



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

Változtatható inerter szabályozásának lehetőségei félaktív rezgéscsillapítási feladatokhoz

37. Országos Tudományos Diákköri Konferencia
2025. április 23–25.

Pácsonyi Péter
konzulensek: Dr. Budai Csaba
Dr. Stépán Gábor

2024. május 26.

Összefoglaló

A rezgéscsillapítás a gépészmérnöki gyakorlat egyik legfontosabb területe. A rezgésre érzékeny eszközök megóvására a szakirodalomban többféle megoldás is létezik, például az antirezonancia megfelelő hangolásával történő csillapítás. A dolgozat elsősorban erre a módszerre koncentrált, hiszen a megvalósításához passzív elemek is elegendőek, így egyszerűsítve a rendszert. Az antirezonancia jelenségét általában tömeghangolt csillapítással (TMD) idézik elő, azonban ehhez a csillapítást végző szakaszhoz egy kiegészítő fokozat szükséges. Az inerter egy olyan passzív mechanikai elem, melynél a megjelenő erő arányos a pólusainak relatív gyorsulásával, így oly módon tud tehetetlenséget adni a rendszerhez, hogy közben a tömeget nem növeli jelentősen. Belátható, hogy egy inerter beépítése párhuzamosan a hagyományos rugótaggal antirezonanciát okoz, melynek frekvenciája függ az inertanciától. A kettő között analitikus összefüggés is található. Amennyiben az inertanciát folyamatosan változtatni lehet, a rezgéscsillapítás félaktív módon tudja követni a gerjesztést, így mindig a domináns frekvencia környezetében elnyomva a nemkívánatos lengéseket. A megfelelő inertancia beállítása/szabályozása egy kihívást jelentő feladat tud lenni, a dolgozat második része ennek a problémának az áthidalására koncentrált.

Tartalomjegyzék

Jelölések, rövidítések jegyzéke	3
1. Bevezetés	4
1.1. Rezgéscsillapítási problémák általánosságban	4
1.2. Az inerter	5
1.3. Az inerterrel kiegészített rezgéscsillapítás	7
1.4. Az ideális inertancia	10
2. Mechanikai modellezés	14
2.1. Mozgásegyenlet	14
2.2. Numerikus szimuláció	17
3. Szabályozótervezés	22
3.1. Bevezetés	22
3.2. Állandó fordulatszám	24
3.3. Harmonikus gerjesztés	24
3.4. Paraméterérzékenység, trajektóriakövetés	29
4. Összefoglalás	32
A. A másodrendű rendszer minőségi jellemzői	33
Irodalomjegyzék	35

Jelölések, rövidítések jegyzéke

Jelölések

Jelölés	Leírás
t	Idő
$x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$	Időben változó mennyiség, illetve annak első és második idő szerinti deriváltja
a , $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$	Skalár, vektor, mátrix
j	Képzetes egység
$u(t)$	Rendszerre ható gerjesztés, bemenőjel (időben változó feszültség)
$y(t)$	Gerjesztésre adott válasz, kimenőjel
$e(t)$	Hibajel
r	Útgerjesztés, sugár
i	Időben változó áramerősség
v	Sebesség
ω	Szögsebesség, körfrekvencia
ω_n	Csillapítatlan sajátkörfrekvencia
ω_d	Csillapított sajátkörfrekvencia
ζ	Relatív csillapítási tényező
f	Frekvencia
m	Tömeg
J	Tehetetlenségi nyomaték
F	Erő
M	Nyomaték
k	Rugómerevség
c	Viszkózus csillapítási tényező
b	Inertancia

Rövidítések

Rövidítés	Leírás
LTI	Lineáris, Időinvariáns (Linear Time Invariant)
RMS	Négyzetes középérték (Root Mean Square)
TMD	Tömeghangolt csillapítás (Tuned Mass Damper)
FBL	Visszacsatolásos linearizálás (Feedback linearization)

1. fejezet

Bevezetés

Ahogy a mérnöki életben használt eszközök egyre pontosabbak és érzékenyebbek lesznek, felértékelődik a különböző rezgésszigetelések és rezgéscsillapítások szerepe. Ezek az eszközök lehetnek precíziós szerszámgépek [1], az integrált áramkörgyártás gépei [2], vagy különféle mérőműszerek [3]. Jobb rezgéscsillapítással mind ezen eszközök élettartama, illetve az előállított termékek minősége is javítható. A dolgozatom első lépéseként a szakirodalomban megtalálható rezgéscsillapítási megoldásokat tekintem át.

1.1. Rezgéscsillapítási problémák általánosságban

A rezgéscsillapítás célja többféle módon fogalmazható meg. Számos alkalmazásban ez egy adott test elmozdulásának minimalizálása alapján történik [4], más esetekben a minőségi mérőszám egy több testből álló rendszer egyik elemének gyorsulására alapszik [5]. Utóbbira jó példa egy személyautó, ahol az utasok kényelme és az egészségre káros behatások csökkentése is alapvető fontosságú. Előfordul, hogy az elemek között ébredő erő minél kisebb értéken tartása kerül előtérbe [6], mint például a járműfelfüggesztések esetében. Végül, különböző alkalmazásokban a rezgéscsillapító rendszerek a rezgésekből származó energiát elnyelik, oly módon, hogy később újra felhasználható, vagy szabályozott módon visszatáplálható a rendszerbe [7], [8].

Természetesen a való életben ezen követelmények közül egyszerre több is megjelenhet a tervezési folyamat során. Egy jó példa erre ismét a járműfelfüggesztések problémája [9]. Ahogy az már említésre került, a fő kritérium az utasok kényelme, amelyet gyakran a rugózott tömeg gyorsulásának négyzetes középértékével (RMS) kapcsolnak össze [10]. A második a keréktalpponti normálerő fluktuációjának csökkentése, hiszen a gumik degeneratív erőkarakterisztikája miatt ez javítja a kezelhetőséget [11]. Általában a különböző területek között valamilyen kompromisszumot kell kötni [12], melynek eredményeképpen a felfüggesztések tervezése egy komplex optimalizálási problémává tud válni [13].

A rezgéscsillapítások csoportokra bontásának másik módja a működésükhöz szükséges energiaforrásokra alapszik. Az első és legegyszerűbb megoldások a passzív rendszerek [14], azaz ebben az esetben nincs szükség külső energiára. Leggyakrabban passzív elemekből – rugók, tömegek, csillapítások – állnak. Egyszerűségük mellett csupán egy szűk frekvenciatartományban működnek jól, illetve nem képesek a rendszer paramétereinek nagymértékű változásaihoz alkalmazkodni.

A második csoportot az aktív rendszerek alkotják [15]. Az aktív konstrukciók fő jellemzője, hogy az aktuátorok a fő energiafolyamba kerülnek beépítésre [16]. Ez elméletben azt jelenti, hogy egy adott gerjesztésre tetszőleges választ képesek adni. A gyakorlatban

természetesen megjelennek bizonyos limitációk, mindenesetre az elérhető karakterisztikák halmaza sokkal nagyobb, mint a passzív esetben. Legfőbb hátrányuk bonyolultságuk mellett a nagy energiafogyasztás.

A problémák nagy részében jelentős teljesítményjavulás érhető el akkor is, ha a rendszer válasza nem tetszőleges. Jó kompromisszumot nyújtanak az aktív és a passzív rendszerek között a félaktív megoldások. Ebben az esetben változtatható passzív elemek a konstrukció részei, amelyek lehetővé teszik a paraméterek változtatását egy megadott szabályozási törvény szerint [17]. Ez azzal jár, hogy az aktuátorok nem a fő energiaforrás részei. A félaktív rendszerek egyszerre viszonylag olcsók, kevés energiát igényelnek és képesek alkalmazkodni a gerjesztés jellemzőinek változásához, ötvözve a passzív és az aktív megoldások előnyeit.

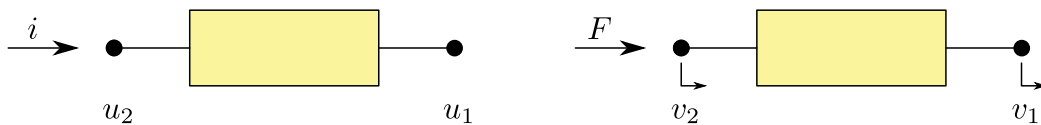
Dolgozatomban a hangsúly egy kisméretű, rezgésekre érzékeny test dinamikus környezetben mérhető elmozdulásának minimalizálásán van. Ennek megvalósítására többféle megoldás is létezik [18], [19] a szakirodalomban, egy lehetőség az antirezonancia jelenségének kihasználása [20]. Jelen esetben az antirezonancia azt jelenti, hogy a rezgési amplitúdót a gerjesztési frekvencia függvényében vizsgálva, a kitérésnek egy adott frekvencián lokális minimuma van. Amennyiben a gerjesztésnek van egy domináns frekvenciája, a rezgéscsillapító rendszert meg lehet tervezni oly módon, hogy ezen a frekvencián antirezonanciát hozzon a rendszerbe, így csökkentve a nemkívánatos rezgéseket. Ha a domináns frekvencia változik, egy jól megkonstruált félaktív rendszerrel folyamatosan hangolni lehet az antirezonancia frekvenciáját, így az optimumban tartva a csillapítást.

Az antirezonanciát leggyakrabban tömeghangolt csillapítással (TMD) érik el. Ebben az esetben egy kiegészítő fokozatot kell beépíteni az elsődleges elemek mellett [21]. Köztudott, hogy a tömeghangolt csillapítást ki lehet egészíteni egy inerterrel, úgy adva tehetetlenséget a rendszerhez, hogy az össztömeg nem nő jelentősen [22], [23]. Mivel a tömeghangolt csillapítások további elemeket adnak a rendszerhez, érdemes megvizsgálni, hogy hasonló antirezonanciára alapuló hatást el lehet-e érni kevesebb komponens segítségével is.

1.2. Az inerter

A különböző műszaki problémák megoldásánál alapvető szerepe van a rendszeranalógiák [24]–[26] használatának. Ezek az analógiák lehetővé teszik, hogy az egyes rendszereknél megismert modellezési és tervezési eljárásokat más esetekben is alkalmazzuk, mint ahol az eljárást eredetileg kifejlesztették. Egy ilyen alkalmazási példa az analóg elektronikában alkalmazott szűrők, illetve a mechanikai rezgéscsillapítások esete. Az elektronikában ismeretes az úgynevezett rendszerszintézis, amely lehetővé teszi, hogy egy kívánt átviteli függvényt megvalósító passzív rendszer topológiáját, illetve a passzív elemek paramétereit meghatározzuk. Tekintettel arra, hogy a mechanikai rezgéscsillapításokban a feladat megfogalmazásának módja gyakorlatilag ezzel megegyező, adódik, hogy a rendszerszintézist mechanikai rendszerek esetében is megpróbáljuk alkalmazni. Itt azonban problémába ütközünk, hiszen a kondenzátornak nincsen teljes értékű mechanikai analóg párja [27].

Vizsgáljuk a problémát a mechatronikában leggyakrabban alkalmazott Trent-féle analógia alapján. (A dolgozat további részében szintén ez az analógiarendszer kerül alkalmazásra.) Ebben az esetben az áramerősség az erővel, a feszültség pedig a sebességgel analóg mennyiség, ahogy az az 1.2.1. ábrán is látható, ahol i az áramerősség, F az erő, u_1 és u_2 a villamos passzív elem két pólusának potenciálja, v_1 és v_2 pedig a mechanikai passzív elem két pólusának sebessége. Vizsgáljuk meg ezek után a kondenzátor karakterisztikáját



1.2.1. ábra. A villamos és a mechanikai passzív elemek a Trent-analógia alapján

leíró egyenletet

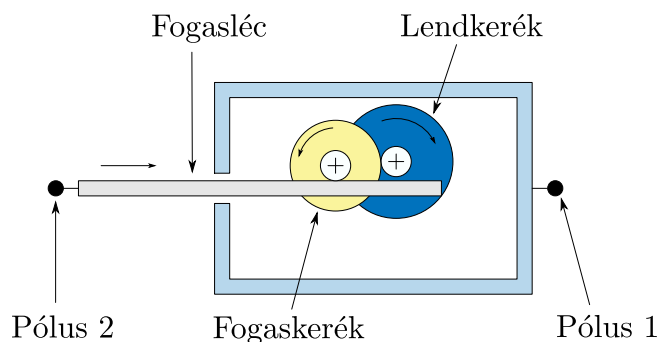
$$i(t) = C(\dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)). \quad (1.2.1)$$

Ebből a kondenzátor analóg párját leíró egyenlet

$$F(t) = b(\dot{v}_2(t) - \dot{v}_1(t)). \quad (1.2.2)$$

A fenti (1.2.2) egyenletben a két pólus közötti relatív gyorsulás jelenik meg. A hagyományos mechanikai elemek (tömeg, rugó, csillapítás) közül ehhez a legközelebb a tömeg áll, azonban ebben az esetben Newton második axiómája alapján az erő valamilyen relatív gyorsulás helyett az adott koordináta-rendszer origójához képest mért gyorsulástól függ. Ezek alapján a tömeg nem feleltethető meg egy tetszőlegesen kapcsolt kondenzátornak, csupán azokban az esetekben ekvivalens, amikor a kondenzátor egyik pólusa a földponthoz van kötve.

Olyan mechanikai passzív elemet, amely karakterisztikáját az (1.2.2) egyenlet írja le, Malcolm Smith javasolt egy 2002-es cikkében [27]. Ekkor a b arányossági tényező az ún. inertancia, melynek mértékegysége kilogramm. Erre egy lehetséges konstrukció az 1.2.2 ábrán látható.

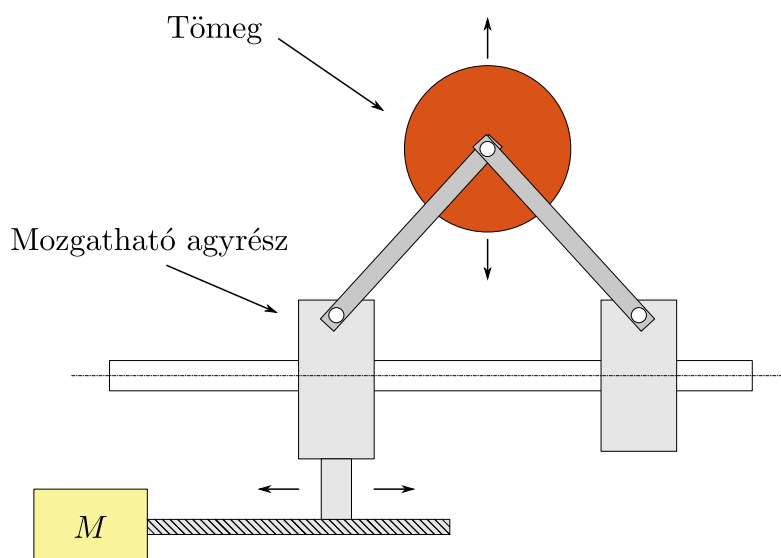


1.2.2. ábra. Az inerte egy lehetséges megvalósítása

A passzív inerte alkalmazási lehetőségeivel számos kutatás foglalkozik. Azt a tulajdonságukat, hogy képesek úgy tehetetlenséget adni egy rendszerhez, hogy a tömeget nem növelik jelentősen kihasználják például a járművek felfüggesztésében [28]. Bizonyos esetekben egy inerte passzív felfüggesztés jobb teljesítményre képes akár egy aktív futóműnél is [29].

A félaktív rezgés csillapító rendszerek nagy része változtatható csillapítással valósítja meg a rendszer adaptációját [30]. Az inerte változtathatóságára is vannak kutatások, itt többféle megoldás is létezik. A két fő irány közül az egyik, a haladó és forgó mozgás átalakításának változtatására alapul, például egy fokozatmentes sebességváltóval (CVT) [31]. Egy másik lehetséges megoldás a forgórész (látszólagos) tehetetlenségi nyomatékának változtatása, adott esetben a változtatható csillapításoknál megjelenő magnetoreológiai

folyadékokkal [32]. Amennyiben nem tisztán mechanikai, hanem folyadékok tehetetlenségére alapszik a megvalósítás, ezen folyadékok áramlását megfelelően befolyásolva változtatható az inertancia. Egy előző TDK dolgozatomban [33] már összehasonlítottam az előző koncepciókat a változtatható inerterre. Az általam megadott szempontok alapján az 1.2.3. ábrán is látható elrendezést ítéltam a legjobbnak, így a dolgozat további részében – ahol a fizikai megvalósítás kerül előtérbe – ezt az elrendezést fogom vizsgálni.



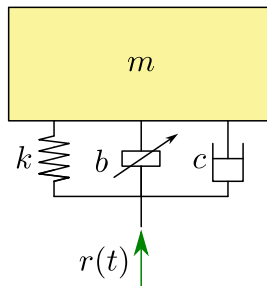
1.2.3. ábra. A változtatható inerter vizsgált koncepciója

Ez a megoldás is a forgórész tehetetlenségi nyomatékának változtatására alapul. A mozgatható agyrészt egy menetes orsón keresztül aktuálva változtatható a tömegek tengelytől mért távolsága, így az egész elrendezés tehetetlenségi nyomatéka. Ez a transzlációs oldalon a megfelelő mozgásátalakítás után az inertancia változásaként jelenik meg. A rendszerre ható gerjesztés általában nem állandó fő paraméterekkel rendelkezik. Az inertancia változtathatósága lehetővé teszi, hogy a rezgéscsillapító szakasz karakterisztikája alkalmazkodjon a gerjesztés változásához. Amennyiben az aktuátor elég gyorsan képes két inertancia érték között változtatni a rendszert, megvalósítható, hogy egy előre definiált szabályozási törvény szerint, mindig az adott gerjesztéshez legjobban illeszkedő karakterisztikát nyújtsa, így folyamatosan optimális csillapítást érve el.

1.3. Az inerterrel kiegészített rezgéscsillapítás

A már említett TDK dolgozatomban [33] azt is megvizsgáltam, hogy a hagyományos rugótagot egy változtatható inerterrel kiegészítve hogyan változik a rendszer frekvenciaátviteli függvénye. Ezek az elrendezések egy rugót és egy csillapítást tartalmaztak. Az elsőben egy rugóval párhuzamosan egy csillapítás és egy inerter soros kombinációja volt kapcsolva. Ebben az esetben az inertancia változtatása elsősorban a csillapítás hatását befolyásolta: jó közelítéssel állandó rezonanciafrekvencia mellett az amplitúdó maximuma változott. A második az 1.3.1 ábrán látható elrendezés volt, itt az inerternek köszönhetően megjelent egy antirezonancia is, illetve az inertancia változtatása a nagyítási függvény szélsőértékeit tolta el. Megvizsgáltam ezen konstrukciók kombinációját is, melyben a sorosan és a párhuzamosan kapcsolt inerter az előzőekhez hasonló hatással bírt. Ezek közül

itt a rugóstaggal párhuzamosan kapcsolt inerterrel rendelkező koncepciót fogom bemutatni, hiszen a dolgozat további részében is ezzel foglalkozom.



1.3.1. ábra. A párhuzamosan kapcsolt inerteres elrendezés

Ebben az esetben m a rezgésre érzékeny test tömege, amelyet a rezgésektől óvni szeretnénk, k a rugó merevsége, c a csillapítás csillapítási tényezője, b az inerter inertanciája, melyet változtatni lehet, $r(t)$ pedig a rendszert gerjesztő útgerjesztés. A rendszer konstans paraméterei az 1.3.1. táblázatban találhatóak.

1.3.1. táblázat. A vizsgált rendszer konstans paraméterei

Paraméter	Érték
k	270 N/m
c	3.3 Ns/m
m	1 kg

Az útgerjesztés és a tömeg amplitúdója közötti nagyítási függvény a Trent-analógia segítségével meghatározható. Ebben az esetben egy a mechanikai rendszerrel analóg áramkört lehet létrehozni, amelyre már alkalmazhatóak a Kirchoff-törvények. Mivel egy LTI (lineáris, idő-invariáns) rendszerről van szó, a számítások Laplace-tartományban elvégezhetők. Mivel az analógia sebességeket és nem elmozdulásokat használ, az útgerjesztés $r(t)$ alakja helyett a sebesség $v(t)$ függvényére van szükség, azonban ez nem jelent megkötést, hiszen az elmozdulás egyértelműen definiálja a sebességet is. Utolsó lépésben a mechanikai elemek ekvivalens impedanciáját szükséges meghatározni. Ez az elektromos esethez hasonlóan

$$Z_{\text{el}}(s) = \frac{\mathcal{L}\{u(t)\}}{\mathcal{L}\{i(t)\}} \longleftrightarrow Z_{\text{mech}}(s) = \frac{\mathcal{L}\{v(t)\}}{\mathcal{L}\{F(t)\}} = \frac{V(s)}{F(s)}, \quad (1.3.1)$$

ahol s a Laplace-operátor, $Z(s)$ az impedancia, $\mathcal{L}\{\cdot\}$ a Laplace-transzformáció, v a pólusok relatív sebessége, F pedig az elemen megjelenő erő. Ezek alapján a mechanikai impedanciák az 1.3.2. táblázat alapján írhatóak fel.

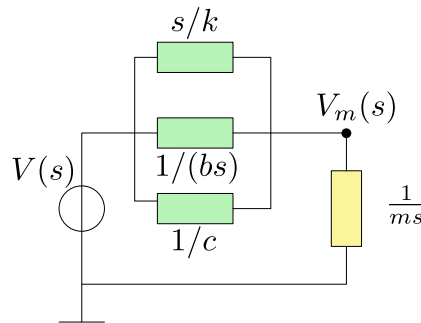
A rendszerrel analóg impedanciahálózat az 1.3.2. ábrán látható. A tömeg impedanciája az inerterhez hasonlóan számítható azzal a megkötéssel, hogy az egyik pólusnak mindenképp a referenciához kell kapcsolódnia.

Az útgerjesztés és a tömeg rezgései közötti átviteli függvény az alábbi módon számítható

$$W(s) = \frac{V_m(s)}{V(s)} = \frac{R_m(s)}{R(s)}, \quad (1.3.2)$$

1.3.2. táblázat. A mechanikai passzív elemek impedanciái

Elem	Impedancia
Rugó	s/k
Csillapítás	$1/c$
Inerter	$1/(bs)$



1.3.2. ábra. A vizsgált rendszerrel analóg impedanciahálózat

ebben az esetben a rendszer linearitása miatt a sebességre és az elmozdulásra vonatkozó átviteli függvény megegyezik. A két sebesség aránya kiszámítható a fenti kapcsolásra egy feszültségosztóként tekintve. Ekkor a rugóból, csillapításból és inerterből álló csillapító szakasz eredő impedanciája az elektromos áramkörök párhuzamos kapcsolásához hasonlóan

$$Z_{\text{par}}(s) = \frac{1}{\frac{k}{s} + c + bs} = \frac{s}{k + cs + bs^2}. \quad (1.3.3)$$

Ebből az átviteli függvény

$$W_{\text{par}}(s) = \frac{1/(ms)}{Z_{\text{par}}(s) + 1/(ms)} = \frac{bs^2 + cs + k}{(b + m)s^2 + cs + k}, \quad (1.3.4)$$

amely differenciálegyenletté transzformálva a következő alakot ölti

$$(m + b)\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k(x) = b\ddot{r}(t) + c\dot{r}(t) + kr(t). \quad (1.3.5)$$

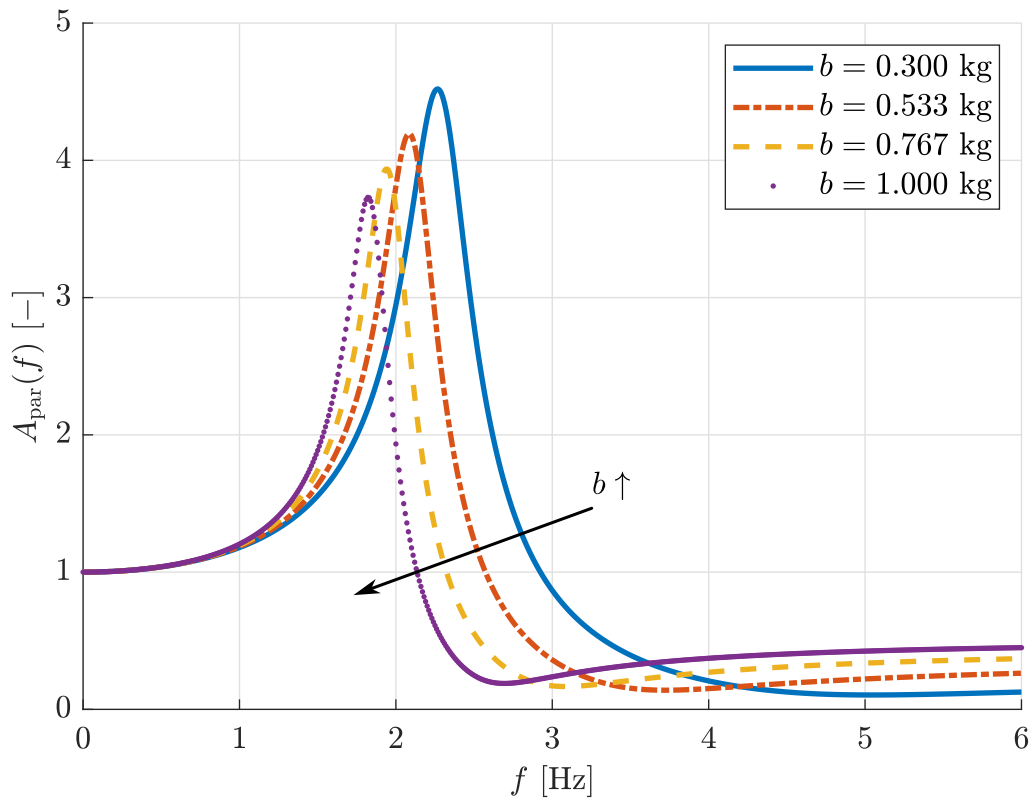
Érdemes megjegyezni, hogy ebben az esetben az átviteli függvény számlálójának és nevezőjének fokszáma azonos.

Mivel az elsődleges cél az állandósult állapotbeli erősítés meghatározása, a $W_{\text{par}}(j\omega)$ frekvenciaátviteli függvényt érdemes vizsgálni. Ez meghatározható a $W_{\text{par}}(s)$ átviteli függvényből az $s \rightarrow j\omega$ formális helyettesítéssel. Ezek után a nagyítási függvény a frekvenciaátviteli függvény abszolútértékeként nyerhető

$$A(f) = |W(2\pi jf)|, \quad (1.3.6)$$

ahol az $\omega = 2\pi f$ helyettesítéssel a gerjesztés körfrekvenciája helyett a szemléletesebb frekvencia a nagyítási függvény független változója.

Ahogy az az 1.3.3. ábrán is látható, a vizsgált elrendezésben az inerter egy antirezonanciát visz a rendszerbe, melynek frekvenciája az inertancia változtatásával állítható. Ez lehetővé teszi az antirezonancia folyamatos hangolását, a tömeghangolt csillapításokkal ellentétben kiegészítő fokozat nélkül.



1.3.3. ábra. A rendszer nagyítási függvénye különböző inertancia értékeknél

1.4. Az ideális inertancia

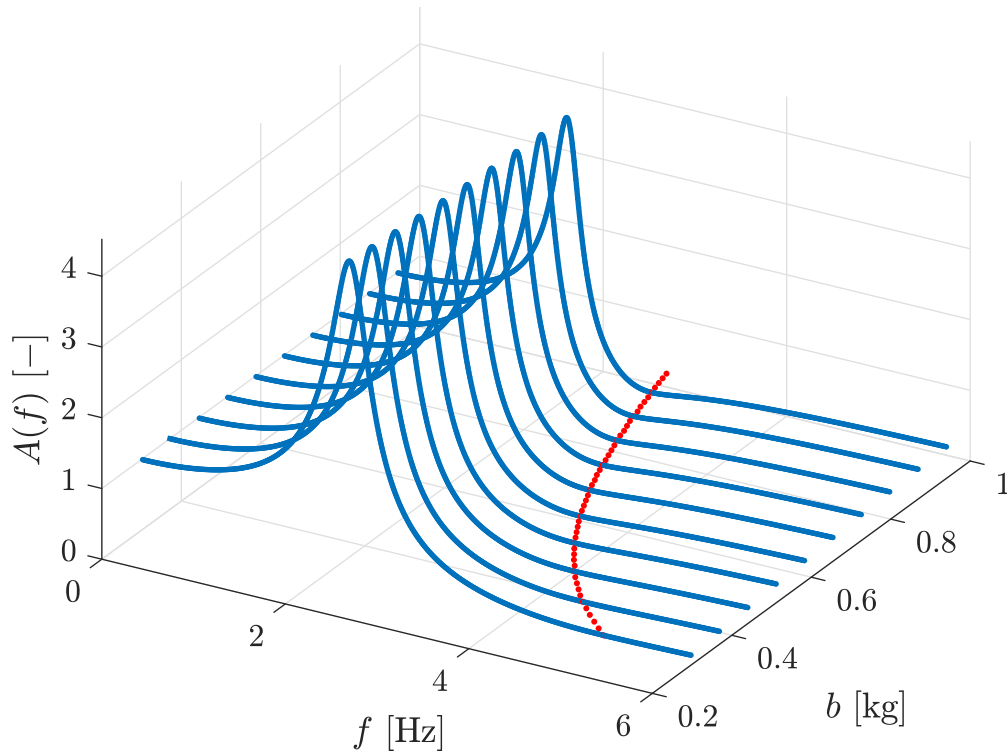
A változtatható inerterre alapuló félaktív rezgéscsillapító rendszerénél a cél az, hogy a rendszer antirezonancia-frekvenciája essen egybe a gerjesztés domináns frekvenciájával. Ehhez azt szükséges meghatározni, hogy az inertancia és az antirezonancia frekvenciája között mi az összefüggés.

A majdani szabályozás referenciajelének meghatározásához egy lehetséges út elég sok nagyítási függvényt meghatározása, majd numerikusan megkeresve a lokális minimumot egy táblázat nyerhető, amelyből interpolációval meghatározható a keresett érték. Hátrány azonban ebben az esetben, hogy a numerikus eredmények nem alkalmasak további analitikus vizsgálatokra, így az összefüggés analitikus alakját is érdemes megkeresni.

Az 1.4.1. ábrán a nagyítási függvények minimumhelyei láthatóak különböző inertancia értékek mellett. Fontos megjegyezni, hogy a lokális szélsőértékek közül mindig az antirezonanciának magasabb a frekvenciája a vizsgált paraméterek mellett, ezt a levezetés a későbbiekben ki fogja használni, ld. az (1.4.16) egyenletet. További észrevétel, hogy az antirezonancia frekvenciáját az inertancia növelése csökkenti. Az 1.3. részben levezetett átviteli függvény megfelelő arra, hogy a rendszer karakterisztikáját ábrázoljuk, azonban a komplex értelmezési tartománya és értékkészlete megnehezíti az analitikus számításokat. Emiatt a továbbiakban az átviteli függvényt egy időtartománybeli differenciálegyenlettel érdemes transzformálni, majd ezzel folytatni a vizsgálatokat. Az (1.3.4) átviteli függvény differenciálegyenlettel transzformálva tehát

$$(m + b)\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k(x) = b\ddot{r}(t) + c\dot{r}(t) + kr(t), \quad (1.4.1)$$

ahol $x(t)$ az m tömeg elmozdulása. Esetünkben a rendszernek egy szinuszos függvénnyel



1.4.1. ábra. Az antirezonancia frekvenciája különböző nagyítási függvényeknél

leírható gerjesztése van

$$r(t) = C \sin(\omega t), \quad (1.4.2)$$

illetve zérus kezdeti feltételeket teszünk fel, hiszen az állandósult állapotbeli megoldás a lényeges, melynél a különböző tranziensek már lecsengenek. Mivel egy LTI rendszerről van szó, az $x(t)$ elmozdulás is harmonikus lesz, adott esetben fáziseltolódással, így az elmozdulás állandósult állapotban az alábbi módon írható fel

$$x(t) = K \sin(\omega t) + L \cos(\omega t). \quad (1.4.3)$$

Az egyenletet ezek után az alábbi paraméterek bevezetésével lehet dimenziótlanítani

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{b+m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{k(b+m)}}, \quad \text{és} \quad \alpha = \frac{b}{b+m}. \quad (1.4.4)$$

Ebből az (1.4.1) egyenlet az alábbi formában írható fel

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = \alpha\ddot{r}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{r}(t) + \omega_n^2r(t). \quad (1.4.5)$$

A deriváltakat behelyettesítve

$$\begin{aligned} -K\omega^2 \sin(\omega t) - L\omega^2 \cos(\omega t) + 2\zeta\omega_n\omega(K \cos(\omega t) - L \sin(\omega t)) + \omega_n^2(K \sin(\omega t) + L \cos(\omega t)) = \\ = \sin(\omega t) (C\omega_n^2 - \alpha C\omega^2) + 2C\zeta\omega\omega_n \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Mivel a $\sin(\omega t)$ és a $\cos(\omega t)$ függvények lineárisan függetlenek, az egyenletnek teljesülnie kell mind a szinuszos, mind pedig a koszinuszos tagokra. Ebből az alábbi egyenletrendszer nyerhető

$$2\zeta K\omega\omega_n - L\omega^2 + L\omega_n^2 = 2C\zeta\omega_n, \quad (1.4.7)$$

$$-K\omega^2 + K\omega_n^2 - 2\zeta L\omega\omega_n = C\omega_n^2 - \alpha C\omega^2 \quad (1.4.8)$$

Bevezetve a $\lambda = \omega/\omega_n$ frekvenciahányadot, és rendezve

$$\begin{bmatrix} 2\zeta\lambda & 1 - \lambda^2 \\ 1 - \lambda^2 & -2\zeta\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\zeta\lambda \\ 1 - \alpha\lambda^2 \end{bmatrix} C, \quad (1.4.9)$$

ahol a C gerjesztési amplitúdót egységnyiinek véve megoldható az egyenletrendszer a K és L együtthatókra. Így a megoldás az

$$K = \frac{-\lambda^2(\alpha - 4\zeta^2 + 1) + \alpha\lambda^4 + 1}{(4\zeta^2 - 2)\lambda^2 + \lambda^4 + 1}, \quad (1.4.10)$$

$$L = \frac{2(\alpha - 1)\zeta\lambda^3}{(4\zeta^2 - 2)\lambda^2 + \lambda^4 + 1}. \quad (1.4.11)$$

Ezekből a nagyítási függvény az alábbi módon számítható

$$A(\lambda) = \sqrt{K^2 + L^2} = \sqrt{\frac{(\alpha\lambda^2 - 1)^2 + 4\zeta^2\lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2 + 4\zeta^2\lambda^2}}. \quad (1.4.12)$$

Ezek után az antirezonancia frekvenciája az $A(\lambda)$ függvény lokális szélsőértékeinek megkeresésével kapható meg. Lokális szélsőérték annál a λ^* értéknél lesz, melyre teljesül, hogy

$$\left. \frac{dA(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda^*} = 0. \quad (1.4.13)$$

A nagyítási függvény jellegéből adódóan ez ténylegesen lokális szélsőértéket jelent. Ezen felül, mivel a négyzetgyök függvény nemnegatív számokra szigorúan monoton, a deriválásnál a

$$K^2 + L^2 = \frac{(\alpha^2\lambda^4 - 2\alpha\lambda^2 + 4\zeta^2\lambda^2 + 1)}{(4\zeta^2 - 2)\lambda^2 + \lambda^4 + 1} \quad (1.4.14)$$

négyzetösszeg is használható. További egyszerűsítési lehetőség, hogy véges, pozitív paraméterek mellett a deriválás eredményeképpen kapott tört akkor és csak akkor lesz zérus, ha a nevezője zérus, így végeredményében az alábbi egyenletet kell megoldani

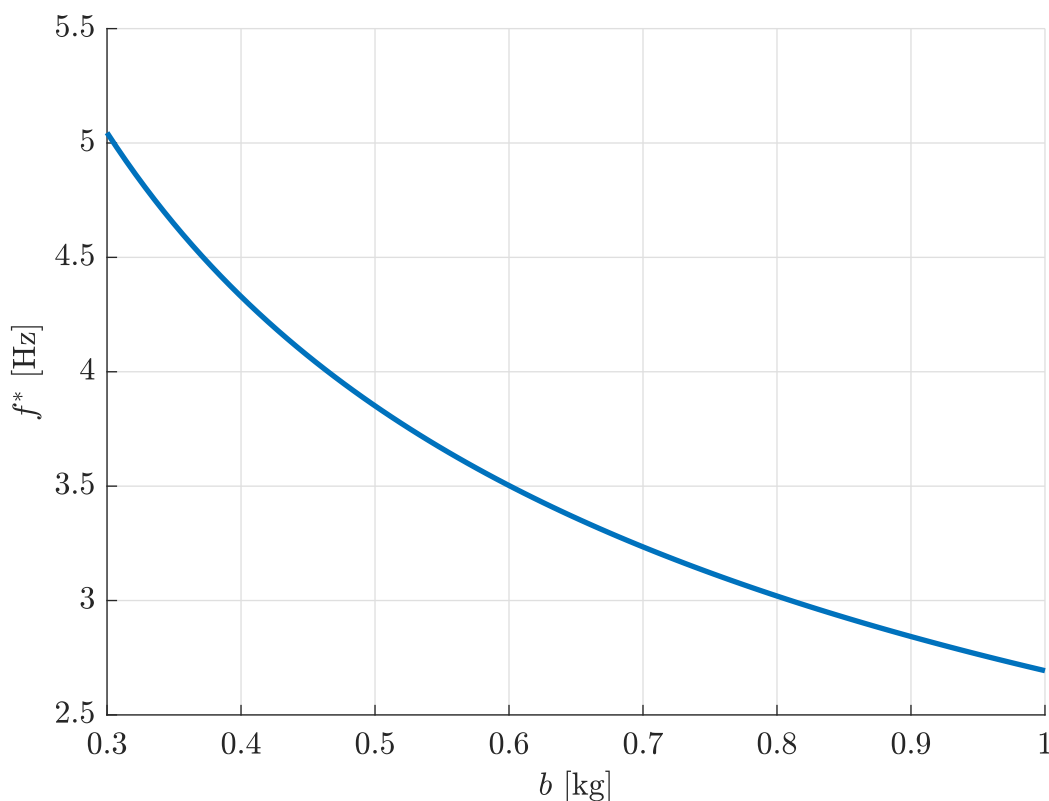
$$4(2\alpha^2\zeta^2\lambda^5 - \alpha^2\lambda^5 + \alpha^2\lambda^3 + \alpha\lambda^5 - \alpha\lambda - 2\zeta^2\lambda^5 - \lambda^3 + \lambda) = 0. \quad (1.4.15)$$

Ebből, kihasználva, hogy az antirezonancia frekvenciája a két szélsőértékhely közül a nagyobb, az általunk vizsgált paraméterekre

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{\sqrt{8(\alpha + 1)\zeta^2 + (1 - \alpha)^2} + \alpha + 1}{2\alpha - 4(\alpha + 1)\zeta^2}}, \quad (1.4.16)$$

$$f^* = \frac{\omega_n}{2\pi}\lambda^*. \quad (1.4.17)$$

A fenti összefüggés segítségével az antirezonancia frekvenciája kiszámítható a rendszer paramétereinek függvényében. Ez arra is lehetőséget biztosít, hogy egy adott antirezonancia frekvenciához szükséges inertancia értékét is kiszámítsuk, azonban az analitikus összefüggések ebben az esetben bonyolulttá válnak, melynek egyik fő oka, hogy a λ frekvenciahányad sem független az inertancia értékétől. Emiatt jobban használható megoldás az, ha a frekvenciát adjuk meg az inertancia értékeinek egy halmazára, majd az inverz számításánál ebből interpolálunk. Az így kapott függvény az 1.4.2. ábrán található.



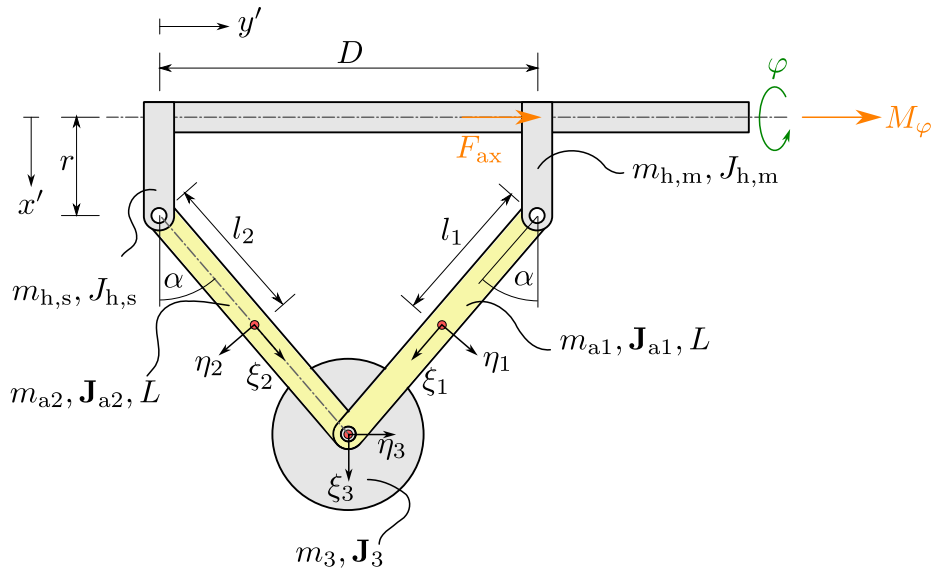
1.4.2. ábra. A csillapító szakasz antirezonancia frekvenciája az inertancia függvényében az 1.3.1 táblázat konstans paramétereivel

2. fejezet

Mechanikai modellezés

A dolgozat eddigi részében az inerte egy koncentrált paraméterű elemként volt kezelve, amely az (1.2.2) egyenletnek megfelelően viselkedik, és a kívánt b értéket bármiféle megkötés nélkül fel tudja venni mind időben, mind pedig értékben. A gyakorlatban azonban ehhez az 1.2.3 ábrán látható elrendezést kell megfelelően szabályozni. Ennek előfeltétele, hogy a vizsgált rendszert modellezzük. Ez alapjául szolgál elsősorban a modell alapú szabályozások tervezéséhez, esetleg egyes szabályozók szimulációban történő empirikus hangolásához.

2.1. Mozgásegyenlet



2.1.1. ábra. A változtatható inerte modellje

A változtatható inerte modellje a 2.1.1 ábrán látható elrendezésre alapszik. Az ábrán található karok és forgó tömeg a tengely mentén szimmetrikusan helyezkednek el, így a szabályozó megtervezéséhez elég egy ilyen összeállítást vizsgálni. Ha ezek után a valós rendszer n pár karból és n forgó tömegeből áll, ugyanazon mozgásállapot mellett a szükséges F_{ax} axiális erő is n -szeresére növekszik. Ez a modell meglehetősen általános, koncepciónálisan lehetővé teszi egy valós konstrukció modellezését, hiszen megtalálhatóak benne a

mechanizmus elemeinek lényeges paraméterei: $m_{h,m}$ a mozgó agyrész tömege, $J_{h,m}$ a tengelyre vett tehetetlenségi nyomatéka. $m_{h,s}$ és $J_{h,s}$ az álló agyrész ugyanezen paraméterei. A forgó tömeget tartó karok egy r sugárral rendelkező osztókör mentén kapcsolódnak az agyrészekhez. A karokhoz, illetve a forgó tömeghez a tömegközéppontjukban az (ξ_i, η_i, ζ_i) koordinátarendszerek illeszkednek. Ezen komponensek tömegét és tehetetlenségi nyomatékai mátrixát az (x, y, z) koordinátarendszerben számítva megfelelő indexeléssel rendre $m_\square$ és $\mathbf{J}_\square$ jelöli, ahol $\square$ az általános indexre utal. A karok tömegközéppontjának távolsága a csuklóponttól l_i , hosszuk egységesen L . A karok és agyrészek síkjával bezárt szöge α . A tengelyre ható külső nyomaték M_φ , viszont mivel a rendszert elsősorban állandósult állapotban vizsgáljuk, elhanyagoljuk az inertancia változtatása közbeni tranzieneket, így a tengely mozgását nem a nyomaték, hanem egy előírt $\varphi(t)$ elfordulás alapján modellezzük. Súrlódásmentes csúszkákat és csuklókat feltételezve, a forgó tömeg nem fordul el a ζ_3 tengely körül. Végül a két agyrész távolsága és egyben a szabályozott jellemző D , amelyet a mozgatható agyrészre ható F_{ax} axiális erővel szabályozunk. Mivel feltesszük, hogy a tengely vízszintes síkban van és a forgó tömegek szimmetrikusan vannak elrendezve, a gravitáció hatását is figyelmen kívül lehet hagyni, hiszen a szimmetria miatt a rendszer tömegközéppontja nem mozdul el függőleges irányban. A gravitáció így egyedül a csapágýerőket befolyásolja, viszont az F_{ax} erőt nem.

A dolgozatban egy leegyszerűsített modell kerül bemutatásra, mely a változtatható inerter működése szempontjából ideális. Konstrukciós szempontból az az optimális, ha a rendszer tömege teljes egészében a forgó tömegekben összpontosul, hiszen így lehet a legkisebb tömegből létrehozni az inertert, továbbá ez biztosítja az inertancia változtathatóságának legszélesebb tartományát arányaiban, hiszen adott geometria mellett ebben az esetben lesz a tömegeloszlás változása a legnagyobb. Ez az elrendezés a 2.1.2. ábrán látható. A mozgásegyenlet meghatározása során tehát az m_3 tömeg kivételével minden más elem tömege és tehetetlenségi nyomatéka elhanyagolásra kerül. (A tengely folyamatosan változó szögsebességű forgása miatt a rendszer dinamikája még így sem lesz egyszerűnek mondható.) A rendszer mozgásegyenletét egy a tengellyel együtt forgó (x', y', z') koordinátarendszerről célszerű vizsgálni. Ekkor a forgó koordinátarendszer miatt megjelennek ún. tehetetlenségi erők, az m_3 tömegre ható centrifugális-, illetve Coriolis-erők. Tekintettel arra, hogy a beavatkozás az F_{ax} erőn keresztül történik, elégséges csak az $x'y'$ síkban ébredő erőket vizsgálni. A centrifugális erő sugárirányban kifele mutat

$$F_{cf} = mR\omega^2 \quad (2.1.1)$$

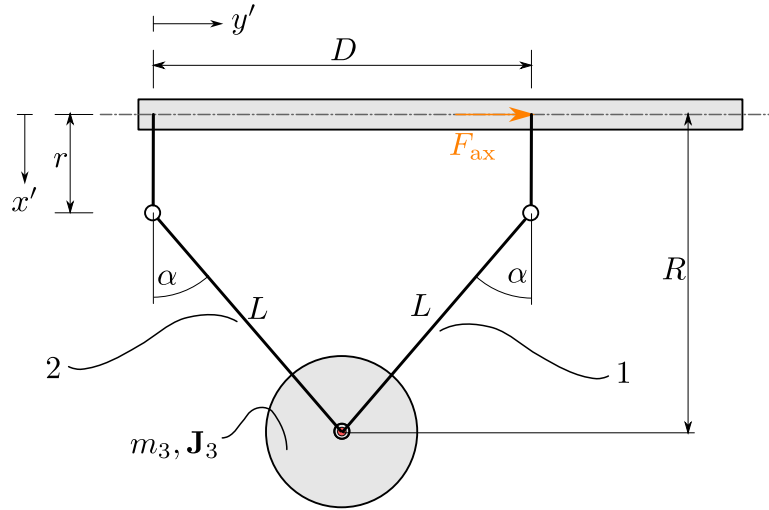
nagysággal. A Coriolis-erőt az alábbi egyenlet adja meg

$$F_{Cor} = -2m_3 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'_3, \quad (2.1.2)$$

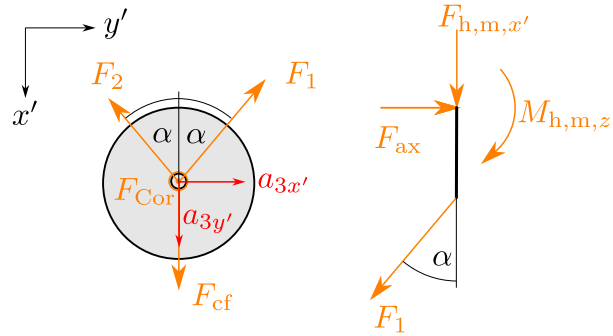
ahol $\boldsymbol{\omega}$ a forgó koordinátarendszer szögsebessége az álló koordinátarendszerhez képest – amely az y' tengellyel párhuzamos, tehát mindig rajta van az $x'y'$ síkon –, $\mathbf{v}'_3$ pedig a forgó tömeg sebessége a forgó koordinátarendszerben, amely szintén rajta van az $x'y'$ síkon, hiszen az m_3 test ebben a síkban mozog. Így a Coriolis-erő erre a síkra merőleges lesz.

A következő lépés a megfelelő szabadtest ábrák felrajzolása, majd a mozgásegyenlet felírása. Ehhez elég a mozgatható agyrészt, illetve a forgó tömeget vizsgálni, hiszen a karokat elhanyagolható tömegű rúdként modellezve a többi testre csak rúdirányú erők hatnak.

A forgó tömeg gyorsulására a mechanizmus kinematikája is ad megkötéseket, illetve



2.1.2. ábra. A változtatható inerter egyszerűsített modellje



2.1.3. ábra. A rendszer vizsgált elemeinek szabadtest ábrái

ezen keresztül fejezhetőek ki a gyorsuláskomponensek a D távolság, illetve ennek deriváltjai segítségével. A tömeg helyvektora a vesszős koordináta-rendszerben

$$\mathbf{r}'_3 = \begin{bmatrix} r_{3x'} \\ r_{3y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r + L \cos \alpha \\ L \sin \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.1.3)$$

A szögfüggvények ezek után kifejezhetőek a geometriából

$$\sin \alpha = \frac{D}{2L}, \quad (2.1.4)$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{L^2 - D^2/4}}{L}. \quad (2.1.5)$$

A tömeg forgó koordináta-rendszerben mért gyorsulása így már felírható

$$\mathbf{a}'_3 = \begin{bmatrix} a_{3x'} \\ a_{3y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{r}_{3x'} \\ \ddot{r}_{3y'} \end{bmatrix}. \quad (2.1.6)$$

Az 1-es számú rúd-ban ébredő erő kifejezhető az axiális erő segítségével a mozgó agyrésznél felírva y' irányban Newton második axiómáját. (Mivel a test tömege zérus,

az erők eredőjének is zérusnak kell lennie)

$$F_{ax} - F_{1y'} = F_{ax} - F_1 \sin \alpha = 0, \quad (2.1.7)$$

$$F_1 = \frac{F_{ax}}{\sin \alpha}. \quad (2.1.8)$$

Ezek után rátérhetünk a forgó tömeg egyenleteinek vizsgálatára. A dinamika alaptétele y' irányban

$$m_3 a_{3y'} = F_1 \sin \alpha - F_2 \sin \alpha. \quad (2.1.9)$$

Behelyettesítve F_1 -et, majd kifejezve F_2 -t

$$F_2 = \frac{F_{ax} - m_3 a_{3y'}}{\sin \alpha}. \quad (2.1.10)$$

A dinamika alaptétele x' irányban

$$m_3 a_{3x'} = F_{cf} - F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \alpha. \quad (2.1.11)$$

Behelyettesítve az erőket és rendezve

$$m_3 a_{3x'} = m_3 r_{3x'} \omega^2 + m_3 a_{3y'} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - 2F_{ax} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (2.1.12)$$

A gyorsulásokat, a szögfüggvényeket, illetve a tengelytől mért távolságot a geometriai paraméterekkel felírva megkapható a D -re vonatkozó mozgásegyenlet

$$\ddot{D} = \frac{-4L^2 m_3 D \dot{D}^2 + (D^2 - 4L^2)^2 (4F_{ax} - m_3 D \omega^2) + (2D^2 - 8L^2) m_3 r D \sqrt{4L^2 - D^2} \omega^2}{4L^2 m_3 (4L^2 - D^2)}. \quad (2.1.13)$$

Az egyenlet ebben a formájában már alkalmas numerikus szimulációk elvégzésére is, ezt a következő részben kerül bemutatásra. Fontos megjegyezni az egyenlet megoldása során, hogy a nemlinearitások mellett mind az ω szögsebesség, mind pedig az F_{ax} axiális erő időfüggő.

2.2. Numerikus szimuláció

Ahhoz, hogy a szabályozókat hangolni, illetve tesztelni lehessen érdemes valamilyen szimulációt létrehozni a rendszerről. Ehhez létrehoztam egy MATLAB szkriptet, amely a (2.1.13) differenciálegyenlet megoldására képes, illetve felépítettem a rendszert a Simscape Multibody környezetben is. Utóbbinál ténylegesen a rendszer modelljét kell felépíteni merev testekből, nem magát az egyenletet implementálni, mint Simulink környezetben, amely lehetőséget teremt a mechanizmus jelleg helyes működését illető vizsgálatra is. Itt a modell úgy épül fel, hogy az képes legyen kezelni az elsőként ismertetett összetettebb modell paramétereit, ha erre a további munkánál szükség lenne. Ez a szimulációs eljárás lehetőséget teremt arra is, hogy az egyenletek kézzel történő felírása nélkül számítson olyan értékeket, melyek egy valós konstrukció tervezéséhez szükségesek, például csapágyerőket.

Tekintettel a nemlineáris hatásokra, illetve a rendszerben megjelenő oszcillációkra, az eredmények összhangja érdekében fontos, hogy a szkript és a többtest dinamikai modell is ugyanazt az algoritmust használja. Ennek adatai a 2.2.1. táblázatban találhatók.

A MATLAB-ban használt numerikus megoldók nem képesek közvetlenül másodrendű differenciálegyenletek megoldására, ehelyett egy elsőrendű differenciálegyenletekből álló

2.2.1. táblázat. A mozgásegyenlet megoldására használt algoritmus adatai

Paraméter	Érték
Típus	ODE45
Kezdeti lépésköz	0,0001 s
Maximális lépésköz	0,001 s
Relatív tolerancia	0,001
Abszolút tolerancia	$1 \cdot 10^{-6}$

egyenletrendszerre, vagy vektormezővé kell alakítani a mozgásegyenletet. Ehhez bevezetjük a

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D \\ \dot{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

vektort. Ezek után a mozgásegyenletet a

$$\dot{\mathbf{D}} = f(t, \mathbf{D}, F_{\text{ax}}, \mathbf{p}) \quad (2.2.2)$$

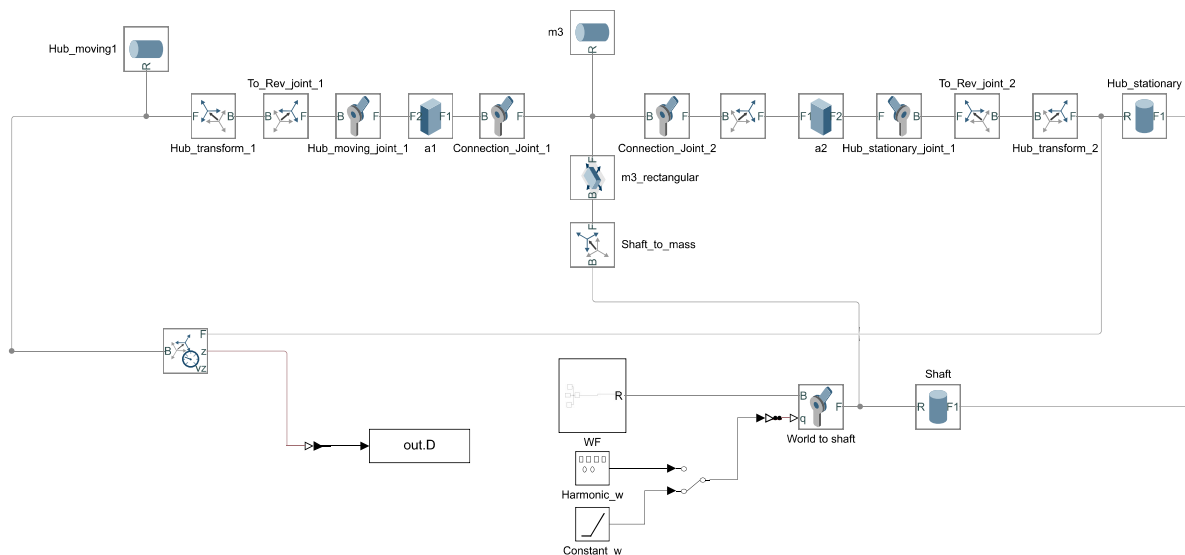
alakban kell megadni, ahol $\mathbf{p}$ az egyéb paraméterek vektorát jelöli. (Tekintettel arra, hogy a szögsebesség időben elő van írva, ezért a függvény argumentumában szereplő idő ezt egyértelműen meghatározza.) Az f deriváltat megadó függvény, amelyet a megoldó algoritmus is vár bemenetként

$$f(t, \mathbf{D}, F_{\text{ax}}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \dot{D}_1 \\ \dot{D}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{D} \\ \ddot{D}(t, \dot{D}, D, F_{\text{ax}}, m_3, L, r) \end{bmatrix}, \quad (2.2.3)$$

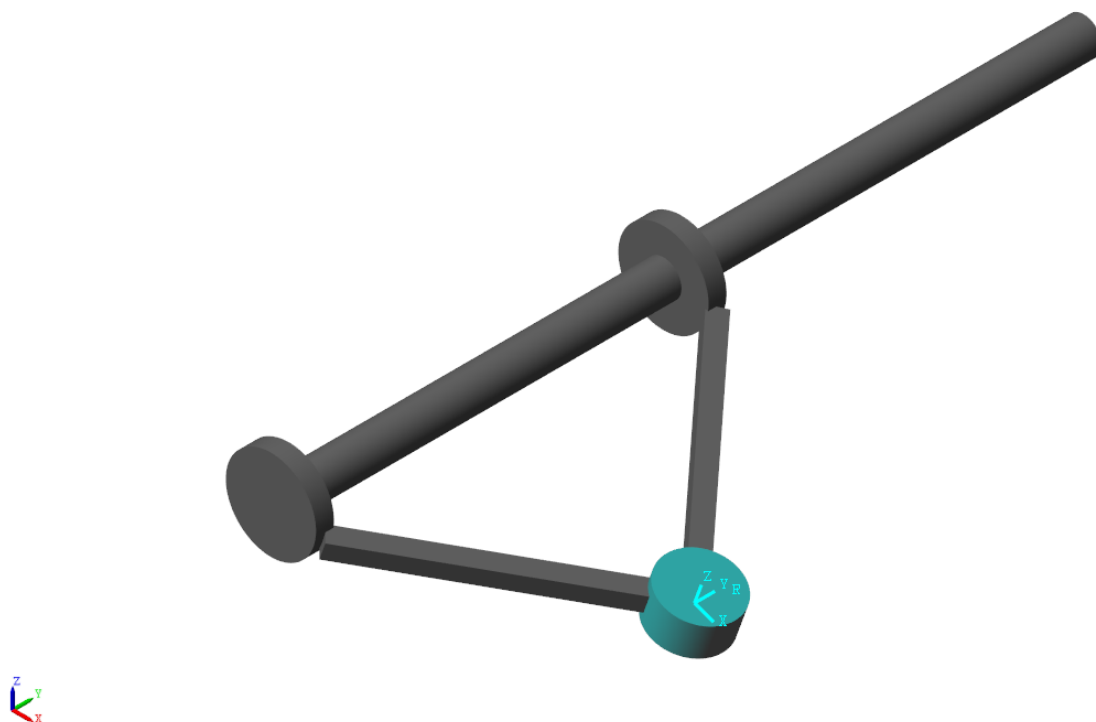
ahol $\ddot{D}(t, \dot{D}, D, F_{\text{ax}}, m_3, L, r)$ a (2.1.13) egyenlet alapján számítható. Az algoritmus ezek után a fenti függvényt, az időpillanatokat, ahol a megoldást mindenképp ismerni szeretnénk, a kezdeti feltételeket és a megoldó beállításait megkapva argumentumként előállítja a differenciálegyenlet numerikus megoldását.

A Simscape modell felépítéséhez, ahogy már említésre került, nem szükséges a fizikai egyenletek ismerete. Ehelyett a rendszert alkotó merev testek között a megfelelő kényszereket kell létrehozni, illetve megadni ezen testek paramétereit. A 2.2.1. ábrán látható a modell egy része. Ez tartalmazza a megfelelő koordinátatranszformációkat, hogy a testek saját koordinátarendszere olyan orientációban legyen, amelyet a matematikai modell felállítása során használtam, a megfelelő csuklókat, illetve még egy további kényszert `m3_rectangular` néven, amely biztosítja, hogy a forgó tömeg megtartsa az orientációját. A rendszer továbbá egy csúszkával is kiegészítésre kerül az ábrán látottakon kívül, amely biztosítja a mozgó agyrész mozgását, illetve az F_{ax} erő bevezetését. Az `out.D` feliratú blokk felel azért, hogy a D távolság változása a MATLAB Workspace-ben is megjelenjen, lehetővé téve a további feldolgozást. A kapott modell vizualizációja a 2.2.2. ábrán látható.

Ezek után a kétféle módszer eredményeit hasonlítottam össze. Első lépésben beavatkozás nélkül a rendszer szabad mozgását szimuláltam állandó, $\omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ nagyságú szögsebesség mellett, ezt mutatja a 2.2.3. ábra. Az ábrán látható negatív D értékek a valóságban ugyan nem valósulnak meg, hiszen ez azt jelenti, hogy a mozgatható agyrész az álló agyrész irányában lecsúszik a tengelyről. Ezzel szemben maga a D -re vonatkozó differenciálegyenlet tud szolgáltatni ilyen értékeket, itt pedig elsősorban a differenciálegyenlet alapján számolt, illetve a többtest dinamikai modell összehasonlítása a cél.

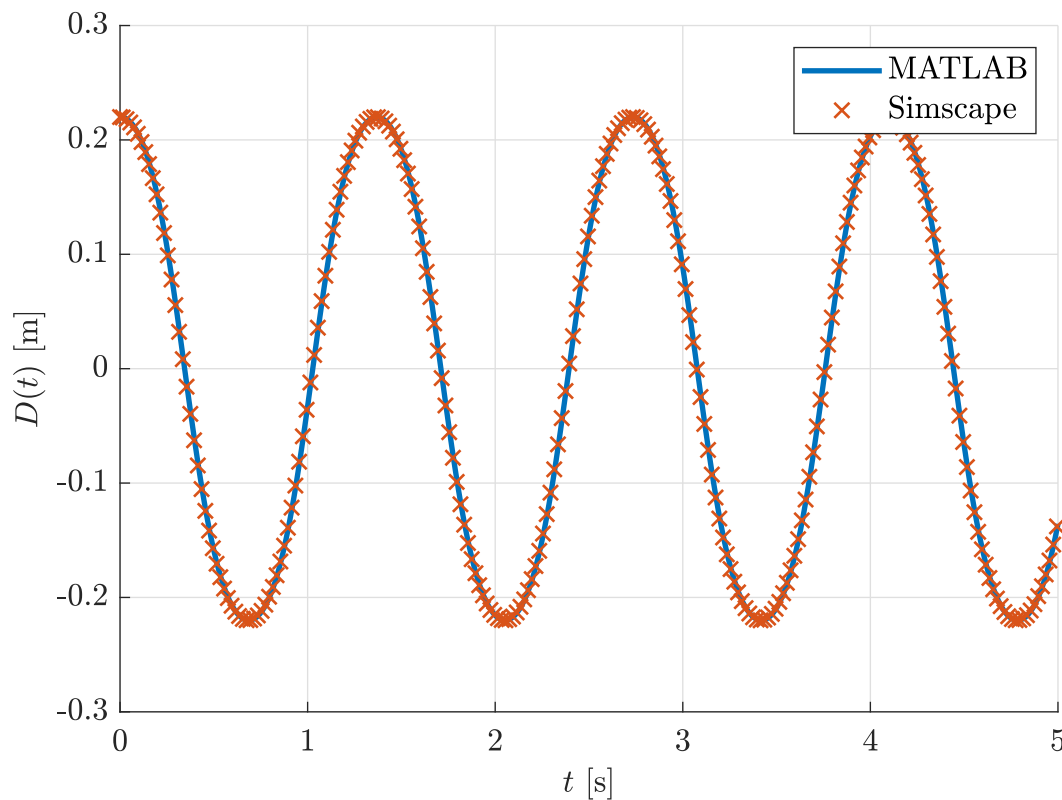


2.2.1. ábra. A rendszerről készült Simscape Multibody modell egy részlete



2.2.2. ábra. A változtatható inerter szimulációjához tartozó vizualizáció

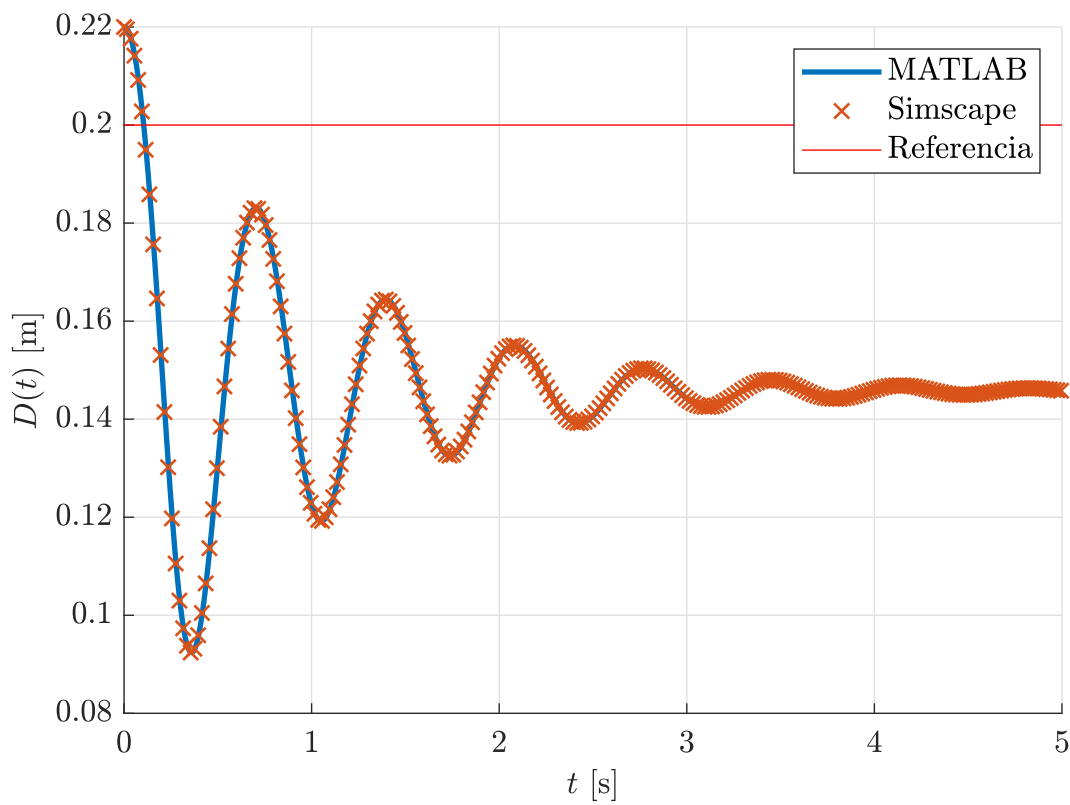
A következőkben próbaképp egy PD-szabályozót használtam 0,2 m-es referencia távolságot használva, ennek az eredménye a 2.2.4. ábrán látható. A rendszer mechanikai paramétereit a 2.2.2. táblázat mutatja.



2.2.3. ábra. A D távolság változása Simscape-pel és MATLAB-bal szimulálva, szabad mozgás esetén

2.2.2. táblázat. A szimuláció során használt mechanikai paraméterek

Paraméter	Jelölés	Érték
Karok hossza	L	0.15 m
Agyrész osztókörüi sugár	r	0,025 m
Forgó tömeg	m_3	0,015 kg



2.2.4. ábra. A D távolság változása Simscape-pel és MATLAB-bal szimulálva, PD-szabályozóval

3. fejezet

Szabályozótervezés

Az előző fejezetekben bemutatásra került a vizsgált rendszer mechanikai modellje, valamint szimulációs vizsgálata. A vizsgálat egy fontos eredménye, hogy a száraz súrlódás hatásának elhanyagolása mellett is jelentős maradó hibával terhelt a rendszer. Így a következőkben két szabályozási módot, a hagyományos PID-szabályozót, illetve a visszacsatolásos linearizálás (FBL) [34] után alkalmazott PD-szabályozót vizsgálom meg.

3.1. Bevezetés

A hagyományos PID szabályozó egyenlete a már jól ismert módon

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (3.1.1)$$

ahol $e(t)$ a hibajel, $u(t)$ pedig az ebből a $K_{\square}$ együtthatók segítségével számolt beavatkozási jel. Pozíciós szabályozáshoz ugyan hagyományosan PD-szabályozókat szoktak használni, viszont jelen esetben a maradó hiba szükségessé teszi az integráló tag használatát is.

A visszacsatolásos linearizálásnál a fő cél, hogy a rendszer nemlinearitását kiküszöböljük egy megfelelő visszacsatolással, majd ezek után a lineáris szabályozótervezésnél megszokott eljárások alkalmazhatóak. Ebben az esetben a (2.1.13) egyenletet az alábbi formában keressük a most vizsgált rendszerre

$$M(D)\ddot{D} + C(D, \dot{D}) = H(D)F_{ax}. \quad (3.1.2)$$

A fenti egyenlet paraméterei esetünkben

$$M(D) = -\frac{2L^2 m_3}{D\sqrt{4L^2 - D^2}}, \quad (3.1.3)$$

$$C(D, \dot{D}) = -\frac{m_3 \left(4L^2 \dot{D}^2 + (4L^2 - D^2) \omega^2 (2r\sqrt{4L^2 - D^2} - D^2 + 4L^2) \right)}{2(4L^2 - D^2)^{3/2}}, \quad (3.1.4)$$

$$H(D) = -\frac{2\sqrt{4L^2 - D^2}}{D}. \quad (3.1.5)$$

Ezek után a szabályozó egyenlete

$$F_{ax} = H(D)^{-1} \left(M(D)\ddot{D} + C(D, \dot{D}) \right), \quad (3.1.6)$$

ahol

$$v = \ddot{D}_d - K_d(\dot{D} - \dot{D}_d) - K_p(D - D_d), \quad (3.1.7)$$

mely egyenletben D_d a referenciajel.

A szabályozó egyenletét visszahelyettesítve a (3.1.2) egyenletbe, az alábbi differenciálegyenletre jutunk

$$(\ddot{D}_d - \ddot{D}_d) + K_d(\dot{D} - \dot{D}_d) + K_p(D - D_d) = 0, \quad (3.1.8)$$

$$\ddot{e}(t) + K_d\dot{e}(t) + K_p e(t) = 0. \quad (3.1.9)$$

Ez egy másodrendű, állandó együtthatós, közönséges differenciálegyenlet, amely alapján a szabályozó paramétereit egyszerűen meghatározhatjuk. A szabályozók megtervezése során a célom az, hogy a beállási idő T_s (az az idő amely ahhoz kell, hogy a szabályozott jellemző az állandósult állapotbeli értékének 5%-os környezetébe essen) maradjon 2 s alatt, a százalékos túllövés (PO, egységugrás válasz esetén a maximális és az állandósult állapotbeli érték különbsége, az állandósult állapothoz viszonyítva) pedig 10% alatt. Mivel a rendszer önmagában véve nemlineáris továbbá a $\varphi(t)$ gerjesztés miatt nem időinvariáns, a PID-szabályozónál egy adott gerjesztéshez tapasztalati úton hangoltam be a paramétereit, majd vizsgáltam, hogy más esetekben ezekkel hogy viselkedik a szabályozó. Ezzel szemben a visszacsatolásos linearizálásnál ezek a zavaró hatások kompenzálva vannak, így a szabályozó paramétereit a hagyományos eljárásokkal számíthatóak. Átalakítva a fenti differenciálegyenletet

$$\ddot{e}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{e}(t) + \omega_n^2 e(t) = 0. \quad (3.1.10)$$

Ez alapján

$$\omega_n^2 = K_p, \quad (3.1.11)$$

$$2\zeta\omega_n = K_d. \quad (3.1.12)$$

Ismeretesebbek továbbá a másodrendű rendszerek esetére a százalékos túllövés és a beállási idő közelítő képlete a másodrendű rendszer ugrásválaszában burkológörbéi alapján (A. függelék)

$$T_s \approx \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln \frac{100}{5}, \quad (3.1.13)$$

$$PO = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi}. \quad (3.1.14)$$

Ebből a szabályozó két paramétere már meghatározható, ezek az értékek

$$K_p = 18,3714 \frac{1}{s^2}, \quad (3.1.15)$$

$$K_d = 2,9957 \frac{1}{s}. \quad (3.1.16)$$

A szimulációs környezetet úgy építettem fel, hogy könnyen lehessen paraméterezni. Összességében a szabályozott rendszer ugrásválasza alapján a beállási időt, a százalékos túllövést, illetve a beavatkozó erő négyzetes középértékét vizsgáltam, különböző gerjesztés/zavarás mellett.

3.2. Állandó fordulatszám

Első lépésben a szabályozókat állandó szögsebesség mellett vizsgáltam. A PID-szabályozót $\omega = 5$ rad/s értéknél hangoltam be, illetve ebben az egy pontban összehasonlítottam a visszacsatolásos linearizálással. A PID-szabályozó által használt paraméterek

$$K_p = 0,23, \quad (3.2.1)$$

$$K_d = 0,07, \quad (3.2.2)$$

$$K_i = 0,5. \quad (3.2.3)$$

Az alaphelyzetre behangolt szabályozók válaszai a 3.2.1. és 3.2.2. ábrákon láthatóak. Érdeemes megfigyelni, hogy a PID-szabályozó rövidebb beállási idővel, kisebb felfutási idő mellett szabályoz. A minőségi jellemzők a két szabályozó esetén az alábbiak.

3.2.1. táblázat. A hagyományos PID és a visszacsatolásos linearizálásra épülő szabályozó minőségi jellemzői

Típus	T_s [s]	PO [%]	F_{RMS} [N]
PID	1,52	9,45	0,053
FBL	2,07	9,95	0,022

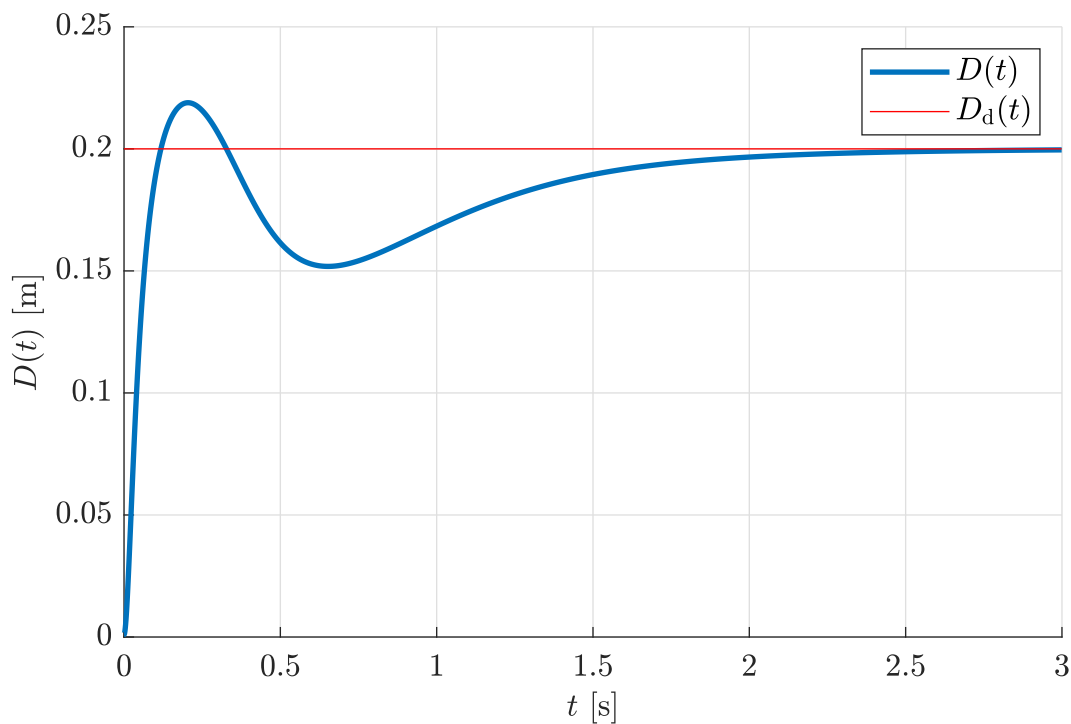
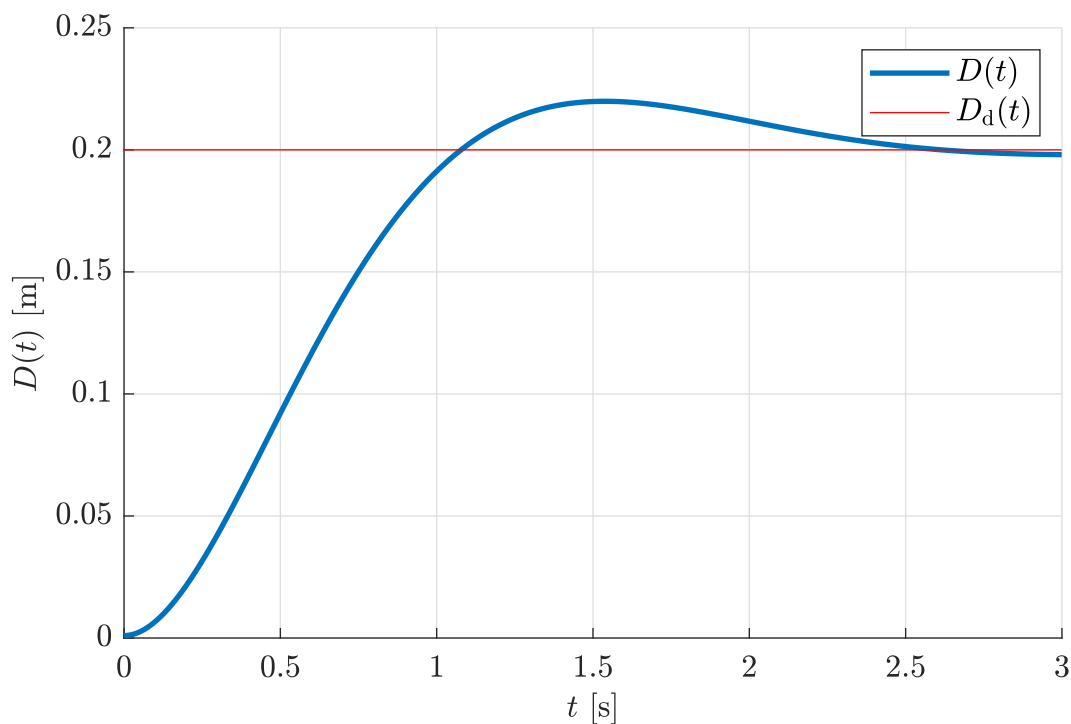
Ezekből az adatokból a PID-szabályozó a hatékonyabbnak tűnhet, hiszen az erő középértékén kívül minden mérőszámában jobb. A későbbiekben azonban látni fogjuk, hogy a visszacsatolásos linearizálás ezeket a teljesíteni kívánt minőségi jellemzőket a gerjesztési paraméterek sokkal szélesebb tartományban megtartja, így végeredményében ez lesz a jobb szabályozási megoldás. (Megjegyzendő, hogy a visszacsatolásos linearizálásnál a beállási idő nem pontosan 2 s, viszont ez egyrészt a képlet közelítő jellegéből adódik, továbbá a mechanizmus és a szimuláció adottságaiból kifolyólag a rendszer nem pontosan a $D = 0$ helyzetből indul, hiszen ebben a pozícióban a mechanizmusnak szingularitása van.)

Ezek után érdemes megvizsgálni azt, hogy a szabályozók különböző fordulatszámok mellett is ugyanolyan jól működnek-e, hiszen ekkor a forgó tömegekre ható centrifugális erő is változni fog. Az ezzel kapcsolatban elvégzett szimulációk eredményei a 3.2.3., 3.2.4 és 3.2.5. ábrákon láthatóak.

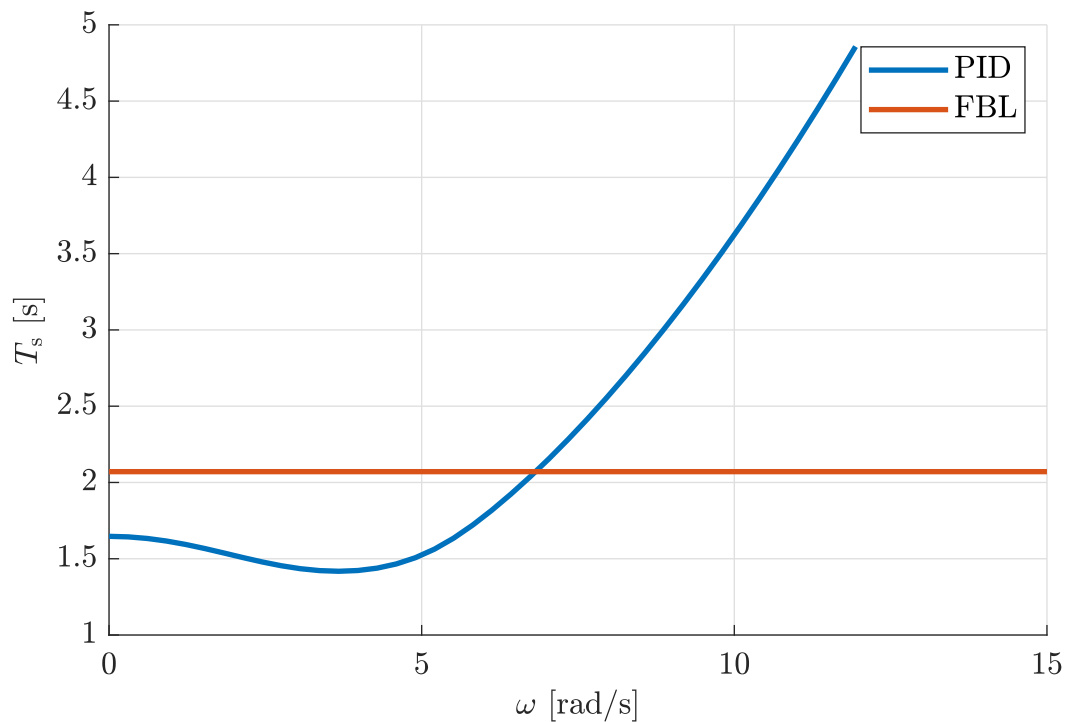
Az ábrák jól mutatják, hogy mind a beállási idő, mind a beavatkozó erő tekintetében eljön egy olyan pont, amikor a FBL eredményesebben működik a PID-szabályozónál. Észrevehető, hogy a túllövés egy idő után zérusra csökken a PID-szabályozó esetében. Ennek oka, hogy a válasz első csúcsa egy bizonyos fordulatszám felett már nem éri el a referenciát, ahogy az a 3.2.6. ábrán is látszik. Fontos észrevétel az is, hogy a beavatkozó erő kivételével a FBL beállási ideje és túllövése sem változik. Ennek az a magyarázata, visszacsatolásos linearizálás által biztosított lineáris modellel egy egyszerű PD-szabályozó is hatékonyan tud működni.

3.3. Harmonikus gerjesztés

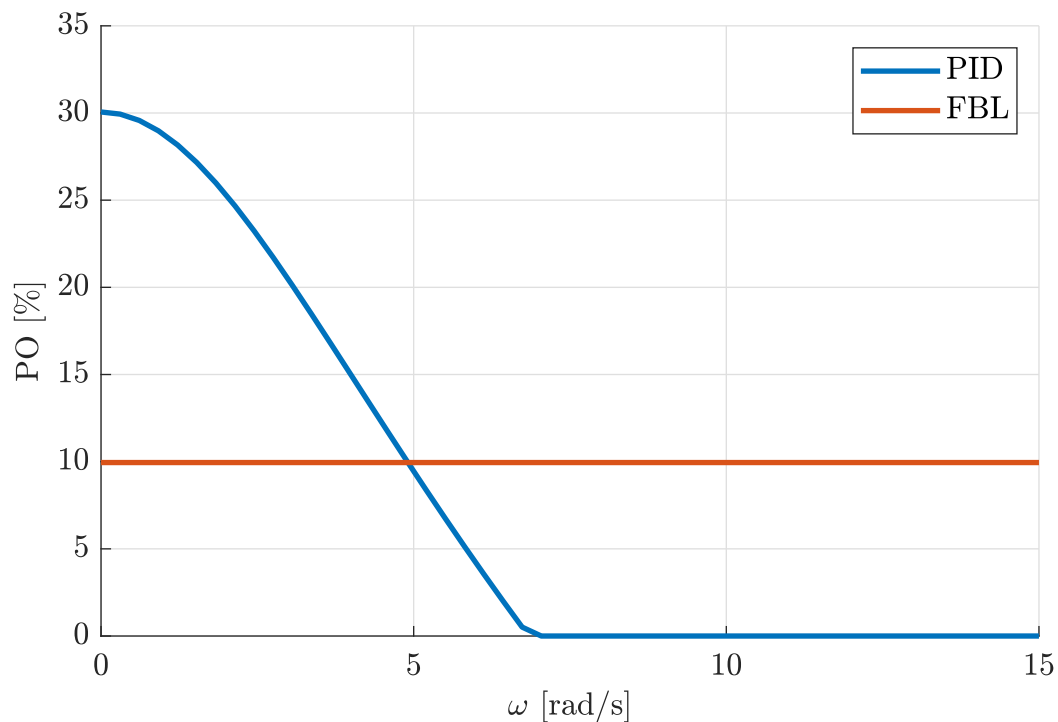
Érdeemes megvizsgálni azt az esetet is, amikor a tengelyt valamilyen harmonikus $(\varphi(t) = A \sin(2\pi ft))$ gerjesztéssel forgatjuk. Ez modellez például egy rendszerre ható harmonikus útgerjesztést. A gerjesztés amplitúdóját úgy választottam meg, hogy egy

3.2.1. ábra. A rendszer ugrásválasza $\omega = 5$ rad/s mellett PID-szabályozóval3.2.2. ábra. A rendszer ugrásválasza $\omega = 5$ rad/s mellett visszacsatolós linearizálással

teljes körbefordulás megtörténjen, a frekvenciát pedig folyamatosan változtattam. Első lépésben $f = 1$ Hz-nél néztem ugyanazt az ugrásválaszt, mint állandó szögsebességű forgásnál. Ezt mutatja a 3.3.1. és 3.3.2. ábra.

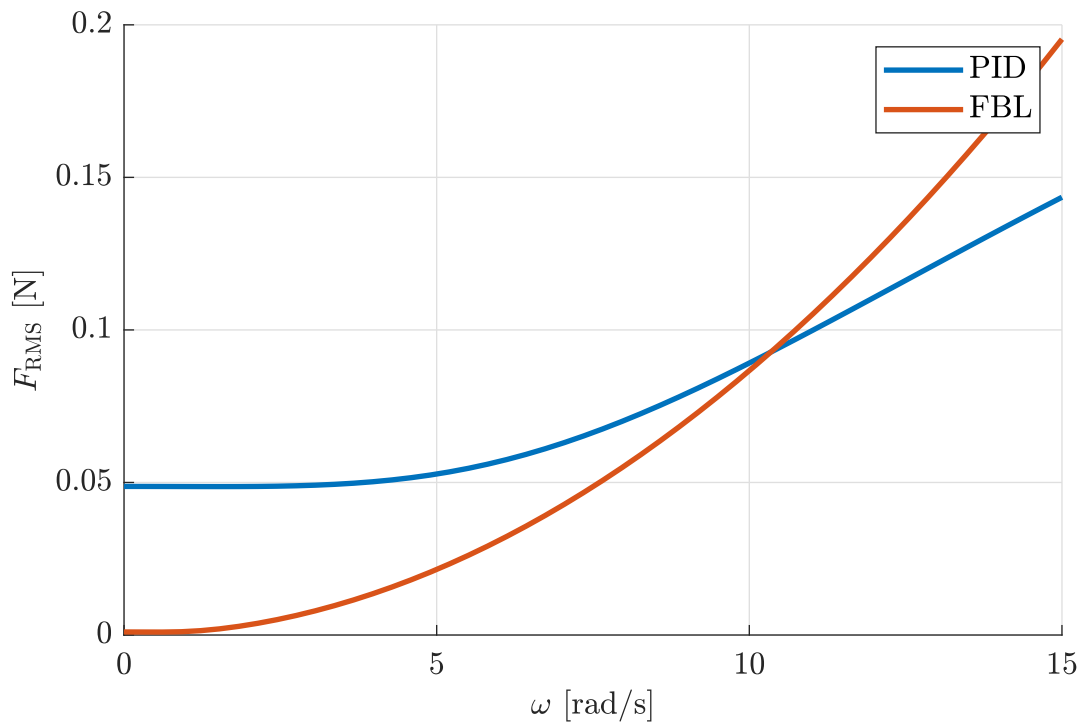


3.2.3. ábra. A beállási idők a szögsebesség függvényében

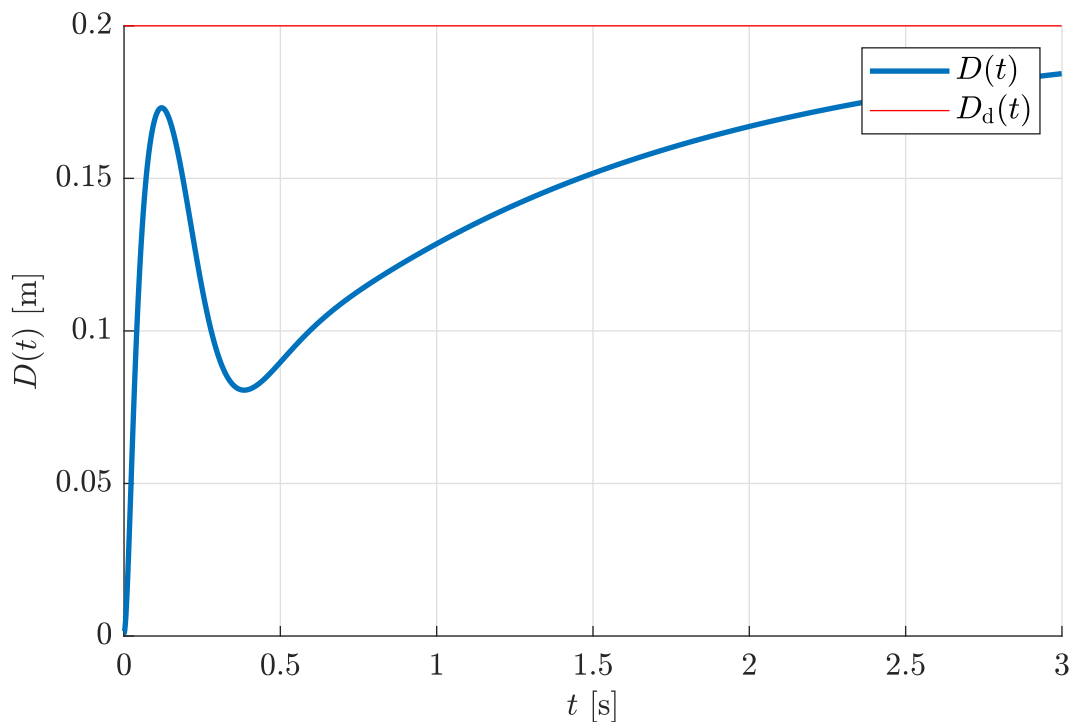


3.2.4. ábra. A százalékos túllövések a szögsebesség függvényében

Ebben az esetben a PID-szabályozó már sajnos nem volt képes a megfelelő módon irányítani a rendszert. Bizonyos mértékű nemlinearitást még kompenzálni képes, azonban a változó szögsebességgel gerjesztett rendszer esetén már nem alkalmazható. Ezek alapján

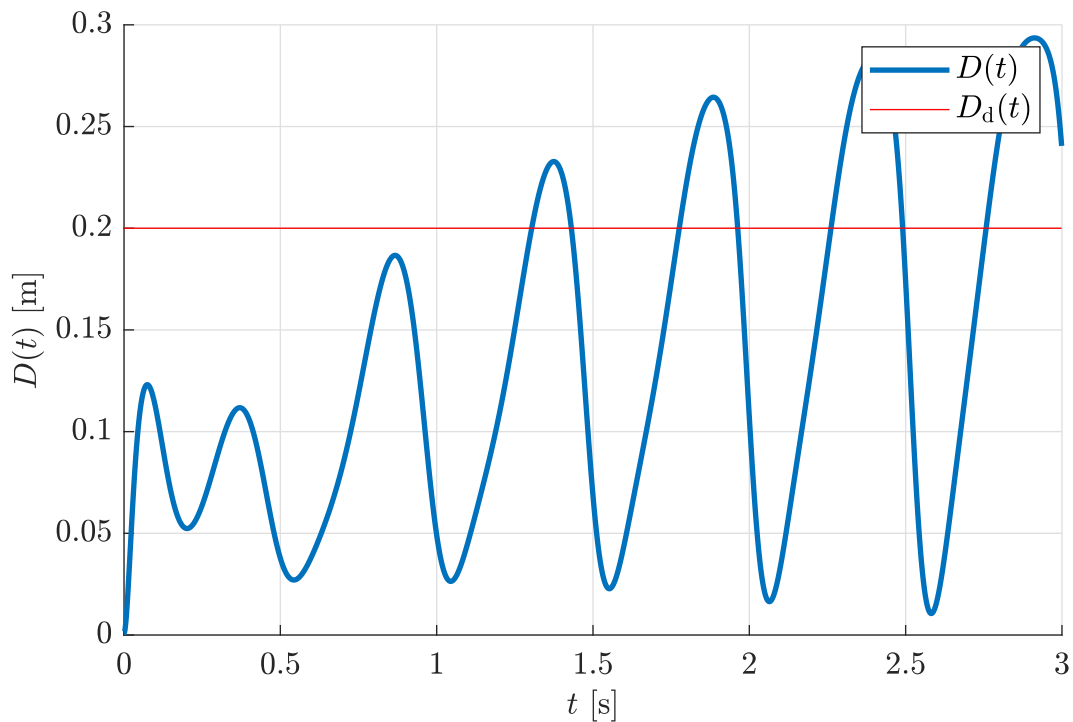


3.2.5. ábra. A beavatkozó erő négyzetes középértéke a szögsebesség függvényében

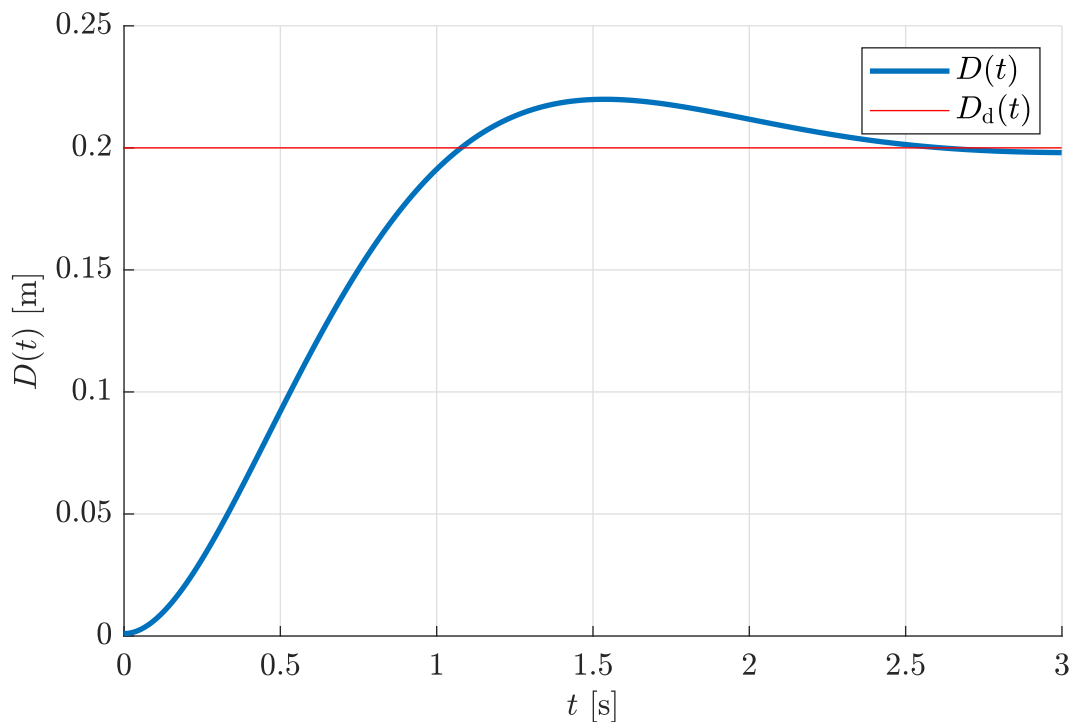


3.2.6. ábra. A rendszer ugrásválasza egy olyan esetben, ahol nincs túllövés

a továbbiakban csak a visszacsatolásos linearizálás kerül vizsgálatra. Érdeemes megfigyelni, hogy a FBL beállása gyakorlatilag teljesen megegyezik az előző esetben látottal (ld. 3.2.2. ábra). Emiatt a beállási idővel és a túllövéssel nem célszerű külön foglalkozni, hi-

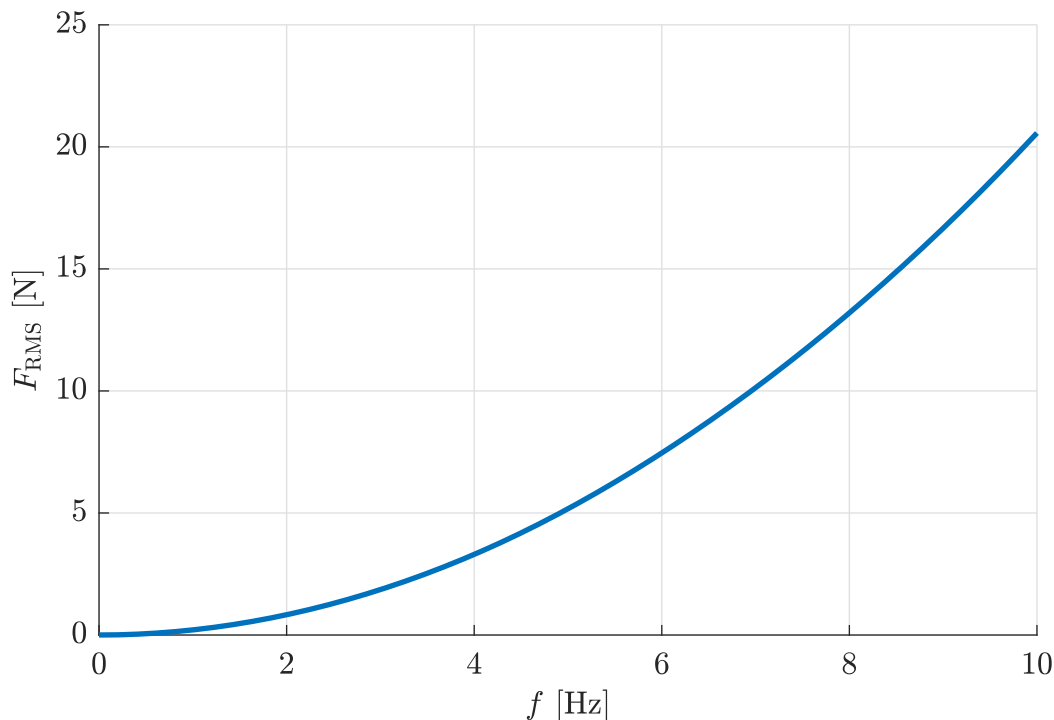


3.3.1. ábra. A rendszer ugrásválasza $f = 1$ Hz mellett PID-szabályozóval



3.3.2. ábra. A rendszer ugrásválasza $f = 1$ Hz mellett visszacsatolásos linearizálással

szen a FBL kompenzálása miatt itt is az állandó szögsebességű eset értékei jelennek meg (3.2.1. táblázat). Érdekes lehet azonban a beavatkozó erő középértéke, amelyet a 3.3.3. ábra tartalmaz. Itt a frekvencia növelésével jó közelítéssel négyzetesen nő a szükséges be-



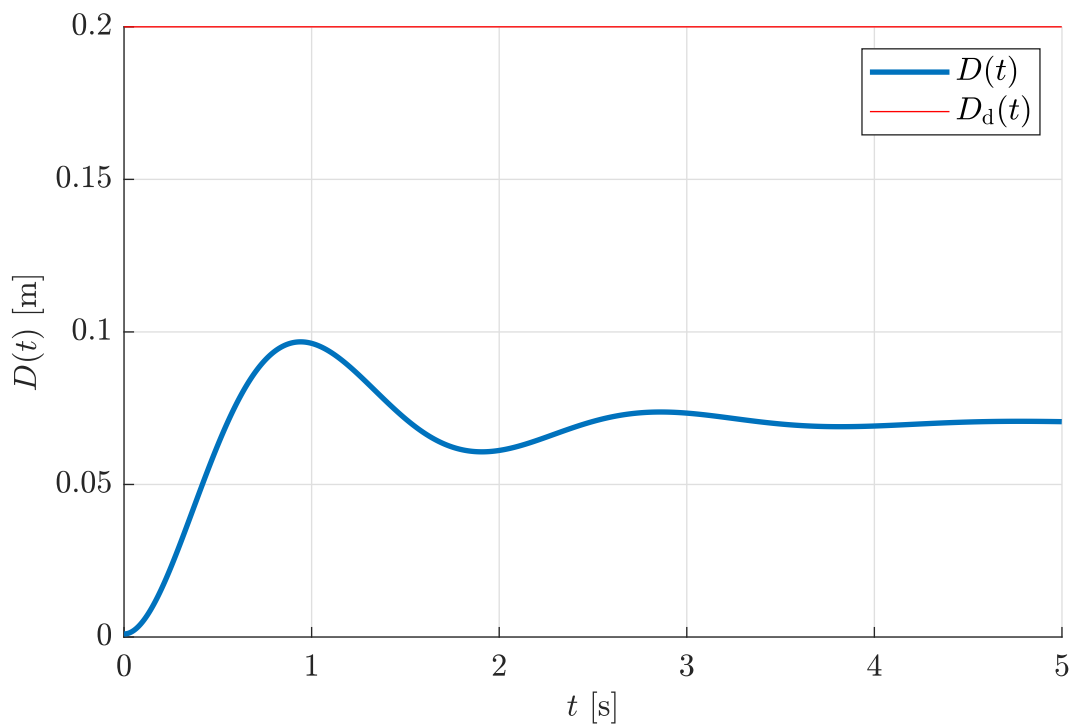
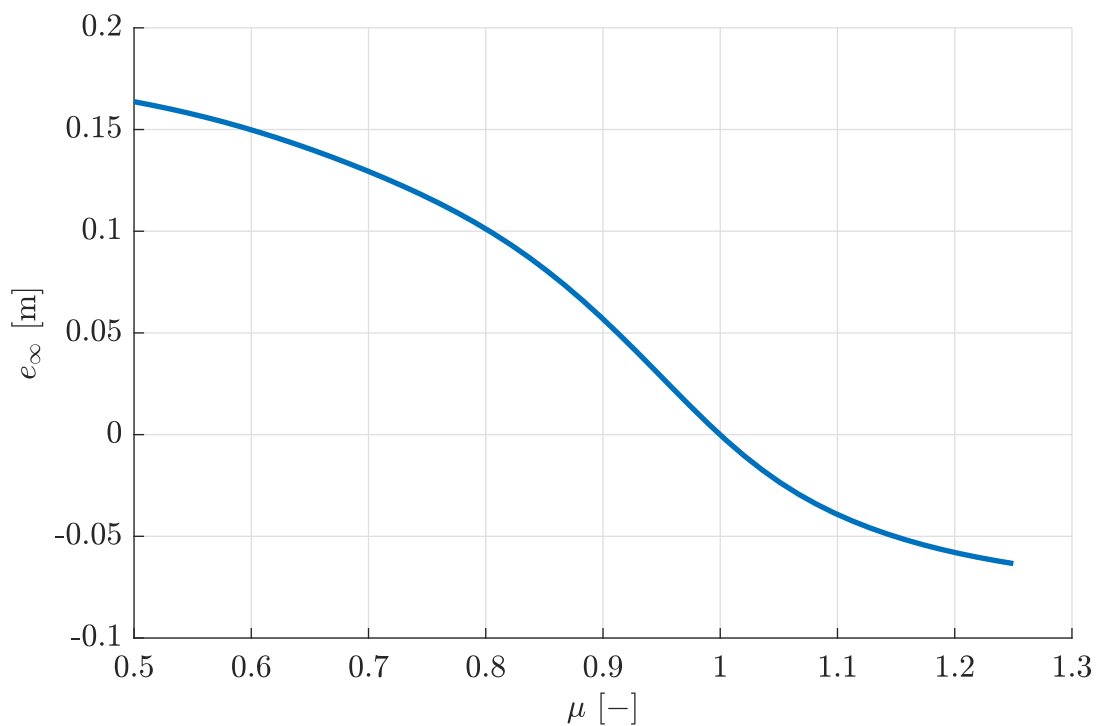
3.3.3. ábra. A beavatkozó erő négyzetes középértéke a frekvencia függvényében

avatkozó erő középértéke, hiszen a nagyobb frekvencia nagyobb szögsebességeket is jelent, így a centrifugális erőt nehezebb lesz kompenzálni.

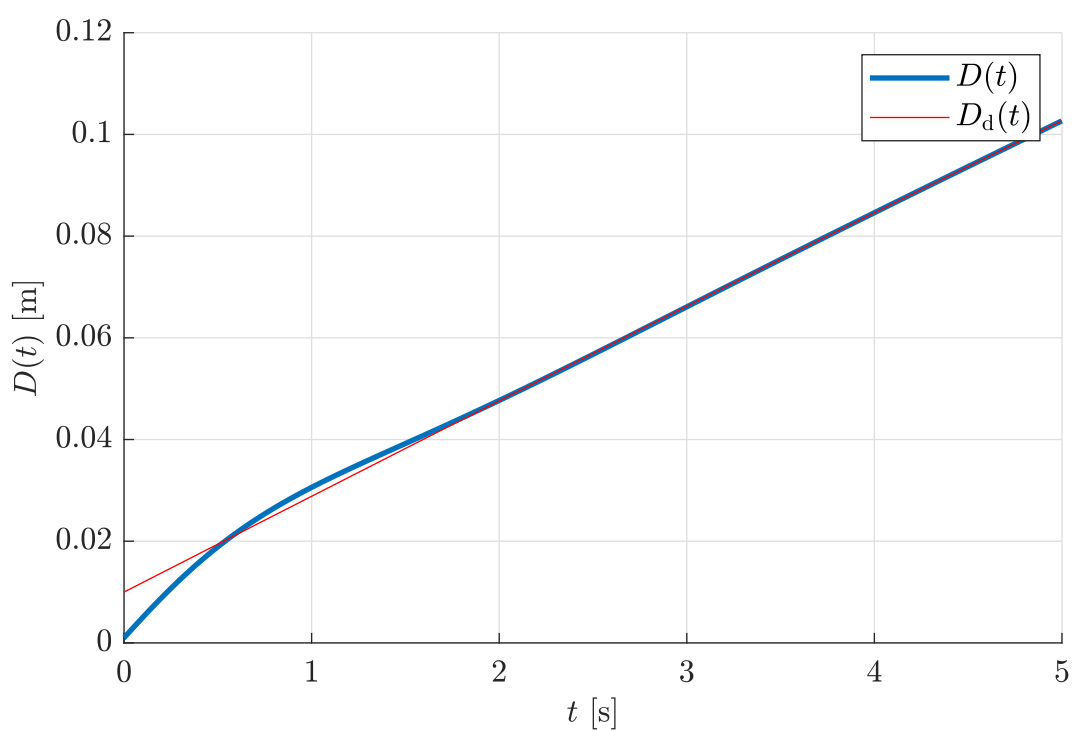
3.4. Paraméterérzékenység, trajektóriakövetés

A megtervezett szabályozónál érdemes megvizsgálni eddig nem modellezett zavaró hatásokat. A modellezés során több elem tömege is elhanyagolásra került, amely esetén a valós rendszer és a szabályozó modellje között eltérés jön létre. Ezt egy μ tömegarány bevezetésével fogom vizsgálni. Ez pontosan azt jelenti, hogy míg a „valóságban” egy forgó tömeg m_3 tömegű, addig a szabályozó $m'_3 = \mu m_3$ tömeggel számol. Erre egy példa a 3.4.1. ábrán megfigyelhető függvény. A grafikont szemügyre véve az mondható el, hogy a tömeg pontatlan ismerete maradó hibához vezet. Ennek az a magyarázata, hogy a tömeg pontatlan ismerete azt eredményezi, hogy a szabályozó által kívánt erő, illetve a centrifugális erő máshol éri el az egyensúlyt. Érdemes megvizsgálni a maradó hiba függését a μ dimenziótlan paramétertől (3.4.2. ábra). Itt az figyelhető meg, hogy a μ paraméter elég erősen befolyásolja a maradó hibát. $\mu = 1$ esetén a várt módon zérus maradó hibát kapunk, míg nagyjából $\mu = 1,25$ felett már maga a mechanizmus jelenti a korlátot, hiszen a szabályozó akkora erőt fejt ki, hogy a forgó tömegeket tartó karok teljesen kinyúlnak és párhuzamosak lesznek a tengellyel.

Egy másik fontos eset, amikor a szabályozó nem konstans, hanem folyamatosan változó referenciajelet kap. (Ezt okozza például szabályozott mechanizmus alkalmazása során, ha a változik a gerjesztés domináns frekvenciája.) Egy ilyen szimuláció eredményeit a 3.4.3. ábra mutatja. A szabályozó jól leköveti a referenciajelet, így alkalmas lehet a trajektóriakövetésre is. Ebben az esetben egy fontos kitétel van, amely a szabályozóban használt (3.1.7) v sebégdbemenet definíciójából következik. Mivel itt megjelenik a referen-

3.4.1. ábra. A rendszer beállása $\mu=0,7$ értéknél3.4.2. ábra. A szabályozás maradó hibája az m_3 tömeg pontatlan ismerete miatt figyelembe véve az eltérés előjelét

ciajel második deriváltja, fontos, hogy a generált trajektória kétszer deriválható legyen.



3.4.3. ábra. A szabályozó trajektóriakövetése

4. fejezet

Összefoglalás

A „Változtatható inerter modellezése és vizsgálata” című TDK dolgozatom [33] eredményeire (elsősorban a különböző inerterrel kiegészített csillapítások karakterisztikái, illetve a változtatható inerter általam optimálisnak ítélt koncepciója) alapozva tovább vizsgáltam a változtatható inerter működését, illetve szabályozási lehetőségeit félaktív rezgéscsillapítási probléma esetén. Elsőként áttekintettem a releváns szakirodalmat, majd egy analitikus eljárást adtam meg arra vonatkozóan, hogy milyen módon lehet kiszámolni az anti-rezonancia frekvenciáját egy adott, változtatható inerterrel rendelkező konstrukció esetén. Ezek után elkészítettem a rendszer szabályozásorientált modelljét, melyet összevetettem a szintén általam készített többtest dinamikai modellel. A dolgozat utolsó részében két szabályozót (PID-et és visszacsatolásos linearizálást) hasonlítottam össze. Arra jutottam, hogy egy valós rendszer esetében a PID-szabályozó már nem tud jól működni. A trajektóriakövetésre a FBL is alkalmas, viszont az általam végzett szimulációk alapján meglehetősen érzékeny a paraméterek hibáira. Munkám során egy meglehetősen leegyszerűsített modellel dolgoztam, így további kutatási irány lehet a modell részletesebb kidolgozása, illetve más szabályozótípusok (MPC, csúszómód) tesztelése és összehasonlítása.

A. függelék

A másodrendű rendszer minőségi jellemzői

Legyen adott az alábbi egyenlettel jellemezhető másodrendű rendszer

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = u(t), \quad (\text{A.0.1})$$

ahol $y(t)$ a rendszer kimenete, $u(t)$ a bemenet, ζ a relatív csillapítási tényező, ω_n pedig a csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvenciája. Ebből bevezethető a csillapított rendszer sajátkörfrekvenciája

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (\text{A.0.2})$$

A rendszer válaszát alulcsillapított esetben az

$$u(t) = \varepsilon(t) \quad (\text{A.0.3})$$

egységugrás függvényre vizsgáljuk. Belátható, hogy a rendszer $y(t)$ válasza

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right). \quad (\text{A.0.4})$$

A rezgések exponenciálisan lecsengenek, az

$$Y(t)_{1,2} = 1 \pm e^{-\zeta\omega_n t} \quad (\text{A.0.5})$$

burkológörbék szerint. Az $y(t)$ függvény az A.0.1. ábrán látható a burkológörbéivel együtt ($\omega_n = 3$ rad/s, $\zeta = 0.2$).

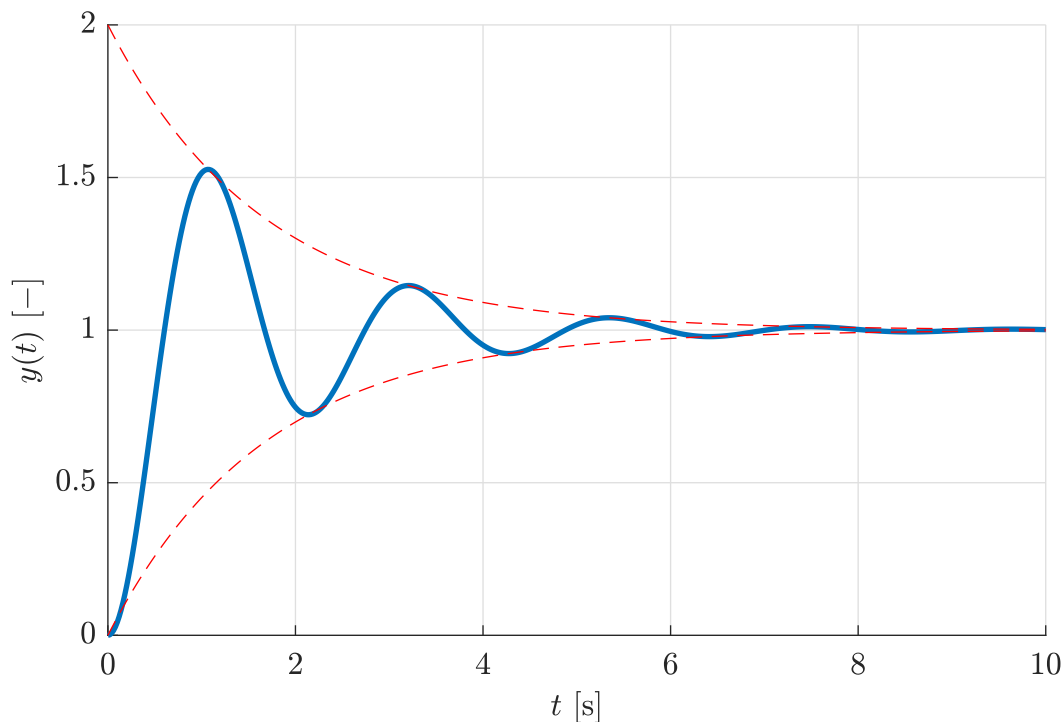
A százalékos túllövés a válasz első lokális maximumát megkeresve áll elő

$$\text{PO} = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi}. \quad (\text{A.0.6})$$

A beállási időt ($\alpha\%$ toleranciasávval) a burkológörbék alapján lehet közelíteni. Mivel a referencia ebben az esetben 1, a beállási időre a következő közelítő formula adódik

$$\alpha \approx 100 \cdot e^{-\omega_n T_{s,\alpha\%}}, \quad (\text{A.0.7})$$

$$T_{s,\alpha\%} \approx \frac{1}{\zeta\omega_n} \ln \frac{100}{\alpha}. \quad (\text{A.0.8})$$



A.0.1. ábra. A másodrendű rendszer egységugrás válasza a burkológörbékkel

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Dr. Budai Csabának a kutatásom során nyújtott segítségét. Szintén köszönöm Dr. Stépán Gábornak, a dolgozat elkészítése során átadott hasznos meglátásait. A Kulturális és Innovációs és Minisztérium **ÚNKP-22-1-I-BME-63** kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

Irodalom

- [1] Eugene I. Rivin. “Vibration isolation of precision equipment”. *Precision Engineering* 17.1 (1995), 41–56. old. ISSN: 0141-6359. DOI: [https://doi.org/10.1016/0141-6359\(94\)00006-L](https://doi.org/10.1016/0141-6359(94)00006-L). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/014163599400006L>.
- [2] Yuan Yuan Yang, Lei Wang, Jiu Bin Tan és tsai. “Self-Sensing Giant Magnetorstrictive Actuator for Active Vibration Isolation”. *Measurement Technology and Intelligent Instruments XII*. 870. köt. Applied Mechanics and Materials. Trans Tech Publications Ltd, 2017. okt., 67–72. old. DOI: [10.4028/www.scientific.net/AMM.870.67](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.870.67).
- [3] Wei Huang és Jian Xu. “Introduction”. *Optimized Engineering Vibration Isolation, Absorption and Control*. Singapore: Springer Nature Singapore, 2023, 1–14. old. ISBN: 978-981-99-2213-0. DOI: [10.1007/978-981-99-2213-0_1](https://doi.org/10.1007/978-981-99-2213-0_1). URL: https://doi.org/10.1007/978-981-99-2213-0_1.
- [4] Takeshi MIZUNO, Takefumi TOUMIYA és Masaya TAKASAKI. “Vibration Isolation System Using Negative Stiffness”. *JSME International Journal Series C Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing* 46.3 (2003), 807–812. old. DOI: [10.1299/jsmec.46.807](https://doi.org/10.1299/jsmec.46.807).
- [5] Anilkumar Shirahatti, Paruchuri Prasad, Pravin Panzade és tsai. “Optimal Design of Passenger Car Suspension for Ride and Road Holding”. *Journal of The Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering - J BRAZ SOC MECH SCI ENG* 30 (2008. márc.). DOI: [10.1590/S1678-58782008000100010](https://doi.org/10.1590/S1678-58782008000100010). URL: <https://doi.org/10.1590/S1678-58782008000100010>.
- [6] Julian Borowski, Ralf Stetter és Stephan Rudolph. “Design, Dimensioning and Simulation of Inerters for the Reduction of Vehicle Wheel Vibrations—Case Studies”. *Vehicles* 2 (2020. jún.), 424–437. old. DOI: [10.3390/vehicles2030023](https://doi.org/10.3390/vehicles2030023). URL: <https://doi.org/10.3390/vehicles2030023>.
- [7] Yudai Nemoto, Minoru Takino, Shota Tsukamoto és tsai. “Numerical study of a point absorber wave energy converter with tuned variable inerter”. *Ocean Engineering* 257 (2022), 111696. old. ISSN: 0029-8018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111696>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801822010514>.
- [8] Keita Sugiura, Yuta Watanabe, Takehiko Asai és tsai. “Experimental characterization and performance improvement evaluation of an electromagnetic transducer utilizing a tuned inerter”. *Journal of Vibration and Control* 26.1-2 (2020), 56–72. old. DOI: [10.1177/1077546319876396](https://doi.org/10.1177/1077546319876396). eprint: <https://doi.org/10.1177/1077546319876396>. URL: <https://doi.org/10.1177/1077546319876396>.

- [9] Yujie Shen, Long Chen, Xiaofeng Yang és tsai. “Improved design of dynamic vibration absorber by using the inerter and its application in vehicle suspension”. *Journal of Sound and Vibration* 361 (2016), 148–158. old. ISSN: 0022-460X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.06.045>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X15005465>.
- [10] Aziz Sezgin és Yunus Ziya Arslan. “Analysis of the vertical vibration effects on ride comfort of vehicle driver”. *Journal of Vibroengineering* 14 (2012. jún.), 559–571. old.
- [11] Hans B. Pacejka. “Chapter 8 - Applications of transient tyre models”. *Tyre and Vehicle Dynamics (Second Edition)*. Szerk. Hans B. Pacejka. Second Edition. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2006, 364–411. old. ISBN: 978-0-7506-6918-4. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-075066918-4/50008-3>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780750669184500083>.
- [12] Daniel Fischer és Rolf Isermann. “Mechatronic semi-active and active vehicle suspensions”. *Control Engineering Practice* 12.11 (2004). Mechatronic Systems, 1353–1367. old. ISSN: 0967-0661. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2003.08.003>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0967066103001771>.
- [13] Yinlong Hu, Michael Z.Q. Chen, Zhan Shu és tsai. “Analysis and optimisation for inerter-based isolators via fixed-point theory and algebraic solution”. *Journal of Sound and Vibration* 346 (2015), 17–36. old. ISSN: 0022-460X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.02.041>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X15002163>.
- [14] Allen Bronowicki, Rhonda Macdonald, Yekta Gursel és tsai. “Dual stage passive vibration isolation for optical interferometer missions”. *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering* 4852 (2003. febr.). DOI: 10.1117/12.460731. URL: <https://doi.org/10.1117/12.460731>.
- [15] Michele Zilletti. “Feedback control unit with an inerter proof-mass electrodynamic actuator”. *Journal of Sound and Vibration* 369 (2016), 16–28. old. ISSN: 0022-460X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.01.035>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X1600064X>.
- [16] Mahmoud Ashraf. “Mechatronic Suspension Systems: A Survey and Directions for Future Work”. *American Journal of Engineering Research* 10 (2021. jan.), 237–244. old.
- [17] Mehdi Ahmadian és Christopher A. Pare. “A Quarter-Car Experimental Analysis of Alternative Semiactive Control Methods”. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 11.8 (2000), 604–612. old. DOI: 10.1106/MR3W-5D8W-OLPL-WGUQ. eprint: <https://doi.org/10.1106/MR3W-5D8W-OLPL-WGUQ>. URL: <https://doi.org/10.1106/MR3W-5D8W-OLPL-WGUQ>.
- [18] R.A. Ibrahim. “Recent advances in nonlinear passive vibration isolators”. *Journal of Sound and Vibration* 314.3 (2008), 371–452. old. ISSN: 0022-460X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.01.014>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X08000436>.

- [19] Chunchuan Liu, Xingjian Jing, Steve Daley és tsai. “Recent advances in micro-vibration isolation”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 56-57 (2015), 55–80. old. ISSN: 0888-3270. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2014.10.007>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327014004014>.
- [20] Dario Richiedei és Iacopo Tamellin. “Active Approaches to Vibration Absorption through Antiresonance Assignment: A Comparative Study”. *Applied Sciences* 11.3 (2021). ISSN: 2076-3417. DOI: [10.3390/app11031091](https://doi.org/10.3390/app11031091). URL: <https://www.mdpi.com/2076-3417/11/3/1091>.
- [21] P. Brzeski, M. Lazarek és P. Perlikowski. “Experimental study of the novel tuned mass damper with inerter which enables changes of inertance”. *Journal of Sound and Vibration* 404 (2017), 47–57. old. ISSN: 0022-460X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.05.034>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X17304236>.
- [22] Xinpeng Liu, Yingwen Yang, Yi Sun és tsai. “Tuned-Mass-Damper-Inerter Performance Evaluation and Optimal Design for Transmission Line under Harmonic Excitation”. *Buildings* 12.4 (2022). ISSN: 2075-5309. DOI: [10.3390/buildings12040435](https://doi.org/10.3390/buildings12040435). URL: <https://www.mdpi.com/2075-5309/12/4/435>.
- [23] Laurentiu Marian és Agathoklis Giaralis. “Optimal design of a novel tuned mass-damper–inerter (TMDI) passive vibration control configuration for stochastically support-excited structural systems”. *Probabilistic Engineering Mechanics* 38 (2014), 156–164. old. ISSN: 0266-8920. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.pro bengmech.2014.03.007>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266892014000216>.
- [24] James Clerk Maxwell. “VIII. A dynamical theory of the electromagnetic field”. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 155 (1865), 459–512. old. DOI: [10.1098/rstl.1865.0008](https://doi.org/10.1098/rstl.1865.0008). eprint: <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rstl.1865.0008>. URL: <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rstl.1865.0008>.
- [25] F. A. Firestone. “A NEW ANALOGY BETWEEN MECHANICAL AND ELECTRICAL SYSTEMS”. *The Journal of the Acoustical Society of America* 4.3 (1933), 249–267. old. DOI: [10.1121/1.1915605](https://doi.org/10.1121/1.1915605). eprint: <https://doi.org/10.1121/1.1915605>. URL: <https://doi.org/10.1121/1.1915605>.
- [26] Horace M. Trent. “Isomorphisms between Oriented Linear Graphs and Lumped Physical Systems”. *The Journal of the Acoustical Society of America* 27.3 (1955), 500–527. old. DOI: [10.1121/1.1907949](https://doi.org/10.1121/1.1907949). eprint: <https://doi.org/10.1121/1.1907949>. URL: <https://doi.org/10.1121/1.1907949>.
- [27] M.C. Smith. “Synthesis of mechanical networks: the inerter”. *IEEE Transactions on Automatic Control* 47.10 (2002), 1648–1662. old. DOI: [10.1109/TAC.2002.803532](https://doi.org/10.1109/TAC.2002.803532).
- [28] Michael Z.Q. Chen, Christos Papageorgiou, Frank Scheibe és tsai. “The missing mechanical circuit element”. *IEEE Circuits and Systems Magazine* 9.1 (2009), 10–26. old. DOI: [10.1109/MCAS.2008.931738](https://doi.org/10.1109/MCAS.2008.931738).
- [29] Erdős Gergely. “Inertert tartalmazó felfüggesztés vizsgálata kerékagymotoros járművek esetén”. Dipl. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2015.

- [30] Mingde Gong és Hao Chen. “Variable damping control strategy of a semi-active suspension based on the actuator motion state”. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control* 39.3 (2020), 787–802. old. DOI: 10.1177/1461348418825416. eprint: <https://doi.org/10.1177/1461348418825416>. URL: <https://doi.org/10.1177/1461348418825416>.
- [31] M. Lazarek, P. Brzeski és P. Perlikowski. “Design and modeling of the CVT for adjustable inerter”. *Journal of the Franklin Institute* 356.14 (2019). Special Issue on Inerter-based Systems, 7611–7625. old. ISSN: 0016-0032. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2018.11.011>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0016003218306902>.
- [32] Wei-Min Zhong, An-Ding Zhu, Xian-Xu Frank Bai és tsai. “Integrated Shock Absorber With Both Tunable Inertance and Damping”. *Frontiers in Materials* 7 (2020). ISSN: 2296-8016. DOI: 10.3389/fmats.2020.00204. URL: <https://www.frontiersin.org/article/10.3389/fmats.2020.00204>.
- [33] Pácsonyi Péter. “Változtatható inerter modellezése és vizsgálata”. TDK dolgozat. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 2022.
- [34] Béla Lantos. *Irányítási rendszerek elmélete és tervezése II*. Akadémiai Kiadó, 2016. ISBN: 978 963 059 849 1. DOI: 10.1556/9789630598491. URL: https://mersz.hu/hivatkozas/m136ireet_chap11_level2_sec11.4.1_p7#m136ireet_chap11_level2_sec11.4.1_p7.