

Miskolci Egyetem



GÉPÉSZMÉRNÖKI- ÉS INFORMATIKAI KAR
MATEMATIKAI INTÉZET

TDK DOLGOZAT

**Konvergens vagy divergens? - A JETI kooperatív didaktikai társasjáték és keretrendszer
bemutatása**

KÉSZÍTETTE:

Palencsár Enikő

mérnökinformatikus BSc szakos hallgató

KONZULENS:

Lengyelné Dr. Szilágyi Szilvia

egyetemi docens

Miskolc, 2023.

Tartalom

1. Bevezetés	4
2. A szakirodalom áttekintése	5
3. Célkitűzés.....	6
4. A játékfejlesztés előzményei.....	6
4.1. A numerikus sorok jelentősége.....	6
4.2. A numerikus sorokkal kapcsolatos tanulási nehézségek feltérképezése	7
5. Fejlesztési módszertan	10
6. A kártyaszerkesztő alkalmazás fejlesztése és szerepe.....	10
7. A JETI didaktikai társasjáték fejlesztési folyamata	12
7.1. Tervezési alapelvek	12
7.2. A játékszöveg	13
7.3. A játék menete, szabályai	15
7.4. A kártyapaklik	18
7.5. A játék számszerűsíthető paramétereinek optimalizálása.....	23
7.5.1. A lavina kártyák szerepe.....	23
7.5.2. A körönként felfordított lapok száma.....	24
7.5.3. A jeti kártyák száma	25
7.5.4. A teljes játékszimuláció és a csere lehetősége.....	25
7.6. A tesztelés.....	28
7.7. A JETI, mint keretrendszer.....	28
8. A Kék Jeti játék.....	29
8.1. A kontrollcsoportos tesztelés kérdései	29
8.2. A kontrollcsoportos tesztelés eredményei	31
9. Összefoglalás és néhány szó a kutatás jelentőségéről.....	34
Köszönetnyilvánítás	35
Hivatkozások.....	36
Mellékletek.....	39

„Mondd el és elfelejtem; mutasd meg és megjegyzem; engedd, hogy csináljam és megértem.”

(Hszün-ce)

1. Bevezetés

Napjainkban a felsőoktatás fokozatos átalakulása zajlik. A nagy hallgatói létszám miatt még mindig a hagyományos frontális oktatás az elsődleges tanítási forma, azonban a Z generáció igényeinek megfelelően tapasztalati alapú ismeretszerzésre is módot kell teremteni. A Párizsi nyilatkozatban (Paris Communiqué, 2018) az Európai Felsőoktatási Térség felsőoktatásért felelős miniszterei kijelentették, hogy a jövőben a felsőoktatásnak döntő szerepet kell játszania a megoldások keresésében a társadalom kihívásaira. A térség országai által közösen vállalt célok között fontos szerepet kapott a tanulás és a tanítás minőségének, célorientáltságának fokozása, az egész életen át tartó, hallgatóközpontú tanulás támogatása. Ehhez kapcsolódóan a nyilatkozat kiemelte a változatos, rugalmas tanulási módszerek biztosításának szükségességét.

A Z generációt, melynek képviselői a késő kilencvenes és a kétezres évek szülöttei, ezáltal a gyors technológiai fejlődés korában nőttek fel, az előző generációktól eltérő kognitív minták és tanulási szokások jellemzik (Vasilyeva, 2021). Több kutatás igazolta, hogy a digitális bennszülöttként is emlegetett Z generációs fiatalok az interaktív, élményszerű tanulást részesítik előnyben a hagyományos, frontális oktatással szemben (Seemiller & Grace, 2016; Moore et al., 2017; Hashim, 2018; Hernández de Menéndez et al., 2020). A passzív tanulási stílusra építő hagyományos tantermi oktatás tehát a Z generációs diákok figyelmének lekötésében kevésbé bizonyul hatékonynak. Annak érdekében, hogy a tanulók motivációja, tanulás iránti elkötelezettsége fennmaradjon, az oktatási módszereket a tanulási preferenciák eltolódásához kell igazítani.

A felsőoktatást megkezdő hallgatók a matematikai alapozó kurzusokat – mint amilyen az analízis, a lineáris algebra vagy a statisztika – általában a nagyobb kihívást jelentő tantárgyak közé sorolják. A szilárd matematikai alapok ugyanakkor számos szakterületen kiemelt jelentőséggel bírnak, ilyen többek között az informatika világa, a mérnöki diszciplína és a közgazdaságtan is. Az egyetemi tanulmányok első néhány félévében kötelezően elvégzendő matematikai alapozó tantárgyak sikeres teljesítésének a lemorzsolódás visszafogásában is nagy szerep juthat, mely a felsőoktatásban általános célkitűzésnek tekinthető. Az elmúlt években számos elemzés (Fenyves et al., 2017; Józsa, 2020; Körössy et al., 2021) irányult a felsőoktatást végzettség nélkül elhagyók számának felmérésére, a jelenség lehetséges okainak kutatására. Ennek során bebizonyosodott, hogy az egyetem elhagyására a leggyakrabban az első tanulmányi év alatt kerül sor (Körössy et al., 2021). Belátható tehát, hogy a felsőoktatásban töltött első félévek alatt felhalmozódó kudarcélmények, a rosszul sikerült zárthelyi dolgozatok és vizsgák a hallgatók motivációját letörve a választott szak elhagyására irányuló döntés egyik mozgatórugójává válhatnak. A középiskola és a felsőoktatás közötti átmenet tanulmányozásában kulcsfontosságú Tinto hallgatói integrációs elmélete, mely szerint azok a tanulók, akik a kampusznak mind a tudományos, mind a szociális életébe sikeresen integrálódnak, kevesebb valószínűséggel hagyják el a kiválasztott képzést (Tinto, 2012). Ekképpen mindent meg kell tenni annak érdekében, hogy a kiemelt kihívást jelentő matematikai alapozó tárgyakhoz kapcsolódóan sor kerüljön a tanulási nehézségek feltérképezésére, melyeket alapul véve a Z generáció igényeihez illeszkedő, innovatív, hallgatóközpontú, az egyetemi légkörbe történő integrációt elősegítő oktatási és tanítási módszerek, stílusok dolgozhatók ki. Ennek egy megnyilvánulási formája lehet a játékalapú tanulás tanórába integrálása a hagyományos feladatmegoldás- és számoláscentrikus gyakorlati foglalkozások kiegészítéseképpen. Az innovatív módszertanok bevezetése ugyanakkor új segédeszközök tervezésének igényét is előhívja.

2. A szakirodalom áttekintése

Huizinga definíciója szerint a játék idő- és térbeli korlátok közé szorított, szabályrendszer által meghatározott cselekvés. Nem származik belőle közvetlen materiális haszon, célja maga a tevékenység elvégzése (Huizinga, 1950). Számos kutatás irányult annak igazolására, hogy a játék fejlesztő tevékenységként az oktatásban is alkalmazható. A játékalapú tanulás (angolul Game-Based Learning vagy GBL) „egy olyan környezet, ahol a játék hozzájárul a tudás gyarapításához, az új készségek elsajátításához, és ahol a játéktevékenységek olyan problémamegoldási lehetőségeket biztosítanak, melyek a tanulóknak sikerélményt nyújtanak” (Qian & Clark, 2016). A játék szabadjára engedi a résztvevők kreativitását, motiválja a másokkal való együttműködést. Dahlin és szerzőtársai (2015) számos, a játék során elsajátított készséget sorolnak fel, említik többek között a rendszerszintű gondolkodás, a döntéshozatal és a kommunikációs képesség fejlődését. Burghardt (2014) a játékra a kognitív képességek fejlesztésének egyik fontos, de nem kizárólagos eszközeként hivatkozik. A játék tanítási módszerként történő alkalmazása ugyanakkor új kérdéseket is felvet: Crookall és Thorngate (2009) kiemelik, hogy a játékalapú tanulás hatékonyságát nem könnyű bizonyítani, hiszen a résztvevők fejlődése nehezen mérhető. Despeisse (2018) megemlíti, hogy a játék elvesztése miatti frusztráció a legrosszabb esetben a többi résztvevő felé irányuló nehezteléssé alakulhat, és arra is rávilágít, hogy a tanórai játékkal szembeni előítéletek gátat vethetnek a módszer szélesebb körű alkalmazásának. Mindennek ellenére az elmúlt évek kísérleti tapasztalatai a játékalapú tanulás hatékonyságát igazolják (Erhel & Jamet, 2013; Hung et al., 2014; Wang & Zheng, 2021; Fernández Galeote et al., 2023; Balakrishna, 2023).

A játékalapú tanulásnak két alapvető típusát tartjuk számon (Wiggins, 2016): a digitális GBL az oktatási célzattal létrehozott számítógépes játékokat foglalja magába, a nem digitális játékalapú tanulásnak pedig a hagyományos, fizikai társasjátékok a fő képviselői. A számítógépes játékok animációkkal és hangeffektusokkal tarkított, gazdag vizuális élményt nyújtanak. Kiválóan, esetenként automatizáltan képesek alkalmazkodni a játékosok tudásszintjéhez, lehetőséget teremtve ezzel a készségalapú differenciálásra. A számítógépes játékok másik erőssége, hogy azonnali visszajelzést szolgáltatnak a játékosok válaszainak helyességéről. A nem digitális játékok mindeközben lehetővé teszik a résztvevők számára, hogy közvetlen interakcióba lépjenek a játékelemekkel, továbbá ösztönzik a játékosok közötti kommunikációt. Balakrishna (2023) 251 elsőéves hallgató részvételével lezajlott kutatásában igazolta, hogy a nem digitális didaktikai játékok jótékony hatásai között a javuló tanulmányi eredmények és a tanórákon való részvételi arány növekedése mellett szerepel a tantermi interakciók körének bővülése is. Ez Tinto hallgatói integrációs elméletének (Tinto, 2012) szempontjából azt jelenti, hogy a tanórai társasjátékozás a tanulmányi-tudományos integráció mellett az egyetemi szociális életbe történő beilleszkedést is támogatja.

Wang és Zheng (2021) kínai felső tagozatos diákok részvételével folytattak felmérést a játékalapú tanulás kérdéskörében, melynek a fent felsorolt két alaptípus összehasonlítása is részét képezte. A kimeneti tesztek pontszámai azt igazolták, hogy mind a digitális, mind a nem digitális GBL hatékonyan hozzájárult a természettudományos ismeretanyag elsajátításához. Bár a végeredmények szempontjából a két módszer hatása között nem mutatkozott szignifikáns különbség, a tanulók önbizalmának építéséhez a számítógépes játékok járultak hozzá nagyobb mértékben. Naderi és Moafian (2023) alsó tagozatos diákok szókincsének digitális és nem digitális játék útján történő fejlesztését vizsgálva ugyanakkor arra jutottak, hogy esetükben a két módszer közül éppen a nem digitális megközelítés bizonyult hatékonyabbnak.

Általánosságban véve tehát elmondható, hogy a játékalapú tanulásnak mind a digitális, mind a nem digitális altípusa képes lehet a résztvevők motivációjának növelésére, egy adott tananyag elsajátításának, megértésének támogatására. A játékválasztást következőképpen a tanulási folyamat céljai, a tanulási körülmények, továbbá a játékosok preferenciái határozzák meg. A számítógépes játékokkal szemben a hagyományos társasjátékok nagy előnye, hogy utóbbiak olyan tantermi környezetben is alkalmazhatók, ahol számítástechnikai eszközök nem állnak a tanulók rendelkezésére. Ez indokolja, hogy didaktikai játékokkal kapcsolatos kutatásom fókuszába a nem digitális GBL, a hagyományos társasjátékok kerültek.

3. Célkitűzés

Kutatásom középpontjában egy olyan tantermi környezetben alkalmazható matematikai didaktikai keretrendszer kialakítása állt, amely lehetővé teszi a tanulni vágyók számára, hogy készségeiket társasjátékok segítségével fejlesszék. A JETI kooperatív alapjáték fő célkitűzése a numerikus sorok összehasonlító kritériumaira vonatkozó ismeretek megszilárdítása, míg a Kék Jeti kompetitív kártyajáték az improprius integrálok témakörét hivatott közelebb hozni a résztvevőkhöz. Mindkét játékban kulcsszerep jut a divergencia és a konvergencia fogalmak megértésének, helyes alkalmazásának. A Koch-hópehely motívumából merítő, téli tematikájú JETI játék legfontosabb elemei a játékszőnyeg, a szabályrendszer, három különböző nehézségi szintű kártyapakli, továbbá a lapok generálását biztosító FormulaRise Card Deck Designer webalkalmazás. Valamennyi felsorolt komponens fejlesztése PDCA ciklusokra bontható. A 2022-es év nyarán megkezdett, több hónapos fejlesztési folyamat eredményeképpen létrejött játék minden tekintetben eredeti: saját ötlet alapján alakult ki a design, a szabályrendszer, a játékszőnyeg, a játékszabály-brossúra és a kártyaszerkesztő alkalmazás is.

A következő fejezetekben ismertetem annak a hárompilléres felmérésnek az eredményeit, amelyet a játék előkészítési fázisában végeztünk, ezt követően bemutatom a JETI társasjáték főbb komponenseinek fejlesztési ciklusait. Részletesebben kitérek a játékmenet paramétereinek szimuláció segítségével történő optimalizálására, végezetül pedig röviden ismertetem a Kék Jeti játékot és a hozzá kapcsolódó tesztelés eredményeit.

4. A játékfejlesztés előzményei

A Miskolci Egyetemen az elmúlt években a matematika különböző tématerületeire koncentrálni több didaktikai társasjáték született. Fontos mérföldkőnek számított például a közismert Aranyásók játék átdolgozása a szögfüggvények témakörére (Dudás et al., 2019), valamint a nevezetes határértékek gyakorlására szolgáló LimEszelős kártyajáték (Szilágyi & Körei, 2022), mely szintén egy népszerű társasjáték, a SOLO szabályrendszerének továbbfejlesztésével keletkezett. A JETI ezzel szemben teljesen új, egyedi ötlet alapján került kidolgozásra, tematikus fókuszát a numerikus sorok adják.

4.1. A numerikus sorok jelentősége

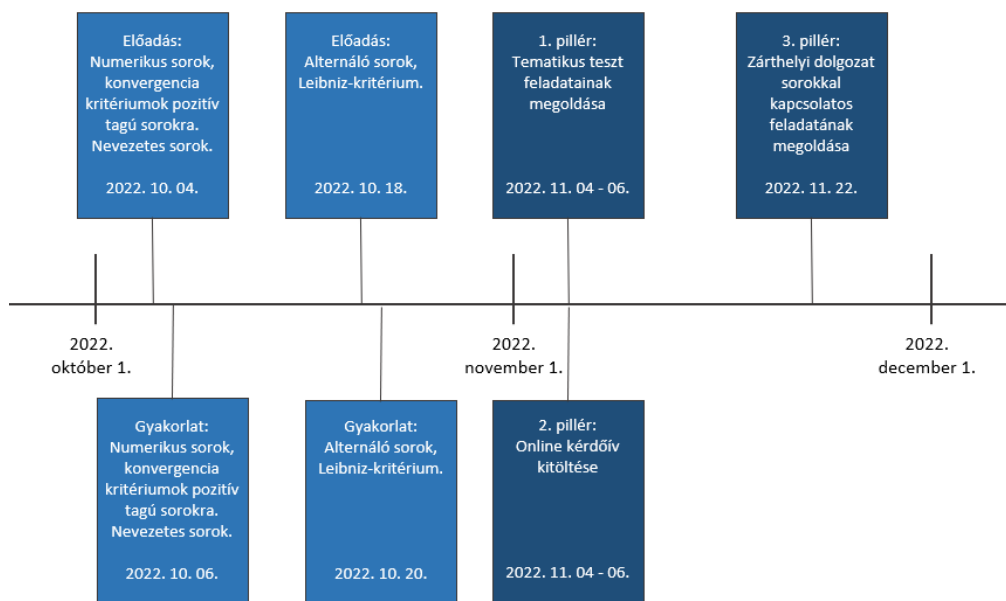
A numerikus sorok a matematikának egy összetett, gyakran kevésbé magától értetődő, ugyanakkor kétségkívül nagy jelentőségű tématerületét alkotják (González-Martín et al., 2011). Fontos hozzájuk kapcsolódó feladat a konvergencia tulajdonságuk vizsgálata, melyhez a konvergenciakritériumokat használhatjuk fel. A divergenciakritérium alkalmazásakor azt kell kiderítenünk, hogy a megadott valós számsort generáló sorozat nullsorozat-e. A Cauchy-féle gyökkritérium és a D'Alembert-féle hányadoskritérium esetén a kritériumokat megfogalmazó tételben szereplő határérték egyhez viszonyított értékének ismeretében lehet a vizsgált pozitív

tagú sorról eldönteni, hogy konvergens vagy divergens-e, bár akadnak olyan esetek, ahol ezek alkalmazása nem vezet eredményre. Az összehasonlító kritériumok csoportjába a minoráns és a majoráns kritériumok tartoznak, melyek kimondják: egy pozitív tagú numerikus sor konvergens, ha létezik konvergens majoránsa, viszont divergens, ha létezik divergens minoránsa.

A sorok ismerete az egyetemisták, a leendő szakemberek számára több tudományterületen – például a fizikában, a közgazdaságtanban, a biológiában is – fontos lehet. Szerepük van a hullámok tanulmányozásában, a hatóanyagok, továbbá a szennyeződések eloszlásának modellezésében (González-Martín et al., 2011). A Taylor-sorok segítségével tetszőleges pontossággal közelíthetünk függvényértékeket, így összetettebb, elemi módszerekkel nem vagy nehezen kiszámítható integrálok értékére is tudunk becslést adni. Ezáltal lehetővé válik többek között azon differenciálegyenletek megoldása, amelyek fizikai, kémiai és biológiai folyamatok szimulálásakor felmerülhetnek.

Biza és szerzőtársai (2009) több feldolgozott tanulmány összefoglalásaképpen megállapították, hogy az egyetemisták számára a numerikus sorok egy idegen, kevésbé intuitív, nehezen vizualizálható témakört jelentenek, melynek tagadhatatlan jelentőségét a matematikában és más tudományágakban csupán a hallgatók kis hányada ismeri fel. A szerzők azt is kiemelték, hogy a tanórákon alkalmazott frontális, algoritmikus megközelítés (képletekbe helyettesítés, a más fogalmakkal való kapcsolatteremtés hiánya, a végtelenhez fűződő tévképzetek figyelmen kívül hagyása) nem kínál kielégítő megoldást a hallgatók tanulási nehézségeinek feloldására (Biza et al., 2009). A numerikus sorok témakörében a játékalapú tanulás alkalmazása vizsgálódásra érdemes alternatívát jelent a frontális oktatási módszerre. A sorokhoz kapcsolódó tematikus játékok didaktikai irányvonalának kijelöléséhez azonban mindenekelőtt a konkrét tanulási nehézségek feltérképezésére volt szükség.

4.2. A numerikus sorokkal kapcsolatos tanulási nehézségek feltérképezése¹

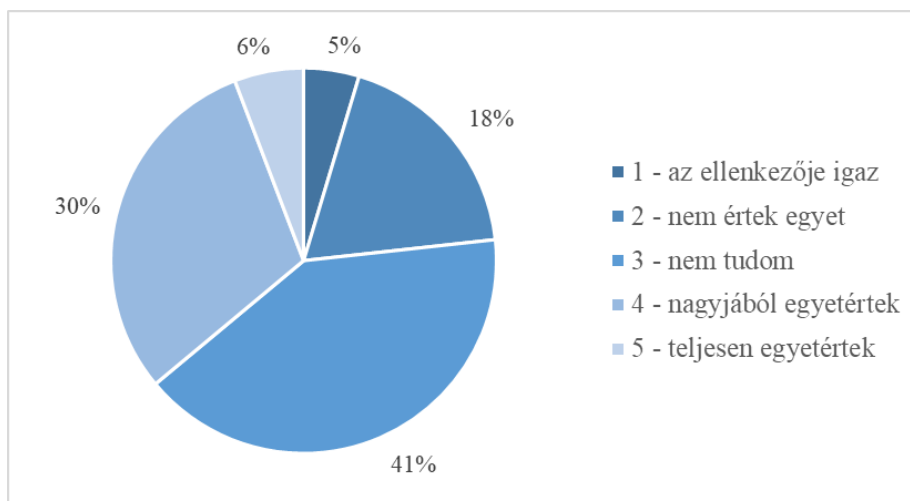


1. ábra. A numerikus sorokra vonatkozó felmérés idővonala (Palencsár & Szilágyi, 2023a).

¹ A fejezet „Az informatikai tématerületre felvett hallgatók numerikus sorokkal kapcsolatos tanulási nehézségeinek feltérképezésére irányuló hárompilléres felmérés eredményeinek bemutatása” c. (Palencsár & Szilágyi, 2023a) publikációban részletezett kutatás eredményeit foglalja össze.

A 2022/23-as tanév őszi félévében egy hárompilléres komplex feltáró kutatást végeztünk, amelynek célja az volt, hogy megismerjük a Miskolci Egyetem informatikai alapképzési szakjain tanuló elsőéves hallgatók numerikus sorokkal kapcsolatos ismereteit és látásmódját. A résztvevő hallgatók egy sorokhoz kapcsolódó, online tesztet (első pillér) követően egy attitűdmérő kérdőívet (második pillér) töltöttek ki, végezetül pedig a szemeszter végi zárthelyi dolgozat numerikus sorokhoz fűződő feladatának eredményeiből (harmadik pillér) vontunk le következtetéseket (**1. ábra**).

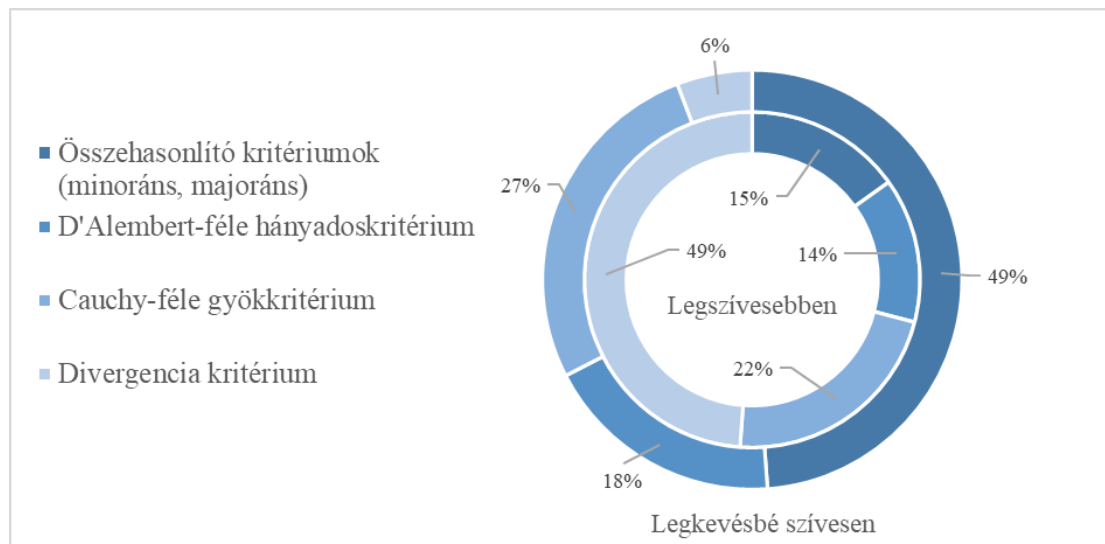
Az online feleletválasztós teszt húsz kérdést számlált, a határidőig 87 fő töltötte ki, a helyes válaszok aránya a teljes példasorra vonatkozóan 80% volt. Az eredmények egyértelműen rámutattak arra, hogy a hallgatók számára a legnagyobb nehézséget a sorok közötti relációk elemzése, azaz az összehasonlító kritériumok alkalmazásának első lépése jelentette, az ezzel kapcsolatos kérdésekre ugyanis a tesztet kitöltőknek átlagosan csupán 60%-a adott helyes választ. A teszthez mellékelt attitűdmérő kérdőív első részében a résztvevőknek ötfokú Likert-típusú skálán kellett megadniuk, mennyire értenek egyet a felsorolt állításokkal. A 86 feldolgozott hallgatói válaszból kiderült, hogy a megkérdezetteknek csaknem fele érezte úgy, hogy az előadáson elhangzott definíciók és a gyakorlatokon megoldott feladatok együttesen sem bizonyultak elegendőnek ahhoz, hogy a numerikus sorokhoz kapcsolódó konvergenciakritériumok használatát teljes mértékben megértsék. Ezenkívül csupán a kitöltők 36%-a vélte úgy, hogy szerzett ismereteit a gyakorlatban is képes lenne felhasználni, azaz magabiztosan el tudná végezni egy sor konvergenciavizsgálatát (**2. ábra**). Fontos megjegyezni továbbá, hogy a megkérdezett hallgatóknak csaknem 60%-a fejezte ki egyértelműen, hogy időnként szívesen játszana az aktuális leckéhez fűződő didaktikai játékokkal a Matematikai analízis I. tárgy gyakorlatain.



2. ábra. Az „Úgy érzem, magabiztosan meg tudom határozni egy sor konvergenciáját” állításra vonatkozó statisztika (Palencsár & Szilágyi, 2023a).

A kérdőív második részében a hallgatók egy felsorolásból választhatták ki, mely numerikus sorokra vonatkozó konvergenciakritériummal dolgoznak a legszívesebben, továbbá a legkevésbé szívesen. A feltüntetett válaszlehetőségek magukba foglaltak valamennyi olyan kritériumot, amelyekről előtte a Matematikai analízis I. kurzus keretein belül szó esett. Ezek többségének használata algoritmikus, procedurális, a hallgatóknak előre definiált lépések sorozatán kell végighaladniuk, mire egy adott sor konvergenciáját vagy divergenciáját igazoltnak tekinthetik. Kivételt képeznek ez alól az összehasonlító kritériumok, melyek

alkalmazásához mindenekelőtt tapasztalatra, jól kiépült intuíciónak van szükség. A konvergenciavizsgálat első lépése ilyenkor egy kezdeti sejtés kialakítása a vizsgált sorra vonatkozóan. Ennek megfogalmazásához számos nevezetes sornak ismerni kell a konvergencia tulajdonságát, hogy egy megfelelően egyszerű konvergens majoráns vagy divergens minoráns sor feltüntetésével a konvergencia vagy a divergencia tényét igazolhassuk. Az összehasonlító kritériumok használatát ekképpen a legtöbb hallgató csupán rendszeres gyakorlás útján tudja megfelelően elsajátítani, alkalmazásukat nem segíti konkrét, lépésenként követhető megoldási séma. Nem meglepő tehát, hogy a megkérdezett hallgatók 49%-a az összehasonlító kritériumokat tüntette fel, amikor a legkevésbé szívesen használt konvergenciakritériumokról kérdeztük őket (**3. ábra**). Ez alátámasztja az online teszt kiértékelésekor levont azon következtetést, miszerint a numerikus sorok közötti kisebb-nagyobb relációk felismerése sok hallgató számára jelent nehézséget. Bár a divergenciakritérium csupán a divergencia tényét képes alátámasztani, a felmérésben résztvevők csaknem fele ezt jelölte meg legszívesebben használt kritériumaként.



3. ábra. A „Melyik kritériummal dolgozik a legszívesebben/legkevésbé szívesen numerikus sorok vizsgálatakor?” kérdésekre adott válaszok százalékos aránya.

A komplex felmérés harmadik pillérét a szemeszter végi zárthelyi dolgozat eredményei szolgáltatták. A dolgozat első feladatában három numerikus sor konvergencia tulajdonságát kellett megadni. Ezek egyike trigonometrikus függvényt tartalmazott, konvergenciáját a legegyszerűbben majorálással lehetett meghatározni. Erre a feladatrészre a dolgozatot beadó 94 hallgatónak mindössze 15%-a kapott pontot, és ebből is csupán 5 megoldás volt hibátlan. A fennmaradó 80 hallgató egyáltalán nem tudott hozzákezdeni a feladathoz.

A hárompilléres felmérés eredményeinek összegzése alapján tehát elmondhatjuk, hogy a Biza és szerzőtársai (2009) által megfogalmazott állítások az informatikai alapszakokon tanuló miskolci egyetemistákra is igaznak bizonyultak: a hallgatók saját bevallásuk szerint is bizonytalanok voltak a numerikus sorok konvergenciavizsgálatában, a témakör megértése, a sorokkal kapcsolatos intuíció kiépítése sokak számára jelentett kihívást. Alátámasztást nyert továbbá az az előzetes feltételezésünk, miszerint az informatikus hallgatók többsége nyitott lehet a játékalapú tanulási módszerek kipróbálására, és körvonalazódott az is, hogy a numerikus sorok témakörében születendő játékoknak elsősorban az összehasonlító kritériumok helyes

alkalmazását, a sorok közötti relációk felismerését kell elősegíteniük. Erre alapozva kezdetét vehette a JETI társasjáték fejlesztése.

5. Fejlesztési módszertan

A JETI játék valamennyi komponensének kialakítása a PDCA folytonos fejlesztési módszertant követte. A PDCA kör, más néven Deming kör a folyamatirányítás hasznos eszköze, melynek fogalmát 1939-ben Walter E. Shewhart vezette be, majd később W. Edwards Deming munkássága révén terjedt el széleskörben (Koskela et al., 2019). A PDCA ciklusokban történő fejlesztés segíti a veszteségek minimalizálását, valamint növeli az elkészült rendszerek hatékonyságát, a gyakori ellenőrzés révén ugyanis az esetleges hibák már a fejlesztés korai szakaszaiban azonosíthatók és kiküszöbölhetők (Isniah et al., 2020). A hagyományos ipari alkalmazási területeken túl a módszertan tetszőleges nagyobb komplexitású rendszer fejlesztéséhez adaptálható. Egy PDCA ciklus az alábbi négy szakaszból épül fel:

1. PLAN: a fejlesztési célok meghatározása
2. DO: a célok eléréséhez szükséges intézkedések végrehajtása
3. CHECK: az eredmények értékelése
4. ACT: felülvizsgálat, korrekciók, további ciklusok kezdeményezése

A JETI társasjáték komponenseire vonatkozóan a PDCA fejlesztési módszertan alkalmazását az indokolta, hogy a játékkal kapcsolatos részletes követelmények a tervezés kezdeti fázisaiban még nem voltak ismertek. Az egyes játékelemek tehát prototipizálás útján, több lépcsőfokban nyerték el végső formájukat, a vázlatos célkitűzések és funkciók iteratív módon kerültek pontosításra és bővítésre. A főbb játékkomponensek közé a szintezett kártyapaklikat, a játékszöveget, valamint a szabályrendszert sorolhatjuk, de érdemes azt is megjegyezni, hogy a JETI keretrendszer részét képező, didaktikai játékok tervezési folyamatát támogató kártyaszerkesztő webalkalmazás fejlesztését is kisebb, inkrementális előrelépések jellemezték.

6. A kártyaszerkesztő alkalmazás fejlesztése és szerepe²

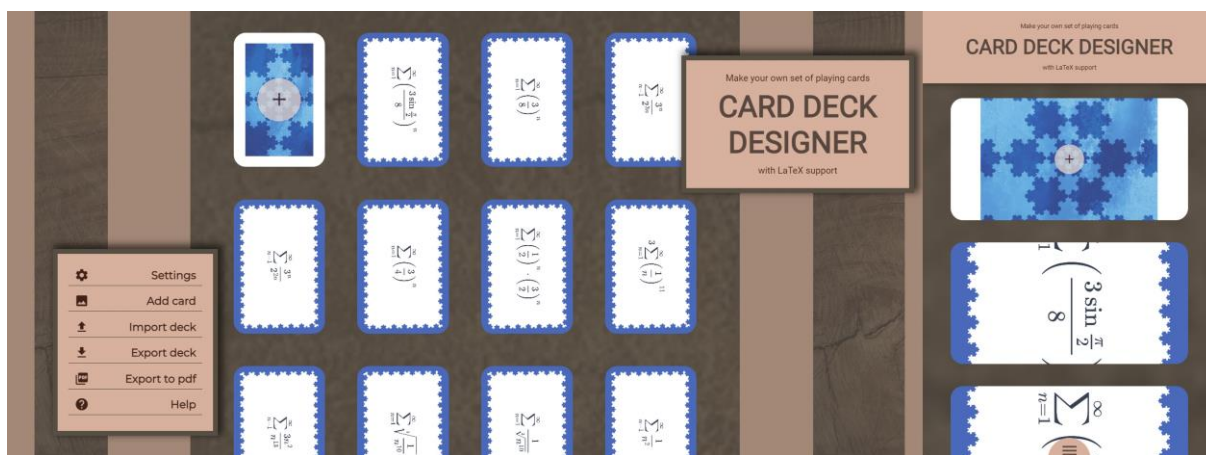
A matematikai didaktikai játékokban alkalmazott kártyapaklik elkészítéséhez olyan szerkesztő eszközre van szükség, mely lehetővé teszi a speciális jelöléseket tartalmazó képletek kártyákra illesztését. Ennek legegyszerűbb módja, ha a lapokon szereplő formulákat a LaTeX jelölőnyelv segítségével adjuk meg. Felmerült tehát az az igény, hogy a kártyafejlesztési folyamat során LaTeX támogatással rendelkező képszerkesztő szoftvert használjunk. Bár a hagyományos képszerkesztő programok számos hasznos szolgáltatást nyújtanak, LaTeX-ben megadott kifejezések kezelésére általában nem alkalmasak. Használatuk kiterjedt funkcionalitásuk miatt gyakran kifejezetten bonyolult, rendszerint nem biztosítanak egységes, átfogó nézetet egy kártyapakli lapjaihoz, és nem támogatják a PDF fájlok létrehozását az elkészült paklikból. Bár a világhálón kifejezetten kártyapaklik tervezésére specializálódott alkalmazások is fellelhetők, a LaTeX-ben megadott képletek képelemmé konvertálására általában ezek sem alkalmasak.

A FormulaRise Card Deck Designer webalkalmazás fejlesztését a fent felsorolt korlátok tették szükségessé. Már a JETI társasjáték tervezésének korai szakaszában felmerült az igény egy olyan szoftver létrehozására, mely ötvözi a hagyományos képszerkesztő programok és az online

² A fejezet az „An evolutionary approach to developing supporting software for the design of card deck-based mathematical didactic games” c. (Palencsár & Szilágyi, 2023b) publikációban részletezett eredményeket foglalja össze.

kártyatervezők valamennyi előnyét, továbbá támogatja a LaTeX formulák feldolgozását és az általuk specifikált képletek kártyákra helyezését. A FormulaRise Card Deck Designer alkalmazás abból a célból jött létre, hogy univerzális szerkesztőprogramként szolgáljon valamennyi kártyapakli alapú didaktikai játékhoz, akár a matematika tudományterületén túl is. Segítségével az oktatók gyorsabban, hatékonyabban állíthatják elő az oktatási segédeszközként alkalmazható kártyalapokat, ezáltal az alkalmazás hozzájárulhat a nem digitális játékalapú tanulás szélesebb körű elterjedéséhez.

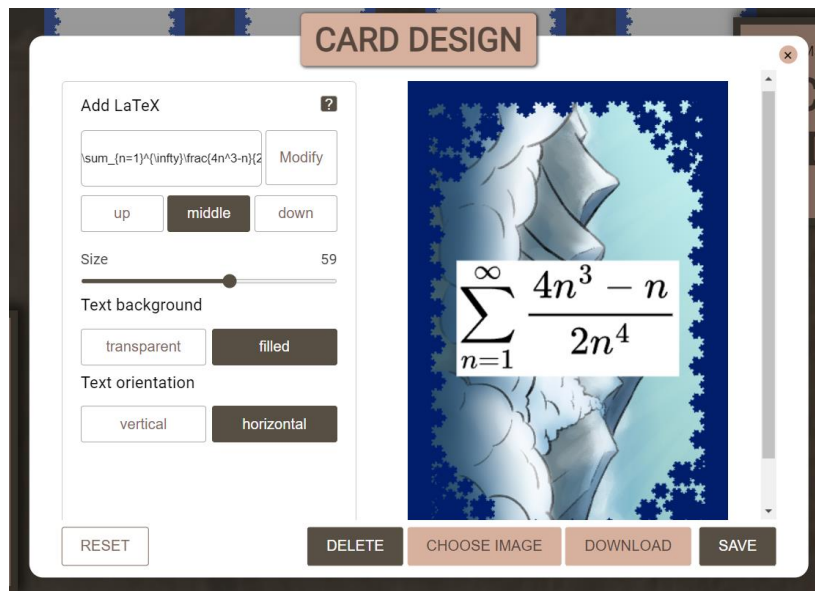
A FormulaRise Card Deck Designer webes alkalmazás alapját HTML, CSS és JavaScript technológiák adják, fejlesztése iteratívan zajlott, az inkrementális modellt követve. Kezdetben csupán a legfontosabb, legnagyobb prioritást élvező funkciók kerültek megvalósításra annak érdekében, hogy a JETI társasjátékhoz fűződő kártyagenerálás minél hamarabb elindulhasson. A fejlesztés későbbi fázisaiban a nyújtott szolgáltatások köre folyamatosan bővült, miközben a már implementált funkciók finomítására is sor került. A fejlesztés során számos korlátozást, teljesítményre vonatkozó követelményt figyelembe kellett vennem. Fontos volt a platformfüggetlenség, hogy az alkalmazás több eszközön és operációs rendszeren elérhető legyen. Ezenkívül kiemelt célom volt, hogy a szoftver a nagyobb méretű kártyapaklikat is képes legyen a válaszdő jelentős csökkenése nélkül kezelni. A funkciók fejlesztésénél az egyszerűsége, az intuitív használatra helyeztem a hangsúlyt, ehhez szöveg- és képbeviteli mezőket, gombokat és csúszkákat használtam. Az alkalmazás főoldalának megjelenését egy régi, fából készült kártyaasztal inspirálta, elrendezése teljes mértékben reszponzív, alkalmazkodik a felhasználó kijelzőjének dimenzióihoz. Mobil eszközökön például a rögzített menüsor felugró ablakra vált át, amelyet az oldal alján megjelenő ikon megérintésével lehet elérni (4. ábra). Az alkalmazás funkcionális tesztelése többek között a JETI és a Kék Jeti didaktikai játékokhoz tartozó kártyapaklik többlépéses fejlesztési folyamatát foglalta magába.



4. ábra. A FormulaRise Card Deck Designer webalkalmazás főmenüjének asztali és mobilverziója (Palencsár & Szilágyi, 2023b).

A FormulaRise Card Deck Designer funkciók széles skáláját biztosítja a felhasználók számára. A kártyaméretes testreszabása mellett lehetőség nyílik a paklihoz tartozó kártyák hátlapjának, valamint előlapjának kiválasztására. Az alkalmazás lehetővé teszi a LaTeX formulák feldolgozását, valamint SVG formátumra konvertálását, ehhez a MathJax könyvtárat használtam fel. A lapokra helyezett képletek mérete, pozíciója, vízszintes vagy függőleges orientációja, továbbá a háttér kitöltése is módosítható (5. ábra). A paklihoz tartozó kártyák menthetők képként egyesével vagy egy ZIP fájlba tömörítve, de lehetőség nyílik PDF exportra

is nyomdai vagy otthoni nyomtatásra optimalizált formátumban. Miután az alkalmazás első teljes körű elfogadási tesztjei lezajlottak, a funkcionális követelmények halmaza a kártyaszerkesztés során kialakult észrevételek és tapasztalatok alapján bővítésen esett át. Bevezetésre került az import-export funkció, melynek segítségével a felhasználók a szerkeszthető formátumú paklikat saját eszközükre menthetik, hogy azokat másokkal megosszák vagy később – akár egy másik eszközről – a programba importálják. Ez a lehetőség a kisebb utólagos módosítások támogatásával növeli a szerkesztési folyamat rugalmasságát, és a paklik újrafelhasználhatóságát is jelentős mértékben javítja.



5. ábra. Az alkalmazás szerkesztőablaka LaTeX formula hozzáadásához.

7. A JETI didaktikai társasjáték fejlesztési folyamata

A Miskolci Egyetemen korábban létrehozott matematikai didaktikai játékokkal (Dudás et al., 2019; Szilágyi & Körei, 2022) ellentétben a JETI teljes egészében saját ötletre épül, egyedi szabályrendszerrel rendelkezik. Ekképpen a játékmenetnek nincsenek előre definiált lépései, korlátai. A 4.2. fejezetben részletezett hárompilléres felmérés eredményei alapján mindössze annyi kikötés fogalmazódott meg a születendő játékkal kapcsolatban, hogy annak a numerikus sorok összehasonlító kritériumaival kell foglalkoznia. Az alapoktól való építkezés számos hibalehetőséget rejt magában, így a játékszabályok fejlesztésének PDCA köreit folyamatos tesztelés és visszacsatolás jellemezte, míg a játék számszerűsíthető paramétereinek optimalizálása számítógépes szimuláció segítségével zajlott. A szabályrendszer kidolgozását szakmai ajánlások vezették (Schell, 2008; Jesztl & Lencse, 2018). A tervezési folyamat kezdetén rögzítésre kerültek azok a legfontosabb didaktikai és élményszerűséget biztosító szempontok, melyek a későbbi játékfejlesztés fő irányvonalát kijelölték.

7.1. Tervezési alapelvek

Schell (2008) játéktervezéssel és -osztályozással foglalkozó művében egy olyan komplex szempontrendszert tett közzé, melynek segítségével sor kerülhet a társasjátékok értékelésére, kategorizálására. A részletesen kifejtett 100 szempont egyikét a játékmenet versengő vagy kooperatív jellege adja. Az együttműködésre épülő játékok elősegítik a résztvevők közötti kommunikációt, akik így egymás erősségeit kihasználva oldhatják meg az eléjük tárt feladatokat, ezáltal elkerülhető az, hogy a jobb képességű játékosok a győzelemre törekedve

szándékosan ne segítsenek társaiknak. A kooperatív didaktikai játékok tehát egy olyan környezet kialakítását támogatják, ahol a hallgatók nem csupán a játéktól és az azt koordináló oktatóktól, de a folyamatos kommunikáció révén egymástól is sokat tanulhatnak. A numerikus sorok témakörében ebből fakadóan – annak ellenére, hogy a kompetitív helyzetek az úgynevezett gyilkos játékos típusra bizonyítottan motiválóan hatnak (Duchon, 2021) – egy kooperatív társasjáték kidolgozására esett a választás.

A játéktervezés egy másik fontos feladata a megfelelő egyensúly megteremtése a stratégia és a szerencse között. Erre a didaktikai játékoknál, mint amilyen a JETI is, kiemelt figyelmet kell fordítani, hiszen az ismeretek átadása semmiképpen sem mehet a játékelmény rovására. Ilyen esetekben javasolt tehát olyan véletlenszerűséget biztosító játékelemek bevezetése, mint például a dobókocka vagy a pörgettyű, melyek használatát követően a játékosok megfelelő stratégiával a saját javukra fordíthatják a szerencse által részükre kiutalt helyzetet (Schell, 2008). A JETI társasjáték esetén a randomizáló szerepet a 100 lapot számláló kártyapakli tölti be. A kártyák legnagyobb előnye egyszerűségükben és költséghatékonyságukban rejlik, hiszen a fémfigurákkal vagy műanyag játékelemekkel ellentétben a kártyalapok könnyedén kinyomtathatók, akár otthon is előállíthatók. Tárolásuk és szállításuk kis helyigényük miatt egyszerűen megoldható. A kártyák a tudásszint szerinti differenciáláshoz is remek alapot nyújtanak, belőlük ugyanis több alternatív pakli állítható össze, melyek aztán felváltva vagy akár egymással keverve is felhasználhatók az aktuális játékosok igényeinek, előzetes ismereteinek megfelelően.

A JETI tervezési folyamatában kiemelt szerephez jutott a letisztult, egyszerű szabályrendszer kialakításának igénye is. Mivel a JETI szabályai nem egy közismert társasjáték átalakításával jöttek létre, a játékos foglalkozások kezdetén mindenképpen időt kell fordítani a szabályok ismertetésére. Nem célravezető, ha ez túl hosszú időt vesz igénybe a játék rovására, így törekedni kellett a szabályok egyszerűsítésére. Ezenkívül annak érdekében, hogy egy másfél órát felölelő gyakorlati foglalkozás ideje alatt akár több játékra is sor kerülhessen, egy játékmenet időtartamát 30-40 percre korlátoztam.

Már a kezdetektől fogva alapvető célkitűzés volt a JETI társasjátékkal kapcsolatban az újrafelhasználásra való alkalmasság megteremtése. Ennek eredményeképpen a JETI társasjáték a fejlesztési folyamat végére egy olyan innovatív didaktikai keretrendszerre nőtte ki magát, mely a megfelelő kártyapaklik létrehozását követően alkalmas lehet bármely olyan matematikai fogalomkör megismerésére és gyakorlására, melynek középpontjában egy halmaz elemei közötti kisebb-nagyobb relációk felismerése áll. A JETI játékszönyege és szabályrendszere így felhasználható többek között az improprius integrálok összehasonlító kritériumainak vagy az alapvető mértékegység-átváltásoknak a gyakorlására is. Az ehhez szükséges tematikus kártyapaklik létrehozását a FormulaRise Card Deck Designer webalkalmazás támogatja.

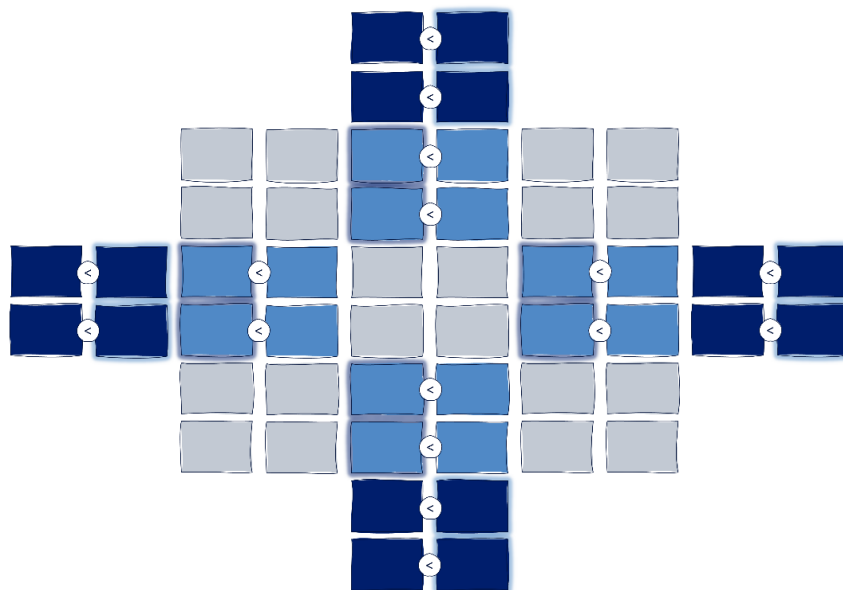
7.2. A játékszönyeg³

A JETI arculattervezési folyamata az egyes játékelemek fejlesztéséhez hasonlóan több PDCA kört foglalt magába. A kezdeti tervek egy zombiapokalipszis jellegű tematikára építettek, ezt azonban a későbbiekben a Koch-hópehely által inspirált téli alaptörténet váltotta fel. A Koch-

³ A fejezet a „*Board games in mathematics education: Presentation of the PDCA-based graphic design process of the YETI didactic framework*” c. (Szilágyi & Palencsár, 2023) publikáció eredményeit foglalja össze.

görbét (másként Koch-hópehely vagy Koch-fraktál) generáló rekurzív eljárást, mely megfelelően nagyszámú iterációt elvégezve egy rendkívül aprólékos hópehely-szerű mintázathoz vezet, Helge von Koch svéd matematikus írta le először. A fraktál motívumának JETI keretrendszerbe történő integrálásáról hozott döntést az indokolta, hogy a Koch-görbe területszámítási képlete révén szoros kapcsolatban áll a numerikus sorok témakörével.

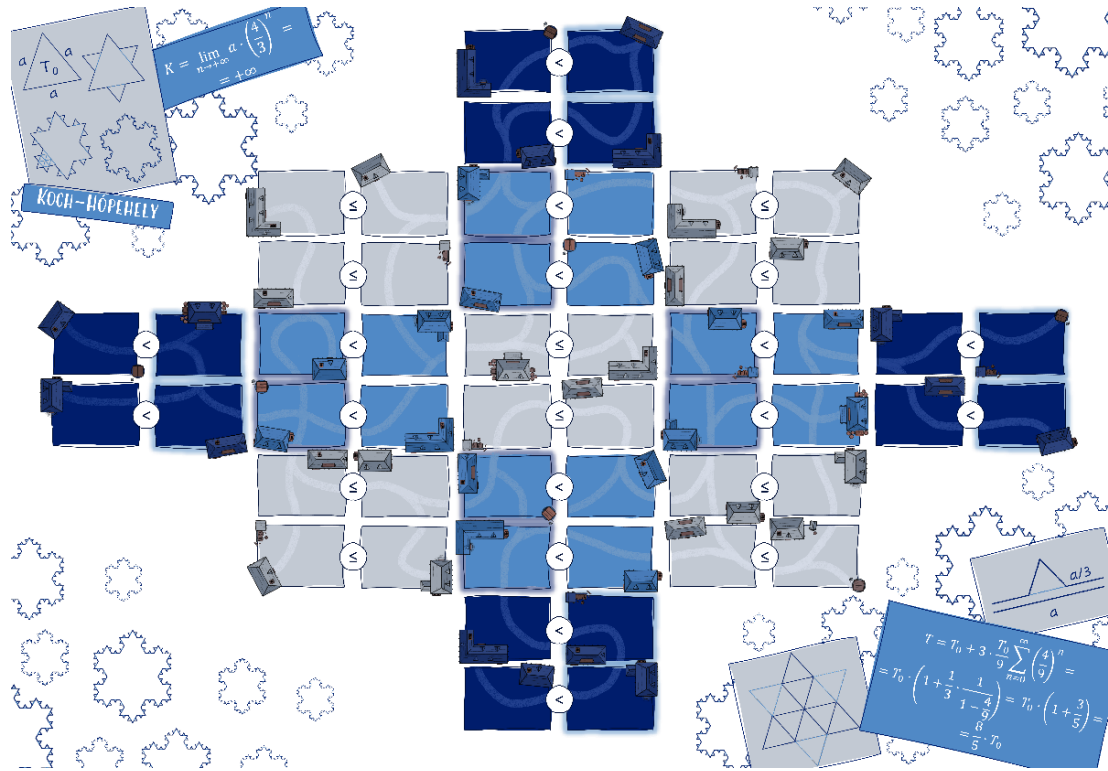
A játéktábla fejlesztésének első PDCA körét az az igény határozta meg, hogy a játék során a táblára helyezendő kártyalapok számára biztosított legyen megfelelő számú és méretű kártyahely. A tervezési fázisban ekképpen sor került a tábla alapszerkezetének kialakítására, a kártyahelyek számának és helyének meghatározására. A végső választás egy csillag alakú elrendezésre esett, melyen az azonos színű kártyahelyek négyes csoportokba rendeződve mezőket alkotnak (6. ábra). A mezők három osztályba sorolhatók: megkülönböztetünk divergens (4 db), konvergens (4 db), továbbá vegyes (5 db) mezőket. A megvalósítási fázisban a tesztáblának megszerkesztésre került két különböző – egy színes és egy nyomtatóbarát – verziója Microsoft PowerPoint használatával. Ezek az ellenőrzési szakaszban kisebb átdolgozáson estek át, módosult ugyanis a kártyahelyek között szereplő relációs jelek iránya, hogy a sorkártyák táblára helyezése egyértelmű, intuitív legyen.



6. ábra. A játéktábla (később játékszőnyeg) alapszerkezete (Szilágyi & Palencsár, 2023).

Az ötlet, hogy a Koch-hópehely motívuma kerüljön a keretrendszer középpontjába, az első PDCA ciklus lezárását követően merült fel. Ekképpen a tábla fejlesztésének második PDCA körében meghatározásra került a JETI társasjáték és keretrendszer színpalettája, melyben az új téli témának megfelelően a kék és a szürke árnyalatai kaptak nagy hangsúlyt. Ezt követően lezajlott a játéktábla nyomtatásának előkészítése – a nagy méretek miatt végül az a döntés született, hogy papíralapú játéktábla helyett rugalmas ponyvára nyomtatott játékszőnyeg előállítását kezdeményezzük. Ennek előnyei közé sorolható például a megnövekedett tartósság vagy a hengerelhetőségből fakadóan jelentősen egyszerűsödő tárolás és szállítás. A második PDCA kör ellenőrzési fázisa a frissen nyomtatott játékszőnyegen megvalósított első tesztek foglalta magába, melyek új követelményekre világítottak rá nemcsak a játékszőnyeggel, hanem a kártyákkal és a szabályrendszerrel kapcsolatban is.

A játékszőnyeg-fejlesztés harmadik ciklusát a szürke színű (vegyes) mezőkön megengedett egyenlőség bevezetése tette szükségessé. Ezzel párhuzamosan kidolgozásra került a szőnyeg sarkainak díszítése a Koch-hópehelyre vonatkozó terület- és kerületképletek szerepeltetésével. A negyedik, egyben utolsó PDCA kör célja az volt, hogy összhangot teremtsen a játéknarratíva és az arculat között, így a kártyahelyekre házak és utak kerültek, melyek a játék helyszínét adó fiktív falut szimbolizálják. A játékszőnyeg végleges elrendezését a **7. ábra** jeleníti meg.



7. ábra. A játékszőnyeg grafikája.

7.3. A játék menete, szabályai

A JETI társasjáték narratívájának alaphelyzete egy jeti roham, amely azzal fenyeget, hogy elsöpri az Infinitia fantázianévre keresztelt fiktív hegyi falut. A játékosokra hárul a feladat, hogy a betolakodó jetiket viasszorítsák, ehhez azonban numerikus sorok közötti relációkat kell felismerniük. A JETI társasjáték kellékei közé tartozik a 100 kártyát számláló pakli, a játékszőnyeg, továbbá a játékmenetet részletező, valamint példaállásokat és magyarázatokat tartalmazó szabálybrossúra. A kártyák között sor-, lavina és jeti kártyák egyaránt szerepelnek (**8. ábra**). A sorkártyákon egy-egy konvergens vagy divergens numerikus sor áll (**9. ábra**). A játékosok az alaphelyzetet a szabálybrossúra vonatkozó részletét áttekintve ismerhetik meg:

Infinitia hegyi falucskában beköszöntött a tél. A közelben őshonos jetik a hegyekből levonulva, táplálék után kutatva előzőnlötték a falut. Az inváziót csupán ti tudjátok viasszorítani. A falubeli jetivadász dandár a gondtalan nyári hónapok alatt szétszilálódott, hiányzik belőle az egykori rend és szervezetség. A dandár két fő részre tagolódik, a divergens és a konvergens osztagra. A divergens és a konvergens vadászok egymás között nem vegyülnek, hiszen más a harcstílusuk. A jetivadászok két fős alakulatokban vonulnak ki Infinitia körzeteibe. Ahhoz viszont, hogy kiküldhessetek két vadászt, előbb meg kell állapítanotok, kit neveztek ki közülük parancsnoknak, ki a rangidős vadász. Minden egyes jetivadász rangját ismeritek, ezek a sorkártyákon szerepelnek. A konvergens alakulatokban a konvergens majoráns, míg a

divergens alakulatokban a divergens minoráns lesz az alakulat vezetője. Amennyiben egy körzetet négy vadász, azaz két alakulat véd, az ott tartózkodó jeti a túlőről láttán megfutamodik. Vigyázzatok, mert ha két jeti egy körzetbe kerül, akkor a területüket védve dulakodni kezdenek, és a harc hevében az egész falut lerombolják! Vezéreljétek ki minél több alakulatot a falu körzeteibe, hogy a jetiket visszavonulásra kényszerítsétek! Ha szerencsétek van, az is előfordulhat, hogy a betolakodó jetiket a hegyekből lezúduló lavina söpri el...



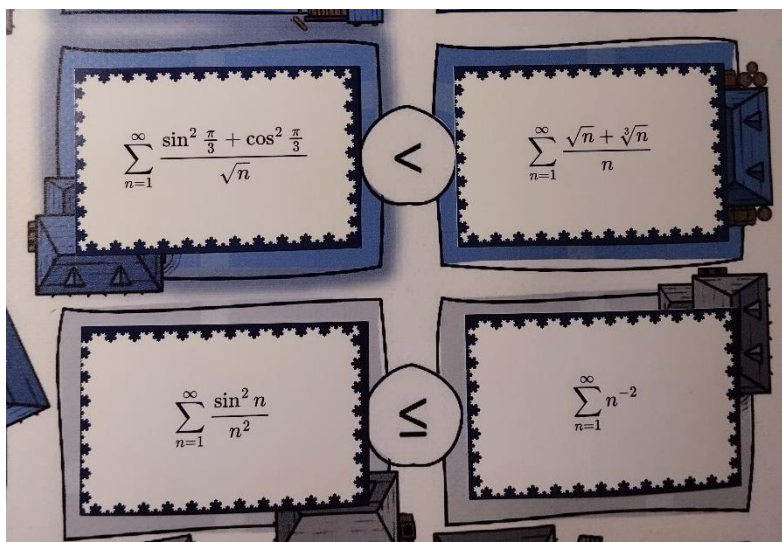
8. ábra. Egy lavina és egy jeta kártya.

A játék kezdetén öt jeta kártyát helyezünk el a játékszőnyeg különböző mezőin. Az osztópaklit összekeverjük, majd lefordítva a játékszőnyeg mellé helyezzük. A játék az alábbi lépésekből épül fel:

- **Osztás:** A játékosok húznak egy-egy lapot az osztópakliból, majd azt felfordítva az asztalra helyezik. Ezt addig folytatják, amíg a felfordított lapok száma el nem éri a tizenkettőt. Amennyiben egy játékos olyat kártyát húz, amelyen jeta szerepel, azonnal elhelyezi azt a játékszőnyeg egy szabad mezőjén, ezek nem számítanak bele a tizenkét felfordítandó kártyába.
- **Kör:** A kör során a játékosok a kiosztott sorkártyák között olyan konvergens vagy divergens párokat keresnek, melyek tagjai között kisebb-nagyobb relációt vélnek felfedezni. A megtalált párokat a játékszőnyeg egyik mezőjére helyezik úgy, hogy a szőnyegen feltüntetett relációk teljesüljenek (9. ábra). A világoskék mezőkre csak divergens, a sötétkékre csak konvergens sorok kerülhetnek. A szürke mezőkön divergens és konvergens párok is elhelyezhetők, de egy pár két tagjának minden esetben azonos konvergencia tulajdonságúnak kell lennie. Ha két adott sor általános tagjai egyenlőek, akkor a kérdéses sorok egyedül a szürke mezőkön állíthatók párba egymással. Ha egy mezőn négy sorkártya szerepel, az előzőleg ott tartózkodó jeta elűzése sikeres volt, a jeta kártyát félre kell tenni, és a játék folytatódik. A lavina kártyák lehetővé teszik egy mező teljes tartalmának letörlését, beleértve a mezőn található sorokat és jetiket is. Ezeket mindenképpen kötelező abban a körben felhasználni, amikor a felfordításukra sor került.
- **A játék vége:** A játék győzelemmel zárul, ha a játékszőnyegen nem található jeta kártya, és a játékosok legalább öt mezőt feltöltöttek sorokkal, vagy ha már hétnél több mezőt feltöltöttek a jetik számától függetlenül. Vesztes helyzet azonban, ha egyazon mezőre több jeta kártya kerül, vagy ha a játékosok annak ellenére is lépésképtelenek, hogy a maximális tizenkét felfordított sorkártya van előttük.

Becker (2021) iránymutatása szerint minden játéknak rendelkeznie kell szabályrendszerrel, legalább egy céllal, a haladás mérésére szolgáló eszközzel és egy jól definiált befejezéssel. A

JETI esetében a játékosok fő célja Infinitia felszabadítása, a támadó jetik elűzése. Az ebben a tekintetben elért haladás követhető például a játékszőnyegre helyezett sorkártyák száma alapján, a játék lehetséges konkrét végkimenetelei pedig fent kerültek részletezésre. Fontos megjegyezni azt is, hogy a játékmenetben kulcsszerepet kap a beszéd, hiszen a résztvevőknek sejtéseiket, párosítási döntéseiket meg kell vitatniuk egymással. Mindez a matematikai szaknyelv helyes használatának elsajátítását, gyakorlását támogatja.

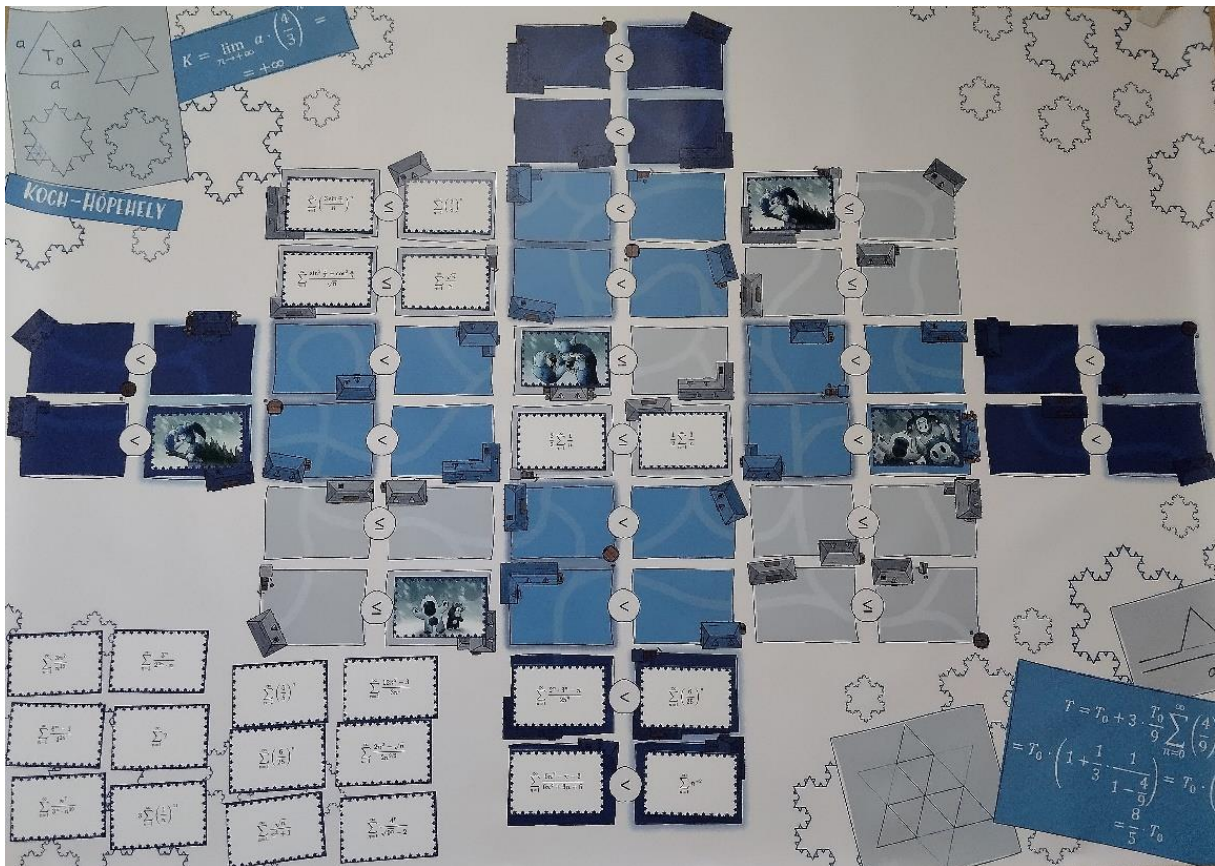


9. ábra. Sorpárok a játékszőnyegen.

Nurnberger-Haag és szerzőtársai (2023) a matematikai témájú társasjátékokra irányuló felmérésüket alapul véve az alábbi javaslattal álltak elő: egy didaktikai társasjáték legyen kompetitív, aszinkron, kombinálja a szerencsét, a stratégiát és a matematikai ismereteket, legyen alkalmas egy adott témakör bevezetésére és ismételtesére egyaránt. Az említett felmérés ugyanakkor kizárólag kompetitív játékokra terjedt ki, így maguk a szerzők is megjegyezték, hogy az ajánlás a versengés vagy együttműködés kérdéskörében nem tekinthető mérvadónak. Ezt leszámítva a JETI játék – egy aszinkronitást támogató, játékmenetre vonatkozó kiegészítéssel – valamennyi felsorolt követelménynek megfelel. A kiegészítésre az osztást követően nyílik lehetőség, amikor a játékosok egymással együttműködve keresnek divergens sor - divergens minoráns, továbbá konvergens sor - konvergens majoráns párokat a felfordított kártyalapok között. A javasolt módosítás értelmében a résztvevők ekkor a játékban lévő sorok közül egymás után kiválasztanak egyet-egyét, melynek konvergencia tulajdonságával kapcsolatban sejtést fogalmaznak meg. Amennyiben sejtésükkel a többi játékos egyetért, elkülönítik az adott kártyát egy „konvergens” vagy egy „divergens” jelzésű csoportba, ellenkező esetben pedig a kérdéses lap „egyelőre nem tudjuk” minősítéssel középen marad. Ez a kategorizálás a lehetséges kombinációk körének szűkítésével (hiszen csak egyforma konvergencia tulajdonságú sorok állíthatók párba egymással) a későbbiekben jelentősen megkönnyítheti a párkeresés folyamatát.

A JETI szabályrendszerének kidolgozása a keretrendszer többi komponenséhez hasonlóan a PDCA módszertan szerint zajlott. A kezdeti, tervezési szakaszban kijelölésre kerültek a játékkal szemben támasztott főbb elvárások, ezt a megvalósítási fázisban az alapszabályok rögzítése és további szabályötletek felvázolása követte. Egy ilyen ötlet képezte például a lavina kártyák koncepciójának alapját, de felmerült az is, hogy a játéktáblára helyezett jetik valamilyen rendszer szerint mozoghatnának a mezők között. Az ellenőrzési fázist tesztjátékok alkották,

melyek során megszületett a döntés az extra szabályok megtartásáról, átalakításáról vagy elvetéséről. Fontos megjegyezni, hogy a tesztjátékok során szerzett tapasztalatok a játékszönyeg és a kártyapakli hibáira is rávilágítottak, azaz a szabályrendszeren túl a többi játékelem továbbfejlesztésére is ösztönzőleg hatottak. A funkcionális tesztelést követően kezdetét vette a szabályrendszer fejlesztésének második PDCA köre, melynek elsődleges célja a játékmenet számszerűsíthető paramétereinek – például a pakliban található jeti kártyák számának – számítógépes szimuláció útján történő finomhangolása volt. A **10. ábra** a JETI társasjáték egy lehetséges állását szemlélteti.



10. ábra. A JETI társasjáték egy lehetséges állása (Szilágyi & Palencsár, 2023).

7.4. A kártyapaklik

A JETI társasjáték didaktikai alapját a pozitív tagú numerikus sorokat szerepeltető kártyapakli adja, ennek összeállítása ekképpen a játékkervezés kulcsfeladatának számított. Fontos volt, hogy a kártyákon megjelenő sorok és a majorálásukhoz, illetve minorálásukhoz használt módszerek lefedjék a Matematikai analízis I. kurzus során érintett főbb típuspéldákat. A kártyaszerkesztés PDCA körének első állomásaként a játékszönyeg dimenzióiból kiindulva sor került a kártyaméretek rögzítésére, majd megkezdődött a játékba integrálni kívánt numerikus sorok, sorpárok összegyűjtése. Az így létrejött tesztapakli hiányosságaira azonban már az első próbajátékok során fény derült: a véletlenszerűen felfordított kártyalapok között elenyésző számban fordultak elő párok, ami jelentős mértékben megakasztotta a játék menetét, rontotta annak élvezhetőségét. Világossá vált, hogy a kívánt eredmény elérése érdekében a játékban használt sorok tervezésénél tudatosabb módszereket, rendszerezést kell alkalmazni.

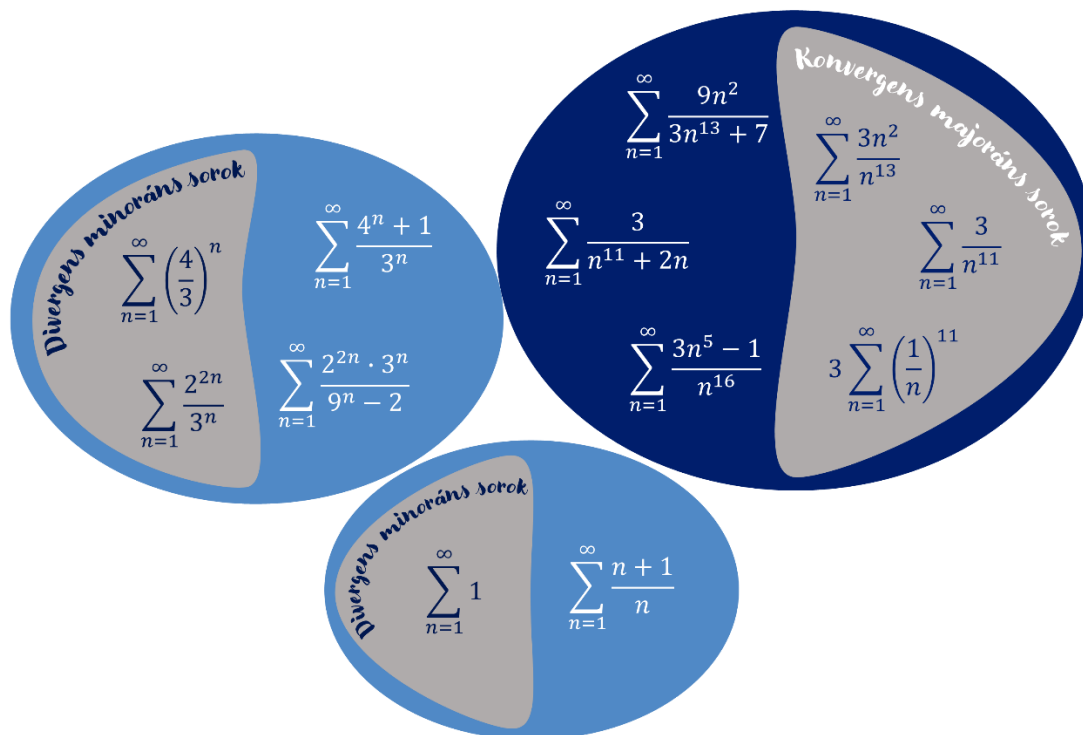
A második PDCA kör kezdetén tehát a pakliszerkezet kialakítása az addigi haladást elvetve az alapoktól indult újra. Ekkorra a differenciálhatóság igénye is kikristályosodott, így a paklitervezés folyamata három különböző nehézségi szinten kezdődhetett meg:

- **Kezdő:** Bevezető szint mindazoknak, akik még nem jártasak a numerikus sorok témakörében. A fő cél a megismerkedés a konvergencia és a divergencia fogalmával, az összehasonlító kritériumokkal, továbbá az összetett képletek egyszerűsítésének gyakorlása (**11. ábra**).
- **Középhaladó:** Gyakorló szint számonkérésekhez, vizsgákhoz. A fő cél az intuíció kiépítése, hogy a játékosok ránézésre megsejtsék, majorálni vagy minorálni érdemes egy adott sort, valamint képesek legyenek magabiztosan megállapítani a sorok között fennálló relációk irányát. A pakliban előfordulnak összetettebb általános taggal rendelkező sorok, melyek tartalmazhatnak nevezetes szögfüggvényeket is (**11. ábra**).
- **Haladó:** Valódi kihívást jelentő szint mindazoknak, akik már magabiztos háttértudással rendelkeznek a numerikus sorok témakörében. A fő cél ezen tudás elmélyítése.

11. ábra. Sorkártyák: két konvergens és két divergens sor a kezdő, továbbá egy konvergens és egy divergens sor a középhaladó pakliból

Az áttekinthetőség érdekében az egyes nehézségi szintekhez összegyűjtött sorokat klaszterekre bontottam fel. Egy klaszterbe mindazon sorpárok tartoznak, melyek esetén a konvergens majoráns vagy a divergens minoráns sorok – bár különböző alakban vannak felírva – az értelemszerű egyszerűsítések elvégzését követően egymással megegyeznek (**12. ábra**). Egy adott klaszteren belül tehát bármely minoráns/majoráns párba rendezhető bármely összetettebb sorral, sőt a minoránsok/majoránsok az egyenlőséget megengedő szürke mezőkön akár egymással is párosíthatók. Természetesen a különböző klaszterek között is állhatnak fenn

egyéb, könnyen beazonosítható relációk. A JETI esetében mind a kezdő, mind a középhaladó pakli 6 divergens, továbbá 8 konvergens klaszterre bontható, az átlagos klaszter körülbelül 6 numerikus sort, azaz 3 párt foglal magába (**1. táblázat**). Az átlagos klaszterméret kiterjesztésével növelhető annak a valószínűsége, hogy a pakliból véletlenszerűen kiválasztott kártyák között található legalább egy sorpár.



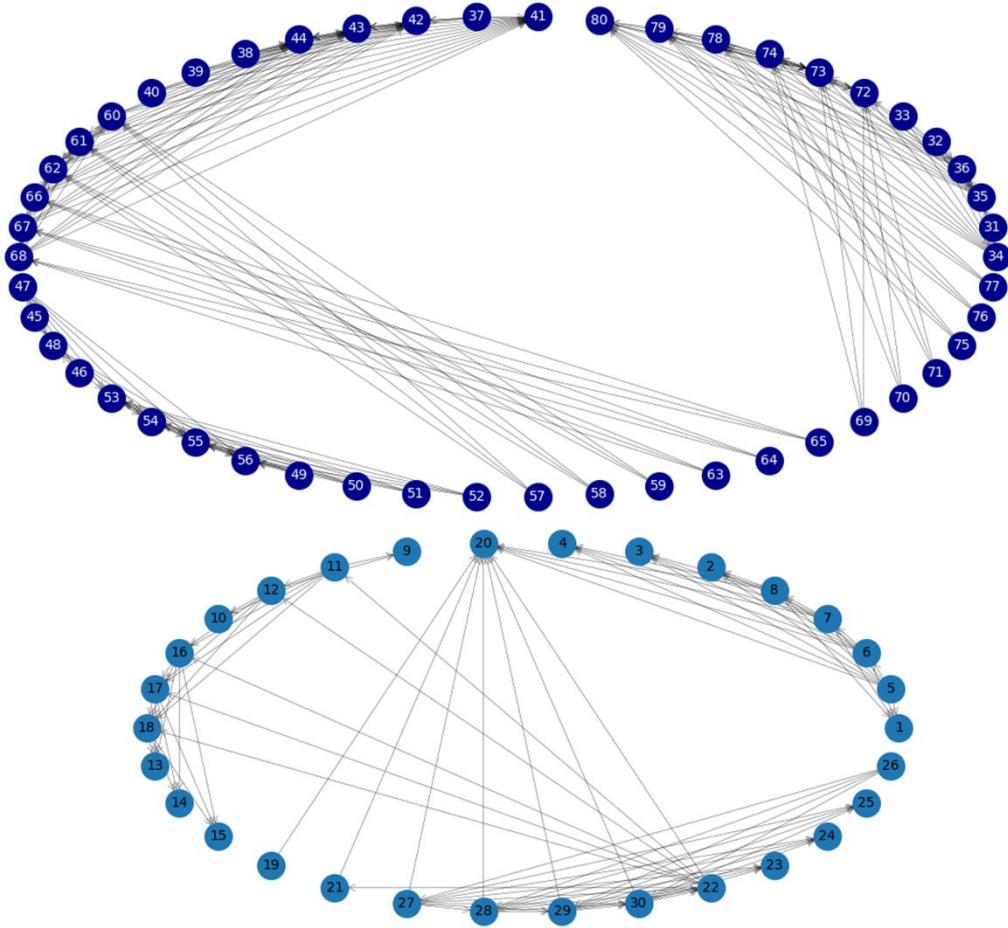
12. ábra. Példa két divergens és egy konvergens klaszterre.

1. táblázat. A klaszterek méret szerinti eloszlása az egyes paklikban.

Klaszterméret	Adott méretű klaszterek száma (db)			
	Kezdő pakli		Középhaladó pakli	
	Divergens	Konvergens	Divergens	Konvergens
1 pár	2	0	2	0
2 pár	1	1	1	3
3 pár	1	5	1	2
4 pár	2	2	2	2
5 pár	0	0	0	1

A paklikkal párhuzamosan a szerepeltetett sorok kapcsolatrendszerét reprezentáló irányított gráfok is elkészültek, melyek a későbbi számítógépes játékszimulációk során kerültek felhasználásra. Az absztrakt modellben minden numerikus sorhoz egyedi sorszámot és egy irányított gráf egyik csúcspontját rendeltem. A sorok általános tagjai között fennálló, szabad szemmel is könnyen észrevehető relációk az irányított gráf éleit határozzák meg, melyek kisebb általános tag felől mutatnak a nagyobb felé, egyenlőség esetén pedig kisebb sorszámából a nagyobbba. Fontos megjegyezni, hogy a modellnek nem célja a kártyákon feltüntetett numerikus sorok között azonosítható valamennyi kapcsolatot ábrázolni, csupán azokat a kisebb-nagyobb relációkat jeleníti meg, melyeknek iránya számológép használata nélkül, ránézésre is könnyedén meghatározható, hiszen a JETI társasjátékban ezek felismerése a fő cél. A szabad szemmel könnyen észrevehető kapcsolatokat (**13. ábra**), továbbá a valamivel több rálátást

igénylő egyszeresen tranzitív relációkat is tartalmazó gráfok (14. ábra) megjelenítése a NetworkX Python könyvtár felhasználásával történt.



13. ábra. A kezdő pakliban szereplő numerikus sorok közötti relációk $G_I = (V_I, E_I)$ irányított gráfja, az ábrázolást a szabad szemmel könnyen észrevehető relációkra korlátozva. A JETI jelölésrendszeréhez igazodva a divergens sorokat jelölő csúcsponatok világoskék, a konvergensek sötétkék színűek.
 $|V_I| = 50 + 30 = 80$, $|E_I| = 177 + 88 = 265$.

Az ábrázolást kezdetben (13. ábra) azért korlátoztam a szabad szemmel könnyen észrevehető relációkra, mert a JETI társasjáték elsődleges didaktikai célja az, hogy a hallgatók megtanulják ezeket gyorsan, hatékonyan felismerni. A tapasztaltabb játékosok ugyanakkor természetesen ezeken túlmutató kapcsolatokat is felfedezhetnek a kártyákon szereplő numerikus sorok között, melyek részben a kisebb-nagyobb reláció tranzitív tulajdonságából eredeztethetők. Például a kezdő pakliban szereplő alábbi konvergens sorok esetén:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{3n} \cdot n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n$$

Az általános tagokra vonatkozóan egyértelmű relációk a következők (minden $n \in \mathbb{N}$ esetén):

$$1) \frac{3^n}{2^{3n} \cdot n} < \frac{3^n}{2^{3n}} = \left(\frac{3}{8}\right)^n$$

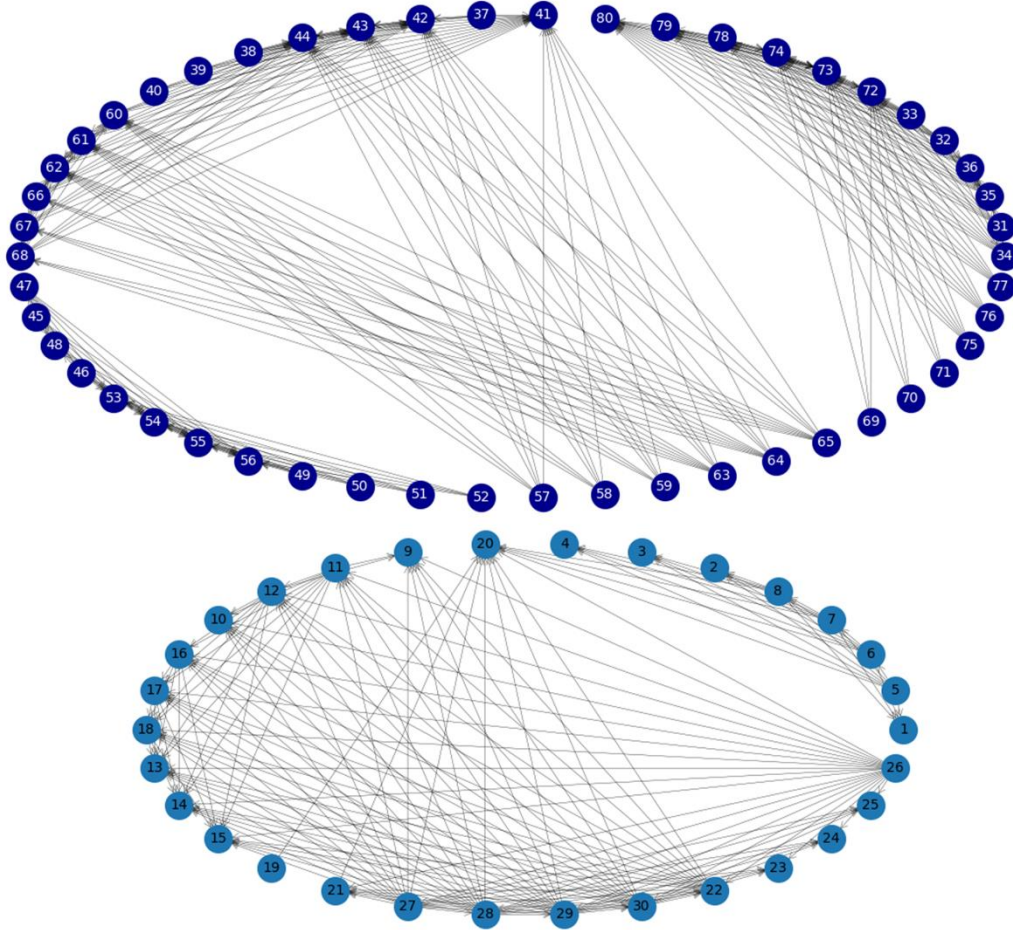
$$2) \left(\frac{3}{8}\right)^n < \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Kis tapasztalattal azonban az alábbi tranzitív reláció is könnyedén levezethető:

$$3) \frac{3^n}{2^{3n} \cdot n} < \left(\frac{3}{8}\right)^n < \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Tehát a kérdéses konvergens sorok között három potenciális pár szerepel:

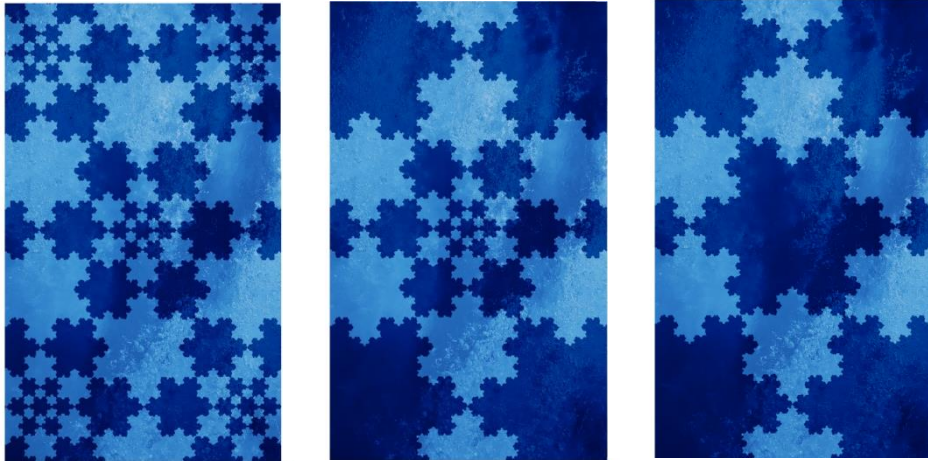
$$P = \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{3n} \cdot n}, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n \right), \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \right), \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{3n} \cdot n}, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \right) \right\}$$



14. ábra. A kezdő pakliban szereplő numerikus sorok közötti relációk $G_2 = (V_2, E_2)$ irányított gráfja, a tranzitív tulajdonságot felhasználva képzett relációkkal együtt. A JETI jelölésrendszeréhez igazodva a divergens sorokat jelölő csúcsok világoskék, a konvergensek sötétkék színűek.

$$|V_2| = 50 + 30 = 80, |E_2| = 248 + 159 = 407.$$

A kártyatervezés második PDCA köre a klaszterek kialakításán túl magába foglalta az előlapok és a hátlapok grafikájának elkészítését is. A kezdő pakli esetében a kártyákon a divergens sorok körül a játékszőnyeg szinkódolásának megfelelően világoskék, a konvergensek körül pedig sötétkék keret szerepel, míg a többi nehézségi szinten a lapszegélyek egységesen középkekek, hiszen ekkor már a konvergenciavizsgálatot is a játékosok végzik. A keretek mintázatát, vonalvezetését a Koch-görbe inspirálta (**11. ábra**). A pakliban található jeti és lavina kártyák (**8. ábra**), valamint a játék három szintjéhez tartozó hátlapgrafika megtervezésére is ekkor került sor, melyekben a Koch-hópehely motívuma szintén hangsúlyos szerephez jutott (**15. ábra**).



15. ábra. Kártyahátlapok a különböző nehézségi szintekhez (Szilágyi & Palencsár, 2023).

7.5. A játék számszerűsíthető paramétereinek optimalizálása

A JETI szabályainak alakításában kiemelt szerepet kapott a számszerűsíthető játékpármeterek finomhangolása, az optimumértékek keresése. Az optimalizálás folyamatának legfőbb feladata az volt, hogy a játék élményszerűségét és hatékonyságát egyensúlyba hozza, a szélsőséges szituációk – a túl korai győzelem, a lépésképtelenség, a garantált vereség – kialakulásának valószínűségét minimalizálja. A JETI paklijában a sorkártyák többféleképpen is párba rendezhetők, egymással bonyolult kapcsolati hálózatban állnak, ezért a játékmenet statisztikai elemzése számítógépes eszközök igénybevételel, szimuláció útján zajlott, mely során kijelölt események relatív gyakoriságát vizsgáltam több ezer véletlenszerűen generált mintajáték helyzetben.

A játékpármeterek beállítása a szimulációt felhasználva, a didaktikai célkitűzéseknek megfelelően meghatározott követelmények figyelembevételel történt, melyek az alábbiak voltak:

1. **Optimális lefedettség:**

A játékosok legyenek motiváltak abban, hogy divergens és konvergens párokat is keressenek, továbbá abban, hogy ne csak az egyszerű alakban felírt (minoránsnak és majoránsnak szánt) sorokat rendezzék egymással párba.

2. **Zökkenőmentes kezdet:**

A pakli megkeverésének függvényében kialakuló kezdőhelyzeteknek átlagosan legfeljebb 1%-ában álljon fenn lépésképtelenség, azaz a játékot az esetek legalább 99%-ában el lehessen kezdeni.

3. **Folyamatos ösztönzés a gondolkodásra:**

A játék egy körben a játékosok részéről kívánja meg legalább 1-2 sorpár lehelyezését.

4. **Megfelelő tudás-szerencse egyensúly:**

A tapasztaltabb játékosok optimális döntéseket hozva a játékaiknak legfeljebb 10-15%-át veszítsék el, a kezdőknél is legyen ez az arány 30% alatt.

7.5.1. A lavina kártyák szerepe

Könnyen belátható, hogy a JETI alapszabályai a játékszönyeg szürke mezőit multifunkcionalitásuk miatt felértékelik a többivel szemben. Míg a kék mezőkre kizárólag divergens vagy konvergens sorpárok helyezhetők, addig a szürke mezőkön mindkettőre

lehetőség nyílik, így a lehető párok száma megduplázódik. Említést érdemel az a szabálykiegészítés is, melynek értelmében a sorpárok tagjai közötti egyenlőség egyedül a szürke mezőkön megengedett. A játékosok érdekeit tehát látszólag az szolgálja, ha a szürke kártyahelyek feltöltését prioritizálják, ami azonban arra is lehetőséget biztosít, hogy a hallgatók kizárólag az egyszerű alakban felírt, egymással egyenlő általános taggal rendelkező sorok párosítására koncentráljanak. Ezt a mellékhatást hivatottak kiküszöbölni a lavina kártyák, melyek egy olyan mező teljes tartalmát képesek letörölni, melynek típusa szegélyszínüknek megfelel. A teljes pakliban egy konvergens, egy divergens és két szürke mezőre vonatkozó lavina kártya is megtalálható. Ekképpen a játékosoknak – amennyiben a várható lavinák segítségével jetiket szeretnének kivonni a játékból – érdekükben áll a játék kezdetén elhelyezendő jeti kártyákat különböző színű mezőkön tartani, hiszen nem tudhatják, melyik lavina bukkan majd fel az első körök egyikében. A jeti mezőtípusok közötti egyenletesebb eloszlása, a kék mezők játékból tartása pedig arra ösztönzi a résztvevőket, hogy olyan sorpárokat is keressenek a felfordított kártyák között, melyek tagjai között éles kisebb-nagyobb reláció áll fenn.

7.5.2. A körönként felfordított lapok száma

A játékmenet körvonala zászor fontos beállítandó paraméter volt az egy körben felfordítandó sorkártyák k száma, melyhez kapcsolódóan több követelmény felvetődött: fontos cél volt, hogy a játék kezdetén k db kártyát felhúva alacsony valószínűséggel következzen be teljes lépésképtelenség, ugyanakkor törekedni kellett arra is, hogy a játékosoknak minél kevesebb új sor egyszerűsített alakját kelljen körönként észben tartaniuk. A k paramétert tehát a *zökkenőmentes kezdet* kritériumot még éppen teljesítő legkisebb lehetséges értékre volt célszerű beállítani. A kritérium teljesülésének ellenőrzéséhez egyszerű, Python nyelven megírt szimulációt alkalmaztam, mely futásának kezdetén egy szövegfájlból beolvassa a kezdő pakli sorai között érvényes, kevés fejszámolással belátható relációkat (lásd: **13. ábra**, az egyes sorokat a szimuláción belül a korábban kiutalt sorszámuk azonosítja). Ezt követően a random könyvtár shuffle függvényének segítségével a megadott sorszámokból létrejön egy lista, mely a véletlenszerűen megkevert paklit reprezentálja. Erre a listára vonatkozóan zajlott le a lépésképtelenség bekövetkezésének vizsgálata a felfordított kártyaszám függvényében, melynek $N = 100\,000$ szimulációra vonatkozó adatait a **2. táblázat** foglalja össze.

2. táblázat. A körök elején felfordított kártyaszámra (k) vonatkozó szimuláció eredményei. N a kísérletek számát, f a kedvezőtlen végekimenetek számát jelöli, azaz amikor a megkevert paklival már a játék elején lépésképtelenség áll fenn.

$N = 100\,000$										
k	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
f	41853	27409	16340	9139	4854	2321	1070	469	181	82
$\frac{f}{N}$ (%)	41,85	27,41	16,34	9,14	4,85	2,32	1,07	0,47	0,18	0,08

A fenti táblázatból kiolvasható, hogy kevesebb felfordított kártyalap esetén kimondottan gyakran előfordul az, hogy a játékosok már az első körben sem találnak sorpárokat, azaz megakad a játék. Például 5 felfordított kártya esetén a lépésképtelen alaphelyzetek relatív gyakorisága meghaladta a 40%-ot. A felfordítandó lapszám növelése ezt a gyakoriságot jelentősen csökkentette, mígnem elértük a táblázatban eltérő háttérszínnel jelölt $k = 12$ esetet,

ahol $\frac{f}{N}$ értéke már 1% alatti volt, azaz teljesülni látszott a *zökkenőmentes kezdet* alapkövetelmény. A szabályokban ezért $k = 12$ érték került rögzítésre, azaz a játékosok minden kör elején annyi lapot húznak az osztópakliból, ami a felfordított kártyák számát tizenkettőre egészíti ki.

7.5.3. A jeti kártyák száma

Az optimalizálás harmadik kritériumának értelmében fontos volt, hogy a JETI társasjáték a résztvevőket körönként legalább 1-2 új sorpár megtalálására ösztönözze. Ehhez a legnagyobb motiváló erőt az osztópakliba kevert, a játék során fokozatosan előtűnő jeti kártyák adják, melyek túlsúlya könnyen vereségre vezethet. Belátható, hogy a jetik hiánya megvonja a játéktól az izgalmat, monotonná teszi a játékmenetet. Ezzel ellentétben, ha túl sok jeti kerül a pakliba, a győzelem még a legtapasztaltabb játékosok számára is szinte elérhetlenné válik. Tehát az élményszerűséget szem előtt tartva körönként átlagosan egy jeti feltűnését tekintettem ideálisnak, az olyan helyzeteket viszont, ahol a játékosoknak szoros egymásutánban háromnál több jetikártyát kell lehelyezniük, kerülni szerettem volna. A jeti kártyák számának (y) rögzítése ekképpen a szimulációk fontos optimalizálási feladatát képezte.

A keverési szimulációban a jeti kártyák elrendeződésének modellezését az osztópaklit reprezentáló azonosítólistánhoz hozzáadott $y - 5$ darab (az öt kezdetben lerakott jeti levonásával) 'Y' karakterrel jelölt jeti tette lehetővé. A játékszönyegen 13 különböző mező található. Annak érdekében, hogy a játékosok motiváltak legyenek abban, hogy a megtalált sorpárokat minél hamarabb lehelyezzék, lehetőséget kellett biztosítani arra, hogy a tábla egyazon mezőjére kényszerűen két jeti kerüljön (a vereség feltétele). A minimális fontolóra vett y érték így $13 + 1 = 14$ volt. A jetiszámra vonatkozó első optimalizációs célt az jelentette, hogy minél kisebb eséllyel forduljon elő olyan játékhelyzet, ahol az osztópakliban sok jeti esik egymás mellé. Az elfogadható méretű jeticsoport létszámának felső korlátját háromnak tekintettem, tehát az olyan helyzetek előfordulási valószínűségét kerestem y függvényében, ahol a megkevert pakliban akadt legalább egy legalább négy egymás utáni jetit számláló csoport. A kiegészített keverési szimulációt a vizsgált y értékekre $N = 100\,000$ alkalommal futtatva az eredményeket a **3. táblázat** tartalmazza. A táblázat adatait tekintve belátható, hogy az olyan y értékek, melyekre a kedvezőtlen keverési végkimenetek aránya nem vagy alig haladta meg az 1%-ot, 14 és 16 közé estek. A paraméter optimális beállításához azonban további vizsgálatokra volt szükség.

3. táblázat. A nagyméretű jeticsoportok előfordulása a kevert pakliban az összes jeti kártya számának (y) függvényében. A számunkra kedvezőtlen, háromnál nagyobb létszámú jeticsoportokat előállító szimulációk számát f , az összes szimuláció számát N jelöli.

$N = 100\,000$							
y	14	15	16	17	18	19	20
f	441	657	1002	1425	1961	2618	3430
$\frac{f}{N}$ (%)	0,441	0,657	1,002	1,425	1,961	2,618	3,43

7.5.4. A teljes játékszimuláció és a csere lehetősége

A kártyakeverés modellezésén túl a JETI társasjátéknak teljes szimulációja is készült annak érdekében, hogy az optimális döntések ellenére bekövetkezett vereség valószínűségére, a *tudás-*

szerencse egyensúly kritériumára vonatkozóan következtetéseket lehessen levonni. A gépi játékok futtatásakor a szimulált játékosok tapasztalatainak és a szimuláció pontosságának függvényében több esetet különböztettem meg. A kezdők játékaának modellezéséhez a sorok párosításakor kizárólag a szabad szemmel könnyen észrevehető relációkat vettem figyelembe (**13. ábra**). Ezzel szemben a tapasztalt játékosok döntéseinek gépi közelítésekor már a több lépésben előállított sorpárokkal is számoltam (**14. ábra**).

A szimulált játék körei a gépi játékosok tudásszintjétől függetlenül is kétféleképpen kerültek megvalósításra: az adott körben vagy mindig az első megtalált párt tekintettem a játékszönyegre helyezendőnek (*gyors lépés*), vagy optimalizáltam a lerakható kártyalapok számát (*optimális lépés*). Ez utóbbi esetben egy P halmazba gyűjtöttem a 12 felfordított sorkártyából képezhető összes lehetséges párt, majd P részhalmazairól egyenként eldöntöttem, hogy a bennük szereplő párok tagjai között volt-e átfedés. Az adott körben optimális lépésként azt a legnagyobb számosságú részhalmazt jelöltem meg, melynek elemei egymástól függetlenek voltak, azaz a benne szereplő valamennyi párt egyszerre le lehetett helyezni. Az optimális lépéseken alapuló szimuláció jobb, valóságközelibb eredményre vezetett, azonban a részhalmazképzés és -vizsgálat hosszadalmassága miatt nagy ismétlésszám esetén a program futásidejét is jelentősen növelte.

Tegyük fel például, hogy a körben kijátszható 12 sor között az alábbi párok szerepelnek:

$$P = \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{8} \right)^n, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n \right), \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{3n} \cdot n}, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{8} \right)^n \right), \right. \\ \left. \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 1}{4^n + 1}, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n \right), \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{3n} \cdot n}, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n \right) \right\}$$

Ekkor a *gyors lépés* szabályai szerint a letett párok L_1 halmaza az alábbi, a fennmaradó párokat ugyanis nem lehet kijátszani, hiszen egy pakliban egy megadott sorkártya csupán egyszer szerepel:

$$L_1 = \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{8} \right)^n, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n \right) \right\}$$

Ezzel szemben az *optimális lépéseket* alkalmazó játékszimuláció a P halmaznak összes részhalmazát képezve egy kedvezőbb, nagyobb számosságú letehető párhalmazt is képes előállítani, ezt jelölje L_2 :

$$L_2 = \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{3n} \cdot n}, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{8} \right)^n \right), \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 1}{4^n + 1}, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n \right) \right\}$$

A teljes játékszimuláció segítségével megoldandó első feladatot a pakliban található jetikártyák y számának beállítása jelentette. A lehetséges értékek halmazát korábban, a paklikeverő szimulációval a $\{14, 15, 16\}$ halmazra szűkítettem. Ideális esetben egy körben átlagosan körülbelül egy új jetinek kell a játékszönyegre kerülnie, hiszen ezáltal válnak motiválttá a játékosok az újabb és újabb sorpárok lehelyezésére, hogy a jetik térnyerésének gátat szabjanak. Megvizsgáltam tehát, hogy hogyan változik az egy körben megjelenő jetik átlagos száma a pakliban előforduló összes jeti számának (y) függvényében. A 10 000 játékkiterációt magába

foglaló szimulációk adatait a **4. táblázat** részletezi. Látható, hogy az eredmények az 1 jeti/kör átlagot $y = 16$ érték mellett közelítették meg leginkább, így ez jelentette a pakliban lévő jeti kártyák számának optimumát.

4. táblázat. A körönként megjelenő jetik átlagos száma az összes jeti kártya számának (y) függvényében.

Átlagos jeti/kör (db) $N = 10\,000$ szimulációra				
Játékos szint	Szimuláció típus	y		
		14	15	16
Kezdő	gyors lépés	0,69	0,77	0,86
	optimális lépés	0,72	0,81	0,90
Tapasztalt	gyors lépés	0,69	0,78	0,85
	optimális lépés	0,72	0,81	0,89

Az y paraméter véglegesítését követően a további játékszimulációk során vizsgálat tárgyát képezte az is, hogy optimális, illetve gyors lépések esetén átlagosan hány kört követően ért véget a játék, a megkezdett játékok hány százaléka zárult győzelemmel, a vereségek mekkora része alakult ki lépésképtelenség miatt, továbbá hány sorpár lerakására nyílt lehetőség a játék folyamán. Az eredményeket $N = 10\,000$ teljes játékszimulációra az **5. táblázat** foglalja össze.

5. táblázat. A teljes játékszimulációk végkimenetele (csere nélkül).

Átlagolt adatok $N = 10\,000$ szimulációra						
Játékos szint	Szimuláció típus	Körök száma (db)	Párok száma (db)	Győzelem (%)	Vereség	
					Lépésképtelenség (%)	Több jeti/mező (%)
Kezdő	gyors lépés	5,53	9,75	42,06	57,18	0,76
	optimális lépés	5,46	9,94	44,77	54,55	0,68
Tapasztalt	gyors lépés	5,17	12,03	71,38	27,95	0,67
	optimális lépés	4,99	12,19	73,68	25,53	0,79

A vereség legfőbb okaként mindkét játékos szint esetén a lépésképtelenség volt betudható, elenyészőnek számított azon esetek százalékos aránya, ahol az egy mezőre jutó több jeti vezetett kedvezőtlen végkimenetelhez. A játéknak átlagosan 5-6 kört követően szakadt vége, ennyi alkalommal kellett a gépi játékosoknak új sorkártyákat felfordítaniuk az osztópakliból. Megfigyelhettük azt is, hogy a tapasztaltabb játékosok ezalatt átlagosan körülbelül kétszer több kártyapárt helyeztek le, mint a kezdők. Kimondottan kedvezőtlennek számított ugyanakkor a győztes játékok 50% alatti, tapasztaltabb játékosok esetén 75% alatti aránya, a lépésképtelenség miatti vereségek magas gyakorisága. Ez azt jelenti, hogy adott játékparaméterek mellett még a lehető legjobb döntéseket hozó hallgatók is játékaik viszonylag magas hányadát elveszíthetik, a szerencse megnövekedett szerepe pedig negatív hatást fejthet ki a játékosok motivációjára. Ennek kiküszöbölésére szolgál a játékmenetbe utólag beépített utánpótlás, azaz csere lehetősége, melynek keretein belül a résztvevők a játék során pontosan egyszer kiválaszthatnak a felfordított sorkártyák közül 3 darabot, hogy azokat az osztópakliból új kártyákra cseréljék. Amennyiben az új kártyák egyike jeti, azt visszakeverhetik a pakliba, helyette másik lapot húzhatnak.

Az utánpótlás szimulációjában az eldobandó kártyák kiválasztása nem került optimalizálásra, véletlenszerűen történt. A cserével kiegészített játékok adatait a **6. táblázat** tartalmazza. Az utánpótlást bevezető szabálmódosítással az átlagosan lejátszott körök száma 6-7 darabra, a lehelyezett sorpárok száma pedig 12-13 darabra növekedett. A győzelmek arányát tekintve még

jelentősebb változás volt tapasztalható: a kezdők immár játékaik körülbelül 70%-át, míg a tapasztaltabbak játékaik közel 90%-át nyerhették meg optimális döntéseket hozva. Belátható tehát, hogy a $k = 12$; $y = 16$ paraméterekkel rendelkező, lavina kártyákkal és csere lehetőséggel kiegészített JETI variáns az optimalizálás kezdetén támasztott kritériumoknak maradéktalanul eleget tesz, így a játékpáraméterek finomhangolása sikerrel zárult.

6. táblázat. A teljes játékszimulációk végkimenetele (cserevel).

Átlagolt adatok $N = 10\,000$ szimulációra, csere alkalmazásával						
Játékos szint	Szimuláció típus	Körszám (db)	Párszám (db)	Győzelem (%)	Vereség	
					Lépésképtelenség (%)	Több jeti/mező (%)
Kezdő	gyors lépés	7,31	11,88	69,23	29,71	1,06
	optimális lépés	7,12	11,96	70,83	27,99	1,18
Tapasztalt	gyors lépés	6,02	13,15	89,89	9,32	0,79
	optimális lépés	5,69	13,28	91,24	7,74	1,02

7.6. A tesztelés

Bár a számítógépes szimuláció a játéktervezés támogatásában rendkívül hasznos eszköznek bizonyult, a JETI társasjáték hatékonyságát önmagában nem képes igazolni. A hallgatók, a valódi játékosok az absztrakt gépi játékostól eltérő összetett kognitív mintákkal és ismeretekkel rendelkeznek. A valódi játékosokra a gépi játékosokkal ellentétben jellemzőek a kisebb emberi hibák, a kapkodás, a félreszámolás, a relációk feletti elsiklás. A gép és az emberek adott helyzetben eltérő döntéseket hozhatnak. Tekintsük például a csere esetét, ahol a gépi játékos véletlenszerűen dönt az eldobandó kártyákról, míg a hallgatók ilyen helyzetben több szempontot is figyelembe vehetnek: hogy mióta vannak játékbán a kérdéses lapok, hogy mely felfordított sorok konvergenciavizsgálata jelenti számukra a legnagyobb kihívást, hogy mely kártyák jövőbeli felhasználására látják a legkisebb esélyt. Egy számítógépes szimuláció nem képes modellezni sem a tanulási folyamatot, sem a numerikus sorok összehasonlító kritériumainak elsajátítását. Ekképpen a JETI didaktikai társasjáték hatékonyságának hallgatói tesztelése a Miskolci Egyetemen a Matematikai analízis I. tantárgy tantervével összhangban jelenleg is folyamatban van.

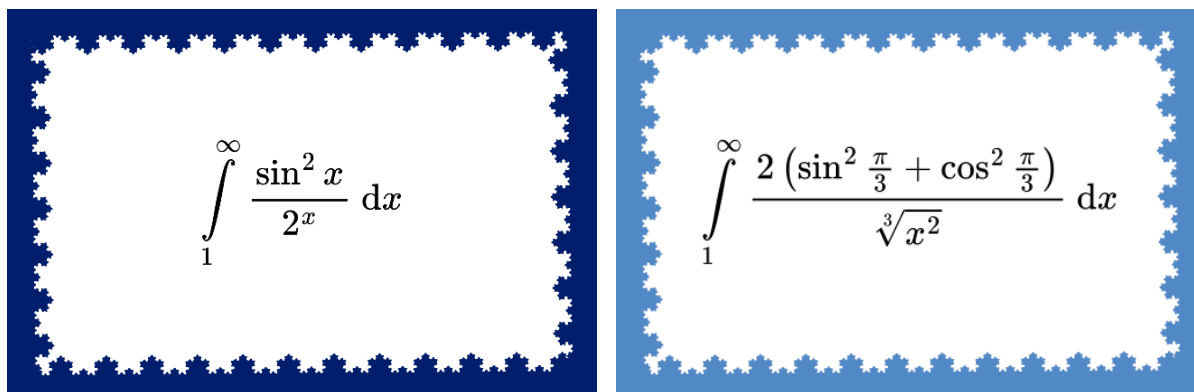
7.7. A JETI, mint keretrendszer

Könnyen felismerhető, hogy a JETI didaktikai társasjáték a sorkártyákat leszámítva nem tartalmaz a numerikus sorok témakörére specifikus, fix játékelemeket. Lehetőség nyílik tehát arra, hogy új tematikus kártyapaklit bevezetve a JETI játékot egy másik olyan témakör megismerésére, gyakorlására használjuk fel, melyben kulcsszerep jut a kisebb-nagyobb relációknak. Az új kártyapaklik szerkesztése a FormulaRise Card Deck Designer webalkalmazás segítségével könnyedén megvalósítható. A JETI társasjáték tehát univerzális didaktikai segédeszközzé, számtalan különböző tananyag oktatásában alkalmazható keretrendszerre terjeszthető ki. A kártyaszerkesztő alkalmazás, továbbá a JETI grafikai elemei mindeközben a szabályrendszerrel függetlenül más didaktikai játékok fejlesztésében is felhasználhatók. Erre jelent példát a 2023 tavaszán a JETI keretrendszer részeként keletkezett Kék JETI kártyajáték, melyhez fűződően 2023 májusában kontrollcsoportos felmérést végeztünk.

8. A Kék Jeti játék

A Kék Jeti kompetitív kártyajáték didaktikai fókuszát az improprius integrálokra vonatkozó összehasonlító kritériumok adják, melyek párhuzamba állíthatók a numerikus sorok minoráns és majoráns kritériumaival. A játék grafikai elemei téli hangulatvilágukkal tökéletesen illeszkednek a JETI keretrendszerbe. Aszabályrendszer alapjául a közismert Fekete Péter játék szolgált, a párosítandó kártyalapokon azonban a Kék Jeti esetében nem azonos szimbólumok, hanem egymással kisebb-nagyobb relációba állítható improprius integrálok szerepelnek. A Kék Jeti a JETI társasjátéktól leginkább kompetitív jellegében tér el, ami egy új típusú motiváló erőt ad a játékmenethez. Akét játék között a paklik méretében is eltérés mutatkozik: a Kék Jeti teljes készlete mindössze 29 kártyalapot számlál, melyből 14-en konvergens, 14-en divergens improprius integrálok szerepelnek, a fennmaradó egy kártya pedig maga a Kék Jeti (Fekete Péter), melyet a játékosok igyekeznek nem elhúzni társaiktól. Annak érdekében, hogy a kevésbé tapasztalt hallgatók játéka gördülékenyebb legyen, az integrál kártyák a JETI játék kezdő paklijával megegyező módon színekódolásra kerültek: a divergenciát világoskék, a konvergenciát pedig sötétkék szegélyek jelölik (**16. ábra**).

A játék során a párosítási döntések gyorsan, a tapasztalat és a korábbi ismeretek alapján meghozhatók, nincs szükség bonyolult számításokra. Ha a játékosok túlnyomórészt kezdők, a játék megkezdése előtt javasolt egy rövid elméleti ismétlést tartani, melynek célja a szabályok egyértelműsítése, a pakliban megtalálható párok azonosításának megkönnyítése. Az ajánlott maximális játékoszám 7 fő. A játék előtt a kártyákat alaposan megkeverjük, majd egyenlően elosztjuk a játékosok között. A játékmenet körökre bontható, a résztvevők egymás után sorra húznak egy-egy kártyát a körben utánuk következő társuk kezéből. Ha az új lappal együtt sikerül a kezükben tartott kártyákból érvényes párt alkotniuk, annak tagjait felfordítva maguk elé helyezik. A játék ezt követően az óramutató járásával megegyező irányban folytatódik. A játék győztese az a játékos lesz, akinek először fogynak el a kártyái, a vesztes pedig az, akinek a Kék Jeti végül a kezében marad. A játék során a JETI játékszönyeg felhasználható a megtalált kártyapárok rendezett elhelyezésére, ami vizualizáció útján támogatja a tanulási folyamatot.



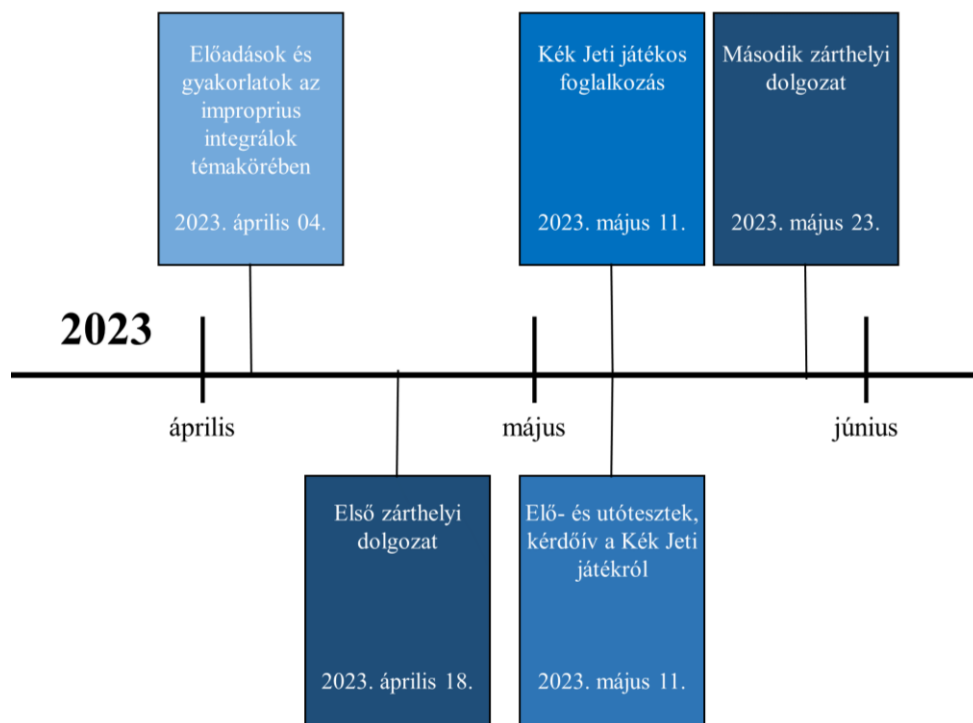
16. ábra. Kártyalapok a Kék Jeti játék paklijából: egy konvergens és egy divergens improprius integrál.

8.1. A kontrollcsoportos tesztelés kérdései

A 2023 tavaszán a Miskolci Egyetemen folytatott kvázi-kísérleti kutatásunk célja az volt, hogy megvizsgáljuk a játékalapú tanulás, azon belül a Kék Jeti játék hatását az elsőéves informatikai

alapszakos hallgatók improprius integrálokkal kapcsolatos ismereteire. A felmérés során megválaszolandó kérdések az alábbiak voltak:

- Mennyire hatékony eszköz a Kék Jeti játék az improprius integrálok összehasonlító kritériumainak elsajátításában?
 - Rövidtávon, közvetlenül a játék után
 - Középtávon, a játékot követő kéthetes időszakban
- Hogyan ítélik meg a hallgatók a Kék Jeti játékot a design, az élvezhetőség, a nehézségi fokozat, a motiváció és az általános játékelmény szempontjából?



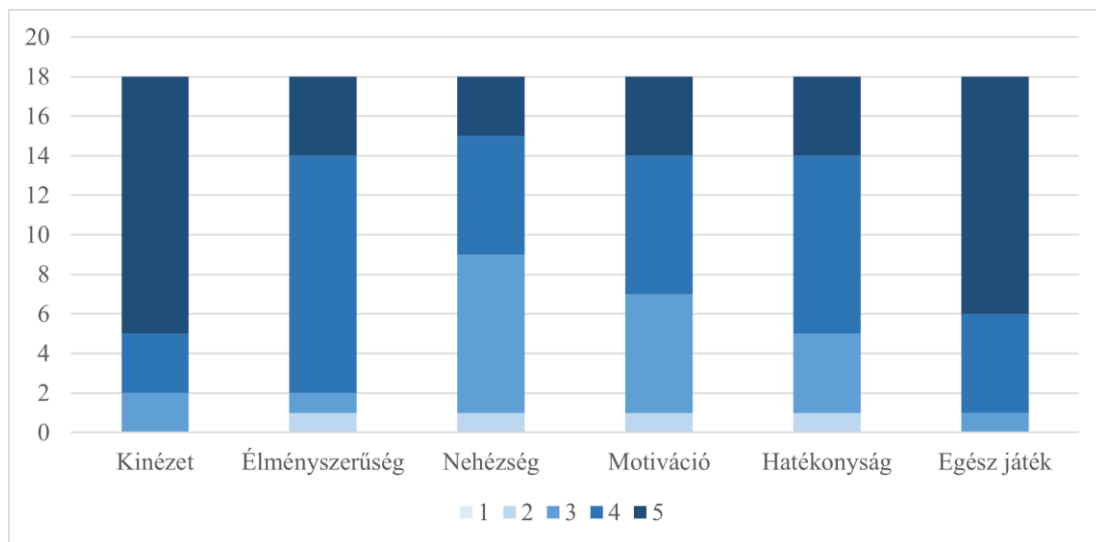
17. ábra. A Kék Jeti játékhoz kapcsolódó felmérés idővonalja

A nem digitális GBL esetén biztosítani kell a folyamatos visszacsatolást, ami az eredményes tanulást lehetővé teszi, azaz a játékban olyan személyeknek is részt kellett venniük, akik azonnal képesek voltak az esetleges hibák korrigálására. Ezen személyek száma adta a szűk keresztmetszetet, a vizsgálatba emiatt korlátozott számú ($N=18$) hallgató bevonására nyílt lehetőség. A 18 fős kísérleti csoport, illetve a szintén 18 főt számláló kontrollcsoport tagjai a Matematikai analízis II. kurzus javarészt elsőéves résztvevői közül kerültek ki. A minta és a kontrollcsoport kiválasztása nem véletlenszerűen történt, a résztvevők önként jelentkeztek a játékos foglalkozásra. A kontrollcsoport kiválasztási folyamatának alapjául az első zárthelyi dolgozat eredményei szolgáltak, így kezdtünk ugyanis a kísérleti csoport tagjaihoz hasonló képességű hallgatók teljesítményét vizsgálni, hogy a két csoport között megfigyelhető különbségek valóban a Kék Jeti játék hatását, ne pedig az előzetes ismeretekben tapasztalható eltéréseket tükrözzék. A kutatás keretein belül a Kék Jeti játék hatásainak vizsgálatára mind kvalitatív, mind kvantitatív módszerekkel sor került (**17. ábra**). A résztvevők a játékkal töltött 4 órás foglalkozáshoz kapcsolódóan egy attitűdmérő kérdőívet, valamint egy-egy feleletválasztós elő- és utótesztet töltöttek ki. A félév során kötelezően megírandó zárthelyi dolgozatokba ágyazott, improprius integrálokhoz fűződő feladatokra adott megoldásokat

részletes szempontrendszert használva értékeltük ki. A tesztek és a zárthelyi dolgozatok megírására tantermi környezetben, felügyelt módon került sor, míg a játék minőségi aspektusaira fókuszáló kérdőívet a hallgatók szabadidejükből, online tölthették ki.

8.2. A kontrollcsoportos tesztelés eredményei

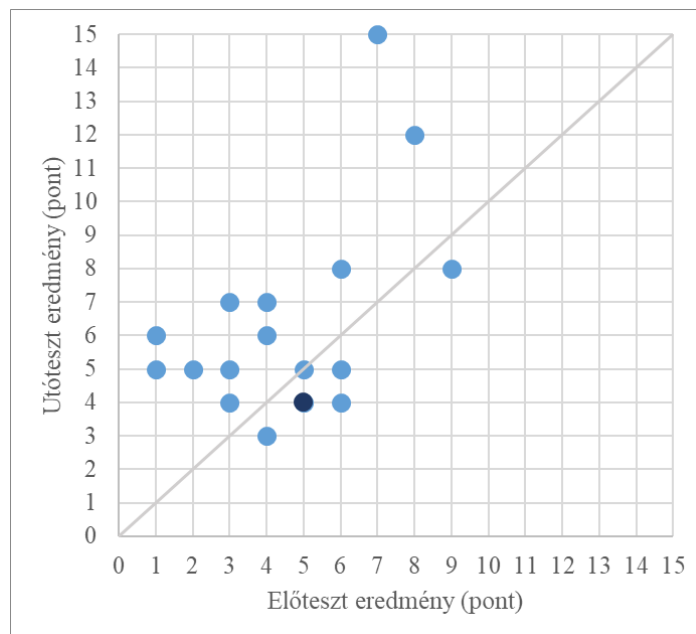
Az online kérdőív kitöltésére a Google Forms felületén keresztül nyílt lehetőség. A kísérleti csoport tagjai által megválaszolandó kérdések a Kék Jeti játék – tágabb értelemben véve a JETI keretrendszer – különböző aspektusainak (design, nehézségi fokozat, élményszerűség, motiváció, hatékonyság) ötfokozatú skálán történő értékelésére irányultak, ahol 5 volt a legjobb, 1 pedig a legrosszabb kiosztható pontszám. A hallgatói értékelések eloszlását a **18. ábra** mutatja. Az eredmények a válaszadók többségének nagyfokú elégedettségét tükrözik. A hallgatók különösen a játék grafikáját és élményszerűségét értékelték pozitívan, ezekre 16-16 diák, azaz a résztvevők 89%-a adott 3-nál több pontot. A nehézségre vonatkozó értékelések 3-4 pont körüli ingadozásából az is kiderült, hogy a résztvevők többsége mérsékelt kihívást látott a játékban. Érdekesség továbbá, hogy 7 olyan hallgató is akadt, akik bár a motiváció szempontjából nem tulajdonítottak jelentős szerepet a játék által teremtett versenyhelyzetnek, összességében mégis pozitívan értékelték a Kék Jetihez fűződő tapasztalataikat.



18. ábra. A Kék Jeti játék hallgatói értékelése ötfokozatú skálán különböző szempontok szerint.

A kísérleti csoport résztvevőinek közvetlenül a Kék Jeti játékkal töltött foglalkozás előtt és után két, egyenként 15 kérdésből álló feleletválasztós tesztet kellett kitölteniük az improprius integrálok összehasonlító kritériumaihoz kapcsolódóan. E tesztek célja a játék közvetlen, azonnali hatásának felmérése volt. A kvázi-kísérletben résztvevő 18 hallgató improprius integrálokhoz fűződő ismereteiben az elő- és utóteszt között tapasztalt látványos javulást a **19. ábra** szemlélteti. Míg az előteszten a résztvevők átlagosan 4,56 (30%) pontot értek el, addig az utóteszten 6,28 pontot (42%), ami számottevő 1,72 pontos javulást jelentett. A Wilcoxon-féle előjeles rangpróba 0,05-ös szignifikanciaszinten statisztikailag szignifikáns különbséget mutatott ki a két teszteredmény mediánjai között. A legjelentősebb javulást egy olyan tanuló érte el, aki az előtesztet 7 pontosra teljesítette, majd az utóteszten maximális, 15 pontos eredményt ért el. A résztvevők 47%-a 2 pontnál nagyobb javulást ért el, 6 hallgatónak azonban 1-2 pontot romlott a teljesítménye a két teszt között. Ez feltehetőleg olyan tényezőknek tudható

be, mint a játékos foglalkozás utáni fáradtság, a szerencse fordulása tippeléskor, vagy az egyéni tanulási stílus sajátosságai.



19. ábra. Az elő- és utótesztek eredményei hallgatónként (a sötétkék pont két azonos pontszámú hallgatót jelöl).

A Kék Jeti játék középtávú hatását a Matematikai analízis II. tárgy első (félévközi) és második (félév végi) zárthelyi dolgozatába épített, improprius integrálokkal kapcsolatos feladatok segítségével mértük fel, majd a kísérleti csoport eredményeit összehasonlítottuk a kontrollcsoport teljesítményével. Az első dolgozatban egyetlen konvergens improprius integrál, míg a második számonkérés feladatsorában két konvergens és egy divergens improprius integrál szerepelt, melyek konvergenciavizsgálatát az összehasonlító kritériumok alkalmazásával lehetett a legegyszerűbben elvégezni. Az összegyűjtött adatok elemzéséhez egy 10 pontból álló kritériumrendszert dolgoztunk ki, a hallgatók vizsgált feladatokra adott részletes válaszai alapján ezen szempontokra vonatkozóan minden résztvevőt kétfokozatú skálán értékeltünk. Az adott készség meglétét 1 jelölte, míg annak hiányát vagy be nem mutatását 0. Az értékelt szempontok között az alábbiak szerepeltek:

- (1) A hallgató ismeri (használja) a konvergens kifejezést.
- (2) A hallgató ismeri (használja) a divergens kifejezést.
- (3) A hallgató helyesen használja a konvergens kifejezést.
- (4) A hallgató helyesen használja a divergens kifejezést.
- (5) A hallgató ismeri a majoráns kritériumot.
- (6) A hallgató ismeri a minoráns kritériumot.
- (7) A hallgató helyesen használja a majoráns kritériumot.
- (8) A hallgató helyesen használja a minoráns kritériumot.
- (9) A hallgató felismeri az összehasonlító kritériumok használatának szükségességét az adott feladatokban.
- (10) A hallgató az összehasonlító kritériumok alkalmazásakor megfelelő irányú becslést (konvergens majoránst vagy divergens minoránst) keres.

Fontos megjegyezni, hogy a felsorolt szempontok közül néhány szoros kapcsolatban áll egymással: a minoráns kritérium ismerete például természetesen előfeltétele a helyes használatának. Az első zárthelyi dolgozatra vonatkozóan, mivel abban divergens improprius integrál nem szerepelt, kizárólag az (1), a (3), az (5), a (7), a (9) és a (10) jelű kritériumok kiértékelésére volt lehetőség, tehát a kísérleti csoport időbeli fejlődésének vizsgálatakor csupán ezeket tudtuk figyelembe venni. Ezzel szemben a kísérleti és a kontrollcsoport félév végi eredményeinek összehasonlításakor a 10 szempontot magában foglaló, kiterjesztett pontozási rendszert használtuk. Az egyes szempontokra kapott pontszámokat összegezve megkaptuk az adott készséget bemutató tanulók számát mind a kísérleti, mind a kontrollcsoporton belül. Ezt követően az egyes tanulóknak kiutalt készségpontok összesítésével kiszámítottuk az egyéni összpontszámokat is.

Ami a résztvevők **7. táblázatban** bemutatott időbeli fejlődését illeti, a kísérleti csoportban megduplázódott a konvergens kifejezést értő és helyesen használó hallgatók száma, de nőtt a helyes irányú becsléseket keresők aránya is. Mindez a tananyaghoz kapcsolódó alapfogalmak jobb megértését tükrözi a Kék Jeti játéknak köszönhetően. A kontrollcsoport eközben sokkal kisebb mértékű fejlődést mutatott, sőt, a konvergens kifejezést helyesen használó hallgatók száma valamelyest csökkent is a csoporton belül. Ez valószínűleg annak tudható be, hogy a második zárthelyi dolgozatban többen kihagyták az improprius integrálokhoz kapcsolódó példákat, és helyettük más feladatokra koncentráltak. Fontos megjegyezni, hogy a felmérésnek egyetlen olyan résztvevője sem akadt, aki az első zárthelyi dolgozatban helyesen használta volna a majoráns kritériumot. A kontrollcsoport tagjai e tekintetben a második zárthelyi dolgozatban sem tanúsítottak javulást, ami arra utal, hogy az összehasonlító kritériumok gyakorlására az önálló tanulás kevésbé bizonyult hatékony módszernek. A kísérleti csoporton belül ezzel szemben egyértelműen megfigyelhető volt a Kék Jeti jótékony hatása, hiszen a majoráns kritériumot a második zárthelyi dolgozatban már a csoport 5 tagja helyesen használta.

7. táblázat. A kísérleti és a kontrollcsoport fenti szempontok szerinti összesített pontszámai az első (ZH1), valamint a második (ZH2) zárthelyi dolgozaton, a számértékek készségpontokban értendők.

Csoport	Dolgozat	Vizsgált szempont sorszáma					
		(1)	(3)	(5)	(7)	(9)	(10)
kísérleti	ZH1	7	6	2	0	2	2
	ZH2	14	12	6	5	6	4
kontroll	ZH1	6	5	3	0	3	1
	ZH2	10	3	3	0	4	1

A **8. táblázat** a két vizsgált csoportra nézve a második zárthelyi dolgozat eredményeiben tapasztalt eltéréseket mutatja be. A kontrollcsoport esetében a fontos gyakorlati készségek, például a minorálás és majorálás elsajátításában szembetűnő hiányosságok voltak megfigyelhetők. Ezeken a területeken a kísérleti csoport messze felülmúlta a felmérés többi résztvevőjét. A kontrollcsoportban 5, míg a kísérleti csoportban 3 hallgató hagyta üresen a második zárthelyi dolgozat improprius integrálokra vonatkozó feladatát. A legjobb egyéni készségpontszám a kísérleti csoportban 12, a kontrollcsoportban pedig 8 volt a maximálisan elérhető 12-ből. A Kék Jeti kártyajáték tehát hatékonynak bizonyult az improprius integrálokhoz kapcsolódó készségek kiépítésében, a témakörhöz köthető fogalmak megértésének elősegítésében. A kísérleti csoportban tapasztalt számottevő javulással szemben a kontrollcsoport csupán korlátozott fejlődést mutatott.

8. táblázat. A második zárthelyi dolgozat eredményeinek kiértékelése a fenti szempontrendszer szerint, a számértékek kézségszempontokban értendők.

Csoport	Vizsgált szempont sorszáma									
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
kísérleti	14	11	12	9	6	4	5	2	6	4
kontroll	10	9	3	5	3	4	0	0	4	1

A felmérés eredményei rámutattak arra, hogy a játékalapú tanulás módszerei a felsőoktatásban is hatékonyan alkalmazhatók. Ez a Kék Jeti szerepének megerősítése mellett a JETI társasjáték jelentőségére is rávilágít. A kapott eredmények ugyanakkor a résztvevők korlátozott száma és az alkalmazott specifikus beavatkozás (önként jelentkezés) miatt nem általánosíthatók nagyobb populációra. Ez a probléma gyakori az oktatási kutatásokban. Ahhoz, hogy általánosabb következtetéseket lehessen levonni, szélesebb spektrumú, több résztvevővel végzett vizsgálatok szükségesek.

9. Összefoglalás és néhány szó a kutatás jelentőségéről

Kutatásom célja egy olyan tantermi keretek között használható didaktikai keretrendszer kiépítése volt, melynek segítségével a hallgatók matematikai ismereteiket kooperatív társasjáték útján szilárdíthatják meg. Az e célból létrejött JETI játék egy komplex felmérés eredményeire alapozva a numerikus sorok összehasonlító kritériumainak magabiztos alkalmazását, a konvergencia és a divergencia fogalmak helyes használatát hivatott elősegíteni. A téli tematikájú játékhoz egy játékszönyeg mellett különböző nehézségi szintű paklik tartoznak. A létrehozott játék minden tekintetben eredeti, saját ötlet alapján került kialakításra az arculat, a szabályrendszer, a játékszönyeg. A játékszabályok finomhangolását Python programozási nyelven megírt szimulációk támogatták. Az így kialakított játékstruktúra keretrendszerként alkalmazható, azaz bármely olyan témakör gyakorlásánál hatékony didaktikai eszköz lehet, melyben kulcsszerep jut a kisebb-nagyobb reláció szerinti rendezésnek. A kutatás jelentősége, relevanciája tehát messze túlmutat a Matematikai analízis I. és II. kurzusok GBL támogatásán. A tematikus kártyapaklik előállítását saját fejlesztésű kártyaszerkesztő alkalmazás biztosítja. Az ennek segítségével létrehozott Kék Jeti improprius integrálokkal foglalkozó kártyajáték kontrollcsoportos tesztfolyamata rámutatott arra, hogy a játékalapú tanulás a felsőoktatásban is hatékonyan hozzájárulhat a tanulók figyelmének megragadásához, egyes tananyagrészek elsajátításához, a magabiztos matematikai alapismeretek kialakításához.

A JETI matematikai didaktikai keretrendszer jelentősége többoldalú: megkülönböztethetjük közvetlen, lokális, valamint közvetett, globális előnyeit. A lokális szemléletet alapul véve a keretrendszerbe foglalt társasjátékok innovatív eszközöket, módszereket nyújtanak olyan kevésbé intuitív tananyagok megértéséhez és gyakorlásához, mint amilyen a numerikus sorok vagy az improprius integrálok témaköre. A játékalapú tanulás fokozza a kreativitást, fenntartja a hallgatók motivációját. A beszéd, a döntések rövid indoklásának megfogalmazása mind a JETI, mind a Kék Jeti játékban fontos szerephez jut, melynek köszönhetően a résztvevők elsajátíthatják a matematikai szaknyelv helyes használatát. A JETI társasjáték ezenfelül kooperatív jellegéből fakadóan előmozdítja a játékosok közötti együttműködést, támogatja a csoportmunkát, ezáltal a hallgatóknak nemcsak a tudományos, hanem a szociális életbe történő integrációját is elősegíti.

A JETI keretrendszert ugyanakkor újrafelhasználhatósága, kiterjeszthetősége révén távolabbról, globális nézőpontból is szemlélhetjük. A kialakított játékstruktúra számos különböző tananyaghoz adaptálható, nem csupán a felsőoktatás, de az általános és középiskolák szintjén is. A JETI társasjáték alkalmas lehet többek között a determinánsszámítás, a mértékegység-átváltások, a terület- és kerületszámítás, a számrendszerek közötti konverziók, valamint a törtekkel végzett műveletek gyakorlására, sőt, a matematikán kívül más természettudományos tantárgyak oktatásában is releváns lehet, például a Föld országainak népesség vagy terület szerinti besorolásában. A FormulaRise Card Deck Designer webalkalmazás elősegíti a kártyagenerálást a JETI-szerű játékokhoz, ugyanakkor teljesen új didaktikai társasjátékok kialakítását is támogatja. Amennyiben nem létezik olyan közismert társasjáték, amely megfelelő átalakításokkal alkalmas lehet egy adott tárgykör körbejárására, a kapcsolódó tanulási nehézségek kezelésére, a JETI tervezési folyamata precedenst szolgáltat a saját fejlesztésű didaktikai játékok kidolgozásához, megnyitva ezzel az utat a nem digitális játékalapú tanulás szélesebb körű elterjedése előtt. Ezenfelül a JETI keretrendszer további vizsgálatokhoz, felmérésekhez, elemzésekhez teremt alapot a játékalapú tanulás területén, hozzájárulva ezzel az oktatási módszerek folyamatos fejlesztéséhez. A keretrendszer a tanórai játékkal kapcsolatos adatgyűjtés és -elemzés eszközeként a jövőben a tanulási folyamat feltérképezésének, vizsgálatának kulcseszközzé válhat.

Köszönetnyilvánítás

A Kulturális és Innovációs Minisztérium ÚNKP-23-1 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.



Készült az RRF-2.3.1-21-2022-00013 azonosítószerű "Társadalmi Innovációs Nemzeti Laboratórium" elnevezésű projektben, Magyarország Helyreállítási és Ellenállóképességi Tervének keretében, az Európai Unió Helyreállítási és Ellenállóképességi Eszközének támogatásával.

A cikkben ismertetett kutatómunka az ME-SZKOLL-03-10-2023, ME-SZKOLL-03-11-2023 azonosítószerű „Tehetséggondozás és szakmai közösségépítés a Terplán Zénó Szakkollégiumban” elnevezésű projekt keretében valósult meg az Emberi Erőforrások Minisztériuma és az Emberi Erőforrás Támogatáskezelő támogatásával.

Hivatkozások

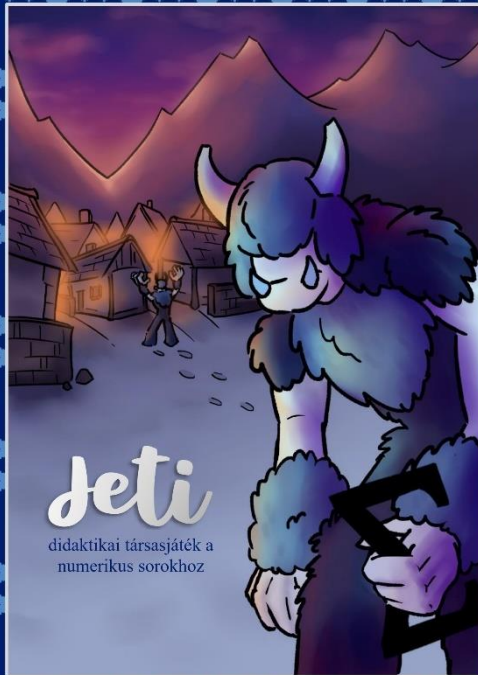
- [1] Balakrishna, C. (2023). The impact of in-classroom non-digital game-based learning activities on students transitioning to higher education. *Education Sciences*, 13(4), 328. <https://doi.org/10.3390/educsci13040328>
- [2] Becker, K. (2021). What's the difference between gamification, serious games, educational games, and game-based learning? *Academia Letters*, 209. <https://doi.org/10.20935/AL209>
- [3] Biza, I., Nardi, E., & González-Martín, A. (2009). Introducing the concept of infinite series: preliminary analyses of curriculum content and pedagogical practice. *Research in Mathematics Education*, 11(2), 185–186. <https://doi.org/10.1080/14794800903063372>
- [4] Burghardt, G. M. (2014). A brief glimpse at the long evolutionary history of play. *Animal Behavior and Cognition*, 1(2), 90–98. <https://doi.org/10.12966/abc.05.01.2014>
- [5] Crookall, D., & Thorngate, W. (2009). Acting, knowing, learning, simulating, gaming. *Simulation & Gaming*, 40(1), 8–26. <https://doi.org/10.1177/1046878108330364>
- [6] Dahlin, J. E., Fenner, R., & Cruickshank, H. (2015). Critical evaluation of simulations and games as tools for expanding student perspectives on sustainability. *International Conference on Engineering Education for Sustainable Development (EESD) (7th: 2015)*. <https://doi.org/10.14288/1.0064673>
- [7] Despeisse, M. (2018). Teaching sustainability leadership in manufacturing: A reflection on the educational benefits of the board game Factory Heroes. *Procedia CIRP*, 69, 621–626. <https://doi.org/10.1016/j.procir.2017.11.130>
- [8] Duchon, J. (2021). Tanulási stílus és játékos típus összevetése felnőtteknél, az oktatási folyamat játékosítása céljából. In C. Zágon & Á. Ficskovszky (Eds.), „Tehetség, szorgalom, hivatás”: *Tanulmánykötet* (pp. 223–235). <https://doi.org/10.37372/mrttvtpt.2021.1.15>
- [9] Dudás, M., Lengyelne Szilágyi, S., & Piller, I. (2019). Az Ékkővadászok elnevezésű matematikai készségfejlesztő kártyajátékok létrehozását támogató alkalmazás bemutatása. *Gradus*, 6(4), 17–27.
- [10] Erhel, S., & Jamet, E. (2013). Digital game-based learning: Impact of instructions and feedback on motivation and learning effectiveness. *Computers & Education*, 67, 156–167. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2013.02.019>
- [11] Fenyves, V., Bába, É., Szőke, R., Kocsis, I., Juhász, C., Máté, E., & Pusztai, G. (2017). Kísérlet a lemorzsolódás mértékének és okainak megragadására a Debreceni Egyetem Gazdaságtudományi Kar példáján. *Neveléstudomány*, 19, 5–14. <https://doi.org/10.21549/NTNY.19.2017.3.1>
- [12] Fernández Galeote, D., Legaki, N. Z., & Hamari, J. (2023). From traditional to game-based learning of climate change: A media comparison experiment. *Proc. ACM Hum. - Comput. Interact.*, 7, 503–525. <https://doi.org/10.1145/3611039>
- [13] González-Martín, A., Nardi, E., & Biza, I. (2011). Conceptually driven and visually rich tasks in texts and teaching practice: The case of infinite series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42, 565–589. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.562310>
- [14] Hashim, H. (2018). Application of technology in the digital era education. *International Journal of Research in Counseling and Education*, 2(1), 1–5. <https://doi.org/10.24036/002za0002>

- [15] Hernández de Menéndez, M., Escobar Díaz, C. A., & Morales-Menéndez, R. (2020). Educational experiences with Generation Z. *International Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM)*, 14(3), 847–859. <https://doi.org/10.1007/s12008-020-00674-9>
- [16] Huizinga, J. (1950). *Homo Ludens: A study of the play element in culture*. Roy.
- [17] Hung, C. M., Huang, I., & Hwang, G. J. (2014). Effects of digital game-based learning on students' self-efficacy, motivation, anxiety, and achievements in learning mathematics. *J. Comput. Educ.* 1, 151–166. <https://doi.org/10.1007/s40692-014-0008-8>
- [18] Isniah, S., Purba, H. H., & Debora, F. (2020). Plan do check action (PDCA) method: Literature review and research issues. *Jurnal Sistem dan Manajemen Industri*, 4, 72–81. <https://doi.org/10.30656/jsmi.v4i1.2186>
- [19] Jesztl, J., & Lencse M. (2018). *Társasjáték-pedagógia*. Demokratikus Ifjúságért Alapítvány.
- [20] Józsa, G. (2020). Lemorzsolódási kockázat és jelentkezés a felsőoktatásban. *Képzés és Gyakorlat*, 18(1-2). 55–66. <https://doi.org/10.17165/TP.2020.1-2.5>
- [21] Koskela, L., Tezel, A., & Patel, V. (2019). Theory of quality management: Its origins and history. In C. Pasquire & F. R. Hamzeh (Eds.), *Proc. 27th Annual Conference of the International Group for Lean Construction (IGLC)* (pp. 1381–1390). <https://doi.org/10.24928/2019/0259>
- [22] Körössi, J., Jagodics, B., Martos, T., & Szabó, É. (2021). Faktorok, magyarázatok a sikeres és sikertelen felsőoktatási tanulmányok hátterében: A pszichológiai tényezők szerepe a lemorzsolódásban. *Magyar Pszichológiai Szemle*, 76(1), 127–156. <https://doi.org/10.1556/0016.2021.00018>
- [23] Moore, K., Jones, C., & Frazier, R. S. (2017). Engineering education for Generation Z. *American Journal of Engineering Education (AJEE)*, 8(2), 111–126. <https://doi.org/10.19030/ajee.v8i2.10067>
- [24] Naderi, S., & Moafian, F. (2023). The victory of a non-digital game over a digital one in vocabulary learning. *Computers and Education Open*, 4, 100135. <https://doi.org/10.1016/j.caeo.2023.100135>
- [25] Nurnberger-Haag, J., Wernet, J. L., & Benjamin, J. I. (2023). Gameplay in perspective: Applications of a conceptual framework to analyze features of mathematics classroom games in consideration of students' experiences. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)*, 11(1), 267–303. <https://doi.org/10.46328/ijemst.2328>
- [26] Palencsár, E., & Szilágyi, S. (2023a). Az informatikai tématerületre felvett hallgatók numerikus sorokkal kapcsolatos tanulási nehézségeinek feltárására irányuló hárompilléres felmérés eredményeinek bemutatása. *Multidiszciplináris Tudományok*, 13(1), 63–80. <https://doi.org/10.35925/j.multi.2023.1.7>
- [27] Palencsár, E., & Szilágyi, S. (2023b). An evolutionary approach to developing supporting software for the design of card deck-based mathematical didactic games. *Multidisciplinary Sciences*, 13(3), 241–256. <https://doi.org/10.35925/j.multi.2023.3.24>
- [28] Ministerial Conference Paris. (2018. 05. 25). *Paris Communiqué*. https://www.ehea.info/media.ehea.info/file/2018_Paris/77/1/EHEAParis2018_Communique_final_952771.pdf [hozzáférés dátuma: 2023. 10. 29.]

- [29] Qian, M., & Clark, K. R. (2016). Game-based learning and 21st century skills: A review of recent research. *Computers in Human Behavior*, 63, 50–58. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2016.05.023>
- [30] Schell, J. (2008). Game Mechanics Must be in Balance. In J. Schell (Ed.), *The Art of Game Design* (pp. 171–205). <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-369496-6.00011-9>
- [31] Seemiller, C., & Grace, M. (2016). *Generation Z goes to college*. Jossey-Bass.
- [32] Szilágyi, S., & Körei, A. (2022). Using a math card game in several ways for teaching the concept of limit. In M. E. Auer, H. Hortsch, O. Michler & T. Köhler (Eds.), *Mobility for smart cities and regional development – Challenges for higher education. ICL 2021* (pp. 865–877). https://doi.org/10.1007/978-3-030-93904-5_85
- [33] Szilágyi, S., & Palencsár, E. (2023). Board games in mathematics education: Presentation of the PDCA-based graphic design process of the YETI didactic framework. *Gradus*, 10(2). <https://doi.org/10.47833/2023.2.CSC.002>
- [34] Tinto, V. (2012). Enhancing student success: Taking the classroom success seriously. *The International Journal of the First Year in Higher Education*, 3(1), 1–8. <https://doi.org/10.5204/intjfyhe.v3i1.119>
- [35] Vasilyeva, O. A. (2021). Influence of digitalization on cognitive and social orientations of Generation Z. In E. G. Popkova, V. N. Ostrovskaya & A. V. Bogoviz (Eds.), *Socio-economic Systems: Paradigms for the Future* (pp. 1279–1289). https://doi.org/10.1007/978-3-030-56433-9_134
- [36] Wang, M., & Zheng, X. (2021). Using game-based learning to support learning science: A study with middle school students. *Asia-Pacific Edu Res*, 30, 167–176. <https://doi.org/10.1007/s40299-020-00523-z>
- [37] Wiggins, B. E. (2016). An overview and study on the use of games, simulations, and gamification in higher education. *International Journal of Game-Based Learning (IJGBL)*, 6(1), 18–29. <https://doi.org/10.4018/IJGBL.2016010102>

Mellékletek

A JETI játékhoz tartozó szabálybrossúra oldalai:



MI TÖRTÉNIK?

Infinitia hegyi falucskában beköszöntött a tél. A közelben őshonos jetik a hegyekből levonulva, táplálék után kutatva előzőlötték a falut. Az inváziót csupán ti tudjátok visszaszorítani. A falubeli jetivadász dandár a gondatlan nyári hónapok alatt szétzilálódott, hiányzik belőle az egykori rend és szervezethez. A dandár két fő részre tagolódik, a divergens és a konvergens osztagra. A divergens és a konvergens vadászok egymás között nem vegyülnek, hiszen más a harsztusuk. A jetivadászok két fős alakulatokban vonulnak ki Infinitia körzeteibe. Ahhoz viszont, hogy kiküldhessetek két vadászt, előbb meg kell állapítanotok, kit neveztek ki közülük parancsnoknak, ki a rangidős vadász. Minden egyes jetivadász rangját ismeritek, ezek a sorkártyákon szerepelnek. A konvergens alakulatokban a konvergens majoráns, míg a divergens alakulatokban a divergens minoráns lesz az alakulat vezetője. Amennyiben egy körzetet négy vadász, azaz két alakulat véd, az ott tartózkodó jeti a túlerő láttán megfutamodik. Vigyázzatok, mert ha két jeti egy körzetbe kerül, akkor a területüket védve dulakodni kezdenek, és a harc hevében az egész falut lerombolják! Vezéreljétek ki minél több alakulatot a falu körzeteibe, hogy a jetiket visszavonulásra kényszerítsétek! Ha szerencsétek van, az is előfordulhat, hogy a betolakodó jetiket a hegyekből lezúduló lavina söpri el...



ELŐKÉSZÜLETEK

Helyeztetek el 5 jeti kártyát a játékszönyeg 5 különböző mezőjére! Mezőknek a játékszönyeg azon részeit nevezzük, melyek négy darab azonos színű kártyahelyből állnak. Ezek megfelelnek a falu körzeteinek. A fennmaradó jeti és a lavina kártyákat keverjétek a sorkártyák közé! Az így létrejött osztópaklit lefordítva helyezétek a játékszönyeg mellé!



OSZTÁS

Húzzatok a pakliból mindaddig, amíg az előttek lévő lapok száma el nem éri a tizenkettőt! A húzott lapokat egyesével fordítsátok fel! Amennyiben a lapon jeti szerepel, azt rögtön helyezétek fel a játékszönyeg egy tetszőleges mezőjére, majd húzzatok a helyére egy másik kártyát! Jeti olyan mezőre is helyezhető, ahova előzőleg egy sörpárt már leraktatok, olyanra viszont nem, amit már teljesen feltöltöttetek, vagy amin már egy másik jeti tartózkodik. A lavina kártyák is beleszámítanak a 12 lapba, ha ilyet húzzatok, tegyétek azt is magatok elé! Amennyiben csak olyan mezőre tudjátok lerakni az újonnan kihúzott jetit, ahol már van egy másik jeti kártya, Infinitia elveszett. Kivéve ez alól, ha a körön belül egy megfelelő színű lavina kártyát is húztok, és azzal lesöpítek a két jeti lapot tartalmazó mezőt.

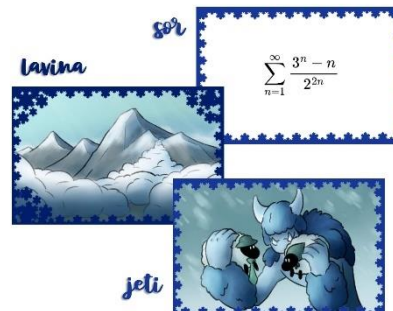
LAVINA

Amennyiben van előttek egy vagy több lavina kártya, azokat kötelesek vagytok az osztást követően azonnal felhasználni. A lavina egy, a kártya szegélyszínének megfelelő színű, általában kiválasztott mező teljes tartalmát letörli, az előzőleg odahelyezett sorokkal és jetikkel együtt. A lesöpört kártyákat tegyétek félre, ne keverjétek vissza az osztópakliba!

Tipp

A játék során próbáljátok különböző színű mezőkre helyezni a jeti kártyákat, így tudjátok a leghatékonyabban kihasználni a lavinákat!

A KÁRTYÁK



EGY KÖR MENETE

A kiosztott sorkártyák között keressetek olyan konvergens vagy divergens párokat, melyek között kisebb-nagyobb reláció van! A megtalált párokat helyezték a játékszőnyeg egyik, konvergencia tulajdonságuknak megfelelő színű mezőjére úgy, hogy a feltüntetett relációk teljesüljenek!

konvergens

divergens

bármelyik

A szürke mezőkre divergens és konvergens párokat is helyezhettek, de a divergens és a konvergens sorok vegyesen itt sem állíthatók párba egymással. Egymással megegyező összegű sorokat egyedül a szürke mezőkön rendezhettek párba.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 1}{3^n}$$

divergens pár

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 1}{4^n + 1} < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

konvergens pár

konvergens sor $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ *divergens sor* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$

konvergens és divergens sor nem állhat párban egymással

egyenlő összegű sorok pártként csak szürke mezőre kerülhetnek

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n}$$

Amennyiben egy mezőt teljesen feltöltöttetek, azaz két párt helyeztetek rá, az ott tartózkodó jeti kiűzése sikeres volt. Tegyétek felre a jeti kártyát, és folytassátok a játékot! Egy körben akár több jeti is kiűzhető.

Az osztást, egyben a következő kör megkezdését érdemes akkor hagyni, amikor már biztosak vagytok benne, hogy az előttek lévő sorkártyák között nem lesz több pár. Ellenkező esetben ugyanis fennáll a hirtelen vereség veszélye, amennyiben az osztás során túl sok új jeti bukkan fel.



A JÁTÉK VÉGE

Győztek, ha

- nincs a játékszőnyegen több jeti ÉS legalább 5 mezőt feltöltöttetek
- VAGY legalább 8 mezőt feltöltöttetek

Veszítettetek, ha

- egynél több jeti lap került ugyanarra a mezőre ÉS ez a helyzet a körön belül nem szüntethető meg lavina kártyával
- VAGY a maximális 12 sorkártya van előttek, de nem tudtok lapot lerakni ÉS az utánpótlás nyújtotta cserlehetőségeket már elhasználtátok

UTÁNPÓTLÁS

A játék során egyszer lehetőségetek nyílik az előttek lévő 12 lapból legfeljebb 3 kártyát eldobni, és azok helyett újat húzni az osztópakliból. Ha a csere során kihúzott lap jeti, az visszakeverhető a pakliba, helyette másik kártya húzható.

Extra

Ha igazi kihívást szeretnétek, a 8 mező feltöltése után játékszátok tovább az utolsó jeti elűzéséig!

NEHÉZSÉGI SZINTEK

A játék három különböző kártyapaklija lehetőséget biztosít arra, hogy az előzetes ismereteitekhez legjobban illeszkedő nehézségi szinten játsszatok.

Kezdő

Bevezető szint mindazoknak, akik még nem jártasak a numerikus sorok témakörében. A fő cél a megismerkedés a konvergencia és a divergencia fogalmával, az összehasonlító kritériumokkal, továbbá az összetett képletek egyszerűsítésének gyakorlása.

A kártyákon a divergens sorok körül világoskék, a konvergensek körül sötétkék szegély szerepel.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2 - n - 2}{6n^4 + 3n + 5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 1}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Középhaladó

Gyakorló szint számonkéréshez, vizsgához. A fő cél az intuício kiépítése, hogy ránézésre meg tudjátok tippelni, majorálni vagy minorálni érdemes egy adott sort, valamint hogy magabiztosan meg tudjátok állapítani a sorok között fennálló relációk irányát.

Haladó

Valódi kihívást jelentő szint mindazoknak, akik már magabiztos tudással rendelkeznek a numerikus sorok témakörében. A fő cél ezen tudás elmélyítése.

A sorkártyák szegélye ezeken a szinteken azonos középkek színű, a konvergenciavizsgálatot a játékosok végzik.

A SOROKRÓL

Konvergencia

Jelölje a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ numerikus sor n . részletösszegét $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, a részletösszegek sorozatát pedig (s_n) . A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha (s_n) sorozatnak létezik véges határértéke, ekkor ezt a határértéket a sor összegének nevezzük. Ellenkező esetben a sor divergens.

Összehasonlító kritériumok

Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitív tagú numerikus sorok tagjaira minden n esetén fennáll, hogy $a_n \leq b_n$, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Ekkor ha $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens. Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is divergens.

Tehát egy numerikus sor konvergens, ha van konvergens majoránsa, valamint divergens, ha van divergens minoránsa.

Mértani sorok

A $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ mértani sor ($q \in \mathbb{R}$) konvergens, ha $|q| < 1$, egyébként divergens.

Hiperharmonikus sorok

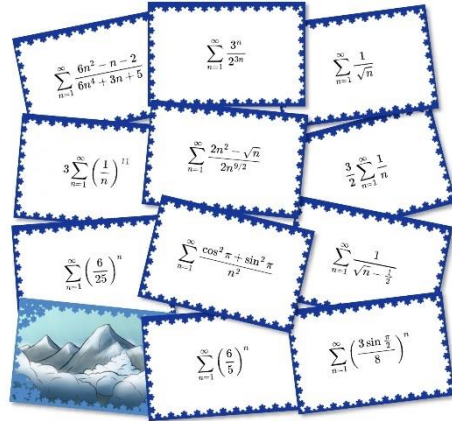
A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ hiperharmonikus sor ($\alpha \in \mathbb{R}$) konvergens, ha $\alpha > 1$, egyébként divergens.

Divergencia kritérium

Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ numerikus sor divergens.

PÉLDA

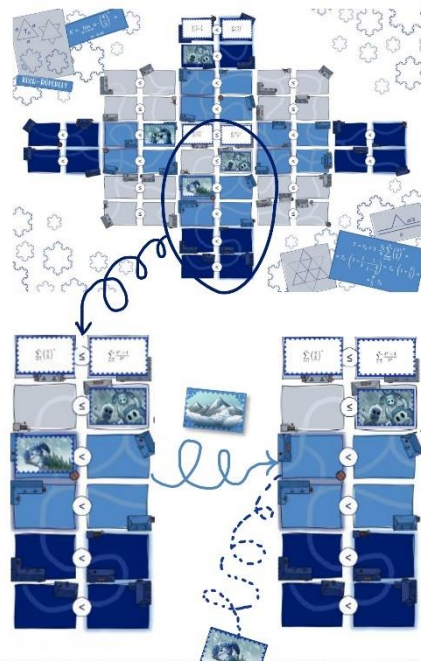
Legyen a játékosok előtt az alábbi 12 kártyalap:



Először a *lavina* kártyát kell felhasználnunk, így kiválasztunk egy tetszőleges világoskék (azaz divergens) mezőt, leszedjük a rajta lévő lapokat, és a lavina kártyával együtt félretesszük őket.



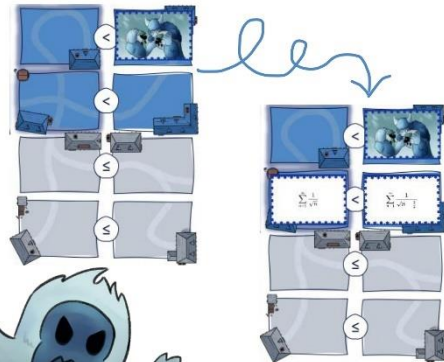
EGY LEHETSÉGES JÁTÉKÁLLÁS:



Ezt követően megkeressük a lerakható sorpárokat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-\frac{1}{2}}} \quad \text{mert } \sqrt{n} - \frac{1}{2} < \sqrt{n}$$

Ez egy *divergens* sorpár, mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ és $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergens hiperharmonikus sor, amely egyben a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-\frac{1}{2}}}$ sor divergens minoránsa. Mivel létezik divergens minoránsa, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-\frac{1}{2}}}$ sor is divergens. Ezt a párt tehát valamely világoskék vagy szürke mezőre tehetjük le.



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2 - n - 2}{6n^4 + 3n + 5} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2}{6n^4 + 3n + 5} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2}{6n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \pi + \sin^2 \pi}{n^2}$$

mert
 $6n^4 < 6n^4 + 3n + 5$
 és $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

Ez egy **konvergens** pár, mivel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \pi + \sin^2 \pi}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens hiperharmonikus sor ($\alpha = 2 > 1$), egyben a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2 - n - 2}{6n^4 + 3n + 5}$ sor konvergens majoránsa. A konvergens majoráns létezése miatt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2 - n - 2}{6n^4 + 3n + 5}$ sor is konvergens. Ezt a párt tehát sötétkék vagy szürke mezőre helyezhetjük.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3 \sin \frac{\pi}{2}}{8} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{8} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(2^3)^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{3n}}$$

mert $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

Ebben az esetben egymással **egyenlő** összegű mértani sorokról beszélünk, melyek konvergensnek, hiszen $|q| = \frac{3}{8} < 1$. Mivel a sorösszegek egyenlőek, ezt a sorpárt kizárólag szürke mezőre helyezhetjük.

JÁTÉKSZÖNYEG A KÖR ELEJÉN:

JÁTÉKSZÖNYEG A KÖR VÉGÉN:

Tipppek

1. Minden kör elején rendezzék három csoportba a kihúzott sorkártyákat: legyen egy konvergens, egy divergens és egy „még nem tudjuk” kategória! Így leegyszerűsödik a párok képzése, hiszen konvergens és divergens sor egymással biztosan nem rendezhető párba.
2. Egyszerűsítetek, ahol csak lehet! Ha kezdő játékosok vagytok, ragasszatok öntapadó cellákat az összetettebb képleteket tartalmazó kártyákra! Ezekre feljegyezhetitek a képletek egyszerűsített alakját, így nem kell mindent észben tartanotok.
3. Ha két egyszerű sort rendeznétek párba, előbb gondolkodjatok el azon, nem érdemes-e őket megőrizni, hogy később összetettebb sorokhoz szolgáljanak konvergens majoránsként vagy divergens minoránsként!

Az ME-SZKOLL-03-11-2023 azonosítószámú „Tehetség gondozás és szakmai közösségépítés a Terplán Zénó Szakkollégiumban” elnevezésű projekt keretében valósult meg az Emberi Erőforrások Minisztériuma és az Emberi Erőforrás Támogatáskezelő támogatásával.

