

Debreceni Egyetem
Műszaki Kar
Gépészmérnöki Tanszék



Folyadékhajtóanyagú rakéták és szimulációs vizsgálatuk

Szerző: Kovács Dániel Gépészmérnök BSc hallgató

Témavezető: Dr. Hajdú Sándor egyetemi docens

Tanszékvezető: Dr. Mankovits Tamás egyetemi docens

Debrecen
2023.

Tartalom

1. Bevezetés és célkitűzés.....	3
2. Rakétatechnikai ismertető.....	5
2.1. Rakéták és felhasználásuk.....	5
2.2. Rakéták csoportosítása.....	6
2.2.1. Kémiai elvű rakéták.....	6
2.2.2. Nem kémiai elvű rakéták.....	8
3. Folyadék-hajtóanyagú rakéták jellemzői.....	9
3.1. Működésük.....	9
3.2. A hajtóanyagról.....	17
3.2.1. Hajtóanyagok általános jellemzői.....	17
3.2.2. Fajlagos impulzus.....	19
4. Rakétadinamikai alapismeretek.....	21
4.1. Rakétára vonatkozó általános összefüggések.....	21
4.1.1. Fizikai alapok.....	21
4.1.2. Tolóerő és kiáramlás.....	22
4.1.3. A rakétatechnika alapegyenlete.....	26
4.1.4. Rakéták atmoszférikus viselkedése.....	30
4.2. Kiegészítés.....	32
4.2.1. Termodinamika.....	32
5. Szimulációs vizsgálat.....	35
5.1. A vizsgált rakétaszerkezet.....	35
5.2. Szimulációstér és bemeneti adatok.....	37
5.3. Szimulációs eredmények.....	40
5.3.1. Szimulációk.....	40
6. Összefoglalás.....	47
7. Felhasznált irodalmak és források.....	48
8. Függelék.....	49
8.1. Dolgozatom elkészítésében segítséget nyújtottak.....	49
8.2. Számítások.....	49

1. Bevezetés és célkitűzés

Ahogy dolgozatom címében olvasható kutatásom a műszaki élet egyik különleges területével, a rakétatechnikával foglalkozik. Tanulmányaim során több alkalommal tapasztaltam, hogy a műszaki élet igen sokszínű, változatos mégis összetett. Jobban szemügyre véve a különböző műszaki területek összetettségét, joggal merülhet fel a kérdés, hogy mégis mi reprezentálja a műszaki tudományok csúcsát. Ugyan a válasz koránt sem egyértelmű, az bizonyosan megállapítható, hogy az egyik legtöbb kihívást rejtő terület a rakétatechnika. Ezt az állítást arra alapozom, hogy a rakétaszerkezetek létrehozása és folyamatos ütemű továbbfejlesztése olyan megoldandó problémákat vethet fel, amelyek a mérnök társadalom szemléletét és kreativitását nagyban befolyásolhatja. A rakéták történelme meglehetősen régre nyúlik vissza, de fejlődésük üteme a modern korban gyorsult fel igazán. A 20. század elejétől fokozódó kutatások indíttatása, leginkább a világűr elérése iránti vágy és az űrutazás nyújtotta lehetőségek kimerítése volt. Innentől datálható a rakétatechnika tudomány felívelése. A kutatások és fejlesztések másik kiváltó oka a haditechnika, amely mentén megszületett a második világháborúban elsőként bevetett és a modern rakétatudományok alapjául szolgáló A4 (V2) rakéta. Az űrutazást napjainkban is igen nagy érdeklődés övezi így azt gondolom a rakétákkal kapcsolatos gondolatok és kérdések aktualitást élveznek. Ugyan a rakétatechnika minden egyes rakétatípust, és ezek viselkedésének elemzését egyaránt magában foglalja, az általam írt dolgozat formai követelményei nem teszik lehetővé a rakéták részletekbe menő vizsgálatát. A leírtakban mégis törekedtem arra, hogy széleskörű áttekintést nyújtsak a rakétatechnika több aspektusában. A dolgozatomban két nagyobb téma kerül kifejtésre, melyből az egyik a rakétatechnika fogalomköre és kellő részletességgel történő leírása, a másik egy meghatározott adatokból létrehozott szimulációs vizsgálat. A két dolgozatrész természetesen szoros összefüggésben áll egymással, így a dolgozatban feltárt összefüggések segítségével szolgálnak a szimulációs vizsgálat adatainak meghatározásához.

Ahhoz, hogy a rakéták világában szakmai igényességgel elmerülhessek, a szakirodalmak gondos áttekintésére volt szükségem. A kutatásomhoz felhasznált alapvető irodalom H. Mielke: A rakétatechnika alapjai (1962) című alkotása volt, amely meglehetősen mély ismeretanyagot tár az olvasó elé, a viszonylag rövid 285 oldalas terjedelme ellenére. Az irodalom annak ellenére, hogy régi sok hasonlóságot mutat a dolgozatomban más fő irodalmával, ami nem más mint, George P. Sutton, Oscar Biblarz: Rocket Propulsion Elements Ninth Edition (2017). Ez utóbbi két mű segítségemre volt a 3. és 4. fejezet pontjainak kellő részletességű

kidolgozásában. A 2. fejezet kidolgozásához továbbá D. P. Mishra: Fundamentals of Rocket Propulsion (2017) mű, illetve a www.researchgate.net online publikációs felület biztosított megbízható támpontot. Emellett a NASA (<https://www.nasa.gov>) hivatalos oktató anyagaiból is új információkhoz tudtam hozzájutni, valamint a témában elérhető levéltári anyagokat is feldolgoztam. A szimulációs vizsgálatom Matlab és Simulink program felhasználásával készült, amihez adatokat a <https://www.mathworks.com> oldalról értem el.

A dolgozatom megírásához a személyes érdeklődésem és a modern gépészeti alkotások csodálata adott inspirációt. A rakétatudomány ugyan jól dokumentált mégis kihívást jelent összefoglaló jelleggel bármilyen értekezést készíteni belőle. Mivel azt gondolom a rakéták világát általában homály fedi így dolgozatomban azt a célt fogalmaztam meg, hogy adott specifikációval rendelkező rakéták (folyadékhajtóanyagú rakéták), alapvető működését és a rakétatechnikai alapjait összefoglaljam, majd egy idealizált rakétamodellt a dolgozatban feltárt összefüggések nyomán szimulációs vizsgálatnak vessek alá, melyben a választott (A4) rakéta repülési karakterisztikáját egy referencia pályához viszonyítva vizsgálom, továbbá egy esetleges súlycsökkenés repülésre gyakorolt hatását is elemzem. Az így nyert adatok világossá teszik egy ideális rakétatest viselkedését az általam választott légköri körülmények között.

2. Rakétatechnikai ismertető

2.1 Rakéták és felhasználásuk

Dolgozatom bevezetése után, célszerűnek tartom tisztázni, hogy mit is nevezünk rakétának és mit sugárhajtott eszköznek. Rakéták alatt olyan repülőszervezeteket értünk, melyek a sugárhajtás elvén működve kizárólag belső erők hatására jönnek mozgásba. Sugárhajtásról pedig akkor beszélünk, ha egy speciális erőgép (hajtómű) a kívánt szerkezet mozgatásához szükséges erőt úgy állítja elő, hogy munkaközegének energiaátalakítása során keletkező gázt vagy folyadékot az átalakító térhez kapcsolt fúvócsőből nagy sebességű sugárként áramoltatja ki, ezzel képezve a kiáramoltatott (gáz)sugár hajtóerejével ellentétes értelmű mozgóerőt. Az így létrehozott hajtások a hatás-ellenhatás törvénye alapján működnek. A repülőgépekben és rakétákban alkalmazott hajtások között viszont szembevetendő különbség, hogy rakéták esetén, nincs szükség külső közeg (levegő) jelenlétére, mivel a saját mozgatásához szükséges erőt a fedélzetén szállított hajtóanyag keverék felhasználásával biztosítja.

A rakéták világában nem csak a hagyományos, általában földi légkörben és légkörön kívül alkalmazott szerkezetek kerülhetnek szóba. Beszélhetünk ugyanis speciális eszközökről, mint az úgynevezett vízrakéta, ami működésében hasonló a fent említetthez, viszont hajtásához víz-sugár kiáramlás biztosítja az erőt. Szeretném kiemelni, hogy a dolgozatomhoz végzett kutatás java hagyományos rakétákkal kapcsolatos és a továbbiakban ezeket tárgyalja.

Megfigyelhető, hogy a rakéták felhasználása célorientált, mégis változatos. Ha átfogó képet szeretnénk kapni arról, hogy milyen feladatokra alkalmaznak rakétákat, akkor két nagyobb csoport igazán szembevetendő, a harcászati rakéták és a kutató rakéták. Elsőként a harcászati rakétákról teszünk említést, amelyek napjaink leggyakrabban alkalmazott rakétái és jellemzően távolsági csapásmérő eszközként van rendszeresítve. A harci cselekmény természetétől függően lehet szó kisebb légi harcban, illetve közeli célpont ellen bevethető rakétáról, vagy közepes- nagy hatótávolságú úgynevezett ballisztikus rakétáról, amik hasznos terhe minden esetben valamilyen robbanótöltet.

A másik a kutató rakéták csoportja, melyben az úgynevezett indító rakéták és űrrakéták tartoznak. Mindkét esetben elsősorban kutatási célú, az űrutazással kapcsolatos felhasználásról beszélhetünk, bár az indító rakéták jelentősége nagyobb. Ahogy nevében is olvasható ezek az eszközök összetett rakétaszervezetek (rakétafokozatok, űrhajók stb.) felszíni elindítását szolgálják míg az űrrakéták a már világűrben való manőverek sikeres végrehajtására

szolgálnak. Akár kutatási célú, akár hadi rakétákról beszélünk, megállapítható, hogy a rakéták világa igen sokszínű, emiatt csoportosításuk nehézkes.

Ha mélyebbre tekintünk a rakéták világában számos eltérő adottságú szerkezettel találkozhatunk. A kisebb rakéták egyszerűbb kivitelűek míg a nagyobb távolságra vagy jelentős tömeg emelésére tervezett járművek jóval nagyobb, robusztusabb megjelenésűek. Viszont látható, hogy mind a hadi mind a kutató rakéták jellegzetes szerkezetűek és a felhasználás céljától függetlenül felépítésükben hasonlóság figyelhető meg. Két jellegzetes típust szeretnék kiemelni. Az első ilyen a sorosan kapcsolt (több fokozatú) szerkezet, amit nagyobb rakétakonstrukciók megépítéséhez használnak. Az ilyen felépítmény azt a célt szolgálja, hogy kedvező tömegarány mellett, (4.1.3) a lehető legnagyobb sebességet éri el. Ez azért lehetséges mivel a fokozatok egyenként külön-külön teljesértékű repülőeszközök. A fokozatok száma elvileg tetszés szerint növelhető, de a gyakorlatban 3 fokozatnál ritkán alkalmaznak többet. Fontos még megjegyezni, hogy a szimpla fokozat alkalmazása nagyobb rakétáknál, műszaki korlátok miatt hamar háttérbe szorult.

A másik említésre méltó szerkezeti kialakítást párhuzamosan kapcsoltnak nevezzük és a gyakorlatban egymással párhuzamosan rögzített rakétákat – vagy rakétahajtóműveket – jelent. Mivel párhuzamos rakétameghajtás esetében, akár egy rakétaegységen belül több hajtóművel is számolhatunk, így ez a fajta összeállítás kedvezőtlen hatással van a tömegarányra.

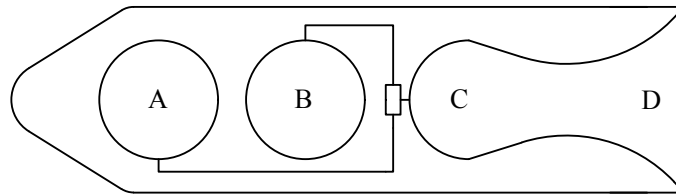
2.2 Rakéták csoportosítása

2.2.1 Kémiai elvű rakéták

Ez a hajtástípus olyan rakétahajtóművekkel szerelt rakétákat foglal magába, amelyek kémiai reakciók útján (rendszerint égés útján) állítják elő a kellő energiát saját tömegük mozgatásához. A kémiai rakéták a tárolt hajtóanyag fizikai állapotától (halmazállapot) függően osztályozhatók.

Az első kategória a folyékony hajtóanyagú rakétahajtóművek, amelyek felhasználás előtt folyadékként tárolják hajtóanyagukat, majd a nyomás alatti tartályokból a rakétakamrába táplálják, ahol begyűjtést követően a kiáramló gáz sugár hajtóerőt hoz létre. Érdemes megjegyezni, hogy a folyékony üzemanyag számos technikai nehézséget okoz – a hajtómű normál működésén túl. Üzemeltetésük költségvonzata nagy és az üzemanyag függvényében fokozott előkészületet igényelhet. Ezalatt az értendő, hogy némelyik üzemanyagnál rendkívül alacsony hőmérsékleten meg végbe a betáplálás, mielőtt a hajtóművek begyűjtése, ezzel együtt

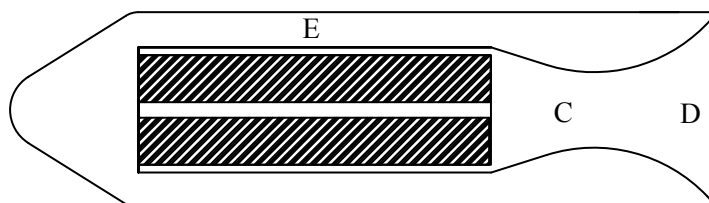
az üzemanyag elégetése megtörténne. Ennek ellenére, főként hatékonysága miatt napjainkban is ez a típus a legelterjedtebb.



- A: Tüzelőanyag
- B: Oxidálószer
- C: Rakétakamra
- D: Fúvóka

1 ábra: Folyadék-hajtóanyagú rakétaszerkezet vázlata [3.]

A szilárd hajtóanyagú rakétamotorok egyszerűbb konstrukciók folyadékos társaiknál. Az elégetni kívánt összetevőket általában már előre az égéskamrába töltve tárolják. A szilárd hajtóanyag (másnéven töltet) legtöbbször, tartalmazza az összes kémiai elemet, ami a teljes égési folyamathoz szükséges (tüzelőanyagot és az oxidálószer). A töltet többnyire nem tömör, felülete úgy van kialakítva, hogy elősegítse az égést, amely begyújtás után előre meghatározott sebességgel egyenletesen játszódik le, a belső üreg kitágul, ahogy a hajtóanyag egyre fogy. A keletkező forró gázok átfolynak a fúvókán, így hozva létre a mozgáshoz szükséges erőt.



- E: Hajtóanyag-töltet
- C: Rakétakamra
- D: Fúvóka

2. ábra: Szilárd-hajtóanyagú rakétaszerkezet vázlata [3.]

Megemlítem még a hibrid meghajtó rendszereket, amelyek folyékony és szilárd hajtóanyagokat is felhasználnak. Találkozhatunk szilárd tüzelőanyag és folyékony oxidálószer kombinációval, vagy fordítva, előfordul továbbá 3 komponensű hibrid hajtóanyag, amelyben szilárd tüzelő és oxidálószer mellett folyékony oxidálószerrel egyaránt fokozza az égést.

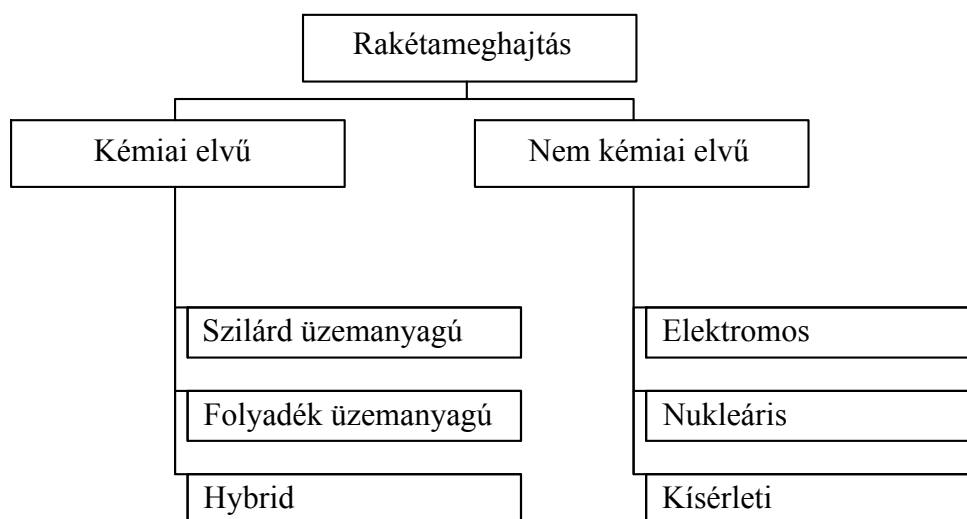
2.2.2 Nem kémiai elvű rakéták

Nem kémiai elvű rakétamotorról akkor beszélünk, ha a szerkezet mozgatásához felhasznált energia nem vegyi, nem égési folyamat segítségével jön létre. Ilyen például a nukleáris rakétahajtás, amely alapvetően egyfajta folyékony hajtóanyagú rakétamotor, de a bemeneti teljesítmény a hagyományosan elégetett hajtóanyag helyett egyetlen atomreaktorból származik. Alkalmazásukra nem láthatunk precedenst, mivel az esetleges balesetek vagy az üzemi kibocsátás következtében, radioaktív anyagok kerülhetnének Föld környezetbe. Ennek elkerülése érdekében az ilyen irányú fejlesztések idejekorán megszűntek.

A nukleáris elvű működés mellett az elektromos meghajtás a viszonylag kedvező teljesítménye és tisztasága miatt lehet vonzó. Az elektromos elven működő rakétahajtóművek a kívánt tolóerőt viszonylag alacsony hajtóanyag-felhasználás mellett hozzák létre. Az ilyen meghajtás viszont túl gyenge a földi kilövésekhez és a légkörben történő harcra bevetésekhez, mert meglehetősen nagy tömege mellett alacsony nagyságú hajtóerőt hoz létre. Alkalmazása így a már űrbe juttatott eszközök mozgatására korlátozódik. Az űrben alkalmazott járművek sebességének növelése érdekében működtetésüket vegyi meghajtásnál lényegesen hosszabb ideig kell fenntartani. A három alapvető elektromos típus közül első az elektrotermikus rakétahajtás, ami leginkább a korábban tárgyalt folyékony-hajtóanyagú vegyi rakétaegységekre hasonlít, de ezeknek a hajtómotoroknak szintén csekély az ereje.

A másik két típus – az elektrosztatikus és az elektromágneses tolómotor – csak vákuumban működik és különböző eszközökkel valósítja meg a meghajtást továbbá nincs szükség a fűvókában lezajló termodinamikai gáztágulásra, mint kémiai elvű rakéták esetében.

Ugyan kísérleti szakaszban, de már vannak alternatív elektromos rakétameghajtások, mint például a napenergia hajtómű.



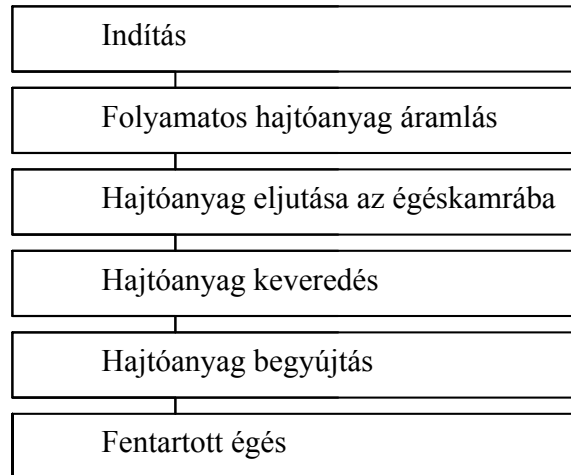
3. ábra: Rakétameghajtások csoportosítása [4.]

3. Folyadék hajtóanyagú rakéták jellemzői

3.1. Működésük

Ebben a fejezetben igyekszem átfogó képet adni bizonyos rakétatípusok működéséről. Általánosan igaz, hogy a rakéták működése összetett folyamat, mely a rakéta működési elvétől és a felhasználás céljától függően változik. Emiatt, célszerűnek tartottam a vizsgált rakéták csoportját a szimulációban használt rakétatípusra szűkíteni.

A folyadék halmazállapotú reaktív vegyianyagokból felépülő hajtóanyag, amelyeket ennél a rakétatípusnál alkalmaznak, a rakéta megtervezésének minden pontjánál kifejezetten nagy gondosságot követel meg. Az ábrát (4.ábra) értelmezve, az általános működés a következőképpen zajlik. Indításkor a szabályzórendszerek és szelepek működésbe lépnek. A rakéta felépítésétől függően csőhálózaton keresztül megindul az áramlás mind az oxidálószer mind pedig a tüzelőanyag tartályból a szerkezet alegységei felé, ahol a hajtóanyag összetevők nyomás alá kerülnek majd a rakétakamrában szabályozott körülmények közt elégnak.



4. ábra: Rakéta működési vázlata

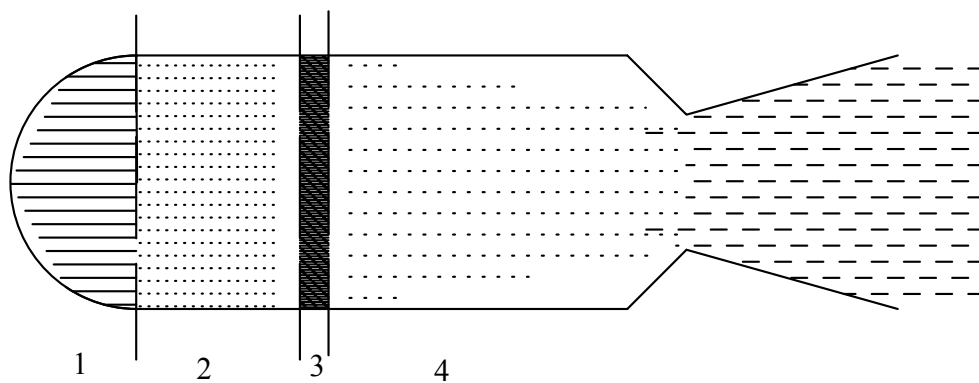
A hajtóanyag elégésekor, (vagy bomlásakor) felszabaduló hőmennyiség kívánt mértékben megnöveli a rakéta égéskamra nyomását. Ennek hatására az égő gázok nyomáscsökkenést szenvednek el. Ennek eredménye a gázsugár kiáramlása mellett ható visszalökő erő. Az égési folyamat, ugyan minden kémia elven működő rakétánál hasonló, szerkezetileg mégis a hajtóanyag tárolás és betáplálás teszi őket különbözővé. Ehhez a folyamathoz választják meg a tervezők a rakéta műszaki paramétereit.

A leírt folyamatból következik, hogy a működés elengedhetetlen részei a rakétahajtómű, amiben rendszerint helyet foglal a betápláló rendszer az égéskamra, a fúvóka és a tartálykészlet, amely az üzemanyagkomponensek tárolására és ellátására szolgál. Az említett rakéták a megfelelő szerelvényekkel, csövekkel, szelepekkel, elektronikával, vezérlőrendszerekkel is el vannak látva. A rakétagyártás igen költséges, így minden hajtórendszer konkrét célra tervezett. Eszerint változik a hajtómű tömege a gyártás költsége és a rakétára vonatkozó egyéb követelmények.

Néhány jellemvonást fontos megemlíteni magáról a folyadékos rakétahajtóművekben zajló égési folyamatról, és annak előkészítéséről. A folyadékos hajtóművek hajtóanyagtartályai a rakétakamrától elkülönítve foglalnak helyett. Így tehát az összetevőket csővezetéken és speciális bevezetőeszközökön keresztül kell folyamatos betáplálás mellett eljuttatni az égéskamrába (ha egyenletes nyomást feltételezünk). Az égéskamrában bekövetkező égési reakció gáznyomást létesít, ezért a betáplálást is nyomás alatt kell végezni, még hozzá az égés által kifejtett nyomásnál nagyobb nyomáson. A hajtóanyag összetevőit, mielőtt vegyi reakcióba lépnének, el kell párologtatni. Erre a lehetőséget a már

begyűjtött hajtóműben reakcióba lépett komponensektől átvett hő biztosítja. Továbbá gondoskodni kell a kamrába áramló üzemanyagsugár porlasztásáról a kívánt reakciósebesség biztosításának érdekében, ellenkező esetben a hajtóanyag elége nem játszódna le kellő hatékonysággal. Az előkészítés biztosítja a megfelelő keverékképzést, rendszerint az égéskamra fejében. Fontos, hogy a keverésben kulcsszerepet játszik a beporlasztott anyagok égésből felvett hője, továbbá, hogy minél nagyobb a kamrában a nyomásesés annál jobb keverékeloszlás várható.

Az égéskamra fő feladata, hogy a benne lejátszódó vegyi reakciók számára elegendően nagy lezárt teret biztosítson. Az égéskamrában végbemenő folyamatok kellő egyszerűsítések mellett a következő övezetekkel ábrázolható (5.ábra). Az ábrán látható első övezet az üzemanyagalkotók mechanikus porlasztást követő állapot. Itt a keveredés és az elpárolgás kismértékű, annak ellenére, hogy a hajtóanyag hőfelvétele elkezdődik. A második övezet már egy felmelegedő rész, itt éri el a párolgás és keveredés a reakciót megelőző csúcspontját. Az első kettőt, mint keverékelőkészítő övezetet lehet összefoglalni, bár az égésreakció kis mértékben már itt elkezdődik. A harmadik övezetben a keverék gázállapotba kerül, itt már akkora a hőmérséklet, hogy az égési reakció teljes terjedelmében elindul.



- 1: Betéplálási övezet
- 2: Keveredési övezet
- 3: Lángvonal
- 4: Reakció övezet

5. ábra: Égéskamra övezetek [1.]

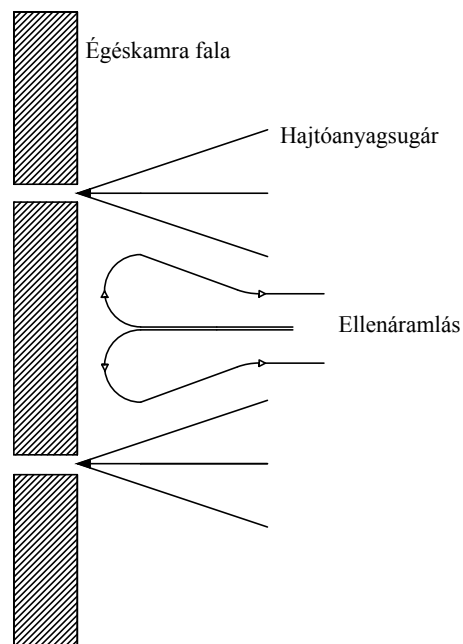
Ennek az övezetnek a szakirodalomi megnevezése a lángvonal, terjedelme vonalszerűen kis területre koncentrálódik (0,001mm). Így én a fenti ábrán (5. ábra) leginkább a szemléletesség kedvéért, elnagyolva ábrázoltam ezt a szakaszt. Továbbá említést érdemel, hogy a lángvonal által képviselt lánghatárfelület a valóságban nem sík, a keletkező örvénylő mozgások miatt. A lángvonalon beálló ugrásszerű hőfokemelkedés következtében a reakció sebessége igen erősen megnövekszik. A negyedik övezetben ezért az eddig még nem oxidált hajtóanyag szinte pillanatok alatt elég. (tökéletes égést feltételezve). Ezen övezetben éri el a reakció a csúcspontot majd az égéstermékek az égéskamrát a fúvócsövön kiáramolva elhagyják.

Ha nem feltételezünk tökéletes égést, akkor fontos körülmény, hogy a fúvócső torkolathoz közeledve az égéstermék hőfoka esik, ezért megnő annak a valószínűsége, hogy a kiáramló gázokban lévő vegyületalkotók ismét molekuláris vegyületekké alakulnak. A negyedik övezet jellemzően nagyméretűre tervezett annak érdekében, hogy az égés lehetőleg tökéletes legyen. A lángvonal helyzetét, kamrán belül a befecskendezőrendszerek megfelelő elhelyezésével biztosítják.

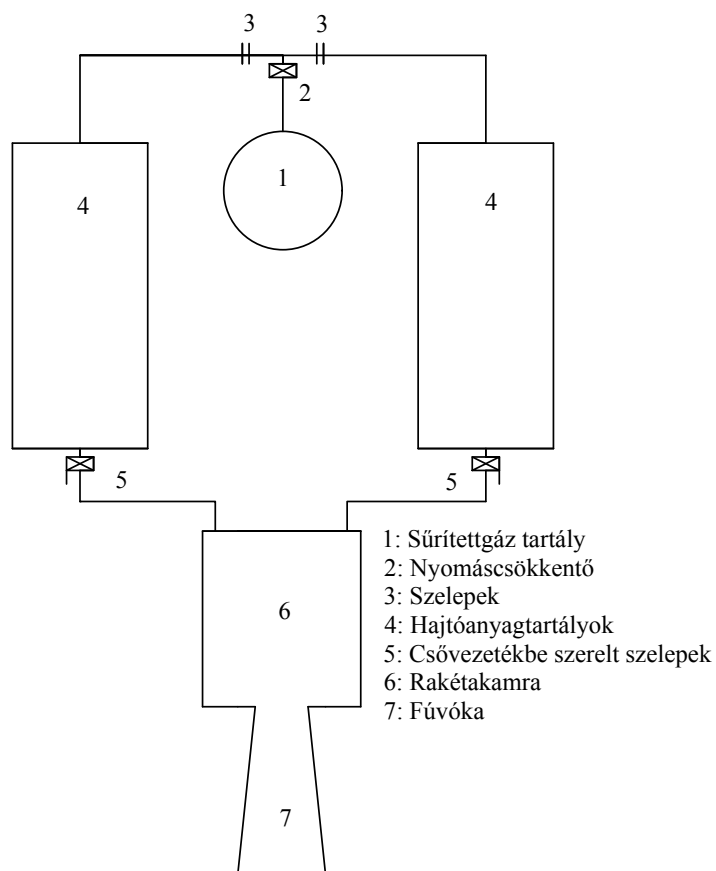
Mivel a teljesítménynek megfelelően égési folyamatok fenntartásához szükséges mennyiségű hajtóanyagot nyomás ellenében (6. ábra) kell az égéskamrába juttatni és a jó keverékhez elengedhetetlen egy bizonyos túlnyomás, ezért szükség van a már korábban említett betápláló rendszerekre. A hajtóanyag szállításhoz szükséges nyomás előállításának két jellegzetes csoportja van. A gáznyomással szállító rendszerek és a tápszivattyús rendszerek.

A kizorításon alapuló betáplálás esetén (gáznyomású szállító rendszerek) a hajtóanyagot sűrített gáz nyomja be az égéskamrába. Ennek a szállító eljárásnak a sajátossága a nagy üzemi nyomás, ezért a tartályokat úgy készítik, hogy azok a nagy nyomásnak ellenálljanak. Ez azt okozza, hogy az üzemanyagtartályokat vastagfalúra kell tervezni így azok nehezek lesznek. A rendszer leginkább tömegtöbbletben megjelenő hátránya okozza azt, hogy általában kis teljesítményű hajtóművekben alkalmazzák ezt az eljárást. A hajtóanyag reakcióképes ezért nem mindegy milyen gázt használunk üzemanyag szállításra, törekedni kell a kémiaiilag semleges gázokra.

A betáplálás másik formája szivattyús gépcsoporttal történik. A szivattyúval való betáplálásnak a kizorításon alapuló rendszerekkel szemben azzal a nagy előnnyel rendelkezik, hogy a hajtóanyagtartályokban nem kell nagy nyomást fenntartani, így a tartály falvastagsága jóval kisebb. A nagyméretű folyadékös hajtóművek esetén legjellemzőbb a centrifugál szivattyúk alkalmazása, ahol a szállítandó folyadék a szivattyú tengely irányába lép be a járókerékbe, ebből annak gyors forgása következtében sugárirányban nyomás alatt távozik a kereket körül ölelő házba, majd az égéskamrába.



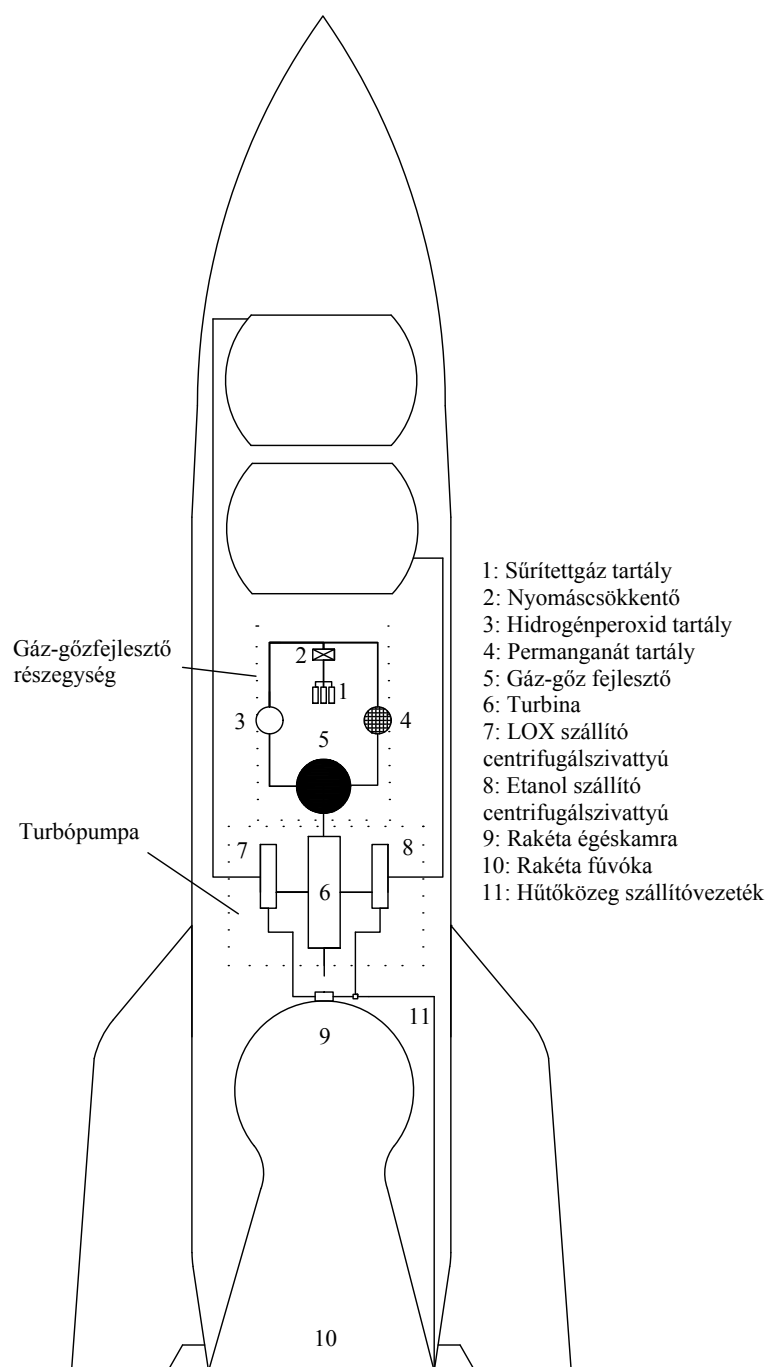
6. ábra: Betáplálás az égőkamrába [1.]



7. ábra: Kiszorításon alapuló betáplálás vázlata [1.]



8. ábra: Az A4 rakéta égéskamra-fúvóka fotója [7.]



9. ábra: A4 rakéta turbószivattyús betáplálás vázlata [1.]

A forgószivattyúk legkedvezőbb hajtógépcsoportját a gőz vagy gázturbinával való kapcsolata adja, mert ezek segítségével a szivattyúk nagy fordulatszámát könnyen elérni lehet. Szerkezeti szempontból előnyös, ha a turbina a megfelelő számú hajtóanyagszivattyú esetenként hűtőszivattyú is közös tengelyre van szerelve. Az ilyen konstrukciókat nevezik turbószivattyúnak. Szimulációs vizsgálatom kiindulási alapját az úgynevezett A4 rakéta képzi,

amelyről kellő adat áll rendelkezésre ahhoz, hogy viszonylag pontos szimulációt végezhessek. A betápláló rendszer adatainak ismertetését ebben a fejezetben tartom célszerűnek. Az A4 rakéta működése a korábbi ábrán (9. ábra) látható.

1. táblázat: Az A4 rakéta turbószivattyújának jellemző adatai [1.]

Turbina	
Futókerék átmérő:	447 mm
Üzemi nyomás:	2579148,95 pa
Kilépő nyomás:	156906,4 pa
Belépő gőz hőmérséklete:	380 celsius
Gőzfogyasztás másodpercenként:	2,1 kg
Etanolszivattyú	
Járókerék átmérő:	320 mm
Szállítónyomás:	2137849,7 pa
Szállítóképesség másodpercenként:	55,9 kg
Oxigénszivattyú	
Járókerék átmérő:	262 mm
Szállítónyomás:	1725970,4 pa
Szállítóképesség másodpercenként:	69,1 kg
Szerkezet teljes tömege	150 kg

2. táblázat: Az A4 rakéta gáz-gőzfejlesztő jellemző adatai

Első felhasznált reagens	Permanganát
Második felhasznált reagens	Hidrogénperoxid
Gáz-gőz fejlesztő teljes tömege	148 kg

A rakéták tervezési nehézségeit leginkább a rakétahajtóművek kialakítása jelenti. A működésük fontosabb elemeinek áttekintése után következzen néhány gondolat arról, hogy milyen követelmények mentén történik a rakétánál felhasznált szerkezeti anyagok kiválasztása. Rakétatechnikai célokra leginkább fémek alkalmasak. Ez annak köszönhető, hogy jól megmunkálhatóak, mechanikai szilárdságuk kielégítő és hővezetőképességük is nagy, bár a forró gyorsan áramló és gyakran roncsoló hatású égési gázokkal szemben nem eléggé ellenállóak. A fémek hátrányos tulajdonságai figyelembevételével be kell látni, hogy a rakétameghajtás megköveteli a nagy hőtűrőképességet az imént említett viszonyok mellett. Azok az elemek melyek az ilyen roncsolóhatású nagy hőfokú gázokkal érintkeznek ki kell elégíteniük a következő követelményeket: nagy hőfokon kellő mechanikai szilárdságuk van és a korrozív, errózív hatásnak megfelelően ellenállnak. Általában igaz, hogy a kémiai égesnek kitett rakétahajtóművek hűtés nélkül csekély ideig terhelhetőek, ugyanis az égéskamra és fűvóka hőfelvételéből adódóan a fémszerkezet megolvadhat. A folyadékos rakéták esetén a

hőterhelés relatív hosszú időtartamú, ezért gondoskodni kell a terhelt elemek megfelelő hűtéséről. A hűtés hatékonyságának növelése szempontjából az alkalmazott fém alapanyag hővezetőképessége kulcsfontosságú. A hűtésen túl megfigyelhető bizonyos különleges bevonatok, leginkább kerámiák felhasználása a kiemelten terhelt pontokon. Így például a rakétakamra és a fűvócső érintkezési pontjain. A tervezésnél fontos szempont tehát a megfelelő anyagok kiválasztása a hőviszonyok megfelelő ismeretében, és a szerkezeti igényekhez jól megválasztott hűtési eljárás.

3.2 A hajtóanyagokról

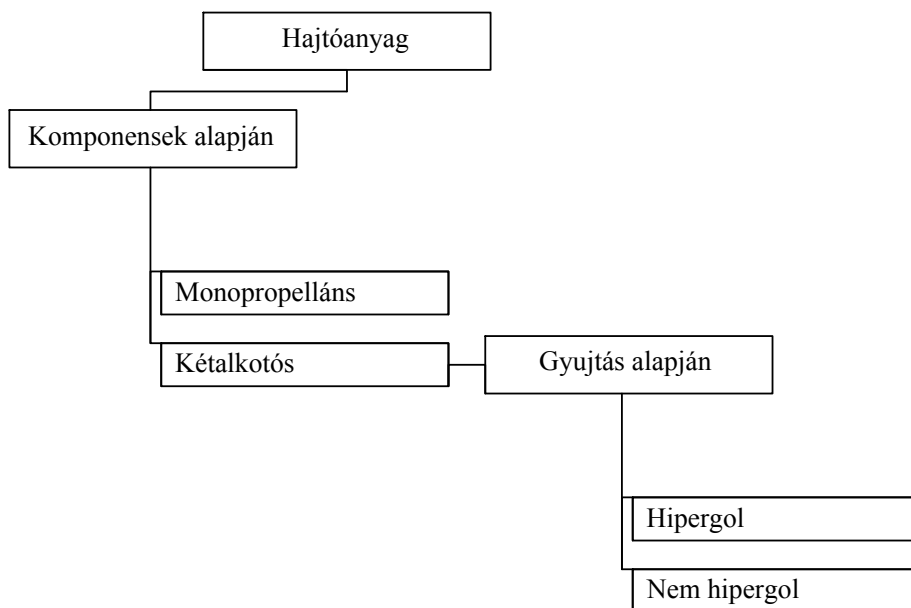
3.2.1 Hajtóanyagok általános jellemzői

A hajtóanyagban tárolt energia égés (kémiai és termodinamikai folyamat) során szabadul fel. Az égés, mint kémiai folyamat több alkotó jelenlétét feltételezi. Ez esetben sincs ez másként, a hajtóanyag égése két kémiai elegy reakciójából fakad. Ez a két elegy az úgynevezett tüzelőanyag és az oxidálószer. Így tehát a később leírtak esetén is igaz, hogy hajtóanyag alatt a tüzelőanyag és oxidálószer párosát értem.

Az oxidálószer olyan vegyület, amely jelentős mértékben képes oxidálni (oxigén atomot leadni), míg a tüzelőanyag lényegében az energiahordozó. A folyékony hajtóanyag kifejezés leginkább cseppfolyós kémiai hajtóanyagokra értendő, bár idesorolhatóak a eredendően gáz halmazállapotú anyagok is. Az égés elindításának pillanata a gyújtás. A gyújtás, ami történhet segédberendezés, segédanyag, vagy öngyulladás útján, biztosítja az égési reakció bekövetkezéséhez szükséges kezdeti energiát. Az elégetni kívánt hajtóanyagnak ugyan eleget kell tenni a kémiai égés feltételeinek, de nem minden esetben különül el az éghető- és az égéstápláló anyag egymástól. Az rakéta üzemanyagok tehát csoportosíthatók aszerint, hogy a reakció egy vagy több komponens segítségével zajlik le.

Abban az esetben, amikor egyetlen folyékony anyagban történik az oxidálószer és éghető anyagok tárolása a hajtóanyagot monopropelláns-nak nevezzük. Ez lehet több vegyület tárolt keveréke, vagy lehet homogén anyag. Ennél jóval jellemzőbb a több (két) komponensű hajtóanyag, amelynél a tüzelőanyag és az oxidálószer külön folyadékként van tárolva, majd a rakétahajtóműbe táplálva. Ezen anyagok összefoglaló neve a bipropelláns. A kétalkotós üzemanyagok további fontos jellemzője, hogy miként zajlik az elegy begyújtása. Itt ismét két változat különböztethető meg. Az első az úgynevezett hipergol bipropelláns amely az oxidálószer és a tüzelőanyag érintkezésekor fellépő reakció révén öngyullad.

Ezzel szemben a nem hipergol bipropelláns-nak energiára van szüksége (például elektromos kisülésből származó hőre) az égés megindításához.



10. ábra: Hajtóanyagok csoportosítása [1.]

A fenti csoportosításon túl további jellemvonások, például tárolás alapján is megkülönböztethetőek a rakétahajtóanyagok. Itt kettőt emelnék ki. Az egyik a viszonylag jól tárolható folyékony anyagok, amelyek normál hőmérsékleten és alacsony nyomáson folyékonyak. Ezek jellemzően hosszú ideig tárolhatók lezárt tartályokban, a tartály konkrét kialakításától, a hőviszonyoktól és a nyomástól függően. A másik a kevésbé jól tárolható, rendkívül alacsony hőmérsékletet igénylő, úgynevezett kriogén hajtóanyagok. Ezek a környezeti normál hőmérsékletnél jóval alacsonyabb hőmérsékletű cseppfolyósított gázok például folyékony oxigén (-183 °C) vagy folyékony hidrogén (-253 °C). Az ilyen típusú propelláns-nál gondoskodni kell a tárolótartály magas minőségéről és a kipárolgás minimalizálásáról.

Megemlítem még az úgynevezett hajtóanyag-keverék arányt. Ez azt az arányt jelenti, amelynél az oxidálószer és az üzemanyagáram keveredik, és reakcióba lépnek egymással így biztosítva a forró gázáramlást. A keverékarányt r -el jelölik és az oxidálószer tömegáramának, valamint a tüzelőanyag tömegáramának a hányadosa:

$$r = \frac{\dot{m}_o}{\dot{m}_t} \quad (1.)$$

A hányadosban szereplő mennyiségekről később (4.1.2) bővebben írok. Fontos továbbá, hogy a keverékarány befolyásolja az égéstermékek összetételét és hőmérsékletét. Általában ezt az arányt úgy választják meg, hogy a fajlagos impulzus (3.2.2) maximális értékét adja meg. Ehhez úgynevezett sztöchiometrikus keverékarányt kell elérni, amely azt jelenti, hogy a kémiai reakcióban résztvevő hajtóanyagkomponensek külön-külön nincsenek túlsúlyban. A tüzelőanyagszegény, illetve tüzelőanyagbő keverés kedvezőtlen hatással van kívánt kiáramlási feltételekre. A fűvókában eléggő keverék égése az ideális körülmények megléte mellett sem zajlik 100%-os hatékonysággal.

Dolgozatom későbbi fejezetében (5.), olyan rakétaszerkezetet vizsgálók melynek hajtóanyagkeverékét folyékony oxigén (LOX) illetve alkohol alkotja változó arányban. Ugyan a folyékony oxigén napjaink rakétaiban is az egyik legjobb oxidálószernek számít, az etil-alkohol tüzelőanyagként történő felhasználása már nem jellemző.

3. táblázat: A felhasznált hajtókeverék főbb jellemzői

A hajtóanyag fajlagos impulzusa tengerszinten	284 sec
Tüzelőanyag	Alkohol 75% Víz 25%
Oxidálószer	LOX
Optimális keverési arány (r)	1,43

3.2.2 Fajlagos impulzus

A fajlagos impulzus a (kémiai elven működő) rakéták egyik legfontosabb jellemzője. A fajlagos impulzus leginkább hajtóanyagok összehasonlítására alkalmazott mennyiség. Az I_s fajlagos impulzus az egységnyi hajtóanyag „tömeg” áramlási sebességét jelenti, ami esetén a magasabb szám gyakran jobb teljesítményt jelez. Ha a teljes hajtóanyag-tömegáram $\dot{m}$ és a standard gravitációs gyorsulás g , akkor a fajlagos impulzus értékét

$$I_s = \frac{\int_0^t P \, dt}{g \cdot \int_0^t \dot{m} \, dt} \quad (2.)$$

egyenlet adja meg, ahol P a tolóerő (4.1.2). A fajlagos impulzus mértékegysége a másodperc (szekundum), ez a mértékegység azonban nem az eltelt időt adja meg, hanem az egységnyi (tömegáram) tolóerőt. A már rendelkezésre álló mértékegységekből a következőképpen származtatható:

$$I_s = \frac{kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot s}{\frac{m}{s^2} \cdot \frac{kg}{s} \cdot s} \quad (3.)$$

$$I_s = \frac{kg \cdot s}{\frac{kg}{s} \cdot s} \quad (4.)$$

$$I_s = \frac{kg \cdot s}{kg} \quad (5.)$$

egyszerűsítések után

$$I_s = s \quad (6.)$$

Annak érdekében, hogy egyszerűen megkülönböztethető legyen az eltelt időtől, mértékegysége a következőképpen írandó:

$$I_s = [sec] \quad (7.)$$

A rakéták üzemszerű működése során számolni kell bizonyos átmeneti, tranziens állapotokkal (mint a begyújtás és leállás) amelyek befolyásolják a fajlagos impulzus értékét. Amennyiben az indítási és leállási tranzienseket elhanyagoljuk, továbbá állandó tolóerőt és tömegáramot feltételezünk, akkor az egyenlet a következőképpen egyszerűsödik.

$$I_s = \frac{P}{\dot{m} \cdot g} \quad (8.)$$

A Föld felszínén vagy annak közelében a tört nevezőjében lévő szorzat az effektív hajtóanyagtömeg áramlását adja meg, amit $\dot{G}$ -vel jelölünk. Így az egyenlet:

$$I_s = \frac{P}{\dot{G}} \quad (9.)$$

Mivel $\dot{G}$ egyenlő az effektív hajtóanyagtömeg áramlásával, ezért az összefüggést átrendezve megkapjuk a hajtóanyagfogyasztást, ami szintén egyenlő $\dot{G}$ -vel.

$$\dot{G} = \frac{P}{I_s} \left[\frac{N}{s} \right] \quad (10.)$$

Ha a kapott értéket elosztjuk a nehézségi gyorsulás (g) értékével akkor megkapjuk a hajtóanyagtömeg áramlását, az eltelt idő függvényében.

4. Rakétadinamikai alapismeretek

4.1 Rakétákra vonatkozó általános összefüggések

4.1.1 Fizikai alapok

Legelsőként a mozgásmennyiség vizsgálatát tartom indokoltnak. A mozgásmennyiség, másnéven impulzus (vagy lendület) a következő összefüggés alapján értelmezhető:

$$I = dm \cdot dv \quad (11.)$$

Ahol I egy adott test impulzusa m tömeg és v sebesség mellett. Tehát egy test mozgásmennyisége, ha külső erő nem hat rá nem függ mástól, csak a tömegétől és a sebességétől. Ekkor:

$$I = \text{állandó} \quad (12.)$$

Ha ezt az Impulzust meg akarjuk változtatni, akkor ez a változás külső kényszerítő erővel valósítható meg. Az ilyen erőbehatásoknál már kapcsolat áll fenn a lendület és a behatóerő közt.

Ha egy testre F erő hat t ideig, akkor az impulzusváltozást a következő összefüggés írja le:

$$dI = F \cdot dt \quad (13.)$$

továbbá

$$dI = F \cdot dt = dm \cdot dv \quad (14.)$$

A mozgásegyenlet integrálásával meghatározható az impulzusváltozás:

$$I = \int_0^t F dt \quad (15.)$$

$$I = F \cdot \int_0^t 1 dt \quad (16.)$$

$$I = F \cdot [t]_0^t \quad (17.)$$

$$I = F \cdot [t - 0] \quad (18.)$$

$$I = F \cdot t \left[kg \cdot \frac{m}{s} \right] \quad (19.)$$

A fenti egyenletet a klasszikus mechanika impulzustételnek nevezi, továbbá az egyenletben szereplő integrál értéke az úgynevezett erőlökiés. Látható, hogy a test lendületének megváltozása az erőlkéssel megegyező nagyságú. Az összefüggésből az impulzusváltozást okozó erő is meghatározható:

$$F = dm \cdot \frac{dv}{dt} \quad (20.)$$

amennyiben aránylag kis sebességű mechanikai folyamatokat feltételezünk a tömeg állandónak vehető, így a képlet egyszerűen felveszi az alábbi alakot:

$$F = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad (21.)$$

$$F = m \cdot a [N] \quad (22.)$$

alakot. Ahol az erő egyenlő lesz a tömeg és a gyorsulás szorzatával.

A következő fejezetben megjelenő számításokhoz elengedhetetlen, hogy említést tegyünk zárt tömegrendszer esetén a lendületmegmaradás törvényéről, amely következőképpen néz ki:

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \quad (23.)$$

Továbbá fontos törvényszerűség, hogy zárt tömegrendszerre ható belső erők esetén a rendszer súlypontja változatlan, illetve a teljes rendszer impulzusa (mozgásmennyisége) szintén változatlan.

4.1.2 Tolóerő és kiáramlás

A repülő járművek haladásához szükséges - hajtómű által kifejtett - mozgatóerőt, tolóerőnek nevezzük. Rakéták esetén fokozottan igaz, hogy a tolóerő leginkább egy reakcióerőként értelmezhető, melyet a hajtóműből kiáramló nagysebességű hajtóanyag részecskék fejtenek ki. Az így kifejtett erőt általában a rakétaszerkezet tömegközéppontjában értelmezzük.

A tolóerő fizikai szempontból a mozgásmennyiségre vezethető vissza, általánosan az impulzustételből levezethető impulzusváltozást okozó erőként értelmezhető. Ha a kilépő gázrészecskék sebessége állandó, tisztán axiális továbbá a kiáramlás állandósága adott, akkor a tolóerő maga is állandó. A képlete általánosan:

$$F = dm \cdot \frac{dv}{dt} \quad (24.)$$

amelyet átalakítva

$$F = \frac{dm}{dt} \cdot dv \quad (25.)$$

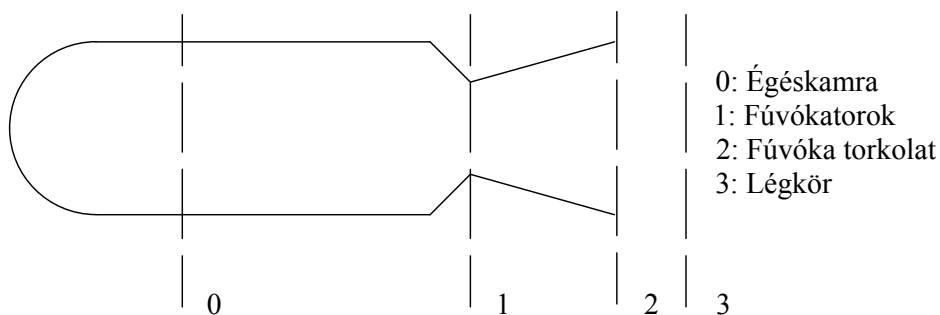
összefüggés, egyszerűsítve a

$$F = \dot{m} \cdot v \quad (26.)$$

egyenletet kapjuk. Az átláthatóságot szem előtt tartva a jelölés rendszert régebbi szakirodalmak alapján kibővítettem. Így a tolóerő általános képlete:

$$P = \dot{m} \cdot c \quad (27.)$$

ahol P a tolóerő, $\dot{m}$ a másodpercenként kiáramló - üzemanyag - tömege kg/s -ban melyet tömegáramnak nevezünk, és c a kiáramló részecsék sebessége m/s-ban. A képletből kapott erőt névleges tolóerőnek nevezzük. A továbbiakban szemléletesebbnek tartom ábrával (11. ábra) folytatni a leírást.



11. ábra: Égéskamra jellemző pontjai [1.]

A névleges tolóerő azt a tolóerőt jelenti, amely a rakéta(égés)kamra kivezetésénél elhelyezkedő fúvóka torkolatán megjelenik. Így a kezdeti összefüggést pontosítva megkapjuk a torkolati tolóerőt:

$$P = \dot{m} \cdot c_2 \quad (28.)$$

ahol c_2 a rakéta torkolatánál kilépő gázcseppkék sebessége a korábban tárgyalt feltételek mellett. Látható azonban, hogy a képlet nem fejezi ki légkör jelenlétét. Ahhoz, hogy a tolóerőt valódi viszonyok között tudjuk értelmezni be kell vezetni az effektív (hatásos) tolóerő fogalmát, mely nem csak az említett torkolati tolóerőtől függ. A külső közeg:

$$p_3 \cdot A_2 \quad (29.)$$

erőt fejt ki a fúvócső torkolatára, amely a torkolati tolóerővel ellentétes irányban hat. Itt p_3 a külső levegő statikus nyomása pa-ban, A_2 a fúvócső torkolatának keresztmetszete m²-ben.

Továbbá a kiáramlás jellegzetessége, egy rendkívül nagy mértékű expanzió, amelyet légköri víziszonyok között kiáramló gáz a torkolatot elhagyva még meglévő p_2 nyomása okoz. Ez további

$$p_2 \cdot A_2 \quad (30.)$$

tolóerőt hoz létre, melyet hozzá kell adni az eddigi összefüggéshez. Így az effektív tolóerő a következőképpen néz ki:

$$P_{eff} = P + p_2 \cdot A_2 - p_3 \cdot A_2 \quad (31.)$$

amelyet kifejtve

$$P_{eff} = \dot{m} \cdot c_2 + p_2 \cdot A_2 - p_3 \cdot A_2 \quad (32.)$$

a kiemelést elvégezve

$$P_{eff} = \dot{m} \cdot c_2 + (p_2 - p_3) \cdot A_2 [N] \quad (33.)$$

egyenletet kapunk. Az effektív tolóerő képlet tehát a teljes tolóerő képlete.

Ha megvizsgáljuk az effektív tolóerő képletét egy függőlegesen emelkedő rakéta esetén, látható, hogy a tolóerő, növekszik, mivel a környezeti nyomás (p_3) a magasság növelésével folyamatosan csökken. Ebből adódóan fontosnak tartom megjegyezni, hogy légkör megszűnése esetén a teljes tolóerő képlete megváltozik:

$$P_{vák} = \dot{m} \cdot c_2 + p_2 \cdot A_2 [N] \quad (34.)$$

ahol $P_{vák}$ a légüres-téri tolóerő.

Ha a fúvócső úgy van méretezve, hogy torkolati nyomása megegyezzen a légköri nyomással ($p_2=p_3$), akkor azt a legkedvezőbb tágulási arányú fúvócsőnek nevezzük. Ekkor a tolóerő képletben kifejezett nyomása 0. Ebből következik, hogy amíg a rakéta el nem éri a kívánt magasságot (ahol $p_2=p_3$) addig nem képes a névleges tolóerő leadására. A rakétahajtóművek egyedi jellemzője, hogy a repülési magasságának növekedésével (a légköri nyomás folyamatosan csökkenésével), a tolóerő növekszik. A legtöbb fúvóka úgy van megtervezve, hogy a kilépő gáz nyomása megegyezzen a környező légnyomással valahol a tengerszint felett. Bármilyen rögzített fúvóka-konfiguráció esetén ez csak egy magasságban fordulhat elő, és ezt a helyet a fúvóka optimális tágulási arány melletti működésének nevezzük.

A rakétakamrában történő égés következtében nem csupán a kamra hossz tengelyére párhuzamos irányú erők lépnek fel, ugyanis a létrejövő gáznyomás mind axiális mind radiális komponensek sokasága. A nem kiáramló gázok által okozott nyomás ugyan erőt fejt ki a kamra falára és a fúvóka szerkezetre, de a tolóerő szempontjából (amennyiben a rakétakamra kialakítása tengelyszimmetrikus) ennek az erőnek jelentősége elhanyagolható. Fontos kiemelni, hogy a korábbi összefüggések (24.-34.) rögzített fúvóka geometria esetén

értendők. Ha a fúvóka elmozdul (általában szabályzási céllal) akkor az összefüggések változhatnak.

A tolóerő értelmezése után, szót kell ejtenem egy további fontos jellemzőről, mégpedig az effektív (hatásos) kiáramlási sebességről. A rakéta fúvókáján kiáramló gázrészecskék sebességéről már említést tettem, (c_2). Emellett viszont értelmezzük a kiáramló gáz sugár effektív értékét is. Erre azért van szükség, mert a tényleges rakétafúvókákban a kiáramló gáz sebessége a teljes kilépési keresztmetszetben nem igazán egyenletes és ezeket az eltéréseket nehéz pontosan mérni. Az egyszerűbb feltételeket alkalmazó számításokhoz egységes tengelyirányú sebességet feltételezünk. Ez az effektív kiáramlási sebesség, melyet c_{eff} -el jelölünk, a rakétahajtóműből kilökődő hajtóanyagrészecskék átlagsebessége és az effektív tolóerőből származtatható, mégpedig a következő módon:

$$P_{eff} = \dot{m} \cdot c_{eff} \quad (35.)$$

rendezve az egyenletet

$$c_{eff} = \frac{P_{eff}}{\dot{m}} \quad (36.)$$

továbbá kifejezve

$$c_{eff} = \frac{\dot{m} \cdot c_2 + (p_2 - p_3)A_2}{\dot{m}} \quad (37.)$$

tagolva

$$c_{eff} = \frac{\dot{m} \cdot c_2}{\dot{m}} + \frac{(p_2 - p_3)A_2}{\dot{m}} \quad (38.)$$

egyszerűsítve a képletet

$$c_{eff} = c_2 + \frac{(p_2 - p_3)A_2}{\dot{m}} \left[\frac{m}{s} \right] \quad (39.)$$

Ebből az következik hogyha (fúvóka optimális tágulási arány melletti működése esetén):

$$P_{eff} = P \quad (40.)$$

akkor

$$c_{eff} = c \quad (41.)$$

azaz, ha az effektív tolóerő egyenlő a névleges tolóerővel, akkor az effektív kiáramlási sebesség is egyenlő a torkolati gáz sugár áramlási sebességével. Ez a körülmény nem az indításnál valósul meg. Tengerszinten tehát:

$$P_{eff} \neq P \quad (42.)$$

$$c_{eff} \neq c \quad (43.)$$

Emellett megemlítem, hogy c_{eff} a fajlagos impulzus és a nehézségi gyorsulás szorzatából is származtatható:

$$c_{eff} = I_s \cdot g \quad (44.)$$

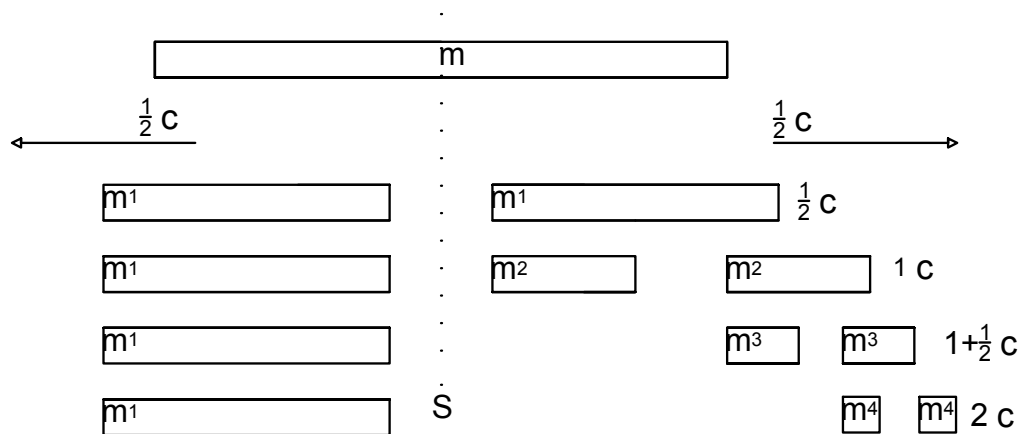
4.1.3 A rakétatechnika alapegyenlete

Ha visszatekintünk a rakétára, mint fogalomra emlékezhetünk, hogy olyan eszközről van szó, amely kizárólag belső erők hatására jön mozgásba, ezért rendszere zártnak tekinthető. Így tehát mozgásmennyisége (impulzusa) nem változik. Ez esetben a mozgást vizsgálva kitűnik, hogy az indítás pillanatától kezdve, egészen addig míg a rakéta el nem éri végsebességét (amikor is a hajtóanyag teljes tömege elégetés útján kiáramlott a szerkezetből) sebessége folyamatosan növekszik, tömege pedig csökken. Ez azt okozza, hogy a korábban említett impulzus megmaradás törvénye (4.1.1) bonyolultabb formában jelenik meg, így a rakéta végsebességének levezetése lényegesen körülményesebb.

Az alábbi fejezetben a rakétaszerkezetek alapvető mozgásképletét először egy szemléletes eljárással, majd a felsőbb matematika eszközével is levezetem. Elsőként tehát szót kell ejtenem a rakéta végsebességének, úgynevezett Valier-féle elemi levezetéséről (12. ábra). A levezetés lényege, hogy a rakétát egy hosszú, nyugalomban lévő rúddal jelképezzük. A rakétából kiáramló részecskék sebességét a korábban használt kiáramlási sebességgel, c -vel míg a rakétatest végsebességét v -vel jelöljük. A test súlypontja úgy mozog mintha a test teljes tömege ebben a pontban lenne összegezve, és a testre ható erők erre a pontra hatnának együttesen. Az említett rúd belső erők hatására szétválik (szétrobban), a szétváló darabok súlypontja helyben marad. Ezt követően a két féldarab egyenként $c/2$ sebességgel a közös súlypontból ellentétes irányba fog eltávolodni egymástól. A jobb oldali m_1 rúdrész szimbolizálja a rakétát, a baloldali m_1 tömeg pedig a kiáramló gázokat. Ahhoz, hogy a jobb oldali darabot a súlyponthoz képest c sebességre gyorsítsuk további $c/2$ sebességet kell a rúdrészhez adni. Ehhez ezt a darabot is szét kell választani az előzőhöz hasonlóan. Ekkor az m_1 tömeg két m_2 tömeggé válik. A kiinduló tömeg 3/4-ed részét feláldozva érkezünk ahhoz az állapothoz, ahol a kiáramlás sebessége egyenlő lesz a végsebességgel. Azaz:

$$v = c \quad (45.)$$

Az így kapott hányados, amely a kiinduló tömeg és a végső tömeg arányát mutatja meg a rakéták tömegarányának nevezzük és MR -el jelöljük.



12. ábra: Valier-rúdmodell [3.]

A rúd szétválásának aránya számolással könnyedén igazolható:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (46.)$$

Ha vesszük a tört reciprokot

$$\frac{1}{\frac{1}{4}} \rightarrow 4 \quad (47.)$$

lesz a kapott érték, ebben az esetben a tömegarány 4 lesz. A rúd további bontása esetén eljutunk

$$v = 2c \quad (48.)$$

állapotig. Az ehhez szükséges tömegarány 16 azaz a 4 második hatványa. Tehát a végsebesség növekedés a tömegarány (jelen esetben 4) hatványai szerint megy végbe. Ahány szorosára kívánjuk emelni a végsebességet annyszoros hatványra kell emelni a tömegarányt. A rúd felbontását végezhetjük 2-nél nagyobb részegységben. Ez esetben azt fogjuk tapasztalni, hogy minél több részre osztjuk a rudat a kezdeti lépésben, annál kisebb számot kapunk végeredményül. Az osztások számának emelésével kapott értékek az Euler-féle állandóhoz konvergálnak. Ebből a következő analógia vonható le:

$$e^{\frac{v}{c}} = MR \quad (49.)$$

$$e^{\frac{v}{c}} = \frac{m_{induló}}{m_{végső}} \quad (50.)$$

Ahol e az Euler-féle állandó m pedig a tömeg. Ahhoz, hogy a kifejezés egyszerűbben érthetővé váljon a fenti összefüggést természetes alapú logaritmussal célszerű átírni:

$$\frac{v}{c} = \ln \left(\frac{m_{induló}}{m_{végső}} \right) \quad (51.)$$

c kiáramlási sebességgel átszorozva

$$v = c \cdot \ln \left(\frac{m_{induló}}{m_{végső}} \right) \quad (52.)$$

Az így kapott egyenlet leírja a rakéta által elérhető végsebességét erőmentes térben. Ezt az egyenletet a rakétatechnika alapegyenletének nevezzük.

A rakétatechnika alapegyenletét szakszerűen felsőbb matematikai eszközökkel szokás levezetni. A levezetés az impulzusmegmaradást felhasználva a következőképpen néz ki:

$$m \cdot dv = -dm \cdot c \quad (53.)$$

ahol dm a tömegváltozást míg dv a sebesség változást fejezi ki. Az egyenletet a sebességváltozásra rendezve:

$$dv = -\frac{dm}{m} \cdot c \quad (54.)$$

majd a megfelelő korlátok mellett az összefüggést integrálva

$$\int_0^v dv = - \int_{minduló}^{mvégső} \frac{1}{m} \cdot c \, dm \quad (55.)$$

kiemelve a c -t

$$\int_0^v dv = -c \cdot \int_{minduló}^{mvégső} \frac{1}{m} \, dm \quad (56.)$$

összefüggést kapunk, amely Newton-Leibniz formulával kiszámítható. Az első tag integrálja a következő:

$$\int_0^v dv = [v]_0^v \quad (57.)$$

a korlátokat behelyettesítve

$$[v]_0^v = [v - 0] \quad (58.)$$

így az első tag eredménye

$$v \quad (59.)$$

A második tag integrálja pedig:

$$-c \cdot \int_{minduló}^{mvégső} \frac{1}{m} \, dm = -c \cdot \ln[m]_{minduló}^{mvégső} \quad (60.)$$

$$-c \cdot \ln[m]_{minduló}^{mvégő} = [\ln(m_{végő}) - \ln(m_{induló})] \quad (61.)$$

a logaritmus azonosságait felhasználva

$$\ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) \quad (62.)$$

a formula eredménye a következőre változik

$$-c \cdot \ln\left(\frac{m_{végő}}{m_{induló}}\right) \quad (63.)$$

A két eredmény tehát a következő egyenletet adja:

$$v = -c \cdot \ln\left(\frac{m_{végő}}{m_{induló}}\right) \quad (64.)$$

mivel

$$-c \cdot (\ln(m_{végő}) - \ln(m_{induló})) \quad (65.)$$

egyenlő lesz

$$c \cdot (-\ln(m_{végő}) + \ln(m_{induló})) \quad (66.)$$

melyet átalakítva

$$c \cdot (\ln(m_{induló}) - \ln(m_{végő})) \quad (67.)$$

értéket kapunk. Ez visszahelyettesítve az integrált egyenletbe az összefüggés a következőképpen változik

$$v = c \cdot \ln\left(\frac{m_{induló}}{m_{végő}}\right) \quad (68.)$$

Így tehát megkapjuk a korábban kifejezett rakétatechnika alapegyenletét felsőbb matematikai eszközökkel. Ezt a levezetést Ciolkovszkij-féle levezetésnek is nevezik.

Fontosnak tartom megjegyezni, hogy a sorosan kapcsolt (többfokozatú) rakétaszerkezetek esetén, erőmentes térben a fokozatokra vonatkozó egyedi jellemzőkkel, mint az adott fokozat tömegaránya és jellemző kiáramlási sebessége, kifejezhető a teljes szerkezet végsebessége. A kifejezés általánosan:

$$v_{össz} = c \cdot \ln(MR) + \dots + c_n \cdot \ln(MR_n) \quad (69.)$$

ahol n az utolsó fokozat jellemző értékeit jelöli.

4.1.4 Rakéták atmoszférikus viselkedése

Ha nem szorítkozunk erőmentes térre és hagyományos légköri viszonyokat vizsgálunk, akkor

meglehetősen bonyolult feladattá válik a repülőjárművek mozgásának leírása. A rakétatechnika alapegyenlete bizonyos egyszerűsítő feltételekkel együtt viszonylag jól leírja a rakéták viselkedését vákuumban, azaz űrrepülés közben. A rakéták légköri mozgásvizsgálata során azonban számos olyan tényezőt kell számításba venni melyek a rakétára ható valamilyen irányú erőként (leginkább ellen erőként) jelentkeznek. Ha tehát nem szorítkozunk erőmentes (légkörmentes) térre, akkor a tömeg mellett fontos körülmény a rakéta alaki sajátossága, a légkör összetétele, a gravitációs erő és annak változása stb. Ezeket a változásokat a Ciolkovszkij egyenletnél jóval összetettebb módon lehet levezetni. Dolgozatomban a repülés egy egyszerűbb esetét tárgyaló egyenletét mutatom be, amely nem számol a rakéta esetleges szárnyszerkezete által létrehozott igénybevételekkel és időben állandó tolóerőt feltételez. A rakétákon elhelyezett szárnyszerkezetek általában vezérlési, szabályzási és leginkább stabilitási célt szolgálnak. A vizsgálatom tárgyát képező rakéta ugyan rendelkezik szárnyakkal, a modell alkotás célját megkönnyítendő eltekintek a szárnyszerkezet meglététől. Az egyszerűsítés miatt elégségesnek tartom az alábbi mozgásleíró egyenletet közölni.

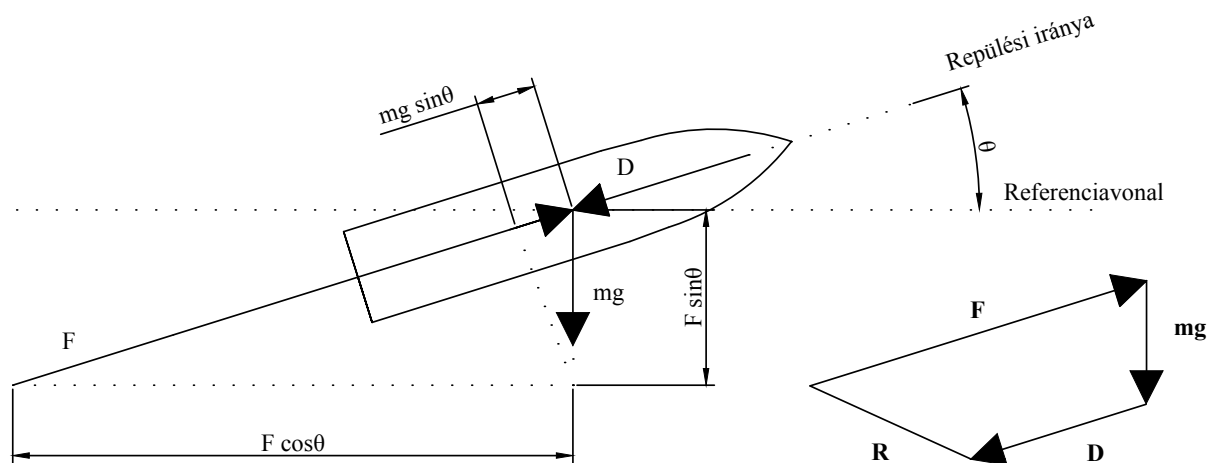
$$\frac{dv}{dt} = \frac{c \cdot \frac{(1 - MR)}{t_p}}{1 - \frac{(1 - MR) \cdot t}{t_p}} - g \cdot \sin \theta - \frac{\frac{D}{m_0}}{1 - \frac{(1 - MR) \cdot t}{t_p}} \quad (70.)$$

Az egyenletben v a rakéta sebessége, t_p a hajtóanyag égési ideje θ a repülési irányszög és m_0 a kezdeti tömeg. A D -vel jelölt tag az úgynevezett gyorsulási erő, ez a tolóerővel ellentétes irányban ébred és a következő kifejezéssé bontható:

$$D = C_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A \quad (71.)$$

ahol C_D a testre jellemző közegellenállási együttható, ρ a testel kölcsönhatásba lépő közeg sűrűsége g/cm³-ben, A pedig a test keresztmetszete m²-ben.

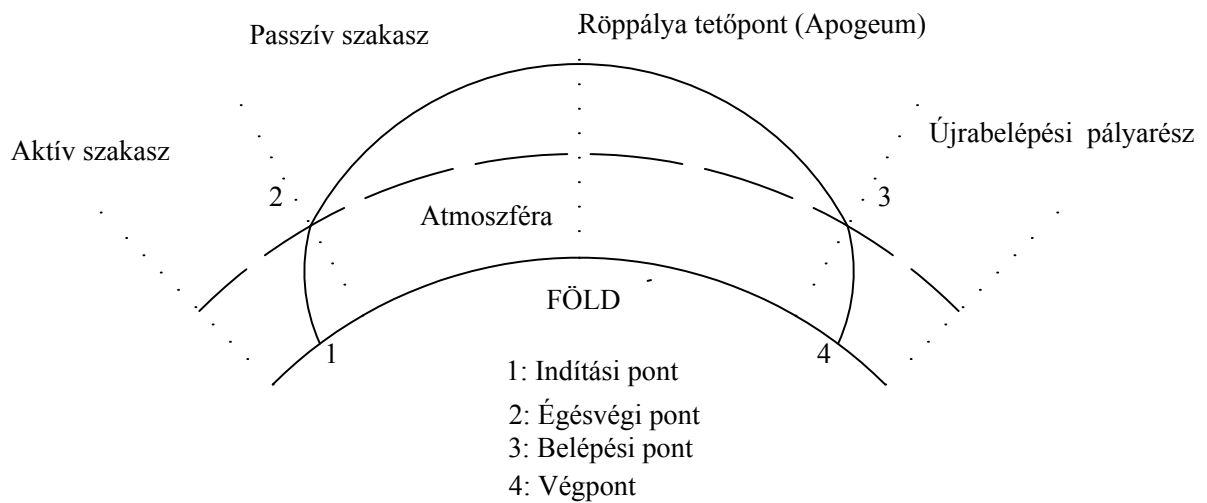
Az egyenletben szereplő tagokhoz a következő ábra szolgál további magyarázattal (50. ábra).



13. ábra: Szárnynélküli rakétaszerkezet szabadtestábrája és vektorábrája [2.]

Ahogy az ábrán is látszik a képlet kétdimenziós térben írja le a rakétamozgást. A nagyobb volumenű vizsgálatok alapját képezik a szabadtest ábra mellett az erők vektoriális levezetése is. A valódi viszonyok feltérképezése pontos mérési és számítási feladat. A repülési cél elérése érdekében pontosan ki kell számítani a röppályákat, amelyek ma már kizárólag számítógépek segítségével történnek. Számos számítógépes program van a piacon különböző repülési pályák elemzésére, amelyeket repülőgépipari vállalatok és/vagy kormányzati szervek tartanak fenn. A kétdimenziós vizsgálat becslések felállítására szolgál.

A fejezet végén viszont egy további igen jellegzetes repülési állapotról is szót ejtek. Ez nem más, mint a ballisztikus ívű repülés. Ahogy korábban írtam (2.), léteznek úgynevezett ballisztikus rakéták, amelyek működése egyedi. Ez az egyediség a leírt pálya jellege, ugyanis a ballisztikus rakéta rendszerint igen nagy utat tesz meg a kilövéstől a becsapódási pontig és a mozgási pálya túlnyomó részén nem történik hajtómű égés, ezáltal a szerkezetre tolóerő kifejtés. A pálya azon szakaszát, ahol az égi mechanika törvényei uralkodnak és a lendület tartja mozgásban a rakétát, passzív szakasznak nevezzük és ez általában légkörön kívül zajlik. A passzív szakasz az úgynevezett ballisztikus (vagy másnéven mozgató) pálya. A ballisztikus rakétákat általánosságban katonai területen alkalmazzák.



14. ábra: Ballisztikus rakéta pálya vázlata [3.]

5.2. Kiegészítés

5.2.1 Termodinamika

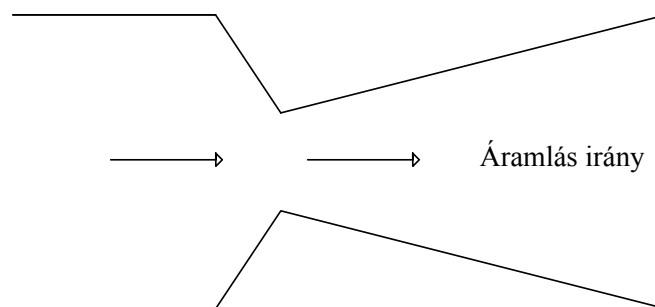
Ebben a fejezetben a rakétahajtómű kivezetésénél, másnéven fűvókájánál létrejövő alapvető termodinamikai jelenségek rövid ismertetése a célom. Ahogy azt korábban a (3.-4.) fejezet pontjaiban itt sincs lehetőségem a rakéták teljes, általános termodinamikai profilját tárgyalni, így a legfontosabb elemek és tételek említésére és levezetésére töreksem. A korábban leírtak alapján értelemszerű, hogy az égéskamrában lejátszódó folyamatok eredménye, a szilárd vagy folyékony hajtóanyag keverék nagyhőfokú gáz halmazállapotú égésterméké alakulása. A hajtóművekben ezen (munkavégző)gázok képződésével és viselkedésével a termodinamika foglalkozik és törvényszerűségeit felhasználva biztos alapot nyújt a rakétahajtóművi számításokhoz.

A termodinamikai áttekintéshez egyszerűsítésekkel kell élnünk. Az égéskamrát helyettesítsük egy ideális gázt tartalmazó zárt tartállyal. Ezt követően engedjük ki a gázt egy meghatározott legkisebb keresztmetszetre szűkített csövön keresztül, miközben a tartályt utántöltéssel állandó nyomáson tartjuk. Így azt tapasztaljuk, hogy a gáz sebessége a cső legszűkebb keresztmetszetében semmi körülmények közt sem lesz nagyobb az adott pontban mérhető hangsebességtől. A kiáramlott gázmennyiség a tartályban és a cső torkolatánál

uralkodó nyomástól függ, következésképpen itt kialakul a nyomásoknak egy olyan kritikus aránya, amely mellett a legnagyobb mennyiségű gáz kiáramolhat. A kiáramló gáz kiterjedését vizsgálva arra jutunk, hogy nagyarányú nyomáskülönbségek mellett a szűkülő csövön kiáramló gáz nem tud teljesen kitágulni. Ha tehát a rakéta égéskamráját egy szűkülő kiáramlócsővel szereljük fel, a gázsugár csak a kiáramló csövön keresztül fog kisebb nyomásra kiterjedni, így a hajtósugár energiájának jelentős része veszendőbe megy.

Vizsgálati tapasztalatokból kitűnt továbbá, hogy a nyomásesés kihasználható, ha a szűkülő cső legkisebb keresztmetszetéhez egy táguló csőrész társul. Az így csatlakozó csőalakot Laval-féle fúvócsőnek, röviden Laval-fúvókának nevezik.

A megfelelő ábrákat megvizsgálva (11.,15. ábra) a Laval-fúvóka keresztmetszetét A_1 -ről A_2 -re tágul és a gáz nyomása a kúpos részben p_1 nyomásról p_2 nyomásra csökken. Ezért az áramlás sebessége már a fúvókán belül meghaladja a helyi hangsebességet. A nyomásesés kihasználhatósági foka, valamint a fúvócső torkolatánál elért áramlási sebesség a Laval-fúvóka tágulási arányától függ. Tapasztalatok alapján jellemzően olyan fúvókák alkalmazandóak, amelyek nagy nyílásszögűek és kellően rövidek.



15. ábra: Laval-fúvóka vázlata [1.]

A fúvócsövekkel összefüggésben igen sok kérdés merül fel. Egy rakétahajtómű tervezésében mindenekelőtt az égéskamrában és a fúvócsőben lejátszódó termodinamikailag is egységet alkotó folyamatok helyes elképzelésének van a legnagyobb jelentősége.

Abban az esetben, ha ideális rakétahajtóművet képzelünk el a korai számítások elvégzéséhez, akkor az így kapott értékeket tapasztalatok útján meghatározott korrekciós tényezőket felhasználva sikeresen a valódi viszonyokhoz tudjuk igazítani.

Itt említés teszünk a fúvóka torkán és torkolatán létrejövő termodinamikai viszonyokról és a tolóerő termodinamikai összefüggéséről. A fúvóka torkolatán kilépő gáz sebessége a korábbi betűjeleket felhasználva megkapjuk a

$$c_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot R \cdot T_0 \cdot \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} \quad (72.)$$

alakú egyenletet, ahol p_2 a torkolati nyomás p_0 a kamranyomás p_a -ban T_0 a kamra hőmérséklet K-ben κ a fajhőviszony mely

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad (73.)$$

alakban írható és c_p az állandó nyomás melletti fajhő c_v pedig állandó térfogat melletti fajhőt jelenti J/K-ben. A fenti egyenletben R az egyedi gázállandó mely

$$R = \frac{R_M}{M} \quad (74.)$$

alakra bontható. Itt R_m az általános gázállandó J/(molK) és M az adott gáz molekulásúlya gram/mol-ban. A fűvóka torok esetén már más viszonyokról beszélhetünk, ez a következő egyenlettel írható le:

$$c_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot \kappa}{\kappa + 1} \cdot R \cdot T_0} \quad (75.)$$

Ahol c_1 a fűvókatorokon áthaladó gázrészecskék sebessége. A korábbi pontban tárgyalt tolóerő effektív értéke szintén felírható termodinamika egyenlettel melyet az eredeti effektív tolóerő képletbe (33.) helyettesítve kapunk a következőképpen:

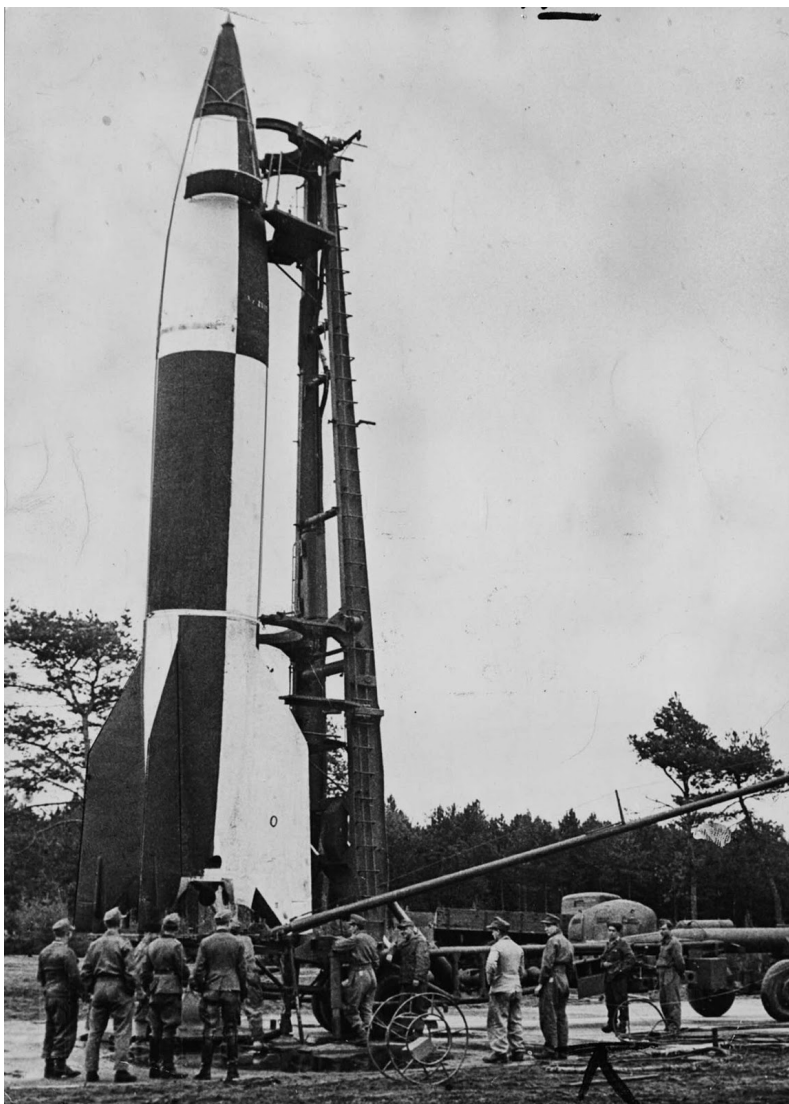
$$P_{eff} = A_1 \cdot p_0 \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa^2}{\kappa - 1} \cdot \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} + (p_2 - p_3) \cdot A_2 \quad (76.)$$

ahol A_1 a fűvókatorok keresztmetszete m²-ben.

5. Szimulációs vizsgálat

5.1 A vizsgált rakétaszerkezet

A most következő fejezetben a szimuláció és annak részletei kerülnek kifejtésre. A vizsgálatban résztvevő rakéta a már korábbi fejezetekben említett A4 rakéta.



16. ábra: A4 (V2) rakéta indítás előtt [20.]

Mivel erről a rakétakáról értékelhető mennyiségű forrás állt rendelkezésemre, így logikusnak tűnt vizsgálatom alanyának választani. Fontos kiemelni, hogy a szerkezet pontos geometriai méretei a bőséges forrás ellenére korlátozottan voltak elérhetők.

A vizsgálat megértéséhez szükséges rakétatechnikai ismertető mellett nem ejtettem szót a legtöbb rakétára jellemző, irányítástechnikai eszközökről, így az elméleti áttekintőt itt kiegészítem további gondolatokkal, a rakéták légköri irányításának témaköréből. A korszerű rakéták bővelkednek olyan szabályzórendszerekben melyek a rakéta irányítása (vezérlése)

mellett gyakran igyekeznek a lehetséges légköri igénybevételeknek megfelelően a kívánalmak szerint irányítani a szerkezetek egészét. Ezek lehetnek a stabilitást is elősegítő szárnyszerkezetek, vagy a fűvóka belső geometriájából adódó gázsugár vezérlő rendszerek, a fűvóka helyzetét befolyásoló rendszerek, illetve egyéb segédűvókák stb. Ahhoz, hogy a vezérlő rendszerek irányítottak (szabályozottak) legyenek több kifinomult és pontos módszer áll rendelkezésre, melyeket kezdetben mechanikusan, napjainkban pedig digitálisan valósítanak meg.

Itt fontos tisztáznom a vezérlés és a szabályzás közötti különbségeket. A rakéta vezérlése (kormányzása) fogalomkörébe azokat a műveleteket soroljuk, amelyeknek eredményeként a rakéta főtengelyei a kívánt térbeli helyzetbe kerülnek. A szabályzás pedig azt jelenti, ha a vezérlés bizonyos feltételrendszerhez igazítva ismétlődik. A rakétának általában három egymásra merőleges főtengelye van, amelyek a súlypontban metszik egymást, ezek a hossztengety és a kereszttengety nevet viselik.

A felsőbb légköri rétegekben a közeg kisebb sűrűsége miatt az aerodinamikai elvű vezérlőrendszerek már nem használhatók. Itt a kormányzásra olyan módszereket alkalmaznak, amelyek a rakéta környezetétől függetlenek. A szimulációhoz használt vezérléstípus az úgynevezett tolóerővektor eltérítés elvű vezérlés. Az eljárás kiválasztásának oka az, hogy kedvező szimulációs feltételként egyszerűen alkalmazható. A szimulált rakéta referencia adatai a következő táblázatban olvashatók (4. táblázat).

4. táblázat: A4 rakéta referencia adatai

Össztömeg	12520 kg
Ürestömeg	4008 kg
Rakétatest hosszmérete	14,3 m
Rakétatest átmérője a legszélesebb ponton	1,65 m
Névleges tolóerő	250000 N
Hajtómű égési ideje	65 s

A szimuláció lényegi eleme a referencia rakéta és annak egy módosított verziója melynek tömege pontosan 1000 kg-al kisebb. A tömegcsökkenés és ennek következményeként fellépő nyomatókviszonyt leszámítva minden adat megegyezik a referencia rakéta adataival. A könnyített rakéta adatai a következőkben látható (5. táblázat).

5. táblázat: A4 könnyített rakéta adatai

Össztömeg	11520 kg
Ürestömeg	3008 kg
Rakétatest hosszmérete	14,3 m

Rakétatest átmérője a legszélesebb ponton	1,65 m
Névleges tolóerő	250000 N
Hajtómű égési ideje	65 s

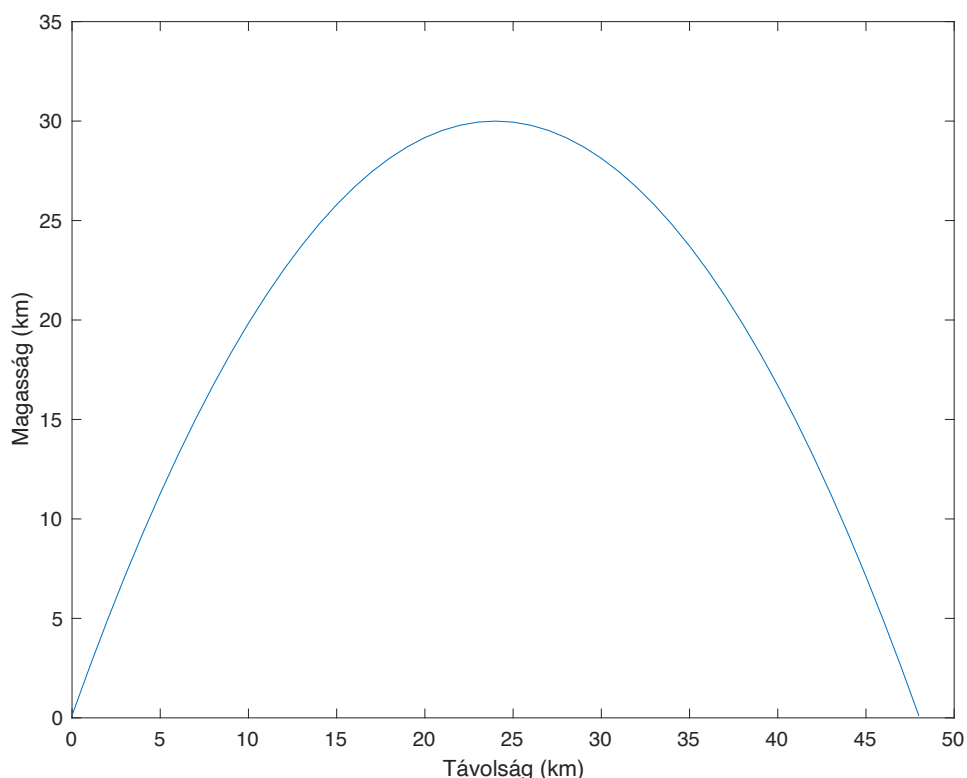
5.2 Szimulációs tér és bemeneti adatok

A szimulációm során az A4 rakéta repülésvizsgálatát valósítottam meg egy 3 szabadságfokú rendszerben, amely egyszerű kétdimenziós tér szimulációs leírására alkalmas. Ehhez úgy gondoltam, célszerű egy referenciapályát készíteni, amelyhez igyekszem hozzáigazítani a vezérelt rakétamodell repülését. Ennek a repülési pályának a kiszámításakor valódi körülményeket figyelembevételére törekedtem. A referencia úgy került kialakításra, hogy Magyarország földrajzi adottságai szolgáltassák a méréshez szükséges kiinduló adatokat. Így a rakéták indítási pontjaként (ahol a vizsgált szerkezetek levegőbe bocsájtása történik) Debrecen városa, míg feltételezett végpontjukként (ahol a vizsgált szerkezet várhatóan a földfelszínbe csapódik) Nyíregyháza szolgáltatja a kiindulási alapot.

A pályát matematikai úton számítottam. Elsőként a pálya kezdő és végpontját, továbbá a pálya csúcspontját vizsgáltam. Ahhoz, hogy a két kiválasztott földrajzi helyet mérési pontként definiálni tudjam, szükségessé vált a helyszínek, így tehát Debrecen és Nyíregyháza tengerszinttől mért magasságának meghatározása. Megfigyelhető, hogy a földrajzi helyszínek (jelen esetben a két város) területe nem tökéletesen síkban helyezkednek el. Emiatt a tengerszinttől mért magasságuk nem adhatók meg csupán egy számértékkel. Ebből adódik, hogy számításaimban ezek a helyszínek, területükre vonatkoztatott átlag magasságukkal szerepelnek. Így hát, Debrecen (átlagos) tengerszinttől mért magassága 122 méter, míg Nyíregyház esetén 101 méter. A magasságon túl tudnom kellett a pontok egymáshoz viszonyított helyzetét. Itt szintén átlagos értékkel számoltam. Debrecen és Nyíregyháza (átlagos) légvonalban mért távolsága 48.000 méter. Látható, hogy mind Debrecen mind Nyíregyháza külön-külön x és y értékkel rendelkező pontokká váltak. (A továbbiakban Debrecen „D pont”, Nyíregyháza „Ny pont”). Az $x(D)$ pont értéke 0 míg $x(Ny)$ 48.000. $y(D)$ 122 és $y(Ny)$ 101. Ezek alapján könnyedén Descartes-féle derékszögű (ortogonális) szabályos közőkre felosztott (normált) koordináta-rendszerbe vetíthetőek. A két pont közti parabola meghatározásához, egy további pontra van szükség. Ez a pont célszerűségi okokból a parabolikus ív csúcspontja. Azzal a feltételezéssel éltem, hogy a rakétapálya csúcsmagassága pontosan a két földrajzi helyszínt összekötő egyenes felezőpontjában van, a tengerszinttől mért 30.000 méteres magasságban. Ha a csúcspont (A továbbiakban „A pont”) x, y koordinátáit az

előbb felvett koordináta-rendszerbe a korábbiakhoz hasonló módon rögzítem, három olyan mérési pont áll rendelkezésemre, amelyeken a rakéta áthalad. Ennek tudatában a parabolát leíró polinom meghatározható. Ehhez felhasználva D, Ny és A mérési pontot, Lagrange-féle interpolációs formulát alkalmaztam (5. függelék).

A referencia pálya (18. ábra) elkészítése után definiáltam a gravitációs együttható értékét. A rakéták repülését leginkább meghatározó tényező (amely nem a rakéta szerkezetéből adódik) maga a föld tömegközéppontja felé ható vonzóerő. A gravitáció befolyása, a földfelszíntől mért alacsony magasságokban nem számottevő. Ebből az következik, hogy azokban az elsősorban fizikai számításokban, ahol a gravitáció (nehézségi gyorsulás) megjelenik, a nemzetközileg (egyezményesen) elfogadott értékkel számolnak. Ez az érték kerekítve 9.81 m/s^2 . Ha felírjuk a Newton féle gravitációs törvényt (4. függelék) megközelítőleg ezt az értéket fogjuk visszakapni. A gravitációs vonzóerő befolyása a magasság függvényében változik. Tudni kell azonban, hogy a gravitációs erő 100km-es magasságig nem változik számottevően, így én is a konstans gravitációs együttható alkalmazása mellett döntöttem a vizsgálatomban.



18. ábra: A referencia röppálya

A felhasznált konstansnak azonban nem a nemzetközi egyezményes értéket választottam, hanem az indulási pont (1. függelék) és az indítási pont helyén található (referencia pályacsúcspont magassága alapján) 30.000 méteres pont (2. függelék) nehézségi gyorsulásának átlagértékét, amit g_0 -nak neveztem el (3. függelék).

A repülés vizsgálatához a rakéta referencia adatai nem nyújtanak elégséges információt. A rakéta adatai a korábbi táblázatokból kellő részletességgel állnak rendelkezésre ahhoz, hogy az immár rendelkezésre álló nehézségi gyorsulás értékével további számításokat tudjak elvégezni. A szimulációban ugyanis több fontos adattal kell kiegészíteni a referencia adat táblázatokat, mégpedig a tömegáramlással, a szerkezet tehetetlenségi nyomatékaival és a szerkezet erőkarjával. A számításokat elvégezve (6. függelék) a következő adatokat kaptam.

6. táblázat: A4 rakéta számított adatai

Kiáramló üzemanyagtömeg g_0 mellett	90,17423433 kg/s
Erőkar	7,15 m
Rakéta tehetetlenségi nyomaték	21335,12333 kgm ²
Üres rakéta tehetetlenségi nyomatéka	6829,966 kgm ²

7. táblázat: A4 könnyített rakéta számított adatai

Kiáramló üzemanyagtömeg g_0 mellett	90,17423433 kg/s
Erőkar	7,15 m
Rakéta tehetetlenségi nyomaték	19631,04 kgm ²
Üres rakéta tehetetlenségi nyomatéka	5125,882 kgm ²

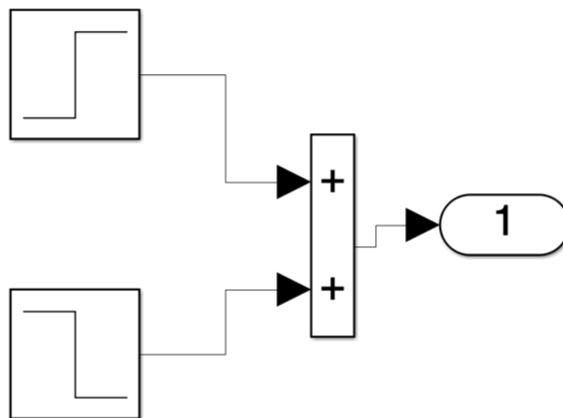
A számítások során a következő egyszerűsítésekkel éltem. Mivel a rakéta tolóerőképzéséhez mért erőkarról nem áll rendelkezésre információ ezért az erőkart a szerkezet tömegközéppontjaként feltételezett pontjától mértem. A tehetetlenségi nyomaték meghatározásához pedig a mechanikai rúd nyomatékviszonyait vettem alapul, majd korrekcióként ennek az értéknek a 10%-ával számoltam.

5.3 Szimulációs eredmények

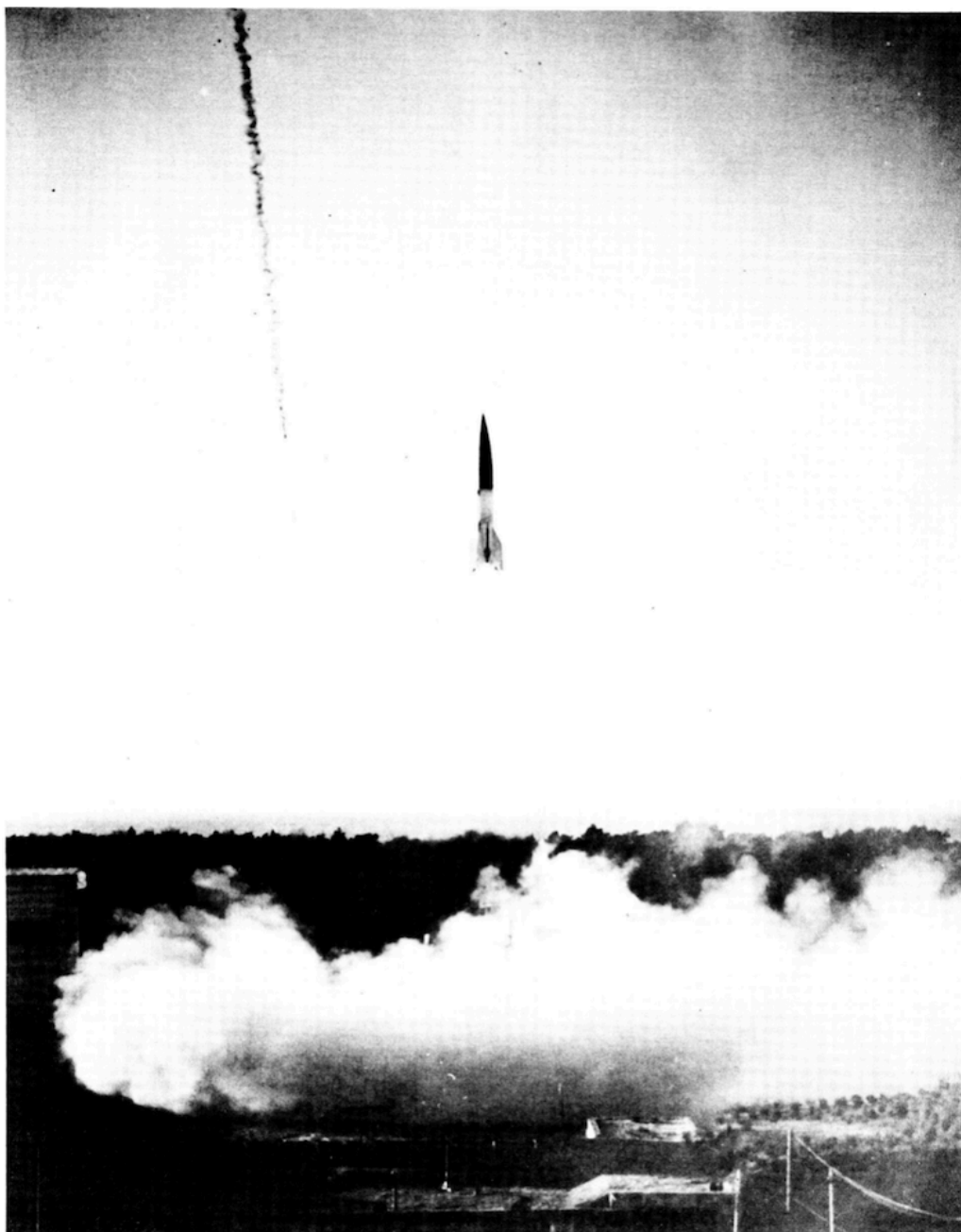
5.3.1 Szimulációk

A szimuláció Matlab és Simulink programban készítettem, melyben kellő részletességgel vizsgálhattam egy 3 szabadságfokú rendszerben értelmezett rakéta viselkedését. A szimulációs struktúra egy fő egységből és (a diagnosztikai elemek nélkül) 28 kisebb egységből áll. A fő egység a Rakétamodell elnevezést kapta, amely eredetileg egy, a program gyártója által készített szabadon használható szimulációs komponens. A fő egységet eredeti beállításaitól eltérően,

változó tömegű rendszer beállításával használtam. A kisebb szimulációs egységek a Rakétamodellhez tartozó szorzás osztás és szabályzóműveletek továbbá a bemeneti információk, amik a korábbi fejezetekben tárgyalt adatok (4. 5. és 6. táblázatok) alapján kerültek bevitelre. Az első szimulációban (felhasználva a 4. és a 6. táblázat adatait), a vizsgált A4 rakétaszerkezet repülése látható, ahol Debrecen az indítási pont így a magyar ideálisnak vett légtér és a referenciapálya kiindulópontja került felhasználásra. Kilövés után 10 másodperccel történik a rakéta vezérlése. A kilövés és az irányítás között eltelt 10 másodpercben a rakéta függőleges irányban (0° -os eltéréssel) repül, maximális névleges tolóerőt és ebből adódóan állandó (hajtóanyag)tömegáramlást és állandó nehézségi gyorsulást feltételezve. A tranziens állapotoktól eltekintettem. 10 másodperc elteltével beavatkozik a vezérlés, amely a kiáramlás keltette tolóerő (vektor) irányát $0,0009^\circ$ -kal eltéríti. A szerkezet ezzel az eltérített tolóerővektorral halad egészen a becsapódás pillanatáig. A vezérlés egy nagyobb szimulációs egységben tárolt szimulációs parancssorral valósítottam meg, amely a 19. ábrán látható.

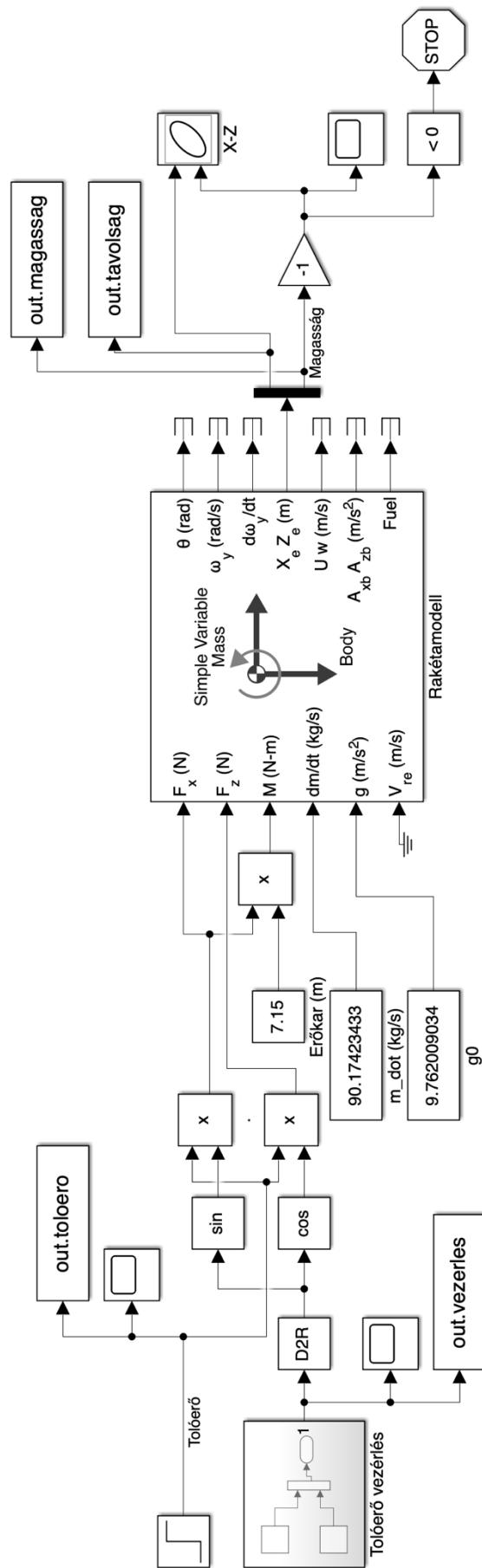


19. ábra: Tolóerő vezérlés szimulációs blokkja [18.]

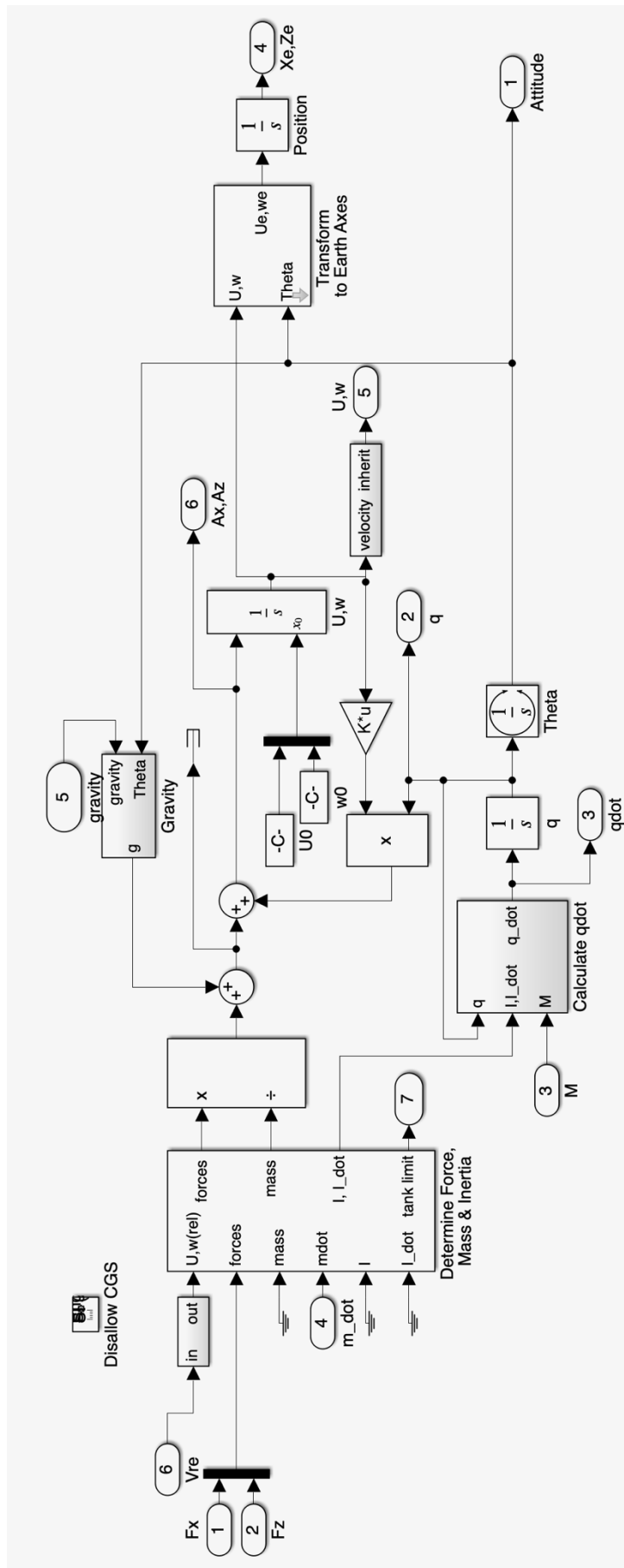


ű

20. ábra: A4 rakéta tesztrepülése [7.]



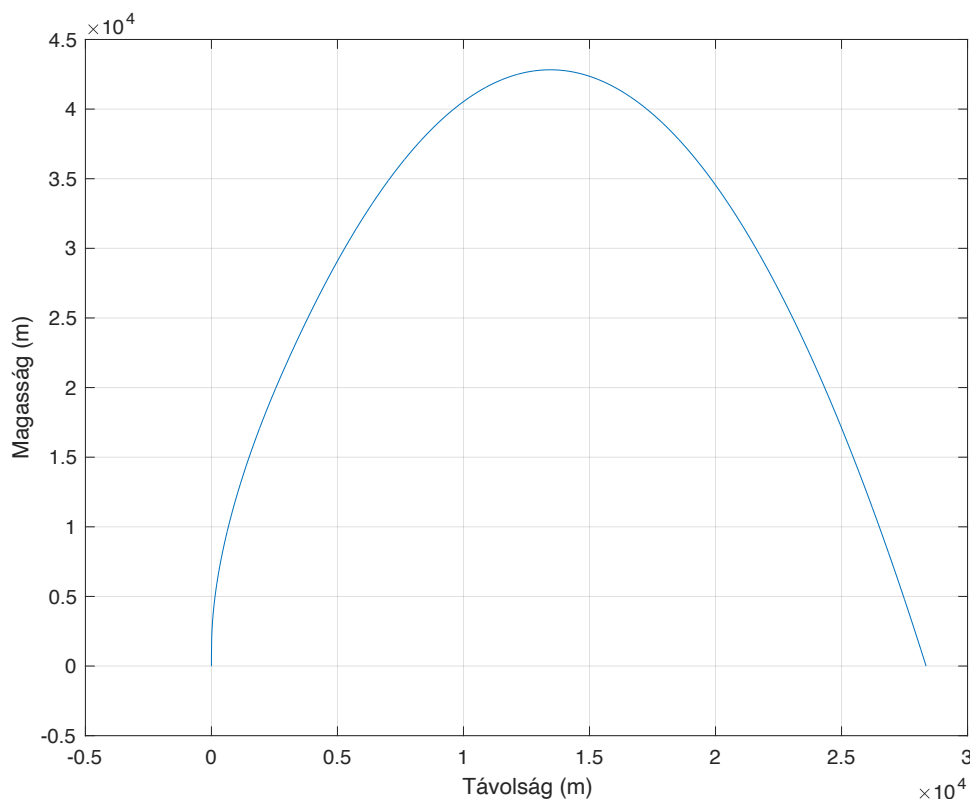
21. ábra: A teljes szimulációs parancssor [18.]



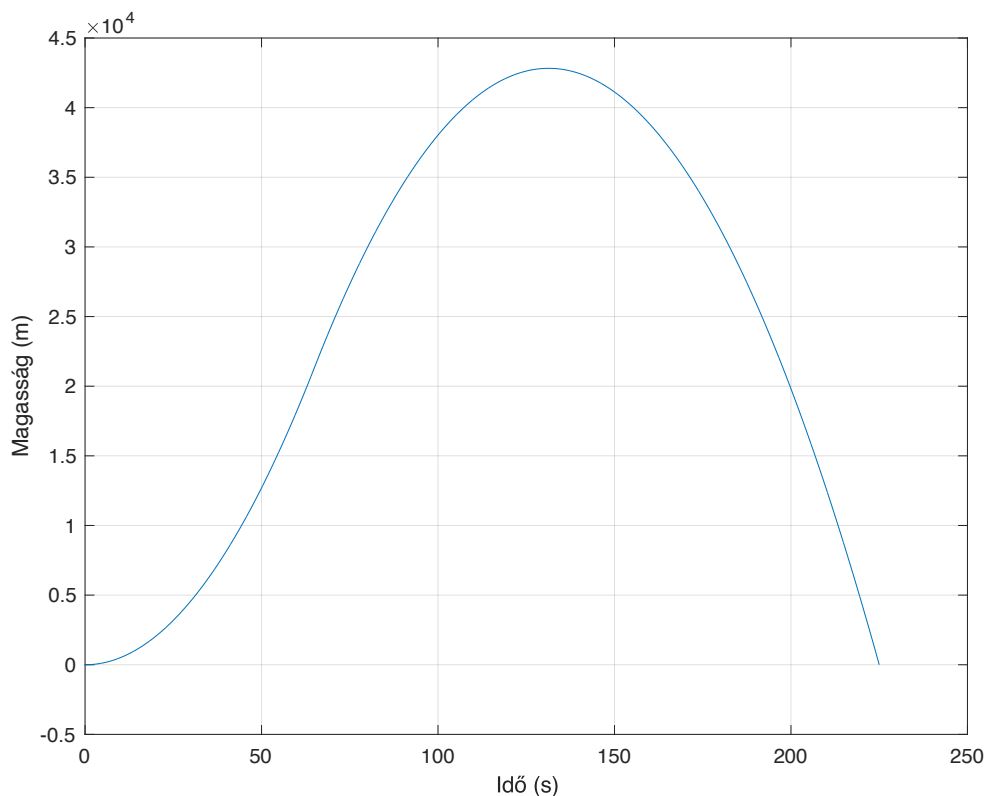
A szimuláció a repülést 300 másodperces időtartamon vizsgálja, illetve a szimuláció 0 végső magasságnál megáll, ez magyarázza, hogy a rakéta felszállásától a becsapódásig kevesebb idő telik el mint 300 másodperc. Elsőként a már említett adatok vizsgálatával kezdtem, ezt követte a könnyebb szerkezetű azonos tulajdonságú rakéta szimulációja.

Az első szimuláció tapasztalatai azt mutatják, hogy a rakéta referenciaként kijelölt pályája eltér a végső pályától. Ez annak köszönhető, hogy az előre vezérelt rakéta szabályozatlan. Az elért csúcsmagasság a megadott feltételek alapján (23. ábra) 42.8 km. Az indulási és becsapódási pont közötti távolság 28,36 km. A levegőbe bocsájtás és becsapódásközi időtartam megközelítőleg 225 másodperc, ezen belül a 100 és 150 másodperc közötti idő intervallumban éri el a rakéta az említett csúcsmagasságát (24. ábra). A vezérlés során alkalmazott szögeltérítés jelentős befolyást gyakorol a repülési pályára, ezalatt az értendő, hogy az esetlegesen megnövelt hajlásszög (az eltérítés mértékétől függően) lerövidíti, vagy meghosszabbítja a repülési időt és ezzel együtt a leírt pálya alakját is befolyásolja.

A másod szimulációban a 1000kg tömegcsökkenést feltételeztem, a rendelkezésre álló további paraméterek változatlanul hagyásával. A teljes tömegre vonatkozóan ez 8%-os csökkenésnek felel meg.

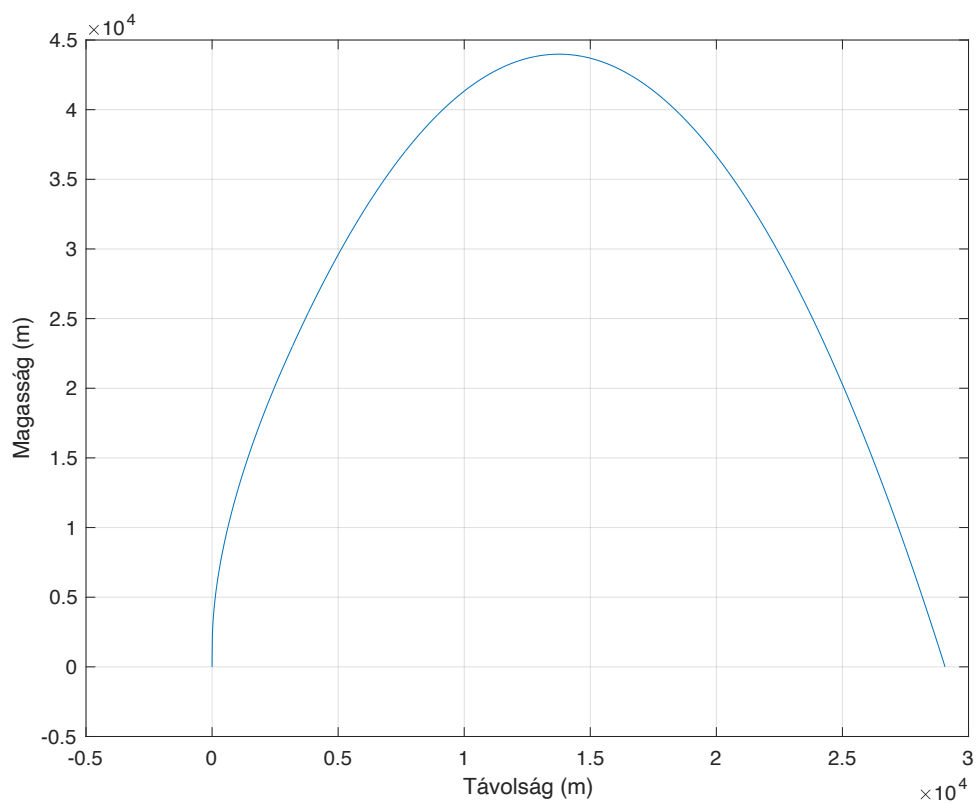


23. ábra: Az első szimuláció pálya grafikonja

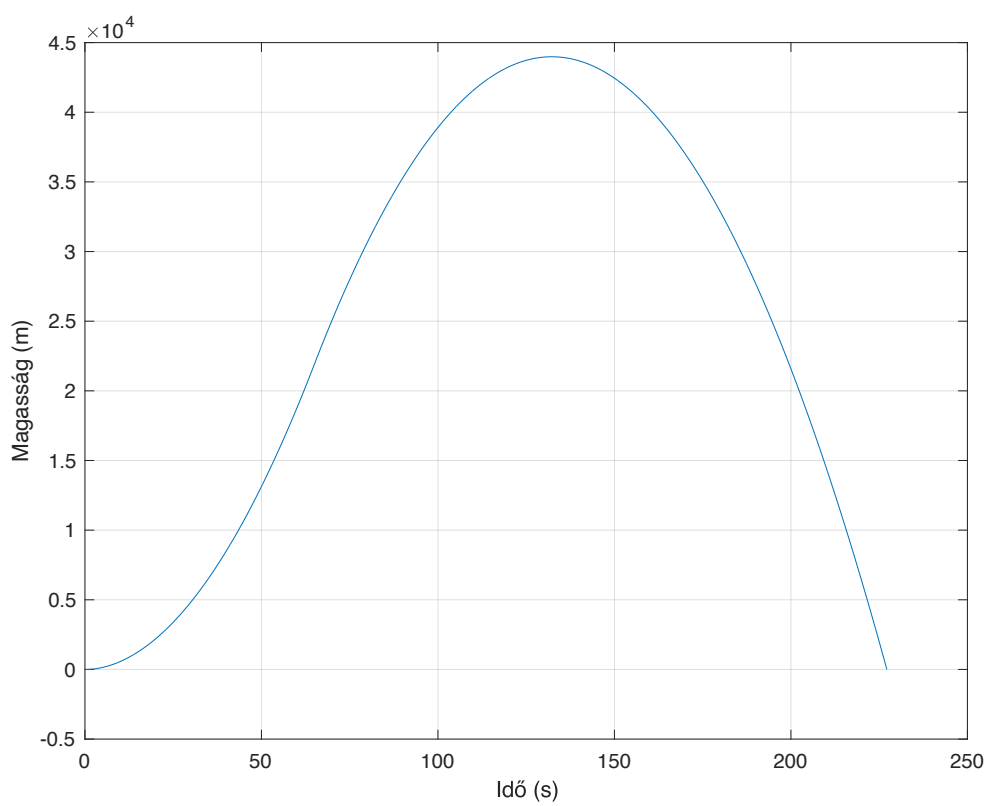


24. ábra: Az első szimuláció magasság-idő grafikonja

Az előzetes elvárásaim a csökkentett tömegű A4 rakéta esetén a csúcsmagasság és a becsapódási távolság növekedése volt. A szimuláció végeztével az elvárásoknak megfelelő értékeket tapasztaltam. A könnyített szerkezet esetén elért magasság 43,98 km-re nőtt míg a becsapódás és indítás közötti táv 29km-re. Így tehát 8%-os súlycsökkenés azonos feltételek mellett hozzávetőlegesen 2.45%-os hatótáv növekedés mellett körülbelül ezzel azonos mértékű 2,6%-os pálya emelkedést figyelhettem meg. A repülés során tapasztalt viselkedés alátámasztja azt az alapvető feltevést, hogy a tömegcsökkenés (elvben kedvezőbb tömegarányt elérve) jótékony hatást gyakorol a repülési paraméterekre. Bár a hajlásszög változása nagy befolyással bír, vizsgálatom nem terjedt ki különböző hajlásszögű repülések vizsgálatára. A vizsgált szerkezet referenciapályához viszonyított helyzete vizsgálati tapasztalatok alapján került kiválasztásra. Az első rakétánál hatékonyabban közelítettem meg a referencia pályát. Ahhoz, hogy a rakéta repülése a referenciapályát tökéletesen leírja, nem elégséges az tolóerővektor egyszeri és állandó helyzetű eltérítése. A helyes pálya megválasztása szabályzás útján feltehetőleg megvalósítható.



25. ábra: Az második szimuláció pálya grafikonja



26. ábra: Az második szimuláció magasság-idő grafikonja

6. Összefoglalás

Kutatásom során megismerhettem a rakétatechnika világát, amely bővelkedik az újabbnál újabb műszaki megoldásokban, és igen nagy ütemű fejlődésen ment keresztül az elmúlt 100 évben. A dolgozatomban tárgyalt összefüggések és szabályszerűségek korántsem tudják lefedni a rakéták minden témakörét, de alapvető rálátást biztosítanak a rakéták, annál is inkább a folyadék-hajtóanyag elvű rakéták működésére és sajátosságaira. A kutatásom nyomán elvégzett szimulációk előzetesen kiválasztott feltételek mellett megmutatják egy 3 szabadságfokú rendszerként vizsgált rakéta repülési jellemzőit és azt, hogyan hatna egy esetleges súlycsökkenés a szerkezetre. A szimuláció és az abban alkalmazott paraméterek számos egyszerűsítést tartalmaznak. Egy valódi rakétaszerkezet megtervezése és megépítése rendkívül összetett mérnöki folyamat. Azt gondolom a műszaki tudományok magasfokú ismerete és a tapasztalat, lehetőséget biztosít a jövő mérnökeinek, a legtöbb felmerülő probléma megoldására.

7. Felhasznált irodalmak és források

1. H. Mielke: A Rakétatechnika Alapjai (1962)
2. George P. Sutton - Oscar Biblarz: Rocket Propulsion Elements Ninth Edition (2017)
3. Nagy István György - Lőrincz István: Rakétatechnika - Rakétafegyver (1969)
4. D. P. Mishra: Fundamentals of Rocket Propulsion (2017)
5. John D. Clark: IGNITION! An Informal History of Liquid Rocket Propellants
6. Budó Ágoston: Kísérleti Fizika I (1970)
7. NASA-History-V2-A4-Rocket-Technical-Development-Data (1965)
<https://www.scribd.com/document/17489642/NASA-History-V2-A4-Rocket-Technical-Development-Data-1965#>
8. <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/rocket/rockpart.html>
9. <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/rocket/rktpow.html>
10. <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/rocket/shaped.html>
11. <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/rocket/rktcontrl.html>
12. https://history.nasa.gov/DPT/Technology%20Priorities%20Recommendations/Breakthrough%20Materials%20DPT%20Jul_00.pdf
13. <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19900008226/downloads/19900008226.pdf>
14. <https://www.researchgate.net>
15. <http://www.astronautix.com/v/v-2.html>
16. <http://www.astronautix.com/l/loxalcohol.html>
17. <https://earth.google.com/web/>
18. <https://github.com/mathworks/Modeling-TVCd-Rocket-in-Simulink>
19. <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>
20. <https://rarehistoricalphotos.com/v2-rocket-in-pictures/>

8. Függelék

8.1 Dolgozatom elkészítésében segítséget nyújtottak

A szimulációs vizsgálatomhoz szükséges Matlab és Simulink szoftver megismerésében és a szimulációs eredmények kiértékelésében segítséget kaptam témavezetőmtől Dr. Hajdú Sándor egyetemi docenstól.

Ezúton szeretném kifejezni köszönetemet témavezetőmnek és minden olyan tanáromnak, aki éles meglátásaival elősegítette dolgozatom elkészülését.

8.2 Számítások

1. függelék

Nehézségi gyorsulás meghatározása a kilövési ponton

Adatok:

Átlagos földrajzi szélesség (Debrecen): megközelítőleg 47,53 [°]

Tengerszinttől mért átlagos magasság (Debrecen): megközelítőleg 122 [m]

Nehézségi gyorsulás kiszámítási formula:

$$G = IGF + FAC$$

Nemzetközi gravitációs formula:

$$IGF = 9,780327 \cdot (1 + 0,0053024 \cdot \sin^2(\varphi_r) - 0,0000058 \cdot \sin^2(2\varphi_r))$$

Magassági korrekció:

$$FAC = -3,086 \cdot 10^{-6} \cdot h$$

Nehézségi gyorsulás Debrecenben:

Földrajzi szélesség átváltása radiánba (Debrecen):

$$\varphi_D = 47,53^\circ$$

$$\varphi_{r_D} = 47,53 \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$\varphi_{r_D} = 0,829554993 \text{ [rad]}$$

Behelyettesítés a formulába (Debrecen):

$$ICF_D = 9,780327 \cdot (1 + 0,0053024 \cdot \sin^2(0,829554993) - 0,0000058 \cdot \sin^2(2 \cdot 0,829554993))$$

$$ICF_D = 9,780327 \cdot (1 + 0,0053024 \cdot 0,544099453 - 0,0000058 \cdot 0,992220952)$$

$$IGF_D = 9,80848728$$

Magassági korrekció meghatározása (Debrecen):

$$FAC_D = -3,086 \cdot 10^{-6} \cdot 122$$

$$FAC_D = -0,000376492$$

$$G_D = IGF_D + FAC_D$$

$$G_D = 9,80848728 - 0,000376492$$

Végeredmény (Debrecen):

$$G_D = 9,808110788 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

Megjegyzés:

A levezetéshez használt számológépet, a trigonometrikus függvények felírásánál radián beállításban használtam. Ellenkező esetben a kapott érték helytelen.

Fogalommagyarázat és rövidítések:

G: Nehézségi gyorsulás (m/s^2)

IGF: Nemzetközi Gravitációs Formula (International Gravity Formula)

FAC: Magassági korrekció (Free Air Correction)

h: Tengerszinttől mért átlagos magasság (m)

φ : Földrajzi szélességi fok ($^\circ$)

φ_r : Földrajzi szélességi fok radiánban (rad)

2. függelék

A nehézségi gyorsulás meghatározása a kilövési pontban 30.000 méteren

Adatok:

Átlagos földrajzi szélesség (Debrecen): megközelítőleg $47,53 [^\circ]$

Tengerszinttől mért magasság: $30.000 [m]$

Nehézségi gyorsulás kiszámítási formula:

$$G = IGF + FAC$$

Nemzetközi gravitációs formula:

$$IGF = 9,780327 \cdot (1 + 0,0053024 \cdot \sin^2(\varphi_r) - 0,0000058 \cdot \sin^2(2\varphi_r))$$

Magassági korrekció:

$$FAC = -3,086 \cdot 10^{-6} \cdot h$$

Nehézségi gyorsulás Debrecenben 30.000 méteren

Földrajzi szélesség átváltása radiánba (Debrecen):

$$\varphi_D = 47,53^\circ$$

$$\varphi_{r_D} = 47,53 \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$\varphi_{r_D} = 0,829554993 \text{ [rad]}$$

Behelyettesítés a formulába (Debrecen):

$$ICF_D = 9,780327 \cdot (1 + 0,0053024 \cdot \sin^2(0,829554993) - 0,0000058 \cdot \sin^2(2 \cdot 0,829554993))$$

$$ICF_D = 9,780327 \cdot (1 + 0,0053024 \cdot 0,544099453 - 0,0000058 \cdot 0,992220952)$$

$$IGF_D = 9,80848728$$

Magassági korrekció meghatározása (Debrecen):

$$FAC_{30} = -3,086 \cdot 10^{-6} \cdot 30000$$

$$FAC_{30} = -0,09258$$

$$G_D = IGF_D + FAC_{30}$$

$$G_D = 9,80848728 - 0,09258$$

Végeredmény (Debrecen 30.000 méteren):

$$G_D = 9,71590728 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

Megjegyzés:

A levezetéshez használt számológépet, a trigonometrikus függvények felírásánál radián beállításban használtam. Ellenkező esetben a kapott érték helytelen.

Fogalommagyarázat és rövidítések:

G: Nehézségi gyorsulás (m/s^2)

IGF: Nemzetközi Gravitációs Formula (International Gravity Formula)

FAC: Magassági korrekció (Free Air Correction)

h: Tengerszinttől mért átlagos magasság (m)

φ : Földrajzi szélességi fok ($^\circ$)

φ_r : Földrajzi szélességi fok radiánban (rad)

3. függelék

Alkalmazott nehézségi gyorsulás meghatározása az 1. és 2. függelék alapján

A kiindulási pont és a kiindulási pontban 30.000 méteren mért nehézségi gyorsulás átlaga:

$$g_0 = \frac{9,808110788 + 9,71590728}{2}$$

Végeredmény:

$$g_0 = 9,762009034 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

Fogalommagyarázat és rövidítések:

g_0 : Nehézségi gyorsulás (m/s^2)

4. függelék

Nhézségi gyorsulás a Newton-féle gravitációs törvény alapján

Nhézségi gyorsulás általános alakja:

$$g = \gamma \frac{M}{R^2}$$

Behelyettesítés a képletbe:

$$g = 6,6743 \cdot 10^{-11} \frac{5,9736 \cdot 10^{24}}{(6,372797 \cdot 10^6)^2}$$

Végeredmény:

$$g = 9,817065593 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Fogalommagyarázat és rövidítések:

g: Nehézségi gyorsulás Newton-féle gravitációs törvény alapján (m/s^2)

γ : Gravitációs állandó: $((6.67430 \pm 0,00015) \cdot 10^{-11} \text{ (m}^3/\text{kg s}^2\text{)})$

M: A Föld tömege: $5,972 \cdot 10^{24} \text{ (kg)}$

R: A Föld sugara: 6 371 (km)

5. függelék

Referencia röppálya

Adatok:

Debrecen átlagos tengerszint feletti magassága: megközelítőleg 0,122 [km]

Nyíregyháza átlagos tengerszint feletti magassága: megközelítőleg 0,101 [km]

Debrecen - Nyíregyháza légvonalban mért távolsága: megközelítőleg 48 [km]

A pálya csúcspontja (Debrecen - Nyíregyháza 1/2 távolságán) 30 [km]

Lagrange-féle interpoláció

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \left(y_i \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \right)$$

$$L_{n,k}(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^n y_i \cdot L_{n,k}(x)$$

A koordinátarendszerben felvett pontok a rendelkezésre álló adatok alapján:

$$S(0_{x_1}; 0,122_{f(x_1)})$$

$$P(24_{x_2}; 30_{f(x_2)})$$

$$D(48_{x_3}; 0,101_{f(x_3)})$$

Másodrendű interpoláció általánosan:

$$P(x) = L_1(x) \cdot f(x_1) + L_2(x) \cdot f(x_2) + L_3(x) \cdot f(x_3)$$

Lagrange polinomok:

$$i = 1 \quad L_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3}$$

$$i = 2 \quad L_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3}$$

$$i = 3 L_3(x) = \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

Másodrendű interpoláció kifejezve:

$$P(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \cdot f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \cdot f(x_2) + \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \cdot f(x_3)$$

Értékek behelyettesítése:

$$P(x) = \frac{x - 24}{0 - 24} \cdot \frac{x - 48}{0 - 48} \cdot 0,122 + \frac{x - 0}{24 - 0} \cdot \frac{x - 48}{24 - 48} \cdot 30 + \frac{x - 0}{48 - 0} \cdot \frac{x - 24}{48 - 24} \cdot 0,101$$

$$P(x) = \frac{0,122(x - 24)(x - 48)}{1152} + \frac{30(x - 0)(x - 48)}{-576} + \frac{0,101(x - 0)(x - 24)}{1152}$$

$$P(x) = \frac{0,122(x - 24)(x - 48) - 60(x - 0)(x - 48) + 0,101(x - 0)(x - 24)}{1152}$$

$$P(x) = \frac{0,122(x^2 - 48x - 24x + 1152) - 60(x^2 - 48x) + 0,101(x^2 - 24x)}{1152}$$

$$P(x) = \frac{0,122x^2 - 5,856x - 2,928x + 140,544 - 60x^2 + 2880x + 0,101x^2 - 2,424x}{1152}$$

$$P(x) = \frac{-59,777x^2 + 2868,792x + 140,544}{1152}$$

Végeredmény:

$$P(x) = -0,051889756x^2 + 2,490270833x + 0,122$$

$$P(x) = y$$

Fogalommagyarázat és rövidítések:

Π : szorzás (produktum)

Σ : összegzés (szumma)

6. függelék

A rakéta repülésszimulációjához szükséges adatok meghatározása

Adatok:

$I_s=284$ (sec)

$P=250000$ (N)

$L=14,3$ (m)

$$m_{\text{induló}}=12520 \text{ (kg)}$$

$$m_{\text{végső}}=4008 \text{ (kg)}$$

$$m_{\text{kinduló}}=11520 \text{ (kg)}$$

$$m_{\text{kvégső}}=3008 \text{ (kg)}$$

Hajtóanyagfogyasztás meghatározása a tengerszinten mért fajlagos impulzusból:

$$I_s = \frac{P}{\dot{G}}$$

Behelyettesítés a képletbe:

$$284 = \frac{250000}{\dot{G}}$$

$$284 \cdot \dot{G} = 250000$$

$$\dot{G} = 880,2816901 \left[\frac{N}{s} \right]$$

Hajtóanyag-tömegáramlás meghatározása g_0 mellett:

$$\dot{m} = \frac{\dot{G}}{g_0}$$

Behelyettesítés a képletbe:

$$\dot{m} = \frac{880,2816901}{9,762009034}$$

Végeredmény:

$$\dot{m} = 90,17423433 \left[\frac{kg}{s} \right]$$

Erőkar meghatározása

$$k = \frac{14,3}{2}$$

Végeredmény:

$$k = 7,15 \text{ [m]}$$

Tehetetlenségi nyomaték értékek meghatározása:

$$I_{\text{tehetetlen}} = \frac{m \cdot L^2}{12}$$

$$I_{alkalmazott} = \frac{I_{tehetetlen}}{10}$$

A4 rakéta tehetetlenségi nyomatéka induláskor:

$$I_{A4induló} = \frac{12520 \cdot 14,3^2}{12}$$

$$I_{A4induló} = 213351,2333 [kg \cdot m^2]$$

$$I_{A4i.alk.} = \frac{I_{A4induló}}{10}$$

$$I_{A4i.alk.} = \frac{213351,2333}{10}$$

Végeredmény:

$$I_{A4i.alk.} = 21335,12333 [kg \cdot m^2]$$

A4 rakéta tehetetlenségi nyomatéka üres állapotban:

$$I_{A4végső} = \frac{4008 \cdot 14,3^2}{12}$$

$$I_{A4végső} = 68299,66 [kg \cdot m^2]$$

$$I_{A4v.alk.} = \frac{I_{A4végső}}{10}$$

$$I_{A4v.alk.} = \frac{68299,66}{10}$$

Végeredmény:

$$I_{A4v.alk.} = 6829,966 [kg \cdot m^2]$$

Tehetlenségi nyomaték értékek meghatározása a könnyített szerkezet esetén:

$$I_{tehetetlen} = \frac{m \cdot L^2}{12}$$

$$I_{alkalmazott} = \frac{I_{tehetetlen}}{10}$$

A4 rakéta tehetetlenségi nyomatéka induláskor:

$$I_{A4kinduló} = \frac{11520 \cdot 14,3^2}{12}$$

$$I_{A4kinduló} = 196310,4 [kg \cdot m^2]$$

$$I_{A4ki.alk.} = \frac{I_{A4induló}}{10}$$

$$I_{A4ki.alk.} = \frac{196310,4}{10}$$

Végeredmény:

$$I_{A4ki.alk.} = 19631,04 [kg \cdot m^2]$$

A4 rakéta tehetetlenségi nyomatéka üres állapotban:

$$I_{A4kvégső} = \frac{3008 \cdot 14,3^2}{12}$$

$$I_{A4kvégső} = 51258,82 [kg \cdot m^2]$$

$$I_{A4kv.alk.} = \frac{I_{A4végső}}{10}$$

$$I_{A4kv.alk.} = \frac{51258,82}{10}$$

Végeredmény:

$$I_{A4kv.alk.} = 5125,882 [kg \cdot m^2]$$

Fogalommagyarázat és rövidítések:

I_s : tengerszinten mért fajlagos impulzus folyékony oxigén és alkohol hajtóanyag esetén (sec)

P: A4 rakéta névleges tolóereje (N)

$\dot{G}$: hajtóanyagfogyasztás (N/s)

g_0 : Nehézségi gyorsulás (m/s^2)

k: Erőkar (m)

L: Rakétatest hossza (m)

$m_{induló}$: A4 rakéta össztömege (kg)

$m_{végső}$: A4 rakéta ürestömege (kg)

$m_{kinduló}$: Könnyített A4 rakéta össztömege (kg)

$m_{kvégső}$: Könnyített A4 rakéta ürestömege (kg)

I: tehetetlenségi nyomaték (kgm^2)