OTDK dolgozat

Kvantum-feljavított kozmológia

Nagy József

2024

Témavezető: Dr. Sailer Kornél

Köszönetnyílvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Dr. Sailer Kornélnak, aki időt és energiát nem spórolva segítette a dolgozat létrejöttét, nélküle nem valósulhatott volna meg. Az együtt töltött munka során jól éreztem magam, nagyon motiváló volt, így felkeltette még jobban a téma iránti érdeklődésemet.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **1**

2. Elméleti háttér [1],[2] **3**

2.1. Az Univerzum dinamikája 3

2.1.1. A kezdeti feltételek 5

2.1.2. A felfúvódás feltételei 6

2.2. A felfúvódó világegyetem 7

2.2.1. Skalármező dinamikája 7

2.2.2. Lassú gördüléses felfúvódás 8

2.2.3. $V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$ felfúvódás 8

3. Klasszikus esetbeli felfúvódás vizsgálata **10**

3.1. A felfúvódás kezdetének meghatározása 11

3.2. A felfúvódás végének meghatározása 11

3.3. A klasszikus eset jósága 12

4. A kvantum-feljavított esetbeli felfúvódás **13**

4.1. A kvantum-feljavítás 13

4.2. A kvantum-feljavított esetbeli felfúvódás vizsgálata 14

4.2.1. Az első -UV- szakasz 14

4.2.2. A második -átmeneti- szakasz 16

4.3. A kvantum-feljavított eset jósága 20

5. A klasszikus és a kvantum-feljavított felfúvódás összehasonlítása **21**

6. A kvantum-feljavított eset további vizsgálata **23**

6.1. Kezdőfeltételekre való érzékenység 23

6.2. A tömegparamétertől való érzékenység 24

7. Összefoglalás **28**

A. függelék: az első -UV- szakasz analitikusan közelített összefüggései **29**

1. Bevezetés

A standard kozmológiai modell, a ΛCDM szerint a Planck-korszakból kiemelkedő Világegyetem közel exponenciális mértékű tágulást, úgynevezett kozmológiai felfúvódást (inflációt) szenvedett el. Ennek egyik lehetséges magyarázata, hogy jelen volt egy skalármező, az inflatonmező, amelynek hatására úgynevezett lassú-gördüléses felfúvódás jött létre. A ΛCDM ugyanakkor nem veszi figyelembe azt, hogy a Nagy Bumm után és talán még a felfúvódás kezdetén is a gravitáció és a kvantumfizika egyaránt fontos szerepet játszott. A kvantumgravitációs hatások figyelembevételének egyik lehetséges módja, hogy a kozmológiai fejlődést leíró egyenletekben a gravitációs csatolásokat, azaz a newtoni gravitációs állandót és a kozmológiai állandót az energiaskálától függő csatolásokra cseréljük, amelyeket az einsteini gravitáció (pályaintegrálosan kvantált) elméletének a renormálási csoport módszerével történő vizsgálatával határoztak meg. A jelen dolgozatban az a célom, hogy a világegyetem egy erősen leegyszerűsített modellje keretében megmutassam egyrészt, hogy fennáll az inflatonmező által vezérelt, a kozmológiai megfigyelésekkel összeegyeztethető kb. e^{60}-szoros mértékű lassú gördüléses felfúvódás lehetősége. Másrészt, össze kívánom hasonlítani a realisztikus felfúvódás kezdetének idejét és időtartamát a kvantum-feljavított és a klasszikus esetben.

A dolgozat egy olyan világegyetem felfúvódásának a vizsgálatáról szól, a melyről az alábbiakat tesszük fel: *(1)* térben homogén és izotróp és zérus térgörbülettel rendelkezik, *(2)* jelen van benne a newtoni gravitációs vonzás mellett a kozmológiai csatolás által képviselt gravitációs taszítás is, *(3)* továbbá a világegyetemet egy nem-önkölcsönható φ skalármező uralja, az úgynevezett inflatonmező. A vizsgálatot két esetben végzem el; a klasszikus jól ismert esettel fogom kezdeni: a Planck2015 adatok alapján becsült kezdeti feltételek és m paraméterérték felhasználásával meghatározom a Friedmann-egyenleteknek a realisztikus felfúvódást reprodukáló megoldását. Ezt követően térek rá a kvantum-feljavított eset vizsgálatára. A kvantum-feljavítás során a Friedmann-egyenletekben kicserélem kozmológiai és gravitációs állandókat a nekik megfelelő energia-skálafüggő társaira, amelyeket a szakirodalomból ismerünk. Az energiaskála időfüggésének meghatározása céljából további feltételként megkövetelem a skalármezőre vonatkozó Klein-Gordon egyenlet (így a vele ekvivalens kontinuitási egyenlet) érvényességét. Az inflatonmező potenciáljának a legegyszerűbb

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$$

alakot választom.

A klasszikus modellben a lassú-gördüléses felfúvódás olyan esetben jelentkezik a későbbi fejlődés során, amikor az inflatonmező kinetikus energiasűrűsége a Nagy Bumm után közvetlenül lényegesen meghaladja az inflatonmező potenciális energisűrűségét. A kvantum-feljavított esetben ezt munkahipotézisként fogadtam el, ami lehetővé tette, hogy meghatározzam a dinamikai egyenleteknek a szingularitást közvetlenül követő időszakra vonatkozó, közelítő analitikus megoldását. Végül a dinamikai egyenletek numerikus megoldásához a kezdeti feltételeket ezen analitikus becslés alapján határoztam meg.

A dolgozat felépítése a következő. A 2. fejezetben ismertetem a realisztikus lassú-gördüléses felfúvódást eredményező megoldás meghatározását. A 3. fejezetben megvizsgálom a klasszikus esetbeli felfúvódást, a 4. fejezetben pedig a kvantum-feljavított esetbeli felfúvódást, majd ezeket az 5. fejezetben hasonlítom össze. A 6. fejezetben megvizsgálom a numerikus megoldás kezdőfeltételektől való érzékenységét, továbbá a felfúvódás m tömegparamétertől való függését a kvantum módosított esetben. Végül összefoglalom az eredményeket.

2. Elméleti háttér [1],[2]

2.1. Az Univerzum dinamikája

Az Univerzum dinamikáját leíró egyenletek az *Einstein-egyenletek*:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{2.1.1}$$

ahol

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

az

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}$$

görbületi tenzorból képzett Einstein-tenzor,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Ricci-skalár,

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu} \right)$$

Christoffel-szimbólumok, $g_{\mu\nu}$ metrikus tenzor és a $T_{\mu\nu}$ az energia-impulzus tenzor, illetve $(\dots)_{,\mu} = \frac{\partial(\dots)}{\partial x^{\mu}}$. A kozmológia szempontjából az ideális folyadék energia-impulzus tenzora érdekes:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^{\mu} u^{\nu} - p g^{\mu\nu}, \tag{2.1.2}$$

ahol ρ energiasűrűség, p nyomás és u^{μ} az áramlás négyes-sebessége.

Az Einstein-egyenletnek van egy kozmológiai taggal kiegészített alakja:

$$\boxed{G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}. \tag{2.1.3}$$

Ahhoz, hogy megoldjuk az Einsten-egyenleteket koordináta-rendszert kell bevezetnünk. Ha az Univerzumot nagy méretskálán homogénnek és izotrópnak tekintjük, akkor a 3-dimenziós tér görbülete állandó. Lehet $k = 0$ sík, $k = +1$ pozitív és zárt, $k = -1$ negatív és nyílt. Ezen megszorítások mellett az invariáns ívhossznégyzet:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + \Phi^2(\chi) d\Omega^2], \tag{2.1.4}$$

ahol $d\Omega = d\Theta^2 + sin^2\Theta d\varphi^2$, $\Theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$,

$$\Phi^2(\chi) = \begin{cases} \sinh^2\chi, & \text{ha } k = -1, \\ \chi^2, & \text{ha } k = 0, \\ \sin^2\chi, & \text{ha } k = +1. \end{cases}$$

$$\chi = \begin{cases} \arcsin^{-1}(r), & \text{ha } k = -1, \\ r, & \text{ha } k = 0, \\ \arcsin(r), & \text{ha } k = +1. \end{cases}$$

és $r \in [0, \infty)$. Ezt a metrikát *Robertson-Walker-féle-metrikának* (RW) nevezzük. A dolgozatban a $k = 0$ sík geometrát használom mindenhol.

A fentiek figyelembe vételével az Einsten-egyenletekből két csatolt, nem-lineáris differenciálegyenlet-rendszert kapunk, amit *Friedmann-egyenleteknek* nevezünk:

$$\boxed{\begin{aligned} H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \end{aligned}} \tag{2.1.5}$$

ahol "a" a skálafaktor, és a pont a kozmológiai idő szerinti deriválást jelenti, illetve $c = 1$ egységekben[1].

A (2.1.5). egyenletek kombinálásából levezethető a kontinuitási egyenlet:

$$\frac{d\rho}{dt} + 3H(\rho + p) = 0, \tag{2.1.6}$$

ami írható

$$\frac{d\ln\rho}{d\ln a} = -3(1 + w) \tag{2.1.7}$$

módon, ahol $w = \frac{p}{\rho}$ állpotegyenleti paraméter. A (2.1.7).-ből:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}.$$

[1]Amikor az egyenletekben G (Λ) szerepel indexek nélkül, akkor ezalatt a gravitációs (kozmológiai) paramétert értem, mivel a kvantum-feljavított esetben lesz olyan, amikor $G \neq G_0$ ($\Lambda \neq \Lambda_0$), ahol G_0 (Λ_0) a Newtoni gravitációs (kozmológiai) állandó, azonban $G_0 = 1$ és $\hbar = 1$ egységekben fogok dolgozni.

A fenti összefüggést a Friedmann-egyenletekkel kombinálva adódik a w paramétertől függően az "a" skálafaktor időfüggése sík ($k = 0$) Univerzum esetén:

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{\frac{2}{3}(1+w)} & \text{ha} \quad w \neq -1 \\ e^{Ht} & \text{ha} \quad w = -1 \end{cases} \tag{2.1.8}$$

	w	$\rho(a)$	$a(t)$
Nem relativisztikus anyag	0	a^{-3}	$t^{2/3}$
Sugárzás vagy relativisztikus anyag	$\frac{1}{3}$	a^{-4}	$t^{1/2}$
Λ	-1	a^0	e^{Ht}

A $w = -1$ állapotegyenleti paraméter ekvivalens egy pozitív kozmológiai állandó jelenlétével.

2.1.1. A kezdeti feltételek

Az Univerzum Planck-korszak utáni fejlődése az általános relativitáselmélettel írható le, amelyekben szerepel az anyag energia-impulzus tenzora. Ehhez azonban fizikai mezők dinamikai egyenleteire és részecskék mozgásegyenleteire van szükség (ez utóbbi kiváltható homogén, izotróp Világegyetem esetén az állapotegyenlet parametrizálásával ha az anyagot együttmozgó folyadéknak feltételezzük). Tehát ahhoz, hogy megoldjuk az Einstein-egyenleteket kezdőfeltételekre van szükség. Azonban ha azt feltételezzük, hogy a kezdőfeltételt meghatározó időpillanattól kezdve az Univerzum a Friedmann-féle tágulással fejlődik, akkor bizonyos problémákkal terhelt az elmélet.

1. **Kezdeti homogenitás**

   Az anyag térbeli eloszlását az energiasűrűséggel és nyomással jellemezzük, mint a koordináták függvénye: $\rho(x), p(x)$. A dolgozat során az a feltételezés, hogy az Univerzum homogén[2] és izotrop nagy méretskálákon[3], ami egyáltalán nem rossz feltételezés, hiszen megfigyelések megmutatták, hogy az Univerzum korai szakaszában az inhomogenitás még kisebb volt, mint napjainkban. Ez azonban azért meglepő

[2]Valójában a homogenitás átlagosan teljesül, hiszen az őseredeti perturbációkból adódóan van egy relatív 10^{-5} hibája a homogetnitásnak.

[3]Nagy méretskála alatt a 100Mpc távolságot értem.

mert a Nagy Bumm elmélet alapján az Univerzum korai szakaszában számos kauzálisan-szeparált tartományokból tevődött ki. Ezt a homogenitási problémát **horizont problémának** is nevezzük. A horizont problémának a Nagy Bumm elmélet nem tud magyarázatot adni.

2. **Kezdeti sebességek**

   Ahhoz, hogy megadjuk a kezdeti anyageloszlást a tér minden pontjában szükségünk van a sebességek ismeretére, hiszen az ideális folyadék energia-impulzus tenzora szerepel az Einstein-egyenletekben. Ha a kezdeti sebességeket túl kicsinek választjuk meg, akkor az Univerzum a másodperc töredéke alatt összezuhan, azonban ha túl nagynak akkor az Univerzum túl gyorsan tágul, és hamar üressé válik. Ezek szerint a kezdeti sebességeket szinte tökéletesen össze kell hangolni, hogy megkapjuk a mai Világegyetemi képet. Ezt a problémát a **laposság problémájának** is szokás nevezni.

Ahhoz, hogy megoldjuk ezeket a problémákat, a Friedmann-féle dinamikát módosítanunk kell úgy, hogy az Univerzum nagyon korai szakaszában nagyon rövid idő alatt hatalmas mértékben kellett tagulnia a Világegyetemnek. Ezt a korszakot nevezzük *felfúvódásnak* vagy *inflációnak*.

2.1.2. A felfúvódás feltételei

Három ekvivalens feltétele létezik a felfúvódásnak:

1. **Csökkenő együttmozgó horizont**

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{aH}\right) < 0}$$

2. **Gyorsuló tágulás**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{aH}\right) = \frac{-\ddot{a}}{(aH)^2},$$

   amiből

$$\boxed{\frac{d^2a}{dt^2} > 0}$$

3. **Negatív nyomás**

   A második Friedmann-egyenletből:

$$\boxed{p < -\frac{1}{3}\rho}$$

2.2. A felfúvódó világegyetem

A felfúvódás során a másodperc tört része alatt hatalmasat változott az Univerzum mérete. Ehhez negatív nyomású anyagra (vagy ezzel ekvivalens módon egy konstans energiasűrűségre) van szükség.

2.2.1. Skalármező dinamikája

A legegyszerűbb inflációs modellben az Univerzumban egy nem külcsönható, egy-komponensű φ skalármező uralkodik (inflatonmező). A gravitáció által vezérelt skalármező hatás funkcionálja:

$$\boxed{\begin{aligned} S &= S_{EH\Lambda} + S_\varphi = \\ &= \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\,(R-2\Lambda) + \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - V(\varphi)\right) \end{aligned}}, \tag{2.2.1}$$

ahol $g = det(g_{\mu\nu})$, $S_{EH\Lambda}$ az Einstein-Hilbert hatás kozmológiai állandóval kiegészített formája. A skalármező mozgásegyenlete megkapható S_φ variálásából, vagy (ezzel ekvivalens módon) a skalármezőre vonatkozó

$$\frac{\partial\mathcal{L}_\varphi}{\partial\varphi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_\varphi}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = 0,$$

Euler-Lagrange egyenletekből, ahol

$$\mathcal{L}_\varphi = \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - V(\varphi)\right).$$

Így

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\partial^\mu\varphi\right) + V_{,\varphi} = 0.$$

Azonban, ha a skalármező homogén ($\varphi(x,t) = \varphi(t)$), a térgeometria lapos, illetve ha a RW metrikát használjuk, akkor $g = det(g_{\mu\nu}) = -a^6$. Ha az előbbieket figyelembe vesszük, akkor megkapjuk a skalármezőre érvényes Klein-Gordon egyenletet:

$$\boxed{\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_{,\varphi} = 0}, \tag{2.2.2}$$

ami csatolódik a

$$\boxed{H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right) + \frac{\Lambda}{3}} \tag{2.2.3}$$

Friedmann-egyenlettel. A másik Friedmann-egyenletre azért nincs szükség, mert a (2.2.2). Klein-Gordon egyenlet ekvivalens a (2.1.6). kontinuitási egyenlettel. A (2.2.2). és a (2.2.3). egyenletek határozzák meg a skalármező által uralt Univerzum dinamikáját.

2.2.2. Lassú gördüléses felfúvódás

A Világegyetem gyorsuló tágulását leíró egyenlet írható a következő módon is:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2 + \dot{H} = H^2 (1 - \varepsilon), \tag{2.2.4}$$

ahol

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}$$

az inflációt jellemző paraméter. Ha $\varepsilon < 1$, akkor $\ddot{a} > 0$, vagyis az Univerzum gyorsulva tágul. A felfúvódás abban a t_f kozmológiai időpontban ér véget, amikor

$$\boxed{\varepsilon(t_f) = 1}, \tag{2.2.5}$$

mivel ekkor $\ddot{a} = 0$. Az infláció továbbá jellemezhető az úgynevezett $\mathcal{N}$ felfúvódási kitevővel (e-folding number), amit a skálafaktor novekedési aránya az

$$\boxed{\frac{a(t_f)}{a(t_i)} \equiv e^{\mathcal{N}}} \tag{2.2.6}$$

összefüggés definiál, és amelyre

$$\mathcal{N} = \int_{t_i}^{t_f} H dt \tag{2.2.7}$$

összefüggés teljesül.

Ahhoz, hogy a horizont és a laposság problémákat megoldjuk az $\mathcal{N}$ szám értékének nagyobbank kell lenni, mint 60. Azonban a mérések azt mutatták meg, hogy a felfúvódási kitevő értéke 60 körüli. Így azt lehet mondani, hogy az inflációs modellünk helytálló, ha $\mathcal{N} \approx 60$.

2.2.3. $V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2$ felfúvódás

A legegyszerűbb inflációs modell az egy egy-komponensű nem kölcsönható

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 \tag{2.2.8}$$

potenciállal rendelkező skalármező. Ilyen potenciál esetén az Univerzum dinamikáját leíró egyenletek (az utolsó egyenletre a klasszikus esetben nincs szükségünk, csak a teljesség

kedvéért tüntettem fel):

$$\boxed{\begin{aligned} 0 &= \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + m^2\varphi \\ H^2 &= \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2\right) + \frac{\Lambda}{3} \\ \dot{H} &= -4\pi G\dot{\varphi}^2 \end{aligned}} \tag{2.2.9}$$

3. Klasszikus esetbeli felfúvódás vizsgálata

A klasszikus esetben a tömeg-, gravitációs és kozmológiai paraméterek értéke:

$$m = 10^{-6} m_{Pl} \qquad G = G_0 = 1 \qquad \Lambda = \Lambda_0 = 10^{-122} m_{Pl}^2,$$

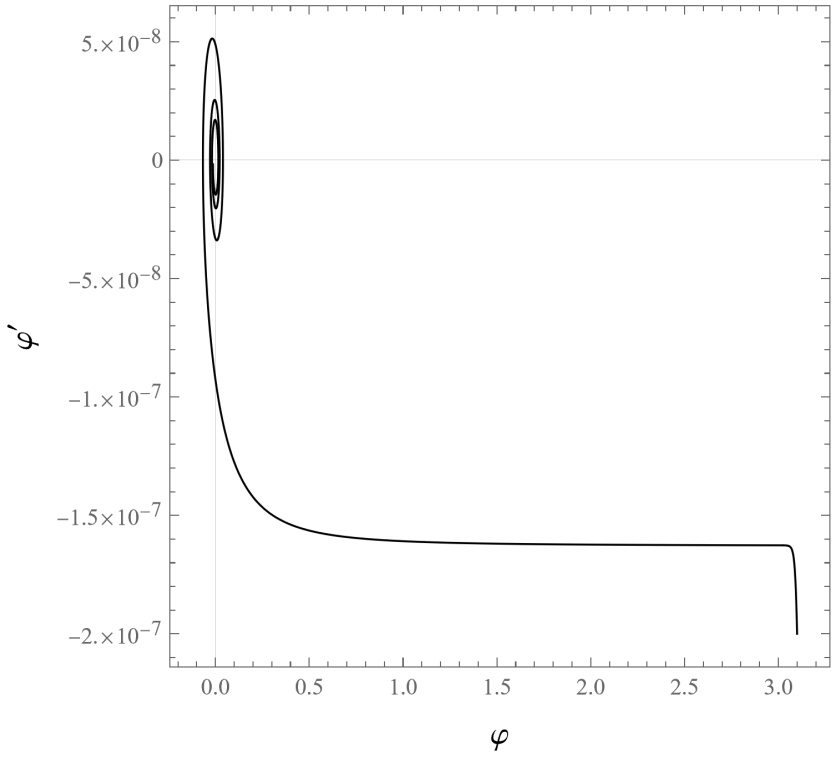
így a (2.2.9). egyenlet első két egyenletéből kapható φ-re egy másodrendű differenciálegyenlet:

$$\ddot{\varphi} + \kappa \left[\dot{\varphi}^2 + m^2 \varphi^2 + \frac{\Lambda_0}{3} \right]^{1/2} \dot{\varphi} + m^2 \varphi = 0, \tag{3.0.1}$$

ahol $\kappa = \sqrt{12\pi G_0}$. Megoldásához két kezdőfeltételre van szükség $(\varphi, \dot{\varphi})$:

$$\varphi(0) = 3.1 m_{Pl} \qquad \dot{\varphi}(0) = -2 \cdot 10^{-7} m_{Pl}^2.$$

A fenti kezdőfeltételekkel a numerikus megoldást a $0 s_{Pl} \leq t \leq 4 \cdot 10^7 s_{Pl}$ intervallumon indítottam el, azonban a szingularitás nem esett a nullába. Ahhoz, hogy megtaláljam a szingularitást, az integrációs intervallum kezdetét eltoltam, majd a program jelezte, hogy szingularitást talált a $t_{sz} = -260425 s_{Pl}$ időpillanatban. Ettől kezdve ezt az időpillanatot tekintem a 0 időpillanatnak. A felfúvódás kezdeti pillanata az a t_i időpillanat, amikor a



1. ábra. $\{\varphi, \varphi' = \dot{\varphi}\}$ fázistérben a megoldás

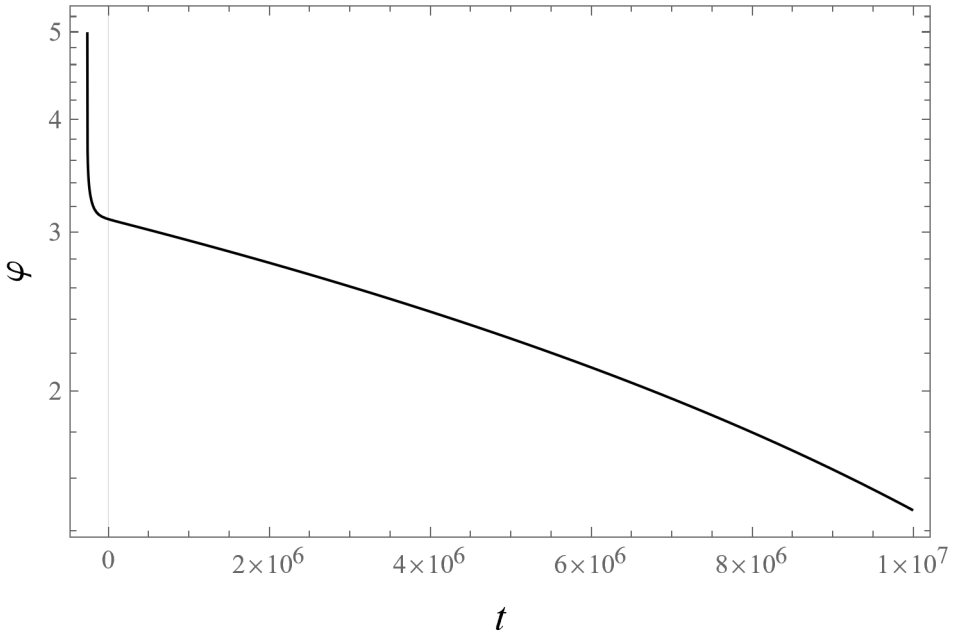
$\{\varphi, \varphi' = \dot{\varphi}\}$ fázistérben a trajektória ráfut az attraktorra (akkor amikor a φ csökkenni

kezd, a közel vízszintes szakasz). A felfúvódás vége pedig abban a t_f időpillanatban van, amikor

$$\varepsilon(t_f) = -\frac{\dot{H}(t_f)}{H^2(t_f)} = 1.$$

3.1. A felfúvódás kezdetének meghatározása

A felfúvódás kezdeti t_i időpillanatát úgy határozom meg, hogy ábrázolom a $\varphi(t)$ összefüggést, mint az idő függvényét, és leolvasom azt a t_i időpillanatot, amikor a φ ráfut az attraktorra. Az a φ érték amikor a ráfutás megtörténik, az 1. ábráról leolvasható.



2. ábra. $\varphi(t)$

A fenti ábráról leolvasható a felfúvódás kezdeti időpillanata:

$$\boxed{t_i \approx 1.29 \cdot 10^5 s_{Pl} \pm 5\%}.$$

Az 5%-os hibát a leolvasásból becsültem.

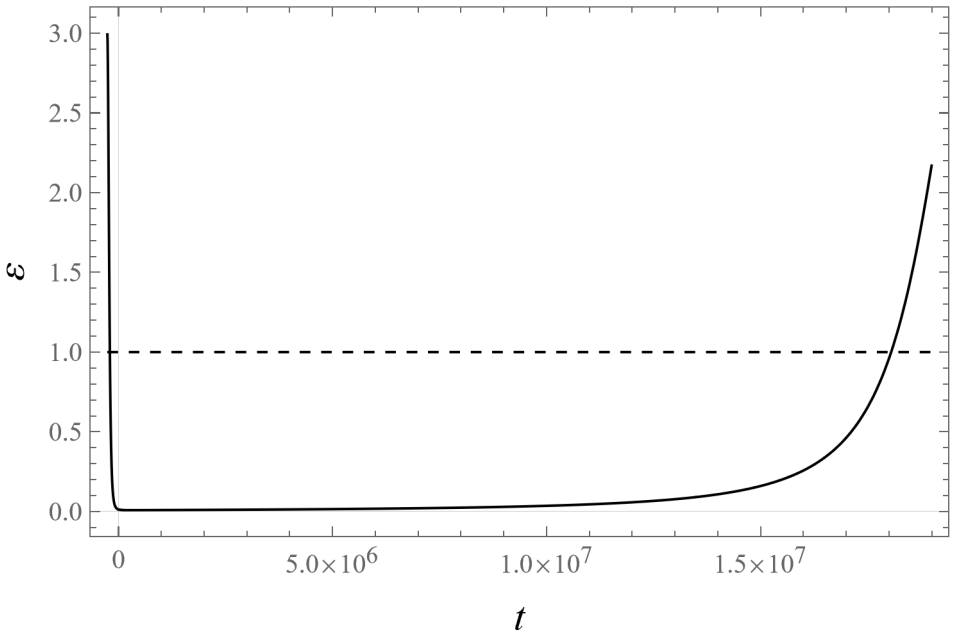
3.2. A felfúvódás végének meghatározása

A felfúvódás végső t_f időpillanatát a lassú gördüléses inflációt jellemző

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}$$

paraméterrel lehet meghatározni, akkor amikor $\varepsilon(t_f) = 1$.

Ábrázolva az $\varepsilon(t)$ összefüggést leolvasható a t_f:



3. ábra. $\varepsilon(t)$

A fenti ábrán még ábrázoltam egy "1" értékű konstanst, hogy a leolvasást könnyebbé tegyem. A felfúvódás végső pillanatára leolvasott érték:

$$\boxed{t_f \approx 1.8 \cdot 10^7 s_{Pl} \pm 5\%}.$$

A hibát hasonlóan a leolvasásból becsültem.

3.3. A klasszikus eset jósága

Klasszikus esetben az $\mathcal{N}$ felfúvódási kitevő

$$\boxed{\mathcal{N} = \int_{t_i}^{t_f} H dt = 60.01}.$$

Az látható, hogy ahhoz képest, hogy a legegyszerűbb modell elég szépen megadja a valósághoz közeli $\mathcal{N}$ értéket.

A kapott eredményeket össze lehet hasonlítani a már ismert irodalmi eredményekkel. Ha összevetjük a [**1**] könyv 237. oldalán található 5.3-as ábrát a kapott 1. ábrával látható, hogy szépen sikerült reprodukálni az ismert klasszikus esetet.

4. A kvantum-feljavított esetbeli felfúvódás

4.1. A kvantum-feljavítás

A kvantum-feljavított felfúvódás vizsgálata előtt szeretnék kitérni arra, hogy ebben a dolgozatban pontosan mit is jelent a kvantum-feljavítás.

Eddig klasszikus elmélettel dolgoztam, amiben az Einstein-Hilbert hatás

$$S_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\,(R-2\Lambda) \tag{4.1.1}$$

alakú, azonban egy klasszikus mezőt ír le. Ahhoz, hogy megpróbáljuk kvantálni ezt a mezőt, a Renormálási Csoport (RG) módszereket kell alkalmaznunk rajta. Ha alkalmazzuk az RG egyenleteket a (4.1.1). hatáson, akkor ahhoz, hogy a fellépő divergenciákat kezeljük azt az árat kell megfizetni, hogy a $G = G(k)$ és $\Lambda = \Lambda(k)$ gravitációs és kozmológiai paraméterek a $k(t)$ energia-skálától nem lesznek függetlenek[**3**]:

$$G(k) = \begin{cases} G_0 & \text{ha} \quad 0 \le k \le k_\Lambda \\ G_0 - b(k^2 - k_\Lambda^2) & \text{ha} \quad k_\Lambda < k < k_G \\ g_* k^{-2} & \text{ha} \quad k_G \le k \end{cases} \tag{4.1.2}$$

$$\Lambda(k) = \begin{cases} \Lambda_0 & \text{ha} \quad 0 \le k \le k_\Lambda \\ \Lambda_0 + c(k^4 - k_\Lambda^4) & \text{ha} \quad k_\Lambda < k < k_G \\ \lambda_* k^2 & \text{ha} \quad k_G \le k \end{cases} \tag{4.1.3}$$

ahol $g_* \approx 0.707, \lambda_* \approx 0.193, k_\Lambda \approx 8.2 \cdot 10^{-31} m_{Pl}$ és

$$k_G = \left(\frac{3g_*}{G_0}\right)^{1/2}, \quad b = \frac{2G_0^2}{9g_*}, \quad c = \frac{\lambda_* G_0}{3g_*}.$$

Látható, hogy a kvantum-feljavítás során három szakasz jelent meg az Univerzum időbeli evolúciójában([**4**]-[**7**]): fizikailag valós RG trajektóriáknak három fő része van:

- UV-szakasz, amit a Reuter fixpont ural,
- átmeneti szakasz, ami a Gauss fixpont közelében ér véget,
- IR-szakasz, ahol a gravitációs csatolások szinte függetlenek lesznek a $k(t)$ skálától.

Az Univerzum fejlődése során a kozmológiai idő folyamatosan növekszik. A folyamatosan növekvő kozmológiai időhöz pedig csökkenő $k(t)$ energiaskála tartozik.

Az Univerzumot kitöltő mező kvantum fluktuációit elhanyagoljuk, így a homogén és izotróp Univerzum fejlődését a kvantum-módosított Friedmann-egyenletek, illetve a belőlük származó konzisztencia feltétel írja le. A kvantum-módosított Friedmann-egyenletekhez úgy jutunk, hogy a (2.1.5). egyenletekben a

$$G \to G(k) \qquad \Lambda \to \Lambda(k)$$

helyettesítéseket elvégezzük. Ekkor a kvantum-módosított Friedmann egyenletek:

$$\boxed{\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G(k)}{3}\rho^{(\varphi)} + \frac{\Lambda(k)}{3} \\ \dot{H} &= -4\pi G(k)\dot{\varphi}^2 \end{aligned}} \tag{4.1.4}$$

ahol $\rho^{(\varphi)}$ a skalármező energiasűrűsége. Látszódik, hogy a (4.1.4). egyenletekhez szükség van még egy egyenletre, hiszen három ismeretlen van: H, k, φ. A harmadik egyenlet a kvantum-módosított Friedmann-egyenletekből származó konzisztencia feltételből és a

$$\dot{\rho}^{(\varphi)} + 3H(\rho^{(\varphi)} + p^{(\varphi)}) = 0 \tag{4.1.5}$$

lokális energiamegmaradásból adódik:

$$\boxed{\rho^{(\varphi)} = -\frac{\dot{\Lambda}(k(t))}{8\pi\dot{G}(k(t))} = -\frac{\partial_k\Lambda\cdot\partial_t k}{8\pi\partial_k G\cdot\partial_t k}} \tag{4.1.6}$$

A (4.1.4). és a (4.1.6). egyenletek írják le a kvantum-feljavított Világegyetem dinamikáját szakasztól függően (UV, átmeneti, IR).

4.2. A kvantum-feljavított esetbeli felfúvódás vizsgálata

4.2.1. Az első -UV- szakasz

Az első -UV- szakaszhoz tartozó tömeg, gravitációs és kozmológiai paraméterek:

$$m = 10^{-10}m_{Pl} \qquad G(k) = g_*k^{-2} \qquad \Lambda(k) = \lambda_*k^2. \tag{4.2.1}$$

Ha beírjuk a fenti kifejezéseket a (4.1.4)-(4.1.6). egyenletekbe, akkor megkapjuk az első szakaszra érvényes differenciálegyenlet-rendszert:

$$3H^2 = 8\pi\rho^{(\varphi)}g_*k^{-2} + \lambda_*k^2 \tag{4.2.2}$$

$$\dot{H} = -4\pi g_*\dot{\varphi}^2k^{-2} \tag{4.2.3}$$

$$\rho^{(\varphi)} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2 = \frac{\lambda_*}{8\pi g_*}k^4. \tag{4.2.4}$$

A (4.2.4). egyenletből k^2 kifejezhető és beírható a (4.2.2). és (4.2.3). egyenletekbe, némi rendezés után H-ra és φ-re kapunk egy csatolt differenciálegyenlet-rendszert:

$$\boxed{3H^2 - 2\omega\sqrt{\rho^{(\varphi)}} = 0 \qquad \dot{H}\sqrt{\rho^{(\varphi)}} + \frac{1}{2}\omega\dot{\varphi}^2 = 0} \tag{4.2.5}$$

ahol $\omega^2 = 8\pi g_* \lambda_*$ és $\rho^{(\varphi)} = \left(\dot{\varphi}^2 + m^2\varphi^2\right)/2$. Ezen csatolt differenciálegyenlet-rendszer megoldásához a kezdőfeltételt a t_k időpillanatban

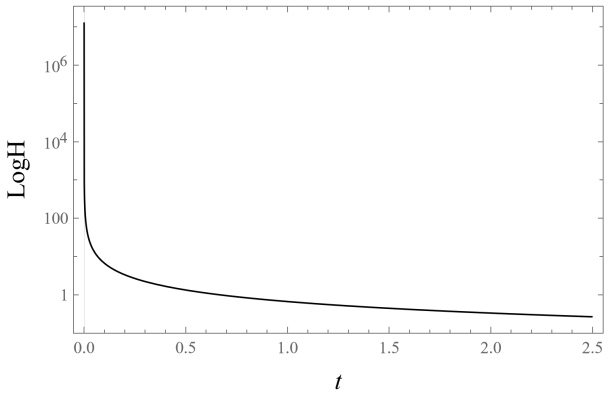
$$H(t_k) = H_{est}(t_k) \qquad \varphi(t_k) = \varphi_{est}(t_k)$$

módon adom meg, ahol

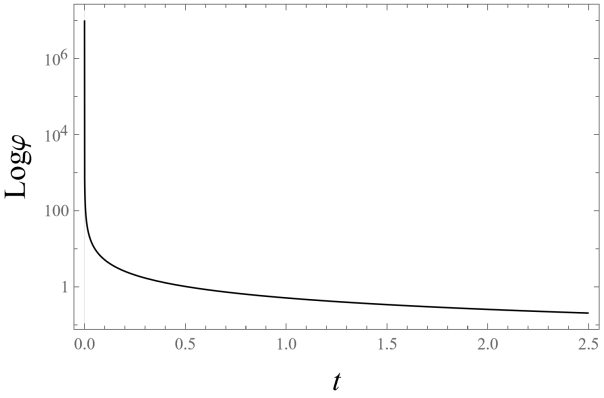
$$H_{est}(t_k) = \frac{2}{3t_k} \quad \text{és} \quad \varphi_{est}(t_k) = \frac{2\sqrt{2}}{3\omega}\frac{1}{t_k}$$

analitikusan közelített formulák[4] a t_k időpillanatban (lásd: A. függelék).

A (4.2.5). egyenletrendszert a $t_k = 5 \cdot 10^{-11} s_{Pl}$ időpillatból indítottam el numerikusan, egészen $t_v = 2.5 s_{Pl}$-ig. A megoldásokat az alábbi ábrákon mutatom:



4. ábra. $LogH(t)$



5. ábra. $Log\varphi(t)$

A fenti ábrákon látható, hogy a H és φ időbeli viselkedése hasonló az első szakaszban.

Az első szakasz abban a t_G időpillanatban végződik, amikor

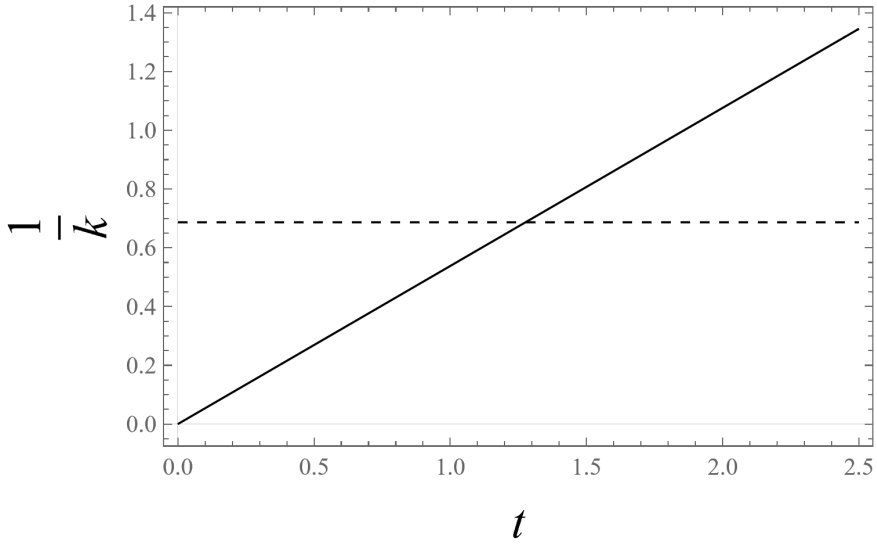
$$k(t_G) = k_G = \left(\frac{3g_*}{G_0}\right)^{1/2} \approx 1.4563.$$

Numerikusan a $k(t)$ meghatározható a (4.2.4). egyenletből:

$$k = \left(\frac{8\pi g_*}{\lambda_*}\rho^{(\varphi)}\right)^{1/4} \quad \rightarrow \quad k^{-1} = \left(\frac{8\pi g_*}{\lambda_*}\rho^{(\varphi)}\right)^{-1/4}. \tag{4.2.6}$$

[4]A pozitív ágat választottam φ-nél.

Technikailag a k^{-1} ábrázolásából könnyebb leolvasni a t_G időpillanatot:



6. ábra. $k^{-1}(t)$ a folytonos, k_G^{-1} pedig a szaggatott vonal

Az első szakasz végső időpillanatára a

$$\boxed{t_G \approx 1.27 s_{Pl}}$$

értéket olvastam le.

4.2.2. A második -átmeneti- szakasz

A második -átmeneti- szakaszhoz tartozó gravitációs és kozmológiai paraméterek:

$$G(k) = G_0 - b(k^2 - k_\Lambda^2) \qquad \Lambda(k) = \Lambda_0 + c(k^4 - k_\Lambda^4). \tag{4.2.7}$$

Ha beírjuk a fenti kifejezéseket a kvantum-feljavított egyenletekbe, akkor megkapjuk a második szakaszra érvényes differenciálegyenlet-rendszert:

$$3H^2 = 8\pi\rho^{(\varphi)}\left[G_0 - b(k^2 - k_\Lambda^2)\right] + \Lambda_0 + c(k^4 - k_\Lambda^4) \tag{4.2.8}$$

$$\dot{H} = -4\pi\dot{\varphi}\left[G_0 - b(k^2 - k_\Lambda^2)\right] \tag{4.2.9}$$

$$\rho^{(\varphi)} = \frac{c}{4\pi b}k^2. \tag{4.2.10}$$

Ha a (4.2.10). egyenletből eliminálunk k-t és beírjuk a másik két egyenletbe, akkor néhány rendezési lépés után megkapjuk a második szakaszt leíró differenciálegyenlet-rendszert:

$$3H^2 = \alpha\left(\rho^{(\varphi)}\right)^2 + \beta\rho^{(\varphi)} + \delta \tag{4.2.11}$$

$$\dot{H} = -\dot{\varphi}^2\left[\alpha\rho^{(\varphi)}(t) + \frac{\beta}{2}\right], \tag{4.2.12}$$

ahol

$$\alpha = -\frac{16\pi^2 b^2}{c} \qquad \beta = 8\pi(G_0 + bk_\Lambda^2) \qquad \delta = \Lambda_0 - ck_\Lambda^4.$$

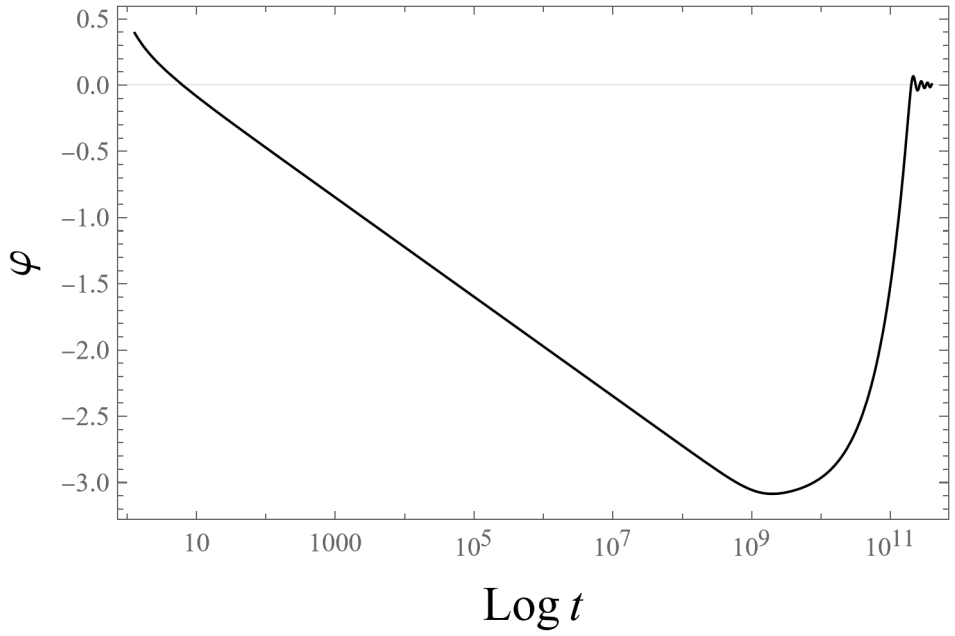
A kozmológiai idő szerint deriválva a (4.2.11). egyenletet, majd beírva a (4.2.11).-ből kifejezett H-t és a (4.2.12).-ből $\dot{H}$-t, akkor kapunk φ-re egy másodrendű differenciálegyenletet:

$$\boxed{\ddot{\varphi} + 3\left[\frac{\alpha\left(\rho^{(\varphi)}\right)^2 + \beta\rho^{(\varphi)} + \delta}{3}\right]^{\frac{1}{2}}\dot{\varphi} + m^2\varphi = 0}. \tag{4.2.13}$$

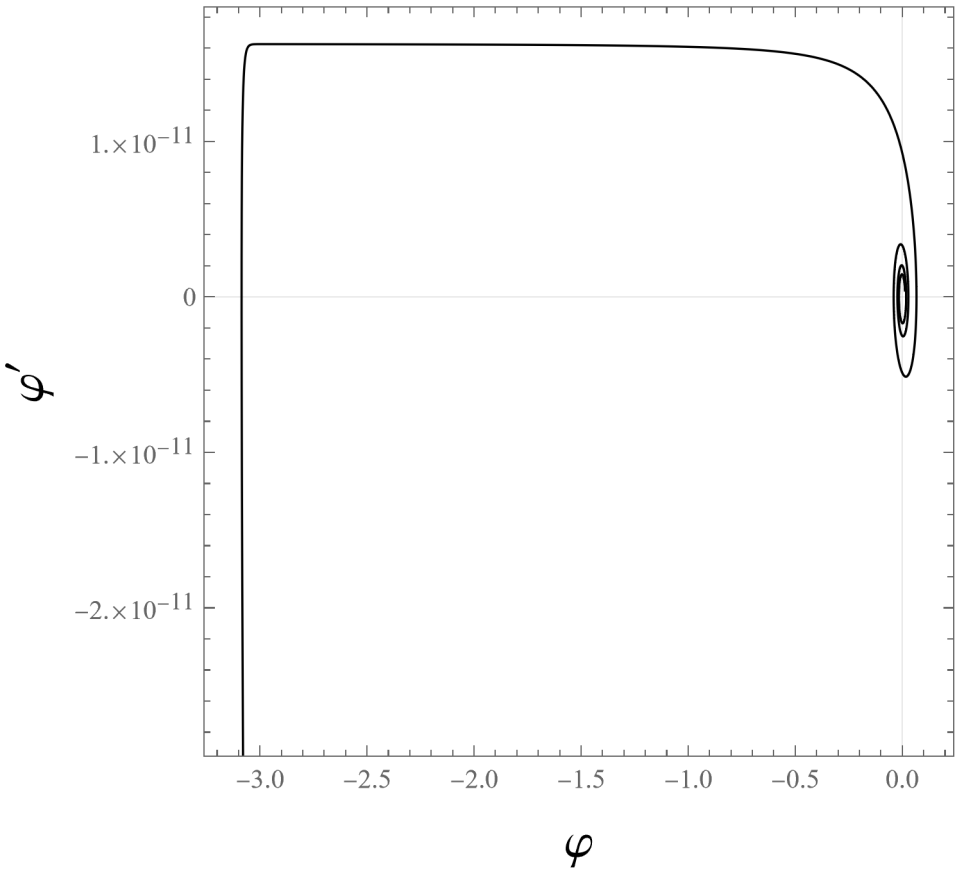
Látható, hogy ez nem más mint a (2.2.2). egyenlet. Tehát a kvantum-feljavításnak köszönhetően a KG-egyenlet abban változott, hogy a H Hubble-paraméter értéke erősen φ függővé vált. A fenti differenciálegyenlet megoldásához két kezdőfeltételre van szükség. A két kezdőfeltételt

$$\varphi_{\text{első}}(t_G) = \varphi_{\text{második}}(t_G) \qquad \dot{\varphi}_{\text{első}}(t_G) = \dot{\varphi}_{\text{második}}(t_G), \tag{4.2.14}$$

módon adom meg, ahol az "első" illetve "második" az adott szakaszhoz tartozó φ-t jelölik. A (4.2.13). differenciálegyenlet megoldása az alábbi ábrán látható, alatta pedig a megoldás a fázistérben:



7. ábra. $\varphi(t)$



8. ábra. $\{\varphi, \dot{\varphi} = \varphi'\}$ fázistérben a megoldás

A klasszikus esethez hasonlóan a felfúvódás abban a t_i időpillanatban kezdődik, amikor a fázis trajektória ráfut az atraktorra. A leolvasott időpillanat:

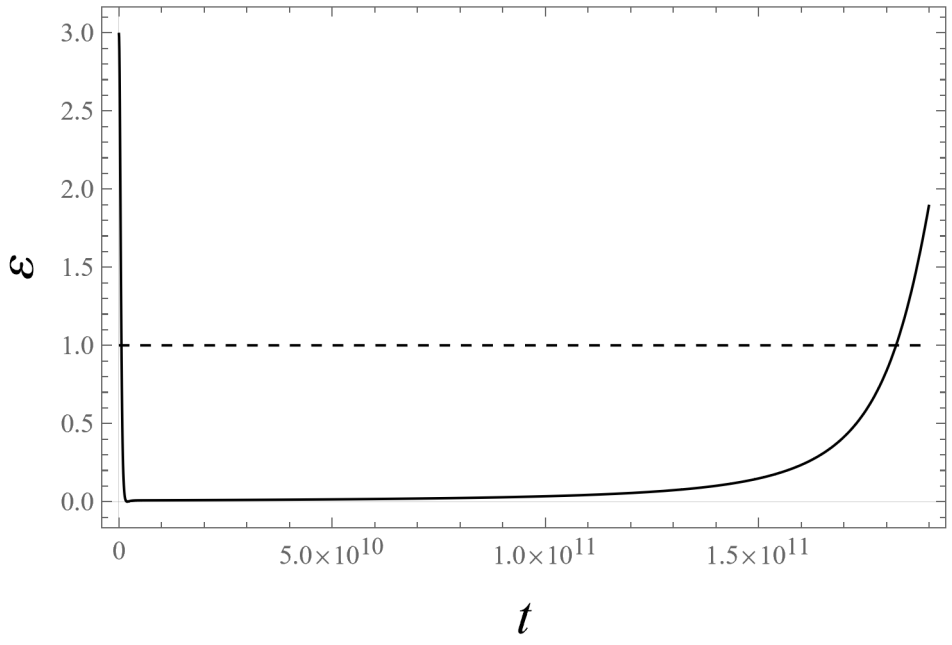
$$\boxed{t_i = 2.3 \cdot 10^9 s_{Pl} \pm 5\%}$$

A felfúvódás pedig akkor ér véget, amikor az

$$\varepsilon(t_f) = -\frac{\dot{H}(t_f)}{H^2(t_f)} = 1. \tag{4.2.15}$$

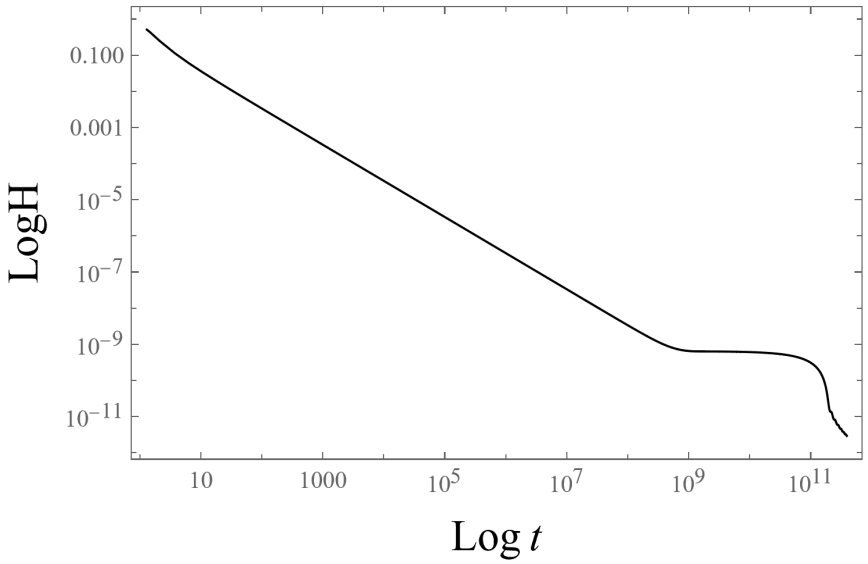
A felfúvódás végső pillanatára leolvasott érték:

$$\boxed{t_f = 1.823 \cdot 10^{11} s_{Pl} \pm 5\%}$$



9. ábra. A folytonos volnal az $\varepsilon(t)$, a szaggatott pedig a konstans "1".

Érdemes még a $H(t)$ összefüggést is ábrázolni (10. ábra). Látható az ábrán, hogy a felfúvódás alatt a Hubble paraméter szinte konstans értékre állt be, ami teljes mértékben helytálló, hiszen ismert az, hogy a felfúvódás ideje alatt a Hubble paraméter értéke kicsit változik.



10. ábra. Log-Log skálán a $H(t)$

4.3. A kvantum-feljavított eset jósága

A kvantum feljavított esetben az $\mathcal{N}$ felfúvódási kitevő értéke:

$$\boxed{\mathcal{N} = \int_{t_i}^{t_f} H dt = 60.05}$$

A klasszikus esethez hasonlóan a kvantum-feljavítás során is elérhető a megfelelő tömeg választással a valósággal konzisztens kitevő érték. A különbség a felfúvódás időbeli elhelyezkedésében és időtartamában van, de ezt a következő fejezetben tárgyalom.

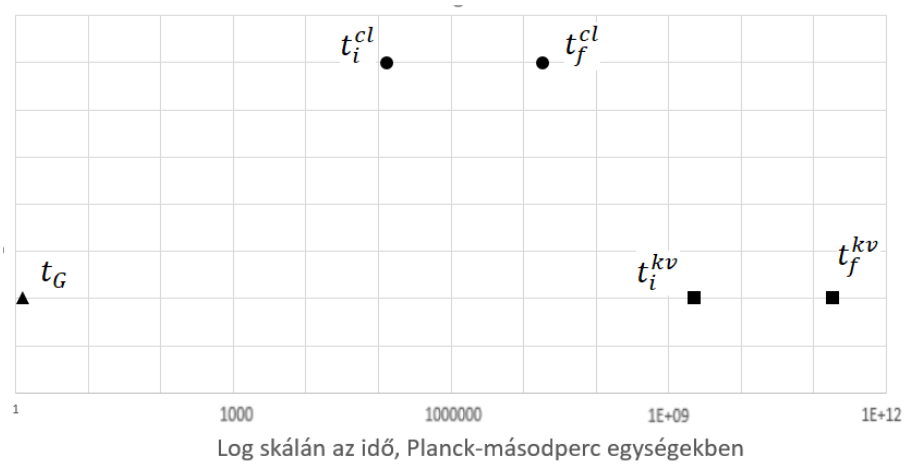
5. A klasszikus és a kvantum-feljavított felfúvódás összehasonlítása

Az alábbi táblázatban összefoglalom a klasszikus és a kvantum-feljavított esetbeli felfúvódások jellegzetes időpillanatait:

	$t_G(s_{Pl})$	$t_i(s_{Pl})$	$t_f(s_{Pl})$	$t_f - t_i(s_{Pl})$
Klasszikus felfúvódás	-	$1.29 \cdot 10^5$	$1.8 \cdot 10^7$	$1.78 \cdot 10^7$
Kvantum-feljavított felfúvódás	1.27	$2.3 \cdot 10^9$	$1.823 \cdot 10^{11}$	$1.8 \cdot 10^{11}$

1. táblázat. A jellegzetes időpillanatok

Az alábbi ábrán abrázolom a jellegzetes időpillanatokat:



11. ábra. A jellegzetes időpillanatok ábrázolva

A 11. ábrán a $t_i^{cl}, t_f^{cl}, t_i^{kv}, t_f^{kv}$ rendre a klasszikus esethez tartozó infláció kezdete és vége, illetve a kvantum-feljavított esethez tartozó infláció kezdete és vége.

- **A felfúvódás időbeli elhelyezkedése és időtartama:**
  A klasszikus esetben a felfúvódás (nagyságrendekben) $10^5 s_{Pl}$-tól $10^7 s_{Pl}$-ig tartott, míg a kvantum-módosított esetben $10^9 s_{Pl}$-től $10^{11} s_{Pl}$-ig. Látható, hogy a G gravitációs és Λ kozmológiai paraméterek időtől való függésének azaz eredménye, hogy a felfúvódás kezdete és vége is eltolódott 4 nagyságrenddel, továbbá a felfúvódás időtartama is 4 nagyságrenddel hoszabb lett a kvantum feljavított esetben.

- **A Világegyetem méretének változása a felfúvódás ideje alatt:**

  A Világegyetem mérete hasonlóképpen változott mindkét esetben (a kvantum feljavított esetben a megfelelő tömegparaméter választásával), hiszen a felfúvódási kitevő értéke a klasszikus és a kvantum-feljavított esetben is nagyon közel van a 60-hoz.

Érdekes hasonlóság még továbbá, hogy a $\{\varphi, \varphi' = \dot{\varphi}\}$ fázistérben a megoldások mindkét esetben a

$$\varphi' = \dot{\varphi} = \pm\frac{m}{\sqrt{12\pi}}$$

attraktorra futnak rá (klasszikus esetben $m = 10^{-6}m_{Pl}$, kvantum-feljavított esetben $m = 10^{-11}m_{Pl}$), a kezdőfeltételektől függően "+" vagy "-" előjellel.

6. A kvantum-feljavított eset további vizsgálata

Ebben a fejezetben a kvantum-módosított esetbeli felfúvódást vizsgálom tovább: megvizsgálom, hogy a kezdeti feltételektől illetve a tömegparaméter megválasztásától milyen mértékben függenek a megoldások, és hogy mennyire univerzális az a megoldás amit kaptam.

6.1. Kezdőfeltételekre való érzékenység

Az általam kapott megoldás univerzalitásának vizsgálata szempontjából érdemes megnézni az első szakaszra vonatkozó differenciálegyenlet-rendszer

$$3H^2 - 2\omega\sqrt{\rho^{(\varphi)}} = 0 \qquad \dot{H}\sqrt{\rho^{(\varphi)}} + \frac{1}{2}\omega\dot{\varphi}^2 = 0 \tag{6.1.1}$$

kezdőfeltételi érzékenységét. Ehhez a fenti differenciálegyenlet-rendszert a

$$10^{-15}s_{Pl} \leq t_k \leq 10^{-10}s_{Pl}$$

időintervellumból választott t_k-hoz tartozó

$$\varphi_{est}(t_k) \qquad H_{est}(t_k)$$

kezdőfeltételekkel oldottam meg, ahol az "est" az analitikusan közelített formulákat jelenti az Univerzum nagyon korai szakaszában (ld. A függelék). Illetve a tömegparaméter $m = 10^{-10}m_{Pl}$ értékével dolgoztam.

Elsőként a különböző t_k időpillanatok mellett leolvastam a hozzá tartozó t_G időpillanatokat, és megnéztem a

$$\frac{t_G - t_G^{est}}{t_G^{est}}$$

relatív eltéréseket, ahol

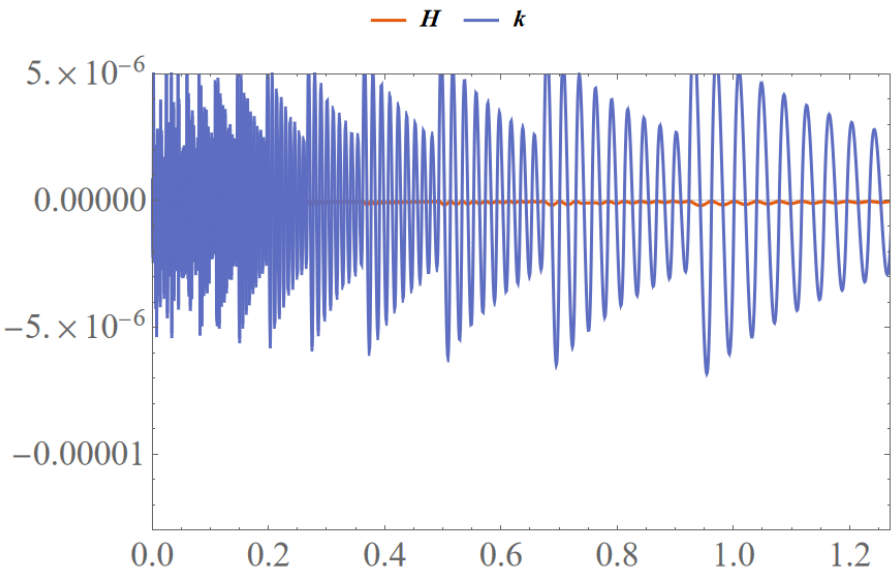
$$t_G^{est} = \sqrt{\frac{2G_0}{9g_*\lambda_*}} \approx 1.2761 s_{Pl}$$

analitikusan becsült t_G. A 2. táblázat tartalmazza az értékeket. A kapott eredményekből az következik, hogy a t_k *kezdőpillanattól független a megoldás*, ha a kezdőfeltételeket a közelített formulákból választjuk ki, és nagyrészt a leolvasásból adódik a relatív eltérése a t_G-nek. Ahhoz, hogy ezt igazolni tudjam, egy adott $t_k(= 5 \cdot 10^{-11}s_{Pl})$ mellett ábrázolom az analitikusan közelített mennyiségekhez képesti relatív eltéréseket (12. ábra). Látható,

hogy a relatív eltérések is nagyon picinyek és betudhatóak a numerikus pontatlanságnak, tehát a leolvasott t_G időpillanatok hibája valóban a leolvasásból származik túlnyomó részben. További fontos észrevétel a relatív eltérésekből még az, hogy az **A. függelék**ben levezetett analitikus formulák szépen vissza adják az egzakt megoldásokhoz tartozó első szakaszt, így azok a formulák elég jó közelítései annak.

$t_k(s_{Pl})$	$t_G(s_{Pl})$	$\frac{t_G - t_G^{est}}{t_G^{est}}$
10^{-10}	1.2725	−0.0028
10^{-11}	1.2753	−0.0006
10^{-12}	1.2725	−0.0028
10^{-13}	1.2722	−0.0030
10^{-14}	1.2743	−0.0014
10^{-15}	1.2764	0.0002

2. táblázat. Különböző t_k-hoz tartozó t_G és relatív eltérései



12. ábra. H és k relatív eltérései a közelített formulákhoz képest t_G-ig

6.2. A tömegparamétertől való érzékenység

Az előző alfejezetben sikerült bizonyítani, hogy a t_k kezdőpillanattól független a numerikus megoldás, ha az analitikusan közelített formulákkal adjuk meg a kezdőfeltételek értékét t_k-ban. Ebben a fejezetben pedig arról lesz szó, hogy az m tömegparaméter

értékétől mennyire függ az első szakasz, illetve a második szakaszban a felfúvódás.
Első lépésként megnéztem különböző m tömegparaméterek esetén a t_G időpillanatokat, majd a második szakaszban lezajló felfúvódás t_i, t_f időpillanatait és az azt jellemző $\mathcal{N}$ tényezőt.

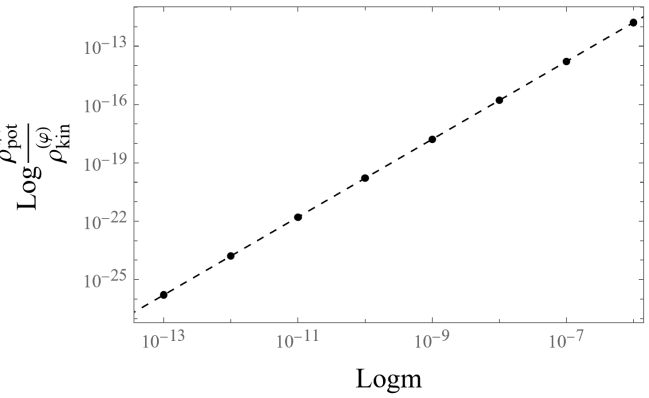
$m(m_{Pl})$	$t_G(s_{Pl})$	$t_i(s_{Pl})$	$t_f(s_{Pl})$	$\mathcal{N}$
10^{-13}	1.2764	$1.72 \cdot 10^{12}$	$2.47 \cdot 10^{14}$	109.8
10^{-12}	1.2764	$2 \cdot 10^{11}$	$2.25 \cdot 10^{13}$	91.6
10^{-11}	1.2764	$2.26 \cdot 10^{10}$	$2.04 \cdot 10^{12}$	75.14
10^{-10}	1.2764	$2.3 \cdot 10^{9}$	$1.84 \cdot 10^{11}$	60.05
10^{-9}	1.2764	$2.25 \cdot 10^{8}$	$1.6 \cdot 10^{10}$	47
10^{-8}	1.2764	$2.55 \cdot 10^{7}$	$1.38 \cdot 10^{9}$	36
10^{-7}	1.2764	$3.3 \cdot 10^{6}$	$1.17 \cdot 10^{8}$	26
10^{-6}	1.2764	$3.3 \cdot 10^{5}$	$9.7 \cdot 10^{6}$	18

3. táblázat. Különböző m értékek mellett a $t_G, t_i, t_f, \mathcal{N}$

A fenti táblázat adataiból az látszik, hogy az m paramétertől független a t_G, vagyis az első szakaszt az m paraméter értéke látszólag nem befolyásolja. Ahhoz, hogy még többet megtudjunk az m és az első szakasz kapcsolatáról, érdemes ábrázolni különböző m értékekhez tartozó

$$\left.\frac{\rho_{pot}^{(\varphi)}}{\rho_{kin}^{(\varphi)}}\right|_{t_G}$$

hányadost, ahol $\rho_{pot}^{(\varphi)}$ a potenciális, a $\rho_{kin}^{(\varphi)}$ pedig a kinetikus energiasűrűség:



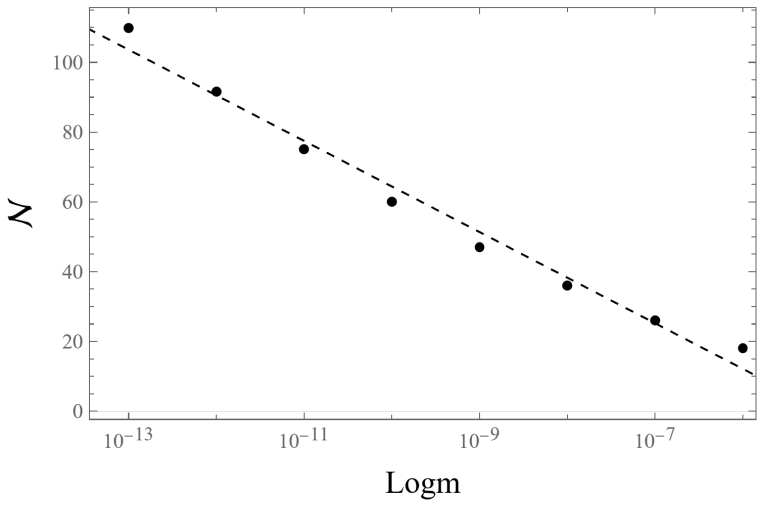
13. ábra. $\left.\frac{\rho_{pot}^{(\varphi)}}{\rho_{kin}^{(\varphi)}}\right|_{t_G}$ az m függvényében, logaritmikus skálán

Látható az ábráról, hogy a tömegparaméter növelésével a kinetikus energia kevésbé dominál (ami egyébként a várttal egyezik meg, hiszen a potenciális tagban explicit m függés van). Ebből az látható, hogy az m értéke befolyásolja az első szakaszt, sőt egy bizonyos érték felett már az analitikus közelítések sem lehetnek érvényesek. A pontokra illeszthető egy görbe (a szaggatott vonal, illetve amit illesztettem az a lineáris skálákra vonatkozik):

$$\boxed{\left.\frac{\rho_{pot}^{(\varphi)}}{\rho_{pot}^{(\varphi)}}\right|_{t_G}(m) = 1.629 \cdot m^2 = \frac{\varphi^2(t_G)}{\dot{\varphi}^2(t_G)} m^2}. \tag{6.2.1}$$

A fentiekből akár becsülhető is, hogy mekkora m mellett mennyire dominál a kinetikus tag kezdetben, és hogy mennyire érvényesek az analitikusan közelített formulák. Továbbá kaptunk a $\varphi^2(t_G)/\dot{\varphi}^2(t_G) = 1.629/m_{Pl}^2$ hányadosra egy konstans értéket a t_G-ben. Ezek alapján mondható az, hogy az általam talált megoldás a fizikailag valós ($\mathcal{N} \approx 60$) esetekben *univerzális* (később látható lesz az $\mathcal{N}$ és m kapcsolata, és abból megmagyarázható, hogy miért lehet ilyen erős állításra következtetni).

A következőekben a második szakasszal foglalkozom, és megvizsgálom a felfúvódás és a tömegparaméter kapcsolatát, továbbra is a 3. táblázatban lévő adatokkal. Ha ábrázolom az $\mathcal{N}$ felfúvódási tényezőkhöz tartozó m tömegparamétereket, akkor illeszthető rá egy görbe:



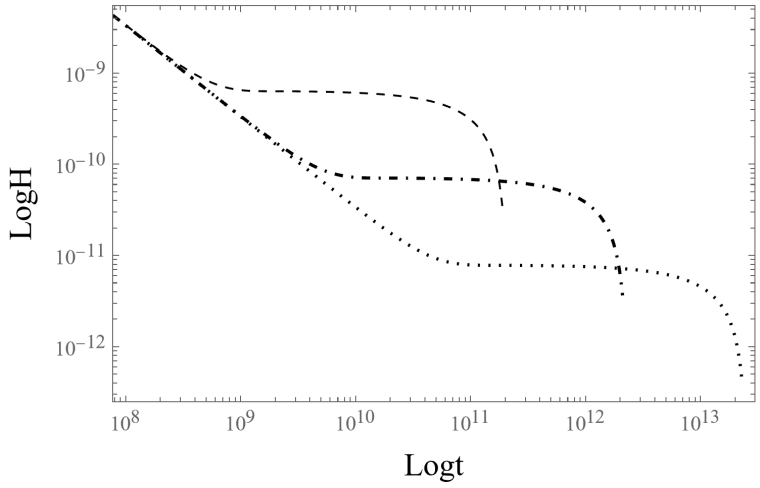
14. ábra. Az $\mathcal{N}(m)$ illesztett görbe, a vízszintes tengely logaritmikus skálán

Az illesztett görbe egyenlete:

$$\boxed{\mathcal{N}(m) = -0.5677 \ln m - 66.313}. \tag{6.2.2}$$

Így sikerült találni egy összefüggést a felfúvási és a tömegparaméter között, és sikerült belátni azt az állítást, hogy az általam talált megoldás a fizikailag valós esetekben *univerzális*, sőt az analitikusan közelített formulák teljes egészében elfogadhatóak. A fizikailag valós megoldások alatt az $\mathcal{N} \approx 60$ felfúvódási tényezőt értem, és látható, hogy ehhez az értékhez tartózó m esetén a kinetikus tag erősen dominál a potenciális tag felett (13. ábra). Továbbá ezzel meg is magyaráztam az általam választott $m = 10^{-10} m_{Pl}$ paraméter választást, hiszen így kaptam olyan felfúvódási paramétert, amivel a közel 60-as érték teljesül.

Érdemes még megnézni a $H(t)$ Hubble-paraméter viselkedését különböző m tömegparaméterek mellett:



15. ábra. Log-Log skálán különböző m értékek mellett a H

Látható hogy a Log-Log skálán ábrázolt Hubble paraméternek a felfúvódás alatt van egy jellegzetes szakasza: a felfúvódás alatt a Hubble paraméter értéke csak kicsit változik, és minden esetben megjelenik a görbében egy platós alak. Minden m esetén az ábrán látható csökkenő szakasz után, ahogy elkezdődik a plató, abban a pillanatban kezdődik a felfúvódás, majd amikor véget ér ez a szakasz akkor fog végződni, majd a Hubble paraméter drasztikusabban elkezd csökkenni.

7. Összefoglalás

A dolgozat során megvizsgáltam klasszikus esetben a felfúvódást, és visszakaptam az irodalomban is jól ismert eredményeket. Ezekután a kvantum-feljavított esetben, amikor a gravitációs és kozmológiai állandókat lecseréltem a nekik megfelelő energia-skálafüggő társaikra, megvizsgáltam a felfúvódást egy alkalmasan megválasztott m tömegparaméter mellett. Számolások során sikerült lassú-gördüléses felfúvódást találni, és vizsgálni azt, majd összehasonlítani a klasszikus esetbeli felfúvódással. Eredményül azt kaptam, hogy a kvantum-feljavított esetbeli felfúvódás később következett be, és hosszabb ideig is tartott, mint a klasszikus esetbeli, miközben a megfelelő tömegparaméternek köszönhetően az Univerzum méretének növkedésében nem történt változás.

A dolgozat során még a két esetbeli felfúvódás vizsgálata során fennmaradó nyitott kérdésekre sikerült választ adni a kvantum-feljavított esetbeli felfúvódás további vizsgálataiban: megvizsgáltam a kezdetifeltételekre való érzékenységét a numerikus pontosságnak, és megvizsgáltam az első és második szakaszban bekövetkező felfúvódásnak a tömegparamétertől való függését. Azt kaptam eredményként, hogy a kezdeti feltételektől független megoldást kaptam, és a fellépő hibák a leolvasásból adódhatnak.
Az első szakasz tömegtől való függésére azt kaptam, hogy létezik már olyan nagy m, hogy az analitikusan közelített formulák nem érvényesek az első szakaszra, hiszen nem fog a kinetikus tag dominálni. Továbbá sikerült a kettő kapcsolatára egy analitikus összefüggést illeszteni.
A felfúvódás és a tömegparaméter kapcsolatára azt kaptam, hogy a felfúvódás erősen függ a tömegparaméter megválasztásától, a kettő kapcsolatára ($\mathcal{N}(m)$) is sikerült egy analitikus formulát illeszteni, így ezzel az általam használt tömegparaméter választása indokolt az összehasonlítás során. Továbbá egy erős állítást is sikerült bizonyítni: az általam talált megoldás fizikai esetekben univerzális, hiszen az $\mathcal{N} \approx 60$ felfúvódási kitevő olyan m mellett teljesül, hogy a kinetikus tag bőven dominál a potenciális tag felett, és alkalmazható az általam követett eljárás. Ismert volt még, hogy a Hubble-paraméter a felfúvódás ideje alatt csak nagyon kicsiny értéket változott, ezt is sikerült vizsgálni, és igazolni.

A. függelék: az első -UV- szakasz analitikusan közelített összefüggései

A Világegyetem korai szakaszában a kinetikus tag dominált a potenciál felett:

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 >> V(\varphi) = \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \tag{A.0.1}$$

Ennek a kihasználásával az

$$3H^2 = 8\pi\rho^{(\varphi)}g_*k^{-2} + \lambda_*k^2 \tag{A.0.2}$$

$$\dot{H} = -4\pi g_*\dot{\varphi}^2k^{-2} \tag{A.0.3}$$

egyenletekből

$$H_{est}^2 \approx \frac{2\lambda_*k_{est}^2}{3} \qquad \dot{H}_{est} = -\lambda_*k_{est}^2 \tag{A.0.4}$$

adódik, ahol az "est" felirat a közelített formulát jelenti. Az (A.0.4)-ből H-ra kapható egy analitikusan megoldható differenciálegyenlet:

$$-\frac{\dot{H}_{est}}{H_{est}^2} = \frac{3}{2}, \tag{A.0.5}$$

amiből

$$\boxed{H = \frac{2}{3t + C}}, \tag{A.0.6}$$

ahol C integrációs állandó, meghatározható a $H^{-1}(0) = 0$ kezdőfeltétellel: $C = 0$. Illetve

$$\boxed{k_{est}(t) = \sqrt{\frac{3}{2\lambda*}}H_{est}(t) = \sqrt{\frac{2}{3\lambda_*}}\frac{1}{t}, \qquad \varphi_{est}(t) = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3\omega}\frac{1}{t}} \tag{A.0.7}$$

ahol $\omega^2 = 8\pi g_*\lambda_*$. A t_G-re lehet egy becslést adni:

$$\begin{aligned} k_{est}(t_G^{est}) =& k_G = \sqrt{\frac{3g_*}{G_0}} = \sqrt{\frac{2}{3\lambda_*}}\frac{1}{t_G^{est}} \\ t_G^{est} =& \sqrt{\frac{2G_0}{9g_*\lambda_*}} \approx 1.27 s_{Pl}. \end{aligned} \tag{A.0.8}$$

Hivatkozások

[1] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, (University Press, Cambridge, 2005).

[2] D. Baumann, *TASI Lectures on Inflation*, arXiv:0907.5424.

[3] S. Nagy and K. Sailer, *Interpolation formulas for asymptotically safe cosmology*, Universe 2023,9(4)184

[4] M. Reuter, *Nonperturbative Evolution Equation for Quantum Gravity*, Phys. Rev. D 57, 971 (1998), arXiv:hep-th/9605030.

[5] O. Lauscher and M. Reuter, *Ultraviolet Fixed Point and Generalized Flow Equation of Quantum Gravity*, Phys. Rev. D 65, 025013 (2001), arXiv:hep-th/0108040.

[6] O. Lauscher and M. Reuter, *Is Quantum Einstein Gravity Nonperturbatively Renormalizable?*, 2002 Class. Quantum Grav. 19, 483 (2002), arXiv:hep-th/0110021.

[7] M. Reuter and F. Saueressig, *Functional Renormalization Group Equations, Asymptotic Safety, and Quantum Einstein Gravity*, arXiv:0708.1317.