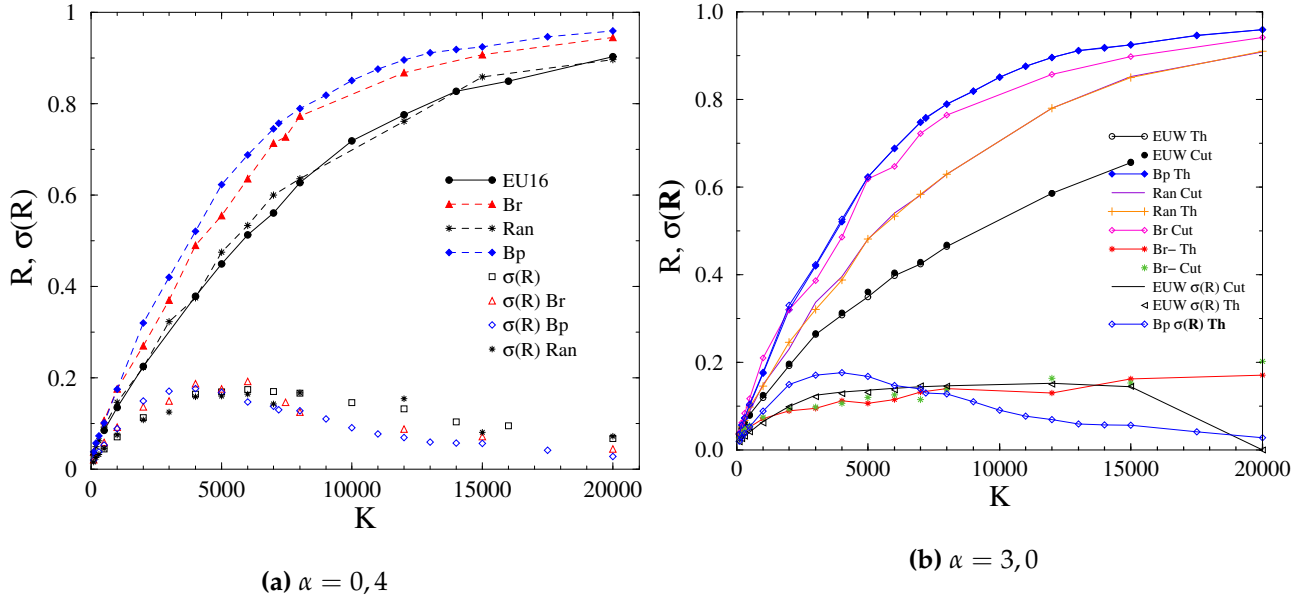
K -val. Ezt ugyanúgy tapasztaltuk, amikor nagyobb csillapítási tényezőt, $\alpha = 3$, használtunk a Kuramoto egyenlet megoldásában.



4.2.1. ábra. $\alpha = 0,4$ -nál az EU22 hálózat közösségek szerinti R függése különböző K -k esetében különböző fázis szinkronizációt mutat, ami kiméra állapotoknak felel meg. A vastag fekete görbe az teljes rendszer szinkronizációját jelzi, ami a leglassabban növekszik a növekvő K -val. A többi vonal véletlenszerűen kibővített (Ran), híddal (Br) és elkerülő utakkal (Bp) kiegészített, illetve csonkolt (Br-) hálózatoknak felelnek meg. Mellék ábra: Ugyanazoknak az adatoknak a fluktuációi, különböző szinkronizációs pontokkal. A vastag fekete görbe, amely a teljes rendszert képviseli. A 2. közösség, ami az északi (Norvégia, Svédország, Finnország) hálózatot jelképezi.

4.2.1. A 2016-os európai hálózat

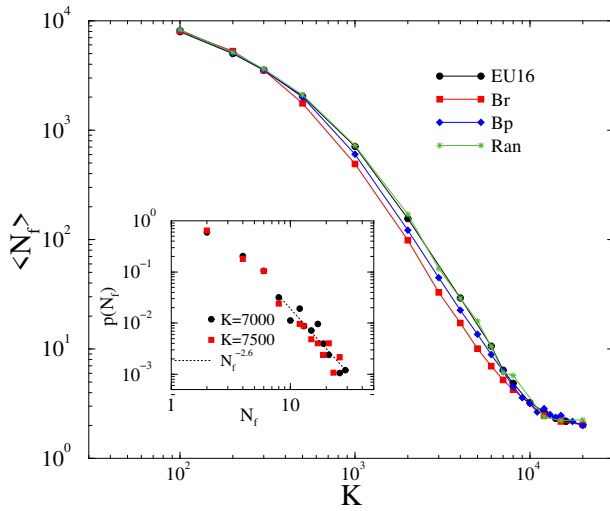
Ahogy a 4.2.2a. ábrán is látható, a Kuramoto rendparaméter, R , (2.3. egyenlet) lassan nő nulláról $\simeq 1$ -ig a súlyozott, véletlenszerűen kiegészített, hídlekkel, kerülő utakkal kiegészített és véletlenszerű élek eltávolításának eseteiben. A legmagasabb szinkronizációs értékek körülbelül $K_c \simeq 6000$ körül érhetők el az eredeti, súlyozott esetben, ahol a fluktuációk, $\sigma(R)$, csúcsot mutatnak, jelölve az kritikus önszerveződés (SOC) állapotát. A legjobb növekedést R -ben a kerülő utak hozzáadása esetén látjuk (lásd 4.1.2. alfejezetet). Azonban a híd élekkel megerősített hálózat is számottevő növekedést mutat R -ben K_c közelében, körülbelül $\simeq 50\%$ -t.



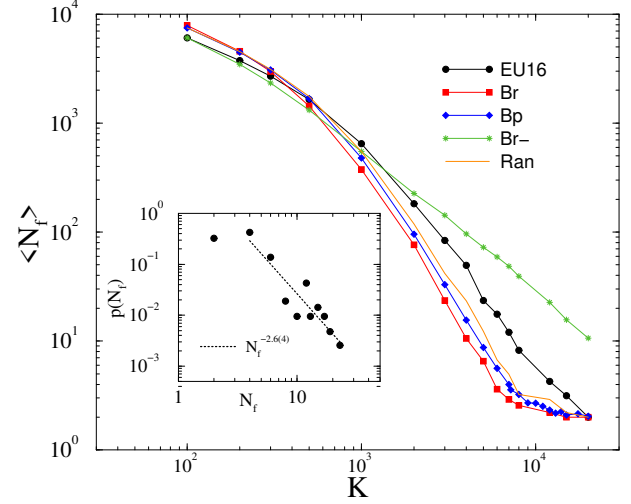
4.2.2. ábra. Dinamikus szimulációk szinkronizációs eredményeinek összehasonlítása a termalizációs (Th) fázis végén az eredeti, véletlenszerűen kibővített (Ran), híddal (Br) és elkerülő utakkal (Bp) kiegészített, illetve csonkolt (Br-) EU16 hálózatok esetén. $\alpha = 3,0$ esetén ábrázoltuk a vonal vágási (Cut) fázist is

Nem találtunk ilyen javulást a globális frekvencia szórás, Ω , (2.4. egyenlet) esetében, ahogy azt a 4.2.4. ábrán is láthatjuk. Az eltérések kicsik a módosított hálózatok és az eredeti között az egész K paramétertartományban. Ez viszont nem jelenti azt, hogy helyi javulások nem lehetségesek, vagyis a nullához közeli középponttal rendelkező Gauss-eloszlások szétválhatnak, több elkülönülő csúcsú eloszlásra. Azonban ezt a 2.4. egyenlet nem tudja kimutatni.

Az átlagos kaszkádméretek összehasonlítását is elvégeztük $T = 0.99$ esetén, és $\simeq 50\%$ -al kisebb kieséseket találtunk a $K_c \simeq 6000$ közelében az eredeti és a hidak duplázásával rendelkező esetek között, ahogyan azt a 4.2.3a. ábrán láthatjuk. Itt $t_{max} = 1000$ időlépést használtunk a kaszkádok megfigyelésének maximális időtartamához a kezdeti véletlen vonalvágások és inicializálás után. A híddal rendelkező eset szolgáltatja a legkisebb kaszkádméreteket, de az kerülő kapcsolatokkal rendelkező eset is javítja az eredményeket az eredeti hálózathoz képest a $20 < K < 20.000$ tartományban. Azonban messze a szinkronizációs átmenet tartományától, azaz $K < 20$ vagy $K > 20.000$ esetén nincs lényeges különbség. Valójában az eredeti hálózatok teljesítenek jobban kis globális kapcsolásoknál. Ez a Braess paradoxon [7, 8], amely még látványosabb $\alpha = 3$ esetén a 4.2.3b. ábrán. A valós energia-hálózatok a SOC mechanizmus miatt a szinkronizációs átmenet közelében működnek, K_c környékén, ahol ez a jelenség úgy tűnik, nem fordul elő.



(a) $\alpha = 0,4$. Mellék ábra: PDF vonalvágásokról $T = 0,99$, $K = 7000$ (körök) és $K = 7500$ (négyzetek), szaggatott vonal: PL illeszkedés $N_f > 10$ esetén.



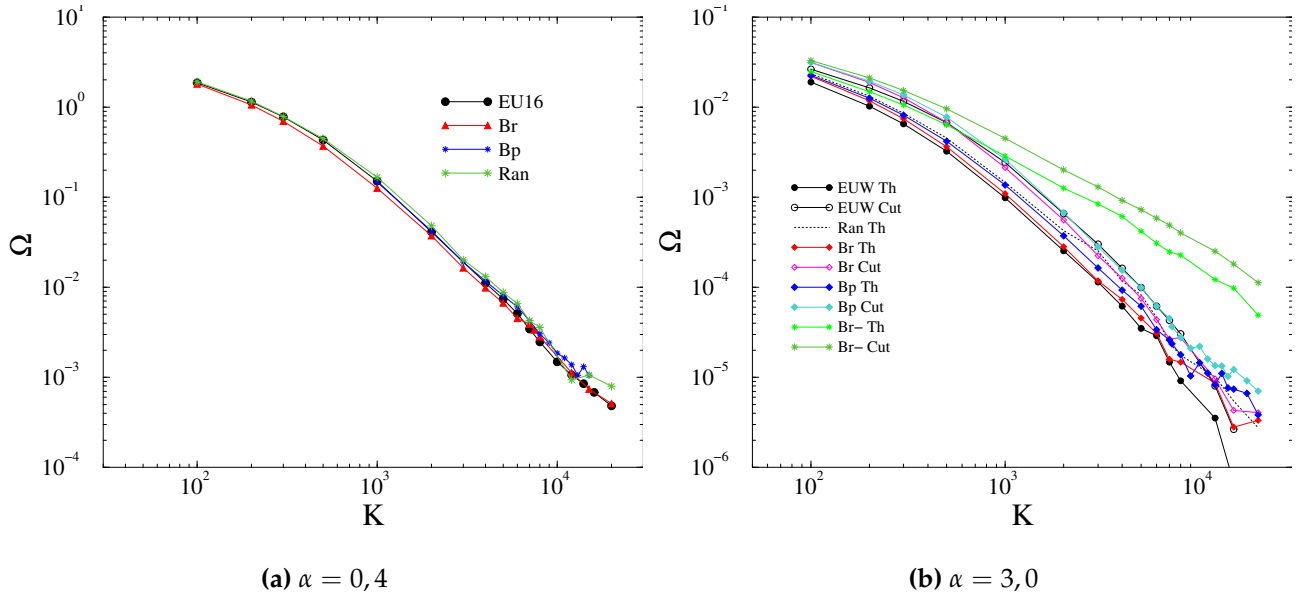
(b) $\alpha = 3,0$. Mellék ábra: PDF vonalvágásokról $T = 0,99$, $K = 12000$ (körök), szaggatott vonal: PL illeszkedés $N_f > 3$ esetén.

4.2.3. ábra. Dinamikus szimuláció eredmények összehasonlítása az átlagos kaszkádméretekre, $\langle N_f \rangle$, $T = 0,99$ -nél az eredeti, véletlenszerűen kibővített (Ran), híddal (Br) és elkerülő utakkal (Bp) kiegészített, illetve csonkolt (Br-) EU16 hálózatok esetén, $\alpha = 0,4$ használatával. Megjegyzés: Vonalak kereszteződéseit láthatjuk kis és nagy K -k esetén, amelyek a Braess paradoxonnak felelnek meg.

A N_f valószínűségi eloszlásait is megmutatjuk a 4.2.3a. ábra betétjében, kicsit a K_c fölött, $K = 7000$ és $K = 7500$ esetén, ahol nehéz fark eloszlásokat lehet megfigyelni, hasonlóan egy súlyozatlan hálózathoz [1]. A farkakat PL-el illesztettük $N_f > 100$ esetén, $\tau_t \simeq 2,6$ lecsengési kitevővel.

Ezen megállapításokat tovább vizsgáltuk $\alpha = 3,0$ esetén, ami nagyobb disszipációt jelent, vagy azonnali visszacsatolási mechanizmusoknak felel meg. A 4.2.3b. ábrán a hálózatbővítések hatásait láthatjuk, amelyek sokkal hangsúlyosabbak, mint $\alpha = 0,4$ esetén. Ismét az elkerülő algoritmussal nyert hálózat nyújtja a legjobb teljesítményt a szinkronizáció stabilitása szempontjából, a termalizáció után. A kaszkádméret eloszlások nehéz farkakkal rendelkeznek $K \simeq K_c = 12.000$ -nél $T = 0,99$ esetén, amelyeket PL-vel illesztettünk $N_f > 3$ esetén, $\tau_t \simeq 2,6$ kitevővel, hasonlóan $\alpha = 0,4$ -hez. Az eredeti hálózatban némi javulást láthatunk, amit az elszigetelési hatásokra vezethetünk vissza.

A frekvenciaszórási eredményekben is láthatunk javulást a 4.2.4b. ábrán, kivéve a híd eltávolítás esetét. A legjobb globális Ω -kat a híd hozzáadásával lehet elérni, amit az elkerülési algoritmus követ. Nem találunk javulást a kaszkádokat követően, a bővített hálózatok nagyobb Ω -kat mutatnak.



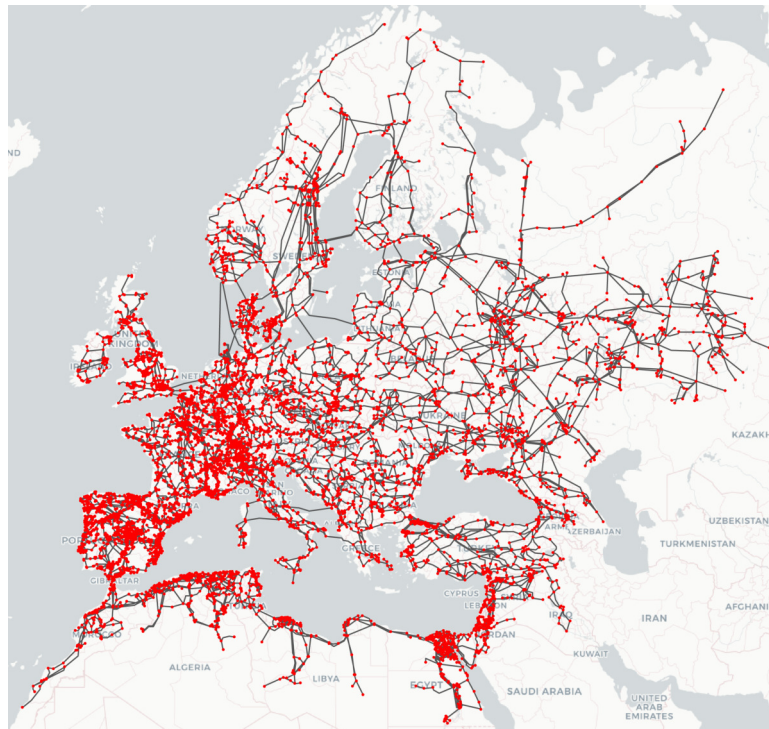
4.2.4. ábra. Összehasonlítás az Ω numerikus megoldásai között a termalizáció végén (Th) és a kaszkád meghibásodások után (Cut) az EU16-os hálózaton, véletlenszerűen kibővített verziók (Ran1, Ran2), híddal kiegészített (Br), elkerüléssel nyert (Bp) és hidak által csonkított (Br-) EU16 hálózatoknál, különböző α használatával. A hidak eltávolítása növeli a globális frekvenciaszórást, minden egyéb megoldás pedig csökkenti azt.

Az átlagos kaszkádméretek azonban sokat javíthatók az elkerülésekkel vagy hidak hozzáadásával, ahogyan azt a 4.2.3b. ábrán láthatjuk. A hidak tűnnek a leghatékonyabbnak $\langle N_f \rangle$ szempontjából amelyet az kerülő algoritmus követ a $30 < K < 20.000$ tartományban. Csonkított hálózatok esetén viszonylag nagy kaszkádok jelennek meg.

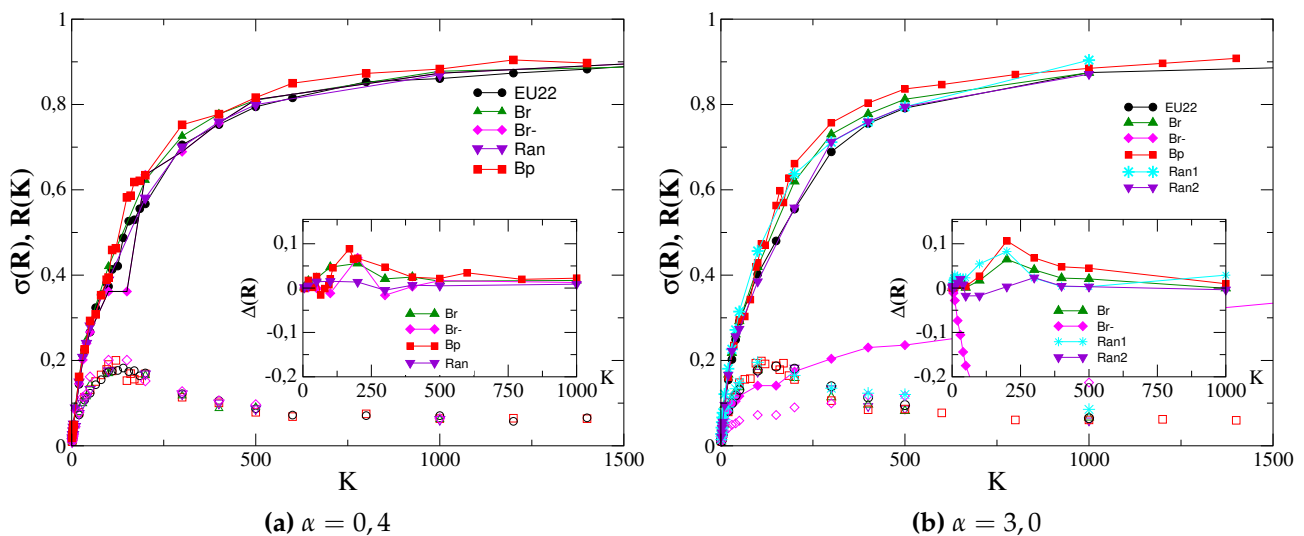
4.2.2. A 2022-es európai hálózat

A eredmények megbízhatóságának tesztelése érdekében megismételjük a 4.2.1. alfejezetben elvégzett elemzést az EU22 hálózat esetében. Az EU22-es hálózat eredeti gráfja valós térképen elhelyezve a következőképpen néz ki:

Mivel az EU22 hálózat kisebb, mint az EU16, ezért kisebbek a különbségek az $R(K)$ eredmények között, ezért bemutatjuk $R(K)_{mod.} - R(K)_{org.}$ -t az 4.2.6 ábra betét ábráin. Ismét a kerülő utakkal rendelkező hálózat a legstabilabb, körülbelül 10%-kal növekedik a szinkronizáció a kritikus pont, $K_c \simeq 125$, közelében. A szinkronizációs átmeneteket a grafikon $\sigma(R)$ csúcsai alapján lehet leolvasni, és úgy tűnik, hogy nem ezek függnek a hálózat verziójától. A kerülő utakkal ellátott hálózat eredményét a híddal ellátott eset követi, ahol a legnagyobb növekedés 5% $R(K_c)_{mod.}$ -nál, míg a véletlenszerű él hozzáadása alig nyújt bármilyen javulást. A közösségek közötti hidak eltávolításával, a megmaradó hálózat nagyon instabil lesz, ahogyan azt a világos és sötét zöld csillagok jelzik.



4.2.5. ábra. Az EU22-es eredeti hálózat a térképen. A piros pontok a csomópontok (generátorok és/vagy fogyasztók), a fekete vonalak az élek.

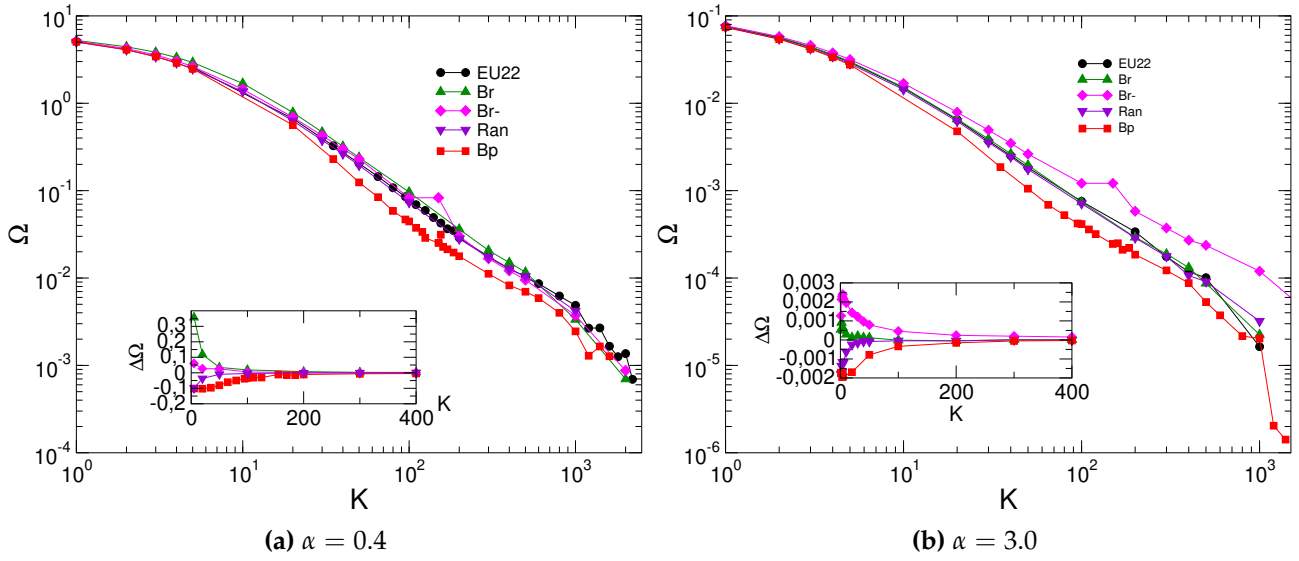


4.2.6. ábra. Numerikus eredmények összehasonlítása R és $\sigma(R)$ szempontjából a termalizáció végén az eredeti (EU22), véletlenszerűen kibővített (Ran), híddal (Br) és elkerülő utakkal (Bp) kiegészített, illetve csonkolt (Ran-, Br-) EU22 hálózatoknál, különböző α használatával. A betét ábra a R eltéréseket mutatja különböző hálózatokban az eredetihez képest. A javulás a legnagyobb a szinkronizációs átmenet közelében K -ban az elkerülő utak esetében.

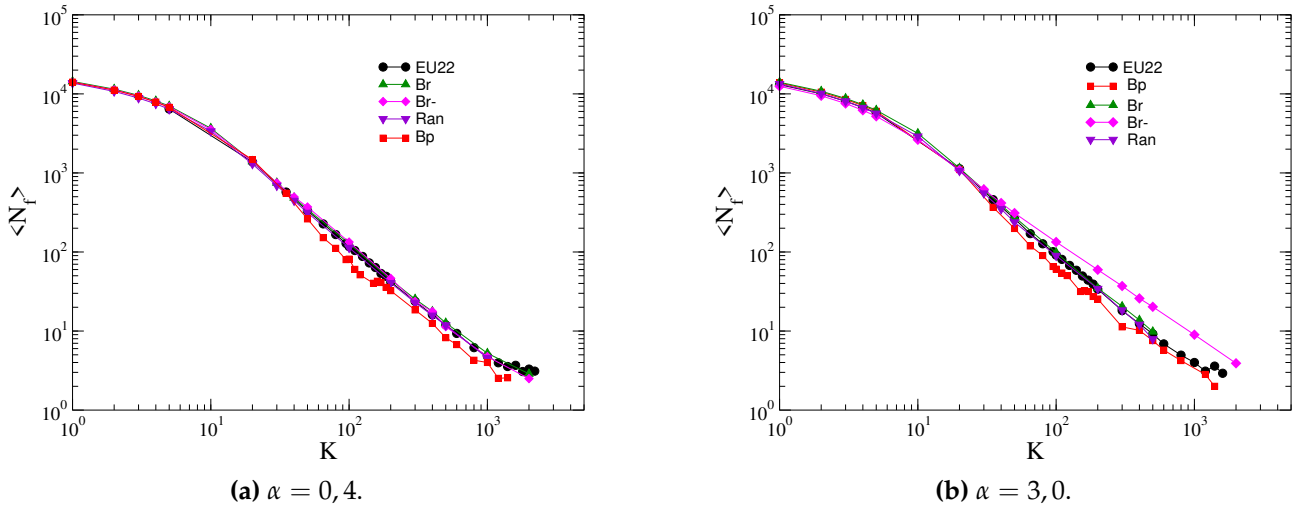
A kerülő utakkal ellátott hálózat előnye a leginkább $\alpha = 3,0$ esetében látható (4.2.6b ábra). A frekvencia eltérések kicsik maradnak, és a híd eltávolítások növelik ezek szórását.

Az átlagos kaszkád méretek hasonló tendenciákat mutatnak, mint az EU16 hálózatok esetében, de most az elkerülő utakkal ellátott hálózat a legjobb és a híd eltávolított változat

a legrosszabb, ahogyan azt az 4.2.8b. ábrán is láthatjuk.

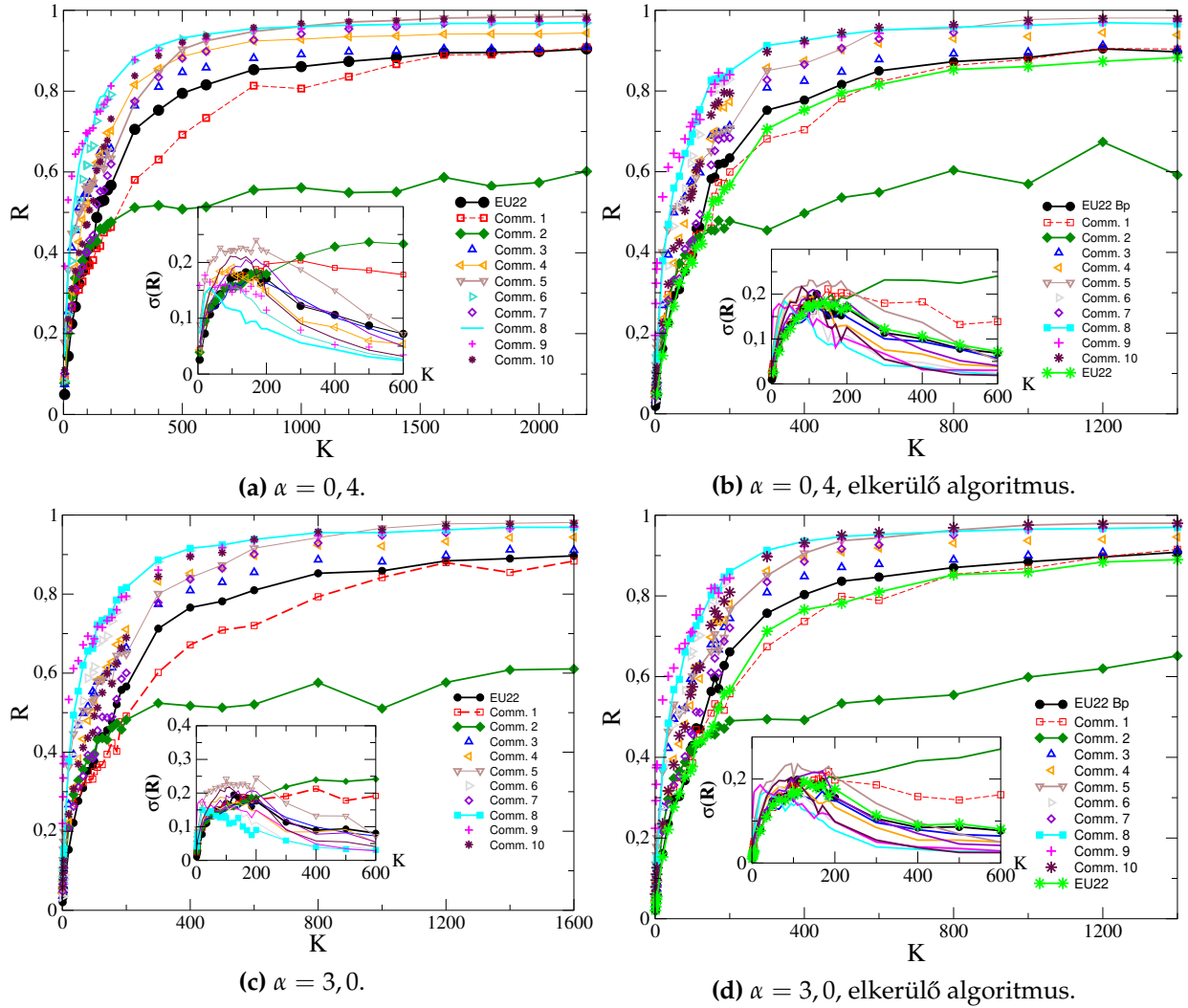


4.2.7. ábra. Összehasonlítás az Ω numerikus megoldásai között a termalizáció végén és a kaszkád meghibásodások után az eredeti, az eredeti, véletlenszerűen kibővített (Ran), híddal (Br) és elkerülő utakkal (Bp) kiegészített, illetve csonkolt (Ran-, Br-) EU22 hálózatokon, különböző α használatával. A hidak eltávolítása növeli a globális frekvenciaszórást, minden egyéb megoldás pedig csökkenti azt.



4.2.8. ábra. Dinamikus szimulációs eredmények az átlagos kaszkád méretek, $\langle N_f \rangle$, összehasonlítása $T = 0,99$ -nél az eredeti, véletlenszerűen kibővített (Ran), híddal (Br) és elkerülő utakkal (Bp) kiegészített, illetve csonkolt (Ran-, Br-) EU22 hálózatok esetében.

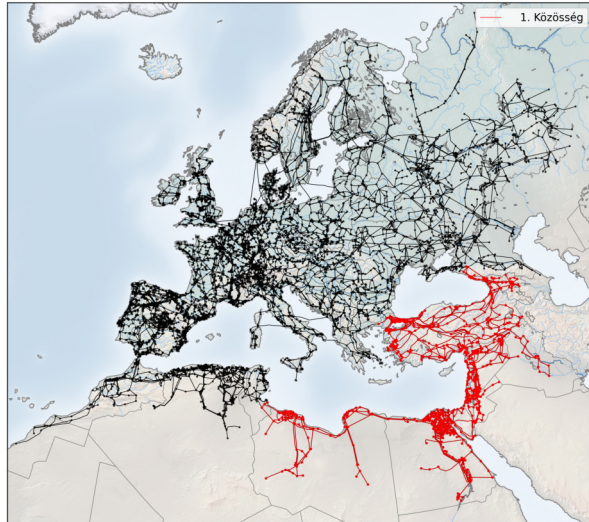
Végül az EU22-es hálózat közösségeinek kiméra állapotait rendparaméter szempontjából a 4.2.9. ábrán, míg frekvenciaszórás szempontjából a B.0.1. ábrán szemléltetjük a B. fejezetben.



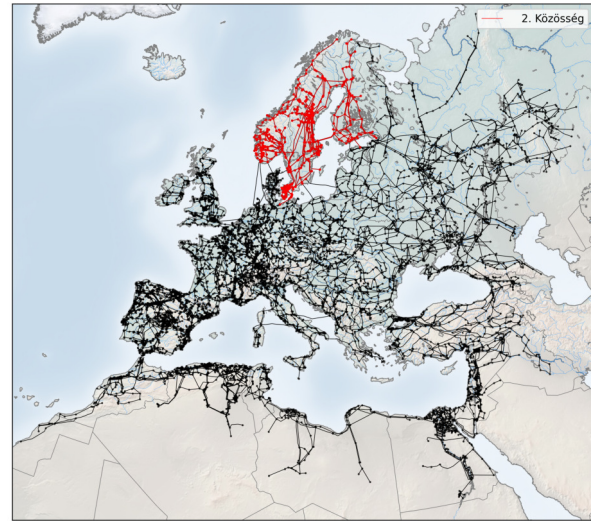
4.2.9. ábra. Az EU22-es hálózat szinkronizációs kiméra állapotai a közösségek szinkronizációját illetően eredeti és elkerülő utakkal (Bp) ellátott hálózat verziókban.

Az első szembetűnő eredmény az, hogy a szinkronizációs jószág nem követi. Ha megnézzük a 3.3. táblázatot, akkor világosan látjuk, hogy az 1 és 2 közösség korántsem a legkisebb méretű az EU22-es gráf esetén, mégis ezek szinkronizációja a leglassabb mind az eredeti, mind a kerülőutakkal kiegészített esetben. Megvizsgálva, hogy hol is helyezkednek el térben ezen közösségek, 4.2.10. ábra, azt találjuk, hogy az 1-es közösség Törökország, Egyiptom keleti és Líbia északi részének felelnek meg. Ezen hálózati egységek mindössze Gibraltáron és a Boszporusz-szoroson keresztül kapcsolódnak az európai hálózat többi részéhez. Meglepőbb azonban, hogy a 2-es közösség, mely a legrosszabb szinkronizációt mutatja, a Skandináv félsziget államainak felel meg: Norvégia, Svédország és Finnország nyugati része. A 4.1.1. ábrán jól kivehető, hogy ezen területet sok olyan híd él csatolja a hálózathoz, amelyek végpontjai egyben lokálisan gyengén szinkronizáltak. Ez érthető, hisz a tengeralatti vonalak nagy része úgynevezett HVDC (High Voltage Direct Current) kapcsolat, amely természetében eltér a a hálózat többi, váltakozó áramú életől. A 4.2.5. ábrán egyértelműen

látszik, hogy a skandináv hálózatnak a fent említetteken kívül csak rendkívül kevés szárazföldi kapcsolata van a hálózat többi részével Dánián és Finnország keleti és déli részén keresztül.



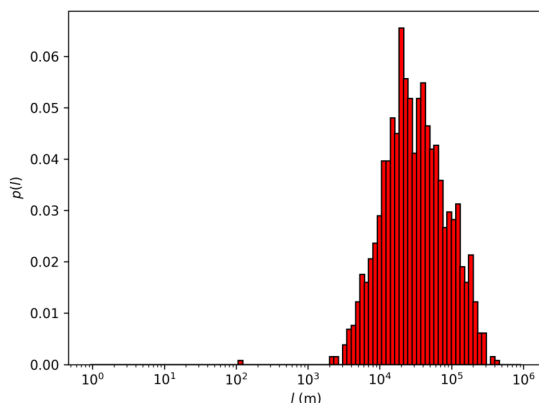
(a) 1-es közösség.



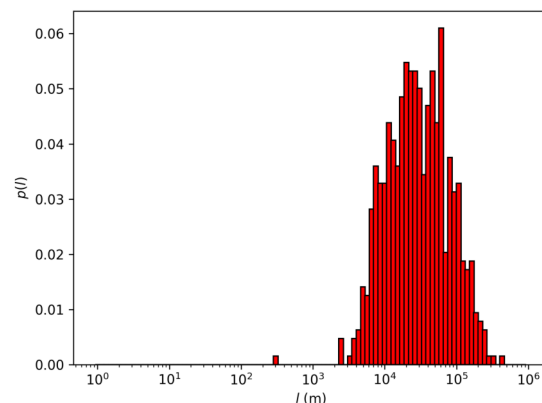
(b) 2-es közösség.

4.2.10. ábra. Az EU22-es hálózat közösség szintű szinkronizációja szerint a két leggyengébben szinkronizált komponens. Az 1-es közösség Törökországot, Egyiptom keleti részét és Líbia északi részét foglalja magába, míg a 2-es közösség a Skandináv-félsziget államainak áramhálózatát: Norvégia, Svédország, Finnország nyugati része.

Megvizsgálva az 1-es és 2-es közösségekben az élek hosszúságainak valószínűség eloszlását, újabb érvet vélünk felfedezni az EU22 hálózat hiányossága mellett, mégpedig a rövid élek hiányát:



(a) 1-es közösség, átlagos élhossz 53.732 km

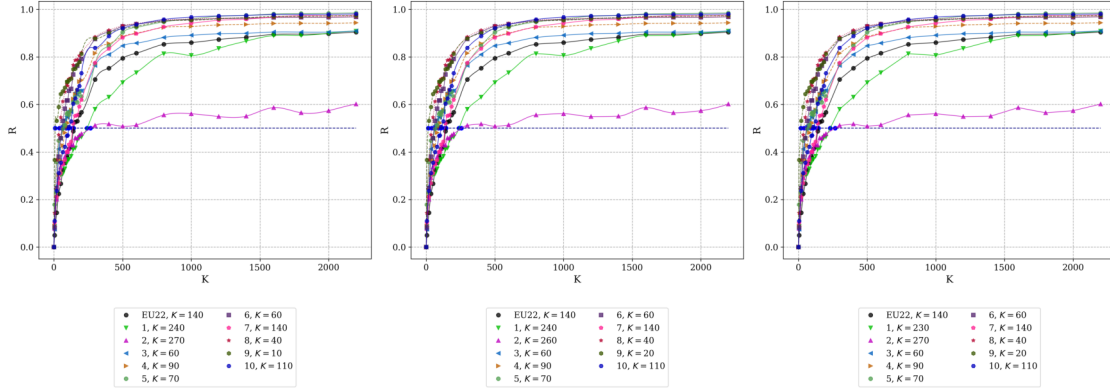


(b) 2-es közösség, átlagos élhossz 49.336 km.

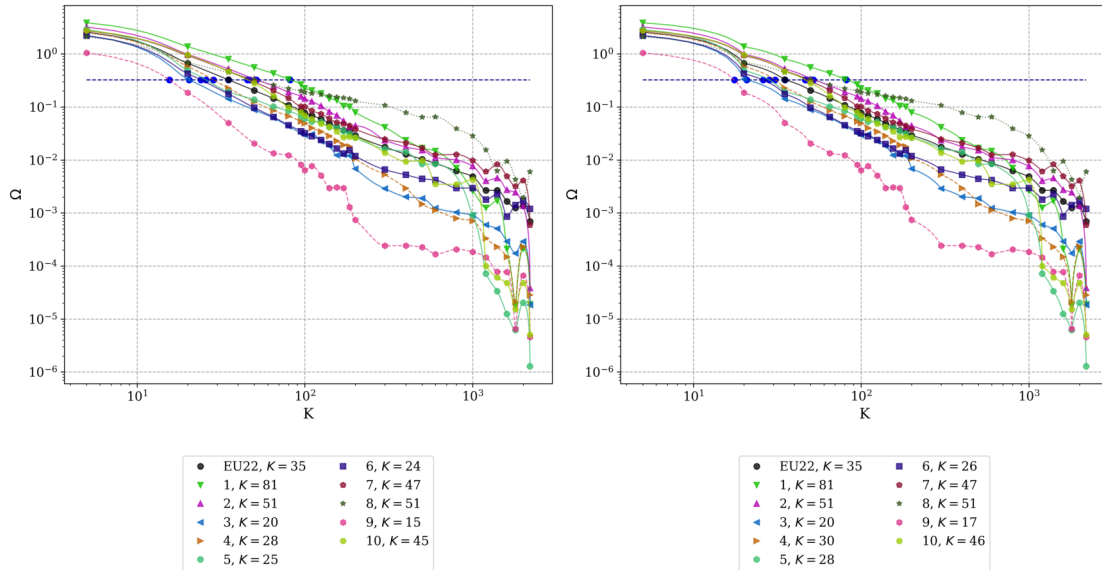
4.2.11. ábra. Az EU22-es hálózat 1-es és 2-es közösségeiben az élek hosszúságainak valószínűség eloszlása logaritmikus binezéssel.

A 4.2.9. ábra paneljeinek betét ábrái a fázis szinkronizációs rendparaméter szórásait mutatják. Kritikus csatolás esetén ezek maximumot mutatnak. A grafikonokon jól látszik, hogy főleg a az eredeti hálózatok esetében ezek nem mutatnak egyértelmű maximumot, ami azt jelenti, hogy még nem értük el a kritikus csatolási paramétert ezekben a közösségekben.

A modulokat hogy sorba sorba rendezhetjük aszerint is, hogy a rendparaméter (frekvenciaszórás) növekedése (csökkenése) során a K függvényében, adott R (Ω) küszöbértéknél elmetszve a görbéket ezek hogyan következnek egymás után.



(a) A közösségek fázis szinkronizációs rendparaméter szerinti sorba rendezése $R_{thr.} = 0.5$ küszöbértéknél. A jelmagyarázatban azon K értékek szerepelnek, amelyeknél az egyes görbék metszik a küszöbértéknél húzott vízszinteset. Bár a sorrend kissé változik, az 1-es és 2-es közösségek még mindig sereghajtók. Az ábrák esetében az adatpontok között balról jobbra szakaszonkénti köbös spline, köbös Hermite és lineáris interpolációk voltak alkalmazva.



(b) A közösségek fázis szórás szerinti sorba rendezése $\Omega = 0.5$ küszöbértéknél. A sorba rendezésnél azt látjuk, hogy a frekvenciaszórás az 1-es és 2-es közösségek esetén a legnagyobb egészen $\Omega_{thr.} = 0.325$ küszöbértékig, amikor is a legkisebb, 8-as közösség veszi át a vezető helyet. Ezen sorrend magyarázza a gyenge fázis szinkronizáltságot, amit az 4.2.9. ábrán láttunk. Az ábrák esetében az adatpontok között balról jobbra szakaszonkénti köbös Hermite és lineáris interpolációk voltak alkalmazva.

4.2.12. ábra. Községek sorrendje adott R és Ω rendparaméter küszöbértékekre.

5. fejezet

Frusztrált szinkronizáció, kiméra állapotok vizsgálata.

5.1. Hálózatok spektrális vizsgálata

Részleges, frusztrált szinkronizáció megjelenése várható olyan Kuramoto vagy Kuramoto-szerű modellekben, ahol a spektrális dimenzió alacsony, $d_s < 4$. Energia hálózatok működésére az az elvárás, hogy a szinkronizációs átmenet környékén operáljanak, amelyet az energia kereslet és kínálat versengése biztosít [51]. Az Kuramoto-egyenlet által leírt szinkronizációs modellek komplex hálózatokon történő vizsgált során, részleges szinkronizációt találtak, ha a spektrális dimenzió 4 alatt van, még akkor is, ha az euklideszi dimenzió, a gráf dimenzió vagy a Hausdorff-dimenzió általánosításai magasak vagy divergálnak [52]. A részleges szinkronizáció valószínűbb az erősen összefüggő modulokban vagy közösségekben, ami szintén előfordul villamosenergia-hálózatokban, ahogy azt a 3. fejezetben láttuk.

A szinkronizáció először az erősen kapcsolódó modulokban történik meg, míg a lazán kapcsolódó részekben az azonos körülmények között a csomópontok deszinkronizáltak maradhatnak. Ez a frusztrált szinkronizáció [53], ami a kondenzált anyagok félig kritikus Griffiths fázisaira (GP) [21] emlékeztet. Ezen jelenségek mellett a globális rendparaméterek ingadozásai kiterjesztett kontrollparaméter-térben divergálnak. Nemrégiben ezt kimutatták agyi hálózatokon alapuló Kuramoto-modellek esetében [44, 54], valamint az elektromos hálózatok esetében is [1, 6].

Az ilyen heterogén rendszerekben kialakuló struktúrákat a kiméra-szerű állapotokhoz is lehet kapcsolni, ahol az azonos, kölcsönható oszcillátorok különböző dinamikai viselkedést mutat: egy részük fázis szinkronizált állapotban van, míg más részük deszinkronizált.

A fő kritérium a részlegesen szinkronizált állapotok kiméra-szerű állapotokként való kategorizálására, mint "a koherens és az inkoherens tartományok együttes jelenléte a térben" [55]. A kiméra-szerű állapotok második jelentős jellemzője az oszcillátorok átlagos frekvenciáinak különbsége. Általában a koherens tartományokhoz tartozó oszcillátorok azonos

frekvenciával rendelkeznek, míg az inkohereus tartományok oszcillátorait magasabb vagy alacsonyabb átlagfrekvenciák jellemzik.

Gráfok spektrális tulajdonságait célzó vizsgálatok esetén hasznos bevezetni a gráf *Laplace mátrixát*. A Laplace mátrix egy hálózat esetén szorosan kapcsolódik a Laplace operátorhoz és gyakorta használják például diffúzió tanulmányozására gráfokon. Követve [52] meghatározását, egy gráf Laplace mátrixa L elemekkel nem más, mint

$$L_{ij} = \delta_{ij} - \frac{A_{ij}}{k_i} = \delta_{ij} - \frac{A_{ij}}{\sum_j A_{ij}} \quad (5.1)$$

súlyozatlan gráf esetén, vagy

$$L_{ij} = \delta_{ij} - \frac{W_{ij}}{k'_i} = \delta_{ij} - \frac{W_{ij}}{\sum_j W_{ij}}, \quad (5.2)$$

ahol k_i az i -edik csomópont fokszáma, δ_{ij} a Kronecker-delta, A_{ij} és W_{ij} a szomszédsági mátrix, illetve a súly mátrix elemei.

A normált Laplace mátrixnak valós sajátértékei vannak, $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$, amelyek sűrűsége a következőképpen skálázódik:

$$\rho(\lambda) \simeq \lambda^{d_s/2-1} \quad (5.3)$$

kis λ értékek esetén, ahol d_s a spektrális dimenzió. A kumulatív sűrűséget pedig a következőképpen kapjuk meg:

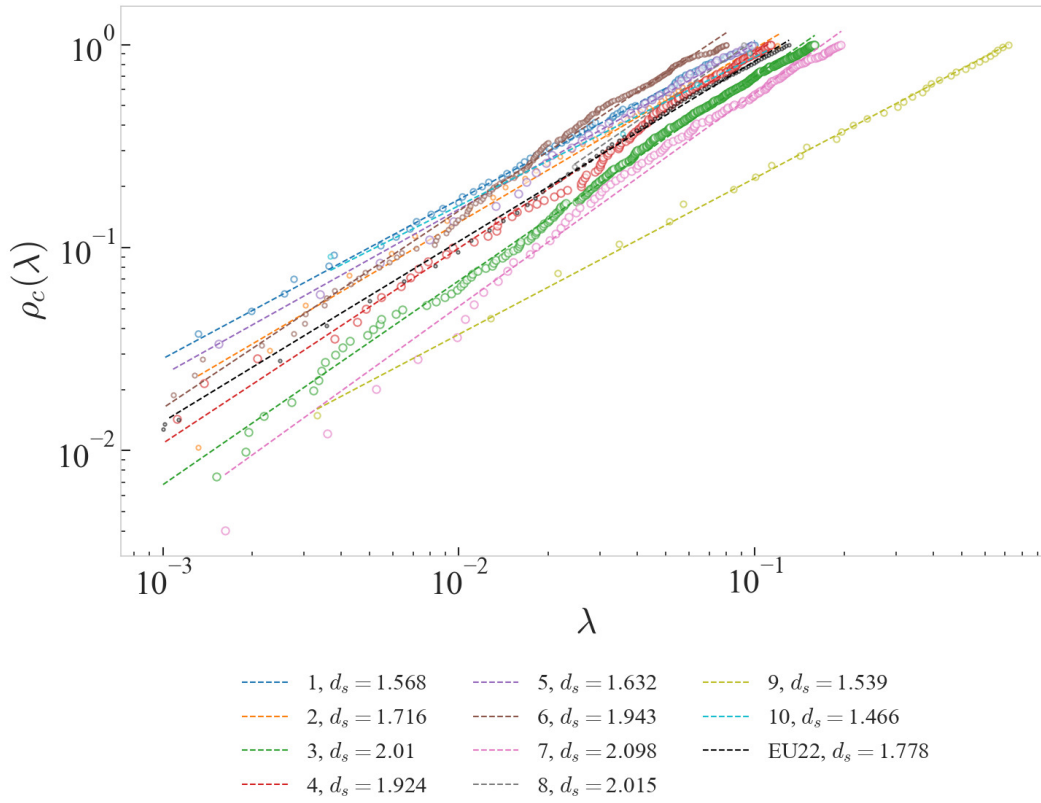
$$\rho_c(\lambda) = \int_0^\lambda d\lambda' \rho(\lambda') \simeq \lambda^{d_s/2} \quad (5.4)$$

Fontos megjegyezni, hogy az (5.3) és (5.4) egyenletek kis λ értékekre érvényesek, így a végzett analízisben a növekvő sorba rendezett sajátértékek 20%-ra illesztettünk azzal az extra megkötéssel, hogy $\lambda \leq 1$ feltétel is teljesüljön.

Érdemes még azt is megjegyezni, hogy a gráf Laplace mátrix egyik tulajdonsága, hogy a legkisebb sajátérték egzaktul 0, és ennek elfajultsága a gráf egybefüggő komponenseinek számát adja.

[49]-ben megmutatják, hogy kiméra állapotok valóban lehetségesek kis spektrális dimenziójú gráfok esetén. A 5.1.1. ábrán a teljes háló spektrális dimenziójára $d_s = 1,778$ értéket kaptunk, ami a [52]-ben meghatározott $d_{s,crit.} = 4$ alatt van, tehát valóban lehetséges a kiméra állapotok kialakulása.

Az elvárás az, hogy növekvő spektrális dimenzió korrelál a magasabb szinkronizáltsági fokkal, azaz alacsony szinkronizáltságot mutató modulok a legalacsonyabb d_s -el kellene rendelkezzenek. A 5.1.1. ábra részben alátámasztja ezt, de ugyanakkor ellenpéldával is szolgál, hisz az 5, 9 és 10-es közösségek spektrális dimenziója kisebb, mint az 1, 2 moduloké, szinkronizációs szintjük mégis jobb.

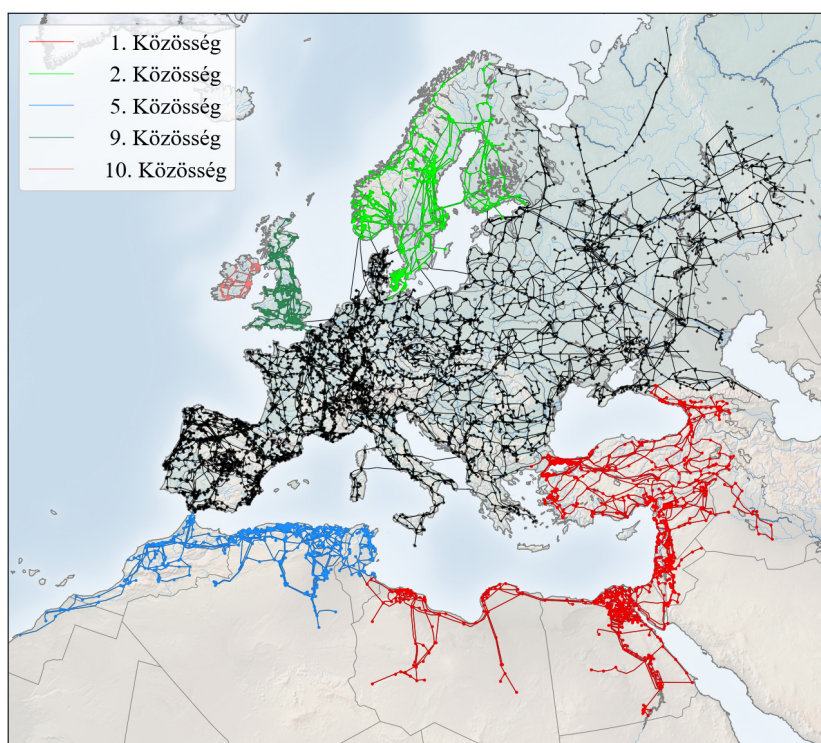


5.1.1. ábra. Az EU22 hálózat és közösségeinek spektrális dimenziója lineáris regresszióval meghatározva a súlyozott hálózat esetén. Látjuk, hogy az 1-es és 2-es közösségek dimenziója bár alacsony, mégse a legalacsonyabb, az 5, 9 és 10-es modulok mind megelőzik őket. Ezek jó szinkronizáltsága egyrészt kis méretükkel magyarázható (5-ös modul, lásd 3.3. táblázat), másrészt geográfiai elhelyezkedésükkel és más közösségekkel való kapcsolatukkal (5.1.2. ábra), hisz mindhárom jóval elszigeteltebb, mint az 1-es, 2-es.

Erre egyrészt nagyságuk ad magyarázatot, hisz $N_{10} = 55$, másrészt a hálózat periferiáján való elhelyezkedésük, azaz gyenge kapcsolatuk a gráf többi komponensével, lásd 5.1.2. ábra.

Ugyanakkor azt is figyelembe kell venni, hogy az 1-es modul esetén számos tengeralatti él van, amelyek tipikusan HVDC élek, melyek paraméterei eltérnek normál magasfeszültségű élektől, ahogy azt a 4.2.2 alfejezet végén említettük.

Itt hívnánk fel a figyelmet arra is, hogy a Laplace mátrix lehetséges legtöbb különböző sajátértéke megegyezik az algráf szomszédsági mátrixának (a közösség szomszédsági mátrixa) méretével. Ez azt is jelenti, hogy kis méretű modulok esetén bármilyen illesztés pontatlanná válhat, amennyiben nincs elég egyedi, kis sajátérték.



5.1.2. ábra. Az 1, 2, 5, 9 és 10-es közösségek geográfiai elhelyezkedése. Az utóbbi 3 alkotja a hálózat legelszigeteltebb moduljait. A szinkronizációt valóban ez magyarázza, hogy alacsony spektrális dimenzió ellenére is önmagukban ezek a modulok miért képesek lényegesen jobban szinkronizálni. A kiméra állapotok létrejöttében tehát nemcsak a hálózat heterogenitásának (pl. élsúlyokbeli), de topológiájának is fontos szerepe van.

Hasonló vizsgálat elvégezhető EU16, US16 hálózatokra is, viszont az EU22-es gráf volt a legérdekfeszítőbb, mivel két modul rendparaméter görbéje is a teljes hálózat görbéje alatt volt.

5.2. Gráf ciklikusságának és a szinkronizáció összefüggései

Gráfelméletben gyakran keresünk egyszerű struktúrákat a hálózatban és vizsgáljuk ezek tulajdonságait és behatását adott dinamikára. Ilyen struktúra volt például a háromszög is, amelyet az *elkerülő algoritmus* esetén felhasználtunk, hogy növeljük a gráf robusztusságát. Sok centralitás mérték esetén megjelennek hasonló egyszerű struktúrák, mint például a különböző utak ("path"), ösvények ("trail") fogalmai, mint legrövidebb út, feszítőfa ("spanning tree") vagy a körök és ciklusok.

A ciklus az egyik legegyszerűbb struktúra, amely redundáns ösvényeket hoz be egy gráfba és felerősíti a visszacsatolási hatásokat. A ciklust a következőképpen definiálhatjuk:

5.2.1. Definíció (Ciklus, kör). A gráfelméletben a ciklus egy gráfban olyan nem üres ösvény/út, amelyben csak az első és az utolsó csúcs egyenlő. Egy irányított ciklus egy irányított gráfban olyan nem üres irányított ösvény, amelyben csak az első és az utolsó csúcs egyenlő.

Ciklusokhoz kapcsolódik a gráfok *ciklus tere*. Számos ciklus tér létezik, a leggyakoribb az ún. bináris ciklus tér, amely olyan él halmazokból áll, amelyek minden élnél páros fokszámúak. A ciklus teret analóg módon lehet használni a vektorterekhez egy gráf esetén és definiálható az úgynevezett bázis ciklusok tere, mely egyértelműen meghatároz egy gráfot.

Míg rövid ciklusok, például háromszögek, növelik a gráfok robusztusságát és alternatív utakat biztosítanak egyes csomópontokhoz el eltávolítás esetén, addig hosszú körök bonyolult visszahatásokat eredményezhetnek kölcsönható dinamika esetén [56]. Nyilván az első lépés, hogy ciklusok hatásait vizsgáljuk, szükség van jó ciklus detektálási implementációra. Legtöbb népszerű pythonban megírt gráfelmélettel foglalkozó könyvtár csupán az előbb bevezetett bázis ciklusok halmazát határozza meg úgynevezett *szélességi bejárás algoritmus*sal (breadth-first search, BFS).

5.2.2. Definíció (Szélességi bejárás, BFS). *A szélességi bejárás vagy szélességi keresés (breadth-first search, BFS) egy fa vagy gráf típusú adatszerkezet bejárására vagy keresésére szolgáló algoritmus. A fa gyökerénél (vagy egy gráf tetszőleges csomópontjánál, amelyet néha „keresési kulcsnak” hívnak) kezdődik, és megvizsgálja az összes szomszédos csomópontot (csúcsot) a jelenlegi szinten, mielőtt a következő szintekre lépne.*

Ennek időkomplexitása általánosan a gráf $|V|$ csúcs és $|E|$ élszámától függ: $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.

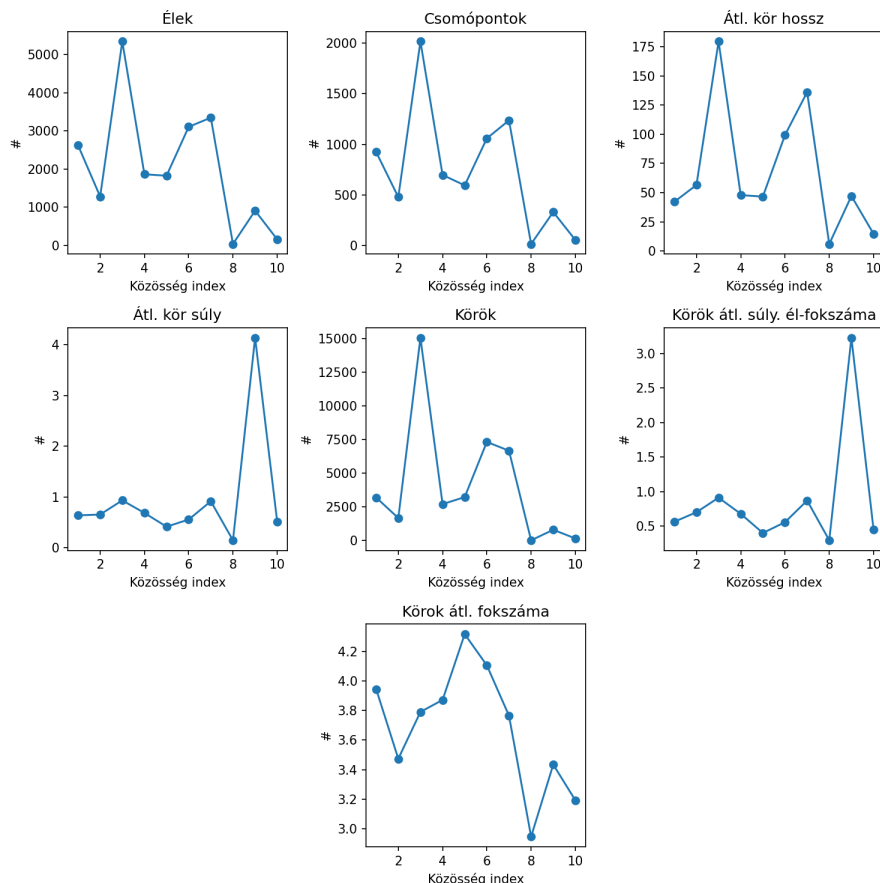
Számunkra viszont szükséges a hosszú ciklusok detektálása, amelyek legtöbbször nem részei a bázis ciklusoknak. Ebben az esetben az úgynevezett *mélyégi keresés algoritmus* (depth-first search, DFS) a hasznos eljárás.

5.2.3. Definíció (Mélyégi bejárás, DFS). *A mélyégi keresés vagy mélyégi bejárás egy kereső algoritmus, amivel bejárhatunk vagy kereshetünk fa vagy gráf adatszerkezetben. Az algoritmus a gyökér csomópontból indul (gráf esetén tetszőleges csomópontot nevezünk ki gyökér csomópontnak), keresési fát balra lefelé tartva járja be. Ha nem tud lefelé menni tovább, visszalép a legelső elágazásig és a következő ágat választja. Visszalépéskor a sikertelen ág állapotait ejti.*

Ennek időkomplexitása is hasonló a BFS-hez: $\mathcal{O}(|V| + |E|)$. Belátható, hogy ahhoz, hogy az összes ciklust megtaláljuk egy gráfban nem elég egyetlen gyökér csomópontból kiindítani a keresést, hanem általánosan az összesből el kell indulnunk.

A feladat megvalósításához egy python könyvtárat írtam, amely gyors és egyszerű adatstruktúra szerkezeteket használva eltárolja a gráfot és képes meghatározni egy algráfot, illetve alap gráfinvariánsokat, mint csomópont vagy él foksám. Az algráf meghatározása azért lényeges, mert szeretnénk meghatározni közösség szinten és a teljes hálózat szinten a ciklus szerkezetet, illetve összehasonlítani ezeket. A könyvtár második része egy párhuzamosított kód, amely hatékonyan számolja ki egy gráf köreit. A bázisciklusok és az összes ciklus száma között tipikusan 1-2 nagyságrend eltérés van.

Jelenleg standard mennyiségeket vizsgáltunk meg a ciklusokban, úgy, mint például foksámokat, a körök átlagos súlyait. Az eddigi eredményeinket a 5.2.1 ábrán foglaltuk össze.



5.2.1. ábra. Ciklus detektálás által szolgáltatott eredmények. Az x tengelyen a közösségek indexét tüntettük fel, az y tengelyen a panelek címének megfelelő számérték olvasható. Az 1, 2-es modulok semmiben sem mutatnak túlzottan kiugró értéket, ilyen értelemben ezen vizsgálatunk jelenleg in-konklúzív.

Egyelőre semmi kiugró mennyiséget nem észleltünk az 1, 2-es modulok esetén, ami esetleg topológiailag/szerkezetileg adna magyarázatot ciklusok szempontjából a gyenge szinkronizációs értékre. A kutatás ezen iránya azonban nem lezárt. Jelenleg is gondolkodunk esetleges jobb mennyiségek meghatározásán, illetve tanulmányozzuk az irodalmat. Egy ilyen ígéretes publikáció a [56], ahol bevezetik az ú.n. ciklus arányt, amely a csomópontok ciklusok szempontjából vett fontosságával áll kapcsolatban. Egy következő lépésként ezek eloszlását is megvizsgálnánk a hálózatainkban.

5.3. Saját munka részletezése

A bemutatott eredmények a csoport más tagjainak munkáját is tartalmazzák. Ebben az alfejezetben részletezésre kerül, hogy mi volt a saját munka és mi átvett eredmény.

3. fejezet.

A 3.1.2. alfejezetben a hálózatok súlyozása, összekapcsolása, parametrizálása saját munka. A 3.2. az adatok újra illesztése és a kumulatív eloszlások kiszámítása és vizsgálata (A.0.1. ábra) saját munka.

A 3.3. alfejezetben az eredmények kiértékelésében és azok ábrázolásában volt szerepem.

4. fejezet

A 4.1.1. alfejezetben bemutatott eredmények nem saját munka. A 4.1.2. alfejezet teljes mértékben saját eredményekre alapszik.

A 4.2. alfejezetben az EU22Bp, EU16Bp, EU22Ran és EU16 Ran szimulációkat és a EU22, EU16 egy részét én végeztem, a többit a csoport más tagjai. Az ábrákat én készítettem a 4.1.2., 4.2.2. alfejezetekben, illetve ezen ábrák esetében az eredeti hálózatok futási eredményeinek egy része, illetve Bp és Ran1 futási eredmények saját munka. A 4.2.1. alfejezetben a hozzájárulásom az EU16 eredeti hálózatán futtatott numerikus megoldások egy része, illetve a Bp-s futások teljese egészében.

5. fejezet

Az ebben a fejezetben bemutatott eredmények saját munkák. A spektrális dimenziók kiszámítása, a ciklus detektáló algoritmus és kiértékelése, illetve más kapcsolódó kódok és kiértékelések saját eredménye. A Papp Istvánnal folytatott beszélgetések sokat segítettek az algoritmusok optimalizációjában és a mértékek végleges formájában.

Az eredmények kiértékelése és a következtetések megfogalmazása közös munka volt a csoport többi tagjával.

A dolgozat többi része összhangban van a "Szerzőségi nyilatkozatban" megfogalmazottakkal.

6. fejezet

Következtetések, kitekintés

A munkánkban numerikus elemzést végeztünk az európai és észak-amerikai áramhálózatokon, mind a hálózat topológiai szintjén, mind az energiatranszfer leírására szolgáló lengő egyenletek dinamikus megoldásával. A hiányos adatbázisokat kibővítettük fizikai és villamosági megfontolások alapján és a hálózatok alapjaiként szolgáló gráfokat súlyoztuk. Ezeket a súlyokat további bemenetként használhattuk a szimulációk során. Illetve a közösség elemzés alapjául szolgáltak.

Elemeztük a hálózatokat gráfelméleti megfontolások alapján, kiszámítottuk azok főbb jellemző mennyiségeit és részletes közösség vizsgálatot végeztünk mindhárom hálózaton. Vizsgáltuk a hálózatok topológiai tulajdonságait és a közösség struktúrájának kapcsolatát ezekkel. Két módszerre is javaslatot tettünk a hálózat topologikus módosítására, melyektől a szinkronizáció stabilitásának növekedését várjuk: az egyik módszer közösségeket összekapcsoló híd élek hálózathoz történő hozzáadása, amely egy statikus vizsgálaton alapuló módszer, illetve a lokális szinkronizáció, mely a lengő egyenletek megoldásain alapszik, kiértékelése után implementált elkerülő algoritmus eredményeként kapott élek. Ez utóbbi eljárás a numerikus szimuláció eredményeit használja, azaz egy dinamikán alapuló módszer.

Nem-perturbatív elemzésünk túlmutat a lineáris közelítéseken vagy DC modelleken, és tükrözi a heterogenitás és a szinkronizációs stabilitás nem-triviális kapcsolatát. A közösségi struktúra felbontása, majd a mozgásegyenletek megoldása nemcsak frusztrált szinkronizációs mintázatokat mutat be, hanem a szinkronizációs stabilitásra gyakorolt, nem-triviális topológiai hatásokat is, azaz a hálózat nem célzott fejlesztése, módosítása például jobb esetben nem rontja, rosszabb esetben csökkenti a dinamika stabilitását (Braess paradoxon). Láttuk ennek ellenpéldáját is, híd élek erősítése és elkerülő utak létesítése lokálisan rossz szinkronizációt mutató, azaz gyenge csomópontok körül növeli a hálózat robusztusságát és a dinamika stabilitását. A numerikus módszereink eredményeként kapott kaszkádméret eloszlások hatványfüggvény viselkedést mutatnak, összhangban történelmi és empirikus adatokkal.

Mindeddig végzett munkánk újdonságot mutat dinamikai rendszerek és statisztikus fizika szempontjából. Ugyanakkor izgalmas kérdés fenntarthatóság, megújuló energiaforrások

hálózatba csatlakoztatásának, a közeljövőben Magyarországra települő akkumulátor gyárak áramhálózatra gyakorolt hatásának perspektívájából is, nem beszélve energia biztonsági és megbízhatósági kérdésekről.

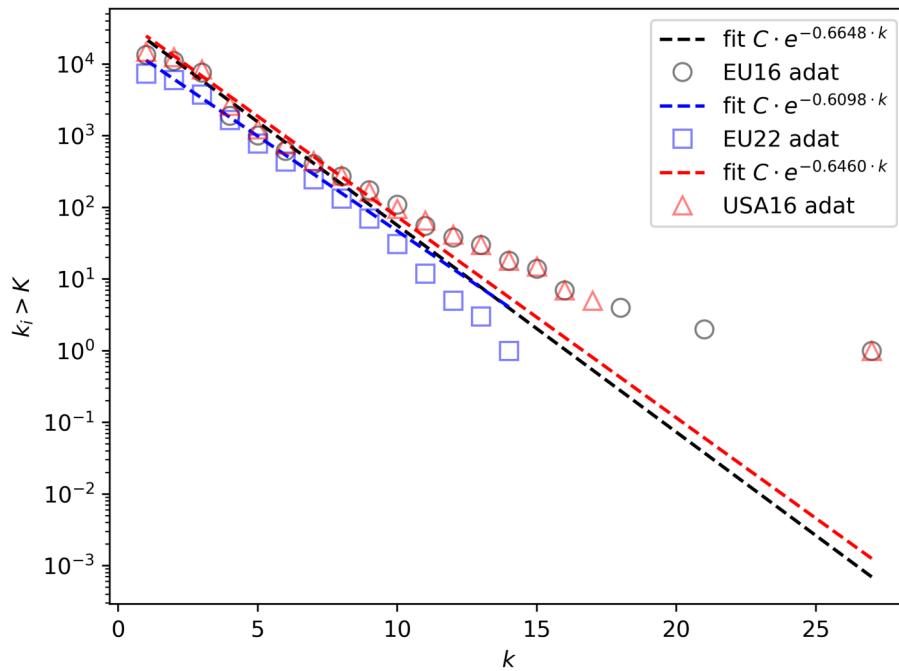
Kitekintésként az eddigi munka alapot nyújthat a következő generációs áramhálózatok tervezőinek. A kritikus önszerveződés az ilyen hálózatokban fontos szerepet játszik, azaz a hálózatok nem célzott tervezése és fejlesztése visszás hatást eredményezhet. Eredményeink általánosak és más rendszerekre is könnyen adaptálhatók. A munka folytatásaként szeretnék olyan rendszereket vizsgálni, ahol ahol nemcsak a fázisnak, de az amplitúdónak is van valamilyen dinamikája a 2.1. egyenletekhez képest, amely az egész elemzést nemcsak általánosabbá tenné, de utat nyithatna más rendszerek vizsgálatának irányába, mint például neurális hálók.

Függelék

A. függelék

Függelék a 2. fejezethez

Kumulatív eloszlás és illesztésük (szaggatott vonalak) e^{-k/γ_c} alakú függvénnyel az EU16, US16 és EU22 hálózatokra.

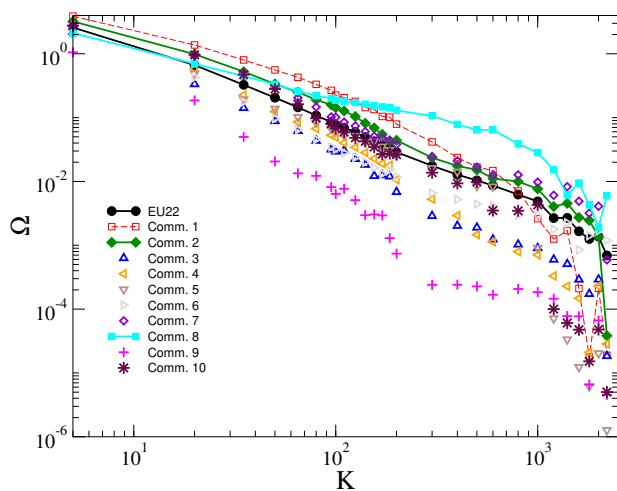


A.0.1. ábra. Az egyes hálózatok kumulatív fokszám eloszlásának illesztése $P(K) \sim e^{-k/\gamma_c}$ alakú függvénnyel.

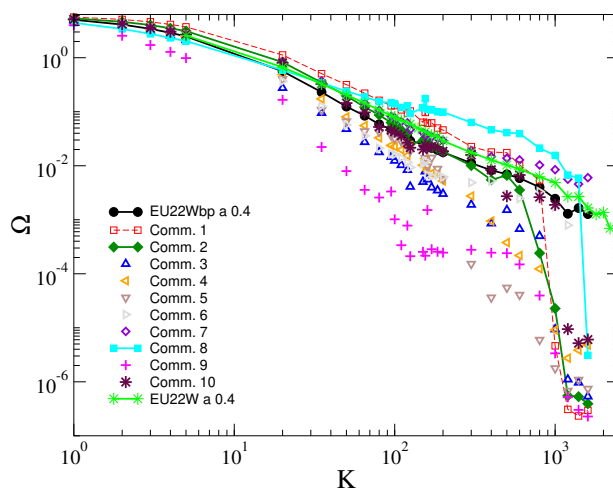
B. függelék

Függelék a 4. fejezethez

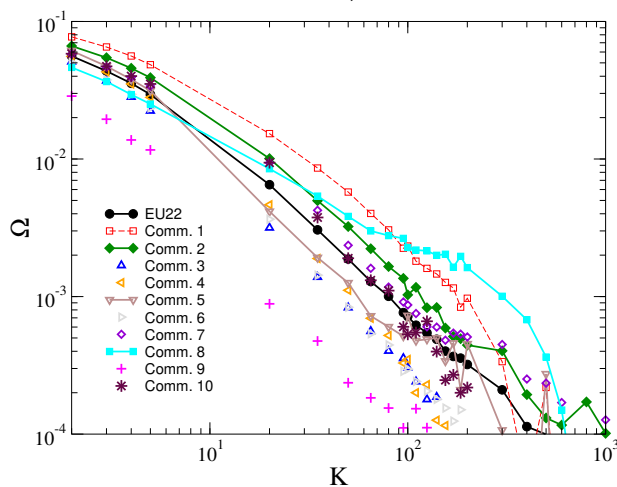
Kiméra állapotok a frekvenciaszórás szempontjából az EU22-es eredeti és elkerülő algorit-mussal módosított hálózatokban.



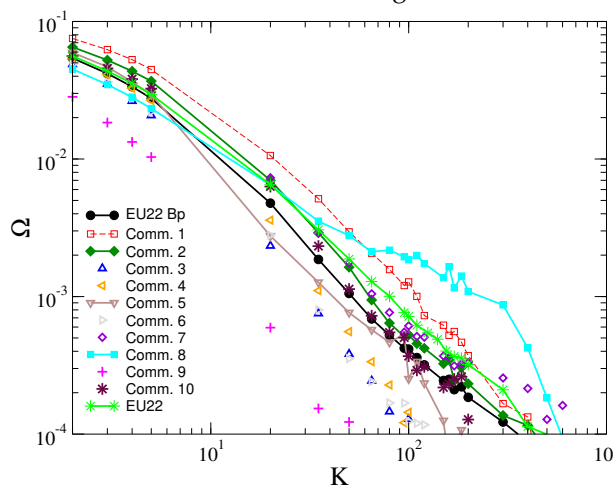
(a) $\alpha = 0,4$.



(b) $\alpha = 0,4$, elkerülő algoritmus.



(c) $\alpha = 3,0$.



(d) $\alpha = 3,0$, elkerülő algoritmus.

B.0.1. ábra. Az EU22-es hálózat kiméra állapotai a közösségek frekvenciaszórásait illetően eredeti és elkerülő utakkal (Bp) ellátott hálózat verziókban.

Irodalom

- [1] Géza Ódor, Shengfeng Deng, Bálint Hartmann és Jeffrey Kelling. „Synchronization dynamics on power grids in Europe and the United States”. *Phys. Rev. E* 106 (3 2022), 34311. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.106.034311](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.106.034311). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.106.034311>.
- [2] Bálint Hartmann, Géza Ódor, István Papp, Kristóf Benedek, Shengfeng Deng és Jeffrey Kelling. „Dynamical heterogeneity and universality of power-grids”. (2023). arXiv: [2308.15326](https://arxiv.org/abs/2308.15326) [[physics.soc-ph](https://arxiv.org/abs/2308.15326)].
- [3] Géza Ódor, István Papp, Kristóf Benedek és Bálint Hartmann. „Improving power-grid systems via topological changes or how self-organized criticality can help power grids”. *Phys. Rev. Res.* 6 (1 2024), 13194. old. DOI: [10.1103/PhysRevResearch.6.013194](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.6.013194). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.6.013194>.
- [4] J.A. Acebrón, L.L. Bonilla, C.J.P. Vicente, F. Ritort és R. Spigler. „The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena”. *Reviews of Modern Physics* 77.1 (2005), 137–185. old. DOI: [10.1103/RevModPhys.77.137](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.137).
- [5] Alex Arenas, Albert Díaz-Guilera, Jurgen Kurths, Yamir Moreno és Changsong Zhou. „Synchronization in complex networks”. *Phys. Rep.* 469.3 (2008), 93–153. old.
- [6] Géza Ódor és Bálint Hartmann. „Heterogeneity effects in power grid network models”. *Physical Review E* 98.2 (2018). DOI: [10.1103/PhysRevE.98.022305](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.022305). URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.022305>.
- [7] Dietrich Braess. „Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung”. *Mathematical Methods of Operations Research* 12.1 (1968), 258–268. old.
- [8] Dietrich Braess, Anna Nagurney és Tina Wakolbinger. „On a paradox of traffic planning”. *Transportation science* 39.4 (2005), 446–450. old.
- [9] Benjamin Schäfer, Thimo Pesch, Debsankha Manik, Julian Gollenstede, Guosong Lin, Hans-Peter Beck, Dirk Witthaut és Marc Timme. „Understanding Braess’ Paradox in power grids”. *Nature Communications* 13.1 (2022), 5396. old.
- [10] Benjamin A Carreras, David E Newman, Ian Dobson és A Bruce Poole. „Evidence for self-organized criticality in a time series of electric power system blackouts”. *IEEE Trans. Circuits Syst. I: Regul. Pap.* 51.9 (2004), 1733–1740. old.
- [11] Ian Dobson, Benjamin A Carreras, Vickie E Lynch és David E Newman. „Complex systems analysis of series of blackouts: Cascading failure, critical points, and self-organization”. *Chaos* 17.2 (2007), 26103. old.
- [12] Soumyajyoti Biswas és Lucas Goehring. „Load dependence of power outage statistics”. *Europhys. Lett.* 126.4 (2019), 44002. old.
- [13] . „Robustness of power systems under a democratic-fiber-bundle-like model”. *Phys. Rev. E* 91 (6 2015), 62811. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.

- [14] Bing-Lin Dou, Xue-Guang Wang és Shi-Yong Zhang. „Robustness of networks against cascading failures”. *Physica A* 389.11 (6 2010), 2310–2317. old. ISSN: 0378-4371. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [15] Giovanni Filatrella, Arne Hejde Nielsen és Niels Falsig Pedersen. „Analysis of a power grid using a Kuramoto-like model”. *Eur. Phys. J. B* 61.4 (6 2008), 485–491. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [16] Florian Dörfler és Francesco Bullo. „Synchronization and transient stability in power networks and non-uniform Kuramoto oscillators”. *SIAM J. Control Optim* 50.3 (6 2012), 1616–1642. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [17] Florian Dörfler és Francesco Bullo. „Synchronization in complex networks of phase oscillators: A survey”. *Automatica* 50.6 (6 2014), 1539–1564. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [18] Simona Olmi, Adrian Navas, Stefano Boccaletti és Alessandro Torcini. „Hysteretic transitions in the Kuramoto model with inertia”. *Phys. Rev. E* 90.4 (6 2014), 42905. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [19] Rodrigo Carareto, Murilo S Baptista és Celso Grebogi. „Natural synchronization in power-grids with anti-correlated units”. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 18.4 (6 2013), 1035–1046. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [20] Thomas Vojta. „Rare region effects at classical, quantum and nonequilibrium phase transitions”. *Journal of Physics A: Mathematical and General* 39 (6 2006), R143–R205. DOI: [10.1088/0305-4470/39/22/R01](https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/22/R01). URL: <http://stacks.iop.org/0305-4470/39/i=22/a=R01?key=crossref.efb7d5f24dd1b89df653af8cd0da140b>.
- [21] Robert B Griffiths. „Nonanalytic behavior above the critical point in a random Ising ferromagnet”. *Physical Review Letters* 23.1 (6 1969), 17. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [22] Franz Kaiser, Vito Latora és Dirk Witthaut. „Network isolators inhibit failure spreading in complex networks”. *Nat. Commun.* 12.1 (6 2021), 1–9. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [23] Franz Kaiser és Dirk Witthaut. „Topological theory of resilience and failure spreading in flow networks”. *Phys. Rev. Res.* 3.2 (6 2021), 23161. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [24] Géza Ódor és Bálint Hartmann. „Power-law distributions of dynamic cascade failures in power-grid models”. *Entropy* 22.6 (6 2020), 666. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [25] B. Schäfer, C. Grabow, S. Auer, J. Kurths, D. Witthaut és M. Timme. „Taming instabilities in power grid networks by decentralized control”. *The European Physical Journal Special Topics* 225.3 (6 2016), 569–582. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [26] Géza Ódor és Bálint Hartmann. „Power-law distributions of dynamic cascade failures in power-grid models”. *Entropy* 22.6 (6 2020), 666. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [27] Martí Rosas Casals és Bernat Corominas Murtra. „Assessing European power grid reliability by means of topological measures”. *WIT Trans. Ecol. Environ.* 121 (6 2009), 527–537. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.

- [28] Gabriela da Cruz Martins, Fabiano Ribeiro, Leonardo Santos Oliveira és Fabricio Luchesi Forgerini. „Complex network analysis of the Brazilian power grid”. *Scientia Plena* 14.10 (6 2018), 62811. old. DOI: [10.14808/sci.plena.2018.104802](https://doi.org/10.14808/sci.plena.2018.104802). URL: <https://www.scientiaplena.org.br/sp/article/view/4265>.
- [29] J. Grainger J. és D. Stevenson W. *Power system analysis*. 91. köt. McGraw-Hill, 1994, 62811. old. ISBN: ISBN 978-0-07-061293-8. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [30] Géza Ódor és Bálint Hartmann. „Heterogeneity effects in power grid network models”. *Physical Review E* 98.2 (6 2018), 22305. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [31] K Ahnert és M Mulansky. *Boost::odeint*. 2015. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://odeint.com>.
- [32] Benjamin Schäfer, Dirk Witthaut, Marc Timme és Vito Latora. „Dynamically induced cascading failures in power grids”. *Nat. Commun.* 9.1 (6 2018), 1–13. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [33] Martí Rosas-Casals és Bernat Corominas-Murtra. „Assessing European power grid reliability by means of topological measures”. *WIT Transactions on Ecology and the Environment* 121 (6 2009. jún.), 62811. old. DOI: [10.2495/ESUS090471](https://doi.org/10.2495/ESUS090471). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [34] V. A. Traag, L. Waltman és N. J. van Eck. „From Louvain to Leiden: guaranteeing well-connected communities”. *Scientific Reports* 9.1 (6 2019), 5233. old. ISSN: 2045-2322. DOI: [10.1038/s41598-019-41695-z](https://doi.org/10.1038/s41598-019-41695-z). URL: <https://doi.org/10.1038/s41598-019-41695-z>.
- [35] M E J Newman. „Modularity and community structure in networks”. *Proc Natl Acad Sci U S A* 103.23 (6 2006), 8577–8582. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [36] Vincent Blondel, Jean-Loup Guillaume, Renaud Lambiotte és Etienne Lefebvre. „Fast Unfolding of Communities in Large Networks”. *Journal of Statistical Mechanics Theory and Experiment* 2008 (6 2008), 62811. old. DOI: [10.1088/1742-5468/2008/10/P10008](https://doi.org/10.1088/1742-5468/2008/10/P10008). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [37] Mark Humphries és Kevin Gurney. „Network ‘Small-World-Ness’: A Quantitative Method for Determining Canonical Network Equivalence”. *PloS one* 3 (6 2008. febr.), e0002051. DOI: [10.1371/journal.pone.0002051](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0002051). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [38] Carsten Matke, Wided Medjroubi és David Kleinhans. *SciGRID - An Open Source Reference Model for the European Transmission Network (v0.2)*. 2016. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <http://www.scigrid.de>.
- [39] Bart Wiegmans. *GridKit: European and North-American extracts*. 2016. márc. DOI: [10.5281/zenodo.47317](https://doi.org/10.5281/zenodo.47317). URL: <https://doi.org/10.5281/zenodo.47317>.
- [40] Tom Brown, Marta Victoria, Elisabeth Zeyen, Fabian Hofmann, Fabian Neumann, Martha Frysztacki, Johannes Hampp, David Schlachtberger és Jonas Hörsch. *PyPSA-Eur: An open sector-coupled optimisation model of the European energy system*. 0.8.1. verzió. 2015. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [41] Mathieu Bastian, Sebastien Heymann és Mathieu Jacomy. *Gephi: An Open Source Software for Exploring and Manipulating Networks*. 2009. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <http://www.aiai.org/ocs/index.php/ICWSM/09/paper/view/154>.

- [42] K. S. Lomax. „Business Failures: Another Example of the Analysis of Failure Data”. *Journal of the American Statistical Association* 49.268 (6 1954), 847–852. old. ISSN: 01621459. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <http://www.jstor.org/stable/2281544> (elérés dátuma 2023. 08. 18.).
- [43] Halgurd Taher, Simona Olmi és Eckehard Schöll. „Enhancing power grid synchronization and stability through time-delayed feedback control”. *Phys. Rev. E* 100.6 (6 2019), 62306. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [44] Pablo Villegas, Paolo Moretti és Miguel A Munoz. „Frustrated hierarchical synchronization and emergent complexity in the human connectome network”. *Sci. Rep.* 4.1 (6 2014), 1–7. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [45] Ana P Millán, Joaquín J Torres és Ginestra Bianconi. „Complex network geometry and frustrated synchronization”. *Sci. Rep.* 8.1 (6 2018), 1–10. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [46] A. Zakharova. *Chimera Patterns in Networks: Interplay between Dynamics, Structure, Noise, and Delay*. 91. köt. Understanding Complex Systems. Springer International Publishing, 2021, 62811. old. ISBN: 9783030217167. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://books.google.hu/books?id=dAoxzgEACAAJ>.
- [47] Daniel M. Abrams és Steven H. Strogatz. „Chimera States for Coupled Oscillators”. *Phys. Rev. Lett.* 93 (17 2004), 174102. old. DOI: [10.1103/PhysRevLett.93.174102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.174102). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.174102>.
- [48] Géza Ódor, Gustavo Deco és Jeffrey Kelling. „Differences in the critical dynamics underlying the human and fruit-fly connectome”. *Phys. Rev. Research* 4.2 (6 2022), 23057. old. DOI: [10.1103/PhysRevResearch.4.023057](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.4.023057). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [49] Shengfeng Deng és Géza Ódor. *Chimera states in neural networks and power systems*. 2023. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). arXiv: 2307.02216 [cond-mat.stat-mech]. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [50] Géza Ódor és Shengfeng Deng. „Synchronization transition of the second-order Kuramoto model on lattices”. *Entropy* 25.1 (6 2023), 164. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [51] B.A. Carreras, D.E. Newman, I. Dobson és A.B. Poole. „Evidence for self-organized criticality in a time series of electric power system blackouts”. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 51.9 (6 2004), 1733–1740. old. DOI: [10.1109/TCSE.2004.834513](https://doi.org/10.1109/TCSE.2004.834513). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [52] Ana P Millán, Joaquín J Torres és Ginestra Bianconi. „Synchronization in network geometries with finite spectral dimension”. *Physical Review E* 99.2 (6 2019), 22307. old. DOI: [10.1103/PhysRevE.91.062811](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.062811). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [53] Pablo Villegas, Paolo Moretti és Miguel A. Muñoz. „Frustrated hierarchical synchronization and emergent complexity in the human connectome network”. *Scientific Reports* 4.1 (6 2014), 62811. old. DOI: [10.1038/srep05990](https://doi.org/10.1038/srep05990). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.91.062811>.
- [54] Géza Ódor, Gustavo Deco és Jeffrey Kelling. „Differences in the critical dynamics underlying the human and fruit-fly connectome”. *Phys. Rev. Res.* 4 (2 2022), 23057. old. DOI: [10.1103/PhysRevResearch.4.023057](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.4.023057). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.4.023057>.
- [55] E. Schöll. „Synchronization patterns and chimera states in complex networks: Interplay of topology and dynamics”. *The European Physical Journal Special Topics* 225.6 (6 2016), 891–919. old. ISSN: 1951-6401. DOI: [10.1140/epjst/e2016-02646-3](https://doi.org/10.1140/epjst/e2016-02646-3). URL: <https://doi.org/10.1140/epjst/e2016-02646-3>.

- [56] T. Fan, L. Lü, D. Shi és T. Zhou. „Characterizing cycle structure in complex networks”. *Communications Physics* 4.1 (6 2021), 1–9. old. DOI: [10.1038/s42005-021-00781-3](https://doi.org/10.1038/s42005-021-00781-3). URL: <https://doi.org/10.1038/s42005-021-00781-3>.