

**A tizedik évfolyamos tanulók
érvelési készségének fejlesztése a
statisztika és valószínűségszámítás
témakörben**

Készítette

Sebők Máté

Matematikatanár, testnevelőtanár ONA

Témavezető

Dr. Kovács Zoltán

egyetemi docens

Tartalomjegyzék

Bevezetés	4
1. A téma szakirodalmi áttekintése	7
1.1. Gila Hanna: Mathematical Proof, Argumentation, and Reasoning . . .	7
1.1.1. A szakirodalom témája	7
1.1.2. Az indoklás kitüntetett szerepe	7
1.1.3. A matematikai bizonyítás szerepe az oktatásban	7
1.1.4. Indoklás és bizonyítás	8
1.1.5. Érvelés és bizonyítás	8
1.1.6. Vizualizáció, számítástechnikai technológiák szerepe	8
1.2. Gila Hanna: Proof in mathematics education, 1980-2020: An Overview	9
1.2.1. A szakirodalom témája	9
1.2.2. 1950-1980: Az axiomatikus szerkezet hangsúlyozása, Új Matematika	9
1.2.3. 1980-2000: A bizonyítás értéke, ismeretelméleti és empirikus kérdések	9
1.2.4. 2000-2020: Kialakuló új megközelítések, ismeretelméleti és empirikus kérdések	11
1.3. Gabriel J. Stylianides: Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks, Mathematical Thinking and Learning	14
1.3.1. A szakirodalom témája	14
1.3.2. Hatókör	16
1.3.3. Elemzési keretrendszer	16
1.3.4. 1. dimenzió: Az érvelés és bizonyítás összetevői, alösszetevői . .	16
1.3.5. 2. dimenzió: A minta, a sejtés és a bizonyítás céljai	19
1.3.6. A kutatás eredményei	19
2. Módszer	22
2.1. A minta	22
2.2. A témakör kerettantervi háttere	23
2.2.1. Valószínűségszámítás	23
2.2.2. Leíró statisztika	24

2.3.	A vizsgálat menete	24
2.3.1.	Az előteszt	24
2.3.2.	A témakör elsajátításának időszaka	31
2.3.3.	Az utóteszt	42
2.3.4.	A késleltetett utóteszt	43
3.	A teszteredmények elemzése	44
3.1.	A tesztek értékelésének módja	44
3.2.	Leíró statisztikai jellemzés	44
3.3.	Az összes pontszám összehasonlítása az előtesztben, az utótesztben és a késleltetett utótesztben	45
3.4.	A megoldásra kapott pontszám összehasonlítása az előtesztben, az utótesztben és a késleltetett utótesztben	47
3.5.	Az indoklásra kapott pontszám összehasonlítása az előtesztben, az utótesztben és a késleltetett utótesztben	49
3.6.	Hatásméret	50
	Összegzés	51
	Irodalomjegyzék	53

Bevezetés

Az indoklás és érvelés fejlesztése és tanítása egy csaknem minden tantárgyban előjöhethető tananyag lehet, viszont a matematika területén ezeknek kiemelt fontosságú szerepe van. Pontosabban csak lenne, hiszen a szoros tantervi keretek miatt sokszor csak a szőnyeg alá söpörjük ezek oktatását. Valamelyest hibás az előző állításom, indokolnunk mindig kell, hiszen egy feladatmegoldás menetét is hívhatjuk indoklásnak a végső megoldást tekintve, de a ezek direkt megjelenése, mint állításokra való reagálás háttérbe szorul. Stylianides ír arról, hogy diákok emiatt a hozzáállás miatt komoly nehézségekkel küzdenek az indoklás és bizonyítás terén [17].

Az indoklás, érvelés és bizonyítás hármasa gyakran jelenik meg együttesen egyes szakirodalmakban, de mégis mi haszna van ezeknek? Gila Hanna úgy gondolta, hogy az indoklás és bizonyítás szolgálhat nekünk új módszerek bemutatására, új hipotézisek felállítására, valamint a különböző matematikai területek közötti kapcsolatok bemutatására [4]. Az indoklás és érvelés direkt megjelenése, mely állításokra, véleményekre kerül viszontválaszként egy gyakran elfelejtett része a matematikatanításnak. A Gila Hanna által leírt hasznos tényezők sokszor nem jelennek meg kellő mértékben, számos tanterv pedig elmulasztja ezen lehetőségek feltárását.

Ahhoz, hogy a diákok között konstruktív vita alakulhasson ki, hatékonyan reflektáljanak egymás állításaira, akár matematikai, akár mindennapi viszonylatban, az kell, hogy indoklási és érvelési feladatok jelenjenek meg óráinkon, ezzel érvelési szituációkat biztosítva a tanulóknak. Nem elvetendő tény, hogy nem csak a diákkorukra szóló hasznos tudást adunk át a tanulóknak az ilyen óraelemekkel, hanem egy életre szóló tanítást kapnak ezzel. Végső soron oktatásunk célja az kell legyen, hogy a tanulók az előzetes matematikai problémamegoldásaik segítségével hatékonyan tudjanak megoldani való életbeli problémákat is.

A 2020-as Nemzeti alaptanterv (NAT) [14] a 9-12. évfolyamon az indoklás és bizonyítás irányából célként és fejlesztési területként kitűzi, hogy a nevelési-oktatási szakasz végére a tanuló „sejtéseket fogalmaz meg és logikus lépésekkel igazolja azokat”. A 2020-as NAT-hoz illeszkedő Kerettanterv [11]. már nyíltabban, részletesebben kifejezi a téma fontosságát: „... a bizonyításokon keresztül mutatható meg a matematika logikus és következetes felépítése.” Emellett pedig az új fogalmak megalkotása, összefüggések és stratégiák felfedezése, továbbá a problémamegoldó gondolkodás használata és fej-

lesztése folyamatának eredményeként fogalmazza meg, hogy: „... a tanuló meg tudja állapítani adott állítás, tétel érvényességi és alkalmazási körét, megállapításai, állításai mellett logikusan tud érvelni.”

Munkám célja egy tizedik évfolyamos csoport érvelési készségeinek fejlesztése volt, méghozzá a statisztika és valószínűségszámítás területén. Ehhez csaknem minden témakörbeli óránkon egy 10-15 perces blokkban az előbb leírt fejlesztéssel foglalkoztam a tanulókkal. A feladatok különböző stílusúak, mivel van, ahol egyszerű állítások logikai értékéről kell döntenüik, illetve megindokolniuk döntésüket, továbbá van, ahol mások indoklásának a helyességéről kellett vélekedniük, végül pedig a feladatmegoldásaik indoklási részét is többször tüzetesen átvizsgáltuk. Ezen órai feladatok során kiemelt szerepet kapott a társas tanulás folyamata is, hiszen – mint korábban írtam is – fontosnak tartom azt, hogy egymásra reflektálva tudjanak ezek a tanulók konstruktívan együtt dolgozni.

Rényi Alfréd már 1970-ben megírta, hogy a hétköznapi életben tulajdonképpen állandóan szembekerülünk a véletlennel, a valószínűségszámítás pedig arra is megtanít bennünket, hogy miként lehet az egyes döntésekkel járó kockázatokat figyelembe venni egy ésszerű magatartás kialakításánál [16]. A valószínűségszámítás tehát dönteni is megtanít minket, a döntéseinket pedig rendre valamilyen erős érv, vagy indok befolyásolja. Azzal, hogy a diákok megtanulnak dönteni, azzal megtanulnak hatásosabban indokolni is. Rényi szerint a valószínűségszámítás tanítása megtanítja a tanulókat arra, hogy a világos és logikus gondolkodás akkor is hasznos, ha bizonytalansággal van dolguk.

A NAT (2020) több témakörben is részletezi az érvelési készségek fejlesztését [14], mint elvárás. Az általam vizsgált témakörben ez nincs kiemelve, ellenben a számos adatgyűjtéssel, rendszerezéssel, adatábrázolással és valószínűségi számítással kapcsolatos gondolattal, melyek ésszerű fejlesztésébe logikusan bekapcsolhatóak az érvelési készséget célzottan fejlesztő feladatok.

Az ilyen irányú órai fejlesztést nehéz felmérni csupán az órán tapasztaltakkal – bár a legtöbb órai feladathoz konkrét órai példákat is bemutatok –, így kvantitatív elemzéseket is végeztem. Az órai fejlesztéseket megelőzően – a témakör tanításának kezdete előtt – egy előtesztet végeztettem el a tanulóimmal, melynek kilenc feladata már a korábbi ismereteikkel is megoldhatónak mondható volt, ezzel felmérve a fejlesztés előtti készségeiket. A témakör végét jelentő témazáró dolgozatot követően ugyanezt a tesztet egy utóteszt formájában is elvégeztettem velük, hogy felmérjem mennyit fejlődött az érvelési készségük a témakör tanulása során. Mindezek után négy és fél hónappal az utótesztet követően – a következő tanévben – ugyanezt a tesztet megírtam a tanulókkal egy késleltetett utóteszt formájában is, felmérve azt, hogy mennyit felejtettek az előteszthez, illetve az utóteszthez képest.

A fejlesztés a vizsgálat alapján sikeres volt, a tanulók érvelési készségei közepes hatásmérettel fejlődtek az előteszt és utóteszt közötti időszakban, ráadásul a megszerzett tudás keveset kopott a későbbi késleltetett utóteszt idejére. Ebben a munkámban a vizsgálat és fejlesztés módján túl annak sikerességéről és hatásosságáról fogok írni hosszabban, megmutatva, hogy miként tudtam elérni a tanulók témakörön belüli fejlődését.

1. fejezet

A téma szakirodalmi áttekintése

1.1. Gila Hanna: Mathematical Proof, Argumentation, and Reasoning

1.1.1. A szakirodalom témája

Gila Hanna ezen írásában az érvelés, az indoklás és a bizonyítás közötti különbségeket és kapcsolatokat járja körbe. Úgy gondolja, hogy ezeknek a területeknek nincsenek jól meghatározott határai. Gondolatokat fogalmaz meg a három fogalom matematikusok és pedagógusok általi értelmezéséről, illetve a matematikaoktatásra irányuló néhány következményeit is elemzi.

1.1.2. Az indoklás kitüntetett szerepe

Az indoklás egy viszonylag tágabb értelmű fogalom, sőt, tulajdonképpen a logika is ennek a strukturáltabb formájának értelmezhető. Az indoklás különösen érdekes számkra, hiszen különböző formái – a tanításban való hasznosságuk miatt – kiemelt helyet kapnak a matematika tantervekben.

1.1.3. A matematikai bizonyítás szerepe az oktatásban

Számos matematika tanterv célkitűzése, hogy a diákokat megismertesse a bizonyítások szerepével és megtanítsa őket bizonyításokat konstruálni. Fontos szempont, hogy – mint ahogy a matematikusok számára is – a bizonyítás több, mint logikai lépések sorozata, hisz szerepet játszik például benne az esztétika is.

Komoly kérdés, hogy milyen haszna van a bizonyításoknak a matematikaórán? Szolgálhat új módszerek bemutatására, új hipotézisek felállítására, valamint a különböző matematika területek közötti kapcsolatok bemutatására. Legalábbis ennek így kellene lennie, azonban sokszor elmulasztják ezeknek a lehetőségeknek a feltárását.

Egy állítás logikai levezetése axiómákból, a következtetések explicit láncolatán keresztül, a dedukció elfogadott szabályain keresztül. Az ilyen formálisnak nevezhető bizonyításokban a formális nyelv is megjelenik, formális szimbólumokkal karöltve, komoly következtetési szabályokkal vezetve.

A matematika tanterveknek be kell mutatniuk a matematikai érvelés formális és informális módszereit. Ehhez az szükséges, hogy a matematikatanárok maguk is ismerjék ezeket a módszereket. Amennyiben ez megvalósul, a diákok megtanulhatják, hogyan kövessenek és értékeljenek egy matematikai érvet, hogyan teszteljenek egy hipotézist, valamint hogyan dolgozzák ki saját matematikai érveléseiket vagy bizonyításaikat.

1.1.4. Indoklás és bizonyítás

A gyakorlatban legtöbbször nem teszünk különbséget indoklás és bizonyítás között. A mindennapi indoklás különbözik a matematikai indoklástól. A mindennapokban egy állítást elfogadunk bármilyen bizonyítás nélkül is sokszor, ha azt intuitívan hihetőnek tartjuk. Máshol – mint a matematikában – ez kevés.

Minden matematikatanár célja kell, hogy legyen, hogy megtanítsa tanulóinak az indoklás szabályait, meg kell velük ismertetnie az indoklás mintáit és a megfelelő kifejezéseket (feltételezés, sejtés, példa, cáfolat, tétel és axióma).

1.1.5. Érvelés és bizonyítás

A matematikaoktatás kutatói az érvelés kifejezést gyakran gyűjtő fogalomként használják, amely magában foglal többfajta logikai folyamatot, mint például a heurisztikus, plauzibilis, induktív, valószínűségi, vizuális, empirikus és egyéb módszereket.

Maga az érvelés olyan írásbeli vagy szóbeli kommunikációra utal, melynek célja, hogy másokat meggyőzzön egy állítás helyességéről. Az érvelésnek gyakran szociális vonatkozása is van, hiszen az érvek gyakran vitákban születnek meg, például a példa ellenpélda, bizonyítás és cáfolat alkalmazása útján [12].

Sok kutató véleménye az, hogy az érvelés rugalmassága és a felfedezésre való nyitottsága előnyös előkészítést jelenthet a matematikai bizonyítások tanításához.

1.1.6. Vizualizáció, számítástechnikai technológiák szerepe

A vizualizáció, a grafikus reprezentációval történő érvelés egy sokat vitatott érvelési technika a bizonyítás tanításában betöltött értékét illetően. Heves viták vannak a matematikustársadalomban a vizualizációk bizonyításokhoz való hozzájárulásáról. A jelenlegi számítástechnikai technológiák rendkívül nagy erőforrást használnak fel a matematikusok kísérleteihez, felfedezéseihez, vizuális megjelenítéséhez, amelyek ráadásul

csökkenthetik a matematikai hibák előfordulásának a számát is. Ha már a matematikusok is dolgoznak ezekkel, miért ne használnánk ki ezt a potenciált a matematikaórán. Több jelentős kutatás is alátámasztotta, hogy a dinamikus geometriai szoftverek jól megfontolt használata nagy mértékben segítheti a bizonyítások megértését iskolai szinten.

1.2. Gila Hanna: Proof in mathematics education, 1980-2020: An Overview

1.2.1. A szakirodalom témája

A szerző a bizonyítás matematikaoktatásban betöltött szerepét vizsgálja, illetve annak fejlődését, 1980 és 2020 között. Kiemelt hangsúlyt tesz az elméleti és empirikus kutatások hozzájárulására a matematikai bizonyítás tanításához. Vizsgál olyan kutatásokat is, melyek igyekeznek rávilágítani a különböző lehetőségekre és korlátokra, melyekkel egy diák találkozhat, amikor bizonyítással foglalkozik.

1.2.2. 1950-1980: Az axiomatikus szerkezet hangsúlyozása, Új Matematika

A hidegháború kezdeti évei új lendületet adtak a matematikai tananyag újragondolásához Észak-Amerikában. A tantervi reformmal több bizottság is foglalkozott, amelynek eredménye a „New Math” néven ismertté vált mozgalom.

A „New Math” kritikájaként megfogalmazták, hogy a „New Math” túl absztrakt, nehezen tanítható, a tisztán formális megközelítés pedig nemhogy hozzáadott volna a megértéshez, de még el is vett belőle. A szülők irányából is negatív visszhang érkezett, mivel túlságosan különbözött az általuk tanult matematikától.

1.2.3. 1980-2000: A bizonyítás értéke, ismeretelméleti és empirikus kérdések

A tanárközpontú, a tanár információátadására fókuszáló matematikatanítás gyengeségei nyomán, elkezdtek megjelenni a konstruktivista elméletek, melyek a tanulók aktív részvételére összpontosítanak a tudáskonstrukcióban. Rájöttek, hogy ugyan az információ passzívan befogadható, de a megértéshez a tanuló aktív részvételére van szükség. A pszichológiai megközelítés megjelent a matematikatanításban.

Ugyan a matematikusok és a matematikát oktatók ragaszkodtak ahhoz, hogy a bizonyítás olyan állítások véges sorozata, amelyek mindegyike axióma, vagy a logikai következtetés szabályai szerint az előző állításokból következik, mégis elismerték, hogy

a gyakorlatban egy bizonyításnak nem kell mindig ennyire formálisnak lennie. Lehet a bizonyítás a természetes nyelv és a képletek keveréke is, attól még érvényesek maradnak. Az hogy már a matematikusok is informális bizonyítást használnak – a világosságot és a megértést teszik a középpontba –, hatást gyakorolt a matematika tantervekre.

Az amerikai tanterv több ajánlást is megfogalmazott az iskolai matematikával kapcsolatosan, például: „a matematikai alapkészségeket úgy kell meghatározni, hogy azok a számítási készségeknél többet foglaljanak magukban”. Két részajánlás ebben kitér a kommunikációs készségek elsajátítására, a matematika keretén belül is, továbbá arra, hogy a logikus érvelés, információfeldolgozás, döntéshozatal folyamatait a matematika alkalmazásának irányából alapvetőnek kell elkönyvelni.

Pólya és Lakatos szerepe

Pólya György és Lakatos Imre meghatározó a matematikatanításban, ezen belül az érvelés tanításában. Pólya kiemelt figyelmet fordított arra, hogy milyen fontos a bizonyítás mellett a találgatás is. A Pólya-féle problémamegoldási négy lépés kitűnően alkalmazható bizonyításokra is, kezdve a probléma (állítás) megértésével, a terv kidolgozásával (sejtések megfogalmazása, bizonyítási terv készítése) folytatva, a terv (a konkrét bizonyítás) végrehajtásán át, a (bizonyításra való) visszatekintésig, ami segíthet nekünk a későbbi problémáink megoldásában (állításaink bizonyításában). Lakatos kvázi-empirikus tudománynak nevezte a matematikát a Bizonyítások és cáfolatok című könyvében [12], mellyel arra célzott, hogy a módszerek hasonlóak az empirikus tudományokéhoz, de önmaga mégsem az.

A heurisztikák, a magyarázat, az indoklás és a bizonyítás tantervi hangsúlyának megújulásával rengeteg kutatás született a bizonyítás tanításával, tanulásával kapcsolatban, illetve több nemzetközi kongresszus középpontba helyezte a bizonyítás tantervben betöltött szerepét. Több eltérő megközelítés is napvilágot látott, azonban két dologban egyet értett mindenki: ha egy matematikai tanterv célja – márpedig elvárható, hogy célja legyen – hogy tükrözze magát a matematikát, s így a bizonyítás fontos szerepét, akkor a bizonyításnak a tanterv részének kell lennie, továbbá hogy a bizonyítás legkomolyabb haszna az osztályteremben a megértés segítésében, előremozdításában jelentkezik.

Ismeretelméleti perspektívák

Balacheff szerint [1] a bizonyítás tanításának legfőbb célja hogy a tanulók a pragmatikus érveléstől eljussanak a matematikai bizonyításig. Vizsgálta a társas interakciók szerepét is és megállapította, hogy a társas interakció bizonyos körülmények között korlátozó tényező lehet, hiszen ha nagyon vágnak a sikerre a tanulók, nem képesek összehangolni az egymásétól eltérő nézőpontjaikat.

Harel és Sowder egy tanulmányában kiemelte [6], hogy mennyire fontos megértetni a diákokkal a bizonyítás és a meggyőzés közötti különbséget. Emellett osztályozták az érveléstípusokat, melyeket gyakran bizonyításnak tekint a közvélemény:

1. Külső meggyőző séma, amely egy tanár tekintélyére vagy az érvelés felszínes formájára támaszkodik.
2. Empirikus bizonyítási séma, amely konkrét példákon, induktív érvelésen vagy közvetlen méréseken alapul.
3. Deduktív bizonyítási séma, ahol egy feltevés igazságát logikai levezetéssel határozzák meg.

Elmondható, hogy ezek a sémák nem egymást kizáróak, hiszen egy ember akár többet is „birtokolhat” belőlük. Egy későbbi munkájában Harel nem kívánatos gondolkodásmódnak nevezte az első kategóriát, aminek mégis van pedagógiai értéke, hiszen hatékony segítséget nyújthatnak az ötletek generálásában, felismerésekben.

Hanna szerint a bizonyítás tanításában mindenképpen ésszerű a megértés és a magyarázat tényezőit hangsúlyozni.

Fischbein munkái [3] rendkívüli mértékben hozzájárultak a mindennapi életben való érvelés és a magasabb fokú szigorúságot igénylő matematikai érvelés közötti kapcsolat konceptualizálásához. Az intuitív struktúrák az aktív megértés és a produktív gondolkodás lényeges összetevői, hiszen ezek képezhetik a tudás egyetlen – vagy fő – formáit, ha a megfelelő analitikus struktúrák hiányoznak. Lényeges felismerni, hogy a tudás intuitív és analitikus formái mélyen összefüggnek egymással.

1.2.4. 2000-2020: Kialakuló új megközelítések, ismeretelméleti és empirikus kérdések

A pszichológiai területén uralkodó konstruktivista eszméket, melyek a tudás felépítését az egyénnek tulajdonították, lassanként leváltották a szociokulturális tényezőket közép-pontba állító irányokat a kognitív fejlődés folyamatában. Ennek létrejöttében Vygotsky – jóval az időszak előtti – munkássága alapkö volt, mely a kulturális tevékenységnek tulajdonította a legnagyobb jelentőséget. Az 1970-es években már ismertek voltak Vygotsky írásai, azonban az 1990-es évek végén kezdték csak átvenni azokat maguk a matematikaoktatók.

Vygotsky szociokulturális iránya nem váltotta fel teljesen a konstruktivista világot, sőt mire már mindkettő uralkodó volt, egymást kiegészítő irányzatoknak tekintették őket. Élesen kritikákat fogalmaztak meg Vygotsky irányzata ellen, sokan viszont pont kiálltak ezen kritikákkal szemben, még a 2016-2017-es években is. Vygotsky munkái a mai napig relevánsak, gondoljunk csak bele abba, hogy mennyien vizsgálják részletesen

a kis csoportokban együtt dolgozó tanulók társas interakciójának hatásait az egyéni kognitív fejlődésére.

Jaffe és Quinn a korábbi években arról érvelt, hogy a matematikai folyóiratokban, munkákban csak szigorúan bizonyított eredményeket szabad publikálni, az érvelések minden részletét magába foglalva. Szabad szerintük kísérletezni, spekulálni, de egy bizonyítás nem lehet vázlagszerű. Erre válaszul egy tizenöt éves matematikusból álló brigád válaszolt Jaffe és Quinn munkájára, ahol valakik egyetértésüket fejezték ki, valakik pedig ellenezték ezeket a nézeteket.

Thurston szerint akkor sikeres egy matematikus, ha lehetővé teszi az emberek számára azt, hogy a matematikát világosabban láthassák és hatékonyabban gondolkodhassanak arról. Ezt az elvet alátámasztja a megannyi matematikatanár, akik a matematikai megértésre helyezték a hangsúlyt éppúgy, mint Thurston.

A megértésre való összpontosítást tovább erősíti a nagyobb teljesítményű számítógépek elérhetősége, illetve a grafikus szoftverek erősödése. Új tananyagok jelentek meg a tanároknak, illetve a matematika közvéleménye is új megközelítéseket javasolt ebben. Kiváltképp a dinamikus geometriai szoftverek jelenlétük volt meghatározó, melyek mélyreható hatást gyakoroltak a tanulók készségeinek fejlődésére, nemcsak ábrák felfedezésében, hanem modellezésben, hipotézisek felállításában és a bizonyításkonstrukcióban is. A NCTM az ezredfordulón alapelveként határozta meg a technológia megfelelő használatát a magas színvonalú matematikaoktatás berkein belül, hiszen az fokozza a diákok tanulását.

Ismeretelméleti perspektívák

Az új évszázadban egyre nagyobb és nagyobb hangsúlyt kapott a bizonyítás használata a matematikaórákon, ám több értelmezés is jelen volt mint a tanításának céljaiban, logikájában és alapjában is. A három fő értelmezés a matematikai bizonyítás oktatási hasznosságát az elméleti fizika, a kognitív fejlődés és a formális logika határozott elveihez való ragaszkodás szempontjából mutatja be.

Az elméleti fizika perspektíváját Jahnke munkájában vizsgálhatjuk meg. Azt javasolta, hogy a matematikai bizonyítás tanításának új módját vezessék be a tantermekben a régi módszerek elemeinek megőrzésével. A megközelítés arra kell ösztönözze a diákokat, hogy fedezzék fel, hogy a matematikai tételek gyakran hogyan tükröződnek a fizikai törvényekben és a tárgyak viselkedésében. Tanácsai között szerepel a tanároknak, hogy bátorítsák a diákokat, hogy empirikus vizsgálatokon keresztül találjanak ki és teszteljenek hipotéziseket. Egy későbbi tesztje során arra a következtetésre jutott, hogy a hipotézis fogalmának központi ismeretelméleti gondolatként való bevezetése segített a tanulóknak abban, hogy milyen szerepe van a feltételezéseknek az elméletalkotásban.

Ehhez képest Tall a bizonyítás kognitív aspektusaira teszi a hangsúlyt. Úgy gondolja, hogy figyelembe kell venni a bizonyítás fogalmának megalkotásához a különböző

matematikai kontextusait, a különböző közösségek kulturális nézeteit, a különböző emberek kognitív és affektív fejlődését, sőt az emberi agy szerkezetét és működését is. Az egyének különbségei miatt lehetetlen, a matematikai bizonyítás egyetlen, mindenkinek megfelelő fogalmát meghatározni. A vizuális ingerek mentális feldolgozását – a megtestesülést – és a szimbolizmus növekedését úgy értelmezték, mint a kifinomultság növekedését a gyakorlati szintről, az elméleti szintre, ahol a tulajdonságok már definícióként jelennek meg.

Durrand-Guerrier és társai eltérve az előző két iránytól a formális logika szerepét hangsúlyozta a matematikai érvelésben és bizonyításban. A fő szempont ezen belül is az állítások logikai szervezésére helyeződött, amely mind a bizonyítás felépítésének, mind a bizonyítás megértésének előfeltétele. Szerintük nem várható el, hogy a következtetési fogalmak és a szabályok a tanulók általános tudásának részét képezzék. Négy következtetési szabály elengedhetetlen mégis a bizonyítás tanulásához, ezek pedig: az univerzális instantizálás, az egzisztenciális instantizálás, az egzisztenciális általánosítás továbbá az univerzális általánosítás. Empirikus kutatásaik kimutatták, hogy az egyetemi hallgatóknak nehézségei adódnak a matematikai állítások igazságának vagy hamisságának megállapításához szükséges érveléssel. Úgy gondolják, hogy ez a tény erősíti az álláspontjukat, miszerint úgy kell tekinteni magára a logikára, mint ami a matematikai diskurzus szintaktikai és szemantikai szerveződésével egyaránt foglalkozik.

Empirikus kutatás érvelésről és bizonyításról, reprezentatív tanulmányok

A dinamikus geometriai szoftverek elérhetővé váltak, majd injektálva lettek az oktatásba, ez pedig rengeteg szakcikket idézett elő ebben a témában, melyek ezek tanításra gyakorolt hatását vizsgálják. Több ország eredményeit tekintve pozitív visszacsatolást kapott ezek bevezetése a tantervbe, jól fogadták azt mind a tanárok, mind a diákok, középiskolás és általános iskolás szinten egyaránt. Ezek az új grafikus eszközök hihetetlenül erős és meggyőző bizonyítékot szolgáltatnak a tanulóknak arra, hogy egyes állítások tényleg igazak. A dinamikus geometriai szoftverek legfőbb korlátja az volt, hogy nem tudta megmutatni a diákoknak a tételek helyességének mértékét. Ezek alapján vajon segíti a diákok érvelési képességeinek fejlődését ez a világ vagy sem? Kutatási cikkek sora jelent meg a technológia előnyeit és hátrányait felvonultatva ezek után.

Hadas és munkatársai egy nyolcadikos osztályban végeztek kísérletet, ahol arra követteztettek, hogy a jól megfontolt, előre eltervezett, digitális geometriai szoftverekkel végzett tevékenységek ösztönzik a tanulókat a deduktív magyarázatok keresésére és adására. Kidolgoztak több innovatív tevékenységet, melyek a meglepetés és a bizonytalanság okozásáért feleltek. A célja ezeknek, hogy legyőzzék a tanulók empirikus bizonyítékok felé való tendálását, ezzel pedig megteremtsék az igényt a deduktív magyarázatok iránt. Később rengeteg új kutatás jelent meg ezt a témát boncolgatva.

A 2000-es évek elején megjelentek még fejlettebb dinamikus geometriai szoftverek, így a GeoGebra is, ami egy algebrai képességekkel rendelkező interaktív geometria-program. Mióta mindenki – legyen az tanuló vagy tanár – részére elérhetővé vált a technológia, még több ország iktatta be a matematikaoktatásába a dinamikus geometriai szoftvereket.

Ezóta a bizonyítással kapcsolatos empirikus kutatások száma már az égbe tört az egyetemi szintű oktatásban. Selden és Selden a bizonyítások felépítését két aspektusból látja, a problémamegoldás megközelítése – ez informális, de pauszibilis érvelésre támaszkodik –, illetve a formális retorikai megközelítés, ami múlik a tétel állításának, a kapcsolódó definícióknak és a korábbi eredményeknek a logikai szerkezeti kibontásától és felhasználásától függ. Ezen kettősséget figyelembe véve egy hatékony oktatási beavatkozást sikerült kidolgozniuk, ami segíti a tanulók bizonyítás megalkotásához szükséges felismeréseinek generálását.

A Rutgers Egyetemen kutatócsoport is alakult „Bizonyításmegértés” néven, ami az évek alatt igen magas számú tanulmányt publikált a témában. Innen néhány kutató olyan keretben vizsgálta, amely a bizonyítás kétféle megközelítésének: a túlnyomórészt szintaktikai és a túlnyomóan szemantikai stílusnak az elemzéséből áll. Weber és Mejia-Ramos szerint az utóbbi keretrendszer túl durva, finomabbra van szükség a diákok bizonyításainak elemzésére. Javaslatuk szerint hozzá kell adni egy Következtetések nevű dimenziót, amiben az előző két dimenzió előfordulásának, hozzájárulásának mértékét határoznák meg a kapott következtetés létrejöttében.

1.3. Gabriel J. Stylianides: Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks, Mathematical Thinking and Learning

1.3.1. A szakirodalom témája

A mű az indoklás és bizonyítás témakörét helyezi középpontba. Tudatosítja, hogy széleskörű egyetértés van ezeknek a fontosságáról, mégis a diákok egy jelentős részének komoly nehézséget jelent ezen tevékenység. Célkeresztbe állíthatóak a matematika tankönyvek, amik kiemelt szereppel rendelkeznek a tanulók lehetőségei felett. Sok kutatás arról ír, hogy a tanárok döntéseit a feladatok megválasztásáról a tankönyvek befolyásolják leginkább. Hogyan segítik a tankönyvek az indoklás és bizonyítás fejlődését a diákokban? Erre próbál választ kapni a cikk egy analitikus/módszertani megközelítéssel. A megközelítés hasznosságát egy Amerikai Egyesült Államokban használt tankönyvsorozat vizsgálatával szemlélteti is a szerző. Az eredményeket a tankönyvtervezés indoklás és bizonyítás területén előjövő kérdések megvitatásánál fogja kihasználni.

Pólya és Lakatos is leírta a korábbiakban, hogy a bizonyítás magába foglalja a matematikai összefüggések feltárását a jelentős tények azonosítása és értelmes mintákba rendezése érdekében. Fontos a minták felhasználása a feltételezések megalkotásához, majd ezeket tesztelni kell új bizonyítékokkal szemben, továbbá felül is kell vizsgálni az új feltételezések megfogalmazása érdekében. Nem hagyható ki a felsorolásból a feltételezések életképességét bizonyító formális érvek szolgáltatása sem.

A cikkben az indoklás-és-bizonyítás (IB) kifejezést Stylianides annak az átfogó tevékenységnek a leírására használja, ami magába foglalja a minták azonosítását, a feltételezések felállítását, továbbá a nem bizonyító érvek és bizonyítások szolgáltatását. Az IB-ben szereplő kötőjelek is azt akarják sugallni, hogy az – amúgy ennél jóval tágabb értelmezésű – indoklás bizonyításhoz közelebbi aspektusait fogja vizsgálni az író.

Számos kutató és tantervi keretrendszer a különböző országokban – legfőképp az Amerikai Egyesült Államokban középpontba helyeztetik az IB-t alkotó tevékenységeket. Erre való tekintettel az NCTM által kiadott, az iskolai matematika alapelveiről és standardjairól kiadott tantervi keretrendszer egészen kiemelkedő pozícióba helyezte az IB-tevékenységeket. Eszerint minden tanítási programnak az óvodától a 12. osztályig lehetővé kell tennie mindenkinek, hogy:

- felismerjék az indoklást és a bizonyítást, mint a matematika alapvető aspektusait;
- matematikai feltevéseket tegyenek és vizsgáljanak meg;
- matematikai érveket és bizonyításokat dolgozzanak ki és értékeljenek;
- válasszák ki és használják a különböző bizonyítási típusokat és módszereket.

A bizonyításnak szellemi szokássá avanzsálása a cél, ám nem csak a geometriában, hanem a többi különböző tartalmi területen is egyaránt. Sok országban ezzel problematikusan szemben áll a keretrendszer, hiszen ésszerűtlen elvárást támaszt a tanulók IB-ben való jártasságának fejlesztéséhez, miközben maga a tevékenység nem is kap rendszerezett figyelmet a matematikaoktatásban.

A tankönyvek meghatározó szerepéről több neves kutatást említ, de mégis arról tanakodik, hogy a mai napig nem rendelkezünk a kellő információval és ismerettel arról, hogy mégis hogyan támogatják ezek a tankönyvek az IB-t. A szerző elemzési keretrendszer mutat be egy módszertani megközelítéssel körítve, alapul véve a legnépszerűbb reformalapú középiskolai tankönyvsorozatot az Amerikai Egyesült Államokban (Connected Mathematics Project - CMP). A szerző egy korábbi kutatását egészíti ki ezzel, amiben arról vizsgáldott, hogy a CMP tanári kiadásai milyen útmutatást nyújtanak a tanároknak a könyvben tervezett bizonyítási lehetőségek tantermi megvalósításához.

1.3.2. Hatókör

Az eddigi IB kutatások vagy az IB tanítását és tanulását, vagy a diákok és tanárok IB-vel kapcsolatos elképzeléseit veszik terítékre. Ugyan ezek hasznos területek, azonban nem tudjuk, hogy mi áll egyáltalán rendelkezésükre a matematika tankönyvekben. Fontosnak találja a szerző, hogy ne egy csak a CMP számára vagy kizárólag amerikai kontextusban elkészített elemzéseként olvassák művét, hanem sokkal inkább egy példaként és a szélesebb körű felhasználási lehetőségek bemutatásaként tekintendő. A CMP-re azért esett a választás, mivel ez biztosította a tanulmányhoz szükséges megfelelő mennyiségű kontextust, továbbá a tankönyvcsaláddal kapcsolatban több longitudinális vizsgálat lezajlott már az IB megértésének fejlődését vizsgálva.

Az Amerikai Egyesült Államokban és sok helyen máshol az iskolai matematika az euklideszi geometriához csatolta az IB-t. A múlt kihatása a jelenre megjelenik? A geometriának kitüntetett szerepet kell kapnia az IB-lehetőségek között?

1.3.3. Elemzési keretrendszer

Az elemzési keretrendszer létrehozásához a korábban vázolt IB fogalomrendszert használta fel Stylianides, amit így később a tankönyvek elemzéséhez használhatott. Előnye, hogy integrálja a bizonyítással kapcsolatos főbb tevékenységeket és az azokkal kapcsolatos elkötelezettséget, ez pedig megengedi az elkötelezettség szélesebb körű vizsgálatát.

A keretet két, egymással összefüggő dimenzió alkotja meg. Az 1. dimenzió a matematikai általánosítások készítését használja fel, ami felhasználja az IB-t alkotó két tevékenységet: a minta azonosítását és a feltételezés elkészítését, illetve felhasználja a dimenzió a matematikai állítások alátámasztását is, ami pedig a bizonyítás és a nem bizonyító érv tevékenységeit ragadja magához. A 2. dimenzió kiegészíti az 1. dimenziót és tulajdonképpen célokat fogalmaz meg neki, hogy mire lehet használni az 1. dimenzióban megszerzett dolgokat az IB folyamatokban. Pólyára is jogosan hivatkozik itt a szerző: „Például a matematikában a minták, sejtések és bizonyítások közötti fontos kapcsolat az, hogy a minták sejtéseket generálhatnak, amelyek viszont a bizonyítások kialakulásához vezethetnek. Ezek mellett számos kutató a bizonyítás magyarázó céljának hangsúlyozását szorgalmazta az iskolai matematikaoktatásban. Kérdés, hogy tükrözi-e ezt a hangsúlyt a matematikatankönyvek sokasága.

1.3.4. 1. dimenzió: Az érvelés és bizonyítás összetevői, alösszetevői

A minta azonosítása

A minta egy olyan általános matematikai összefüggés, amely egy adott adathalmazra illik. Kétféle mintát különböztet meg a keretrendszer: határozott/explicit mintát és

plauzibilis/valószínűsíthető mintát aszerint, hogy a minták maguk egyértelműen meghatározhatónak minősülnek-e.

A határozott mintáknál lehetséges, hogy egy szakértő matematikailag meggyőző bizonyítékot szolgáljon egy minta kiválasztására. A valószínűsíthető minták esetében a szakértő számára nem lehetséges matematikailag egy meggyőző bizonyíték szolgáltatása egy adott minta kiválasztására, az adatokra szintén illeszkedő egyéb minták közül. Példákon keresztül mutatja be ezeket a szerző, ahol egy feladatban több – egymástól merően különböző – mintát fedezhetünk fel a feladat laza, kevésbé szigorú megfogalmazása miatt, így plauzibilis mintáról van szó, amit egy apró szigorítással, egy szabály megadásával határozottá alakíthatunk. Az elágazást tehát általában az okozza, hogy milyen indoklást tudunk felmutatni arról, hogy miért is áll fenn a minta.

Sejtés megalkotása

A sejtés, feltételezés egy általános matematikai összefüggésre vonatkozó, hiányos bizonyítékokon alapuló, megalapozott hipotézis. A hipotézis szó maga azt mutatja, hogy a feltételezés igazságának elfogadásához vagy elvetéséhez további lépésekre van szükség. A mintánál, ha talál a megoldó egy összefüggést, amely illik egy adott adathalmazra, úgy mutathatja be azt, hogy nem kell feltétlen kommunikálnia az igazságával kapcsolatos kétségeket, míg a sejtésnél ez mindig jelen kell legyen.

Bizonyító érv

A bizonyító érv olyan elfogadott igazságokon alapuló érvényes érvként definiálódik, egy matematikai állítás mellett vagy ellen, amely kifejezetten hivatkozik az általa használt elfogadott igazságokra. Az érvelés az állítások összefüggő sorozatát jelenti, míg az érvényes kifejezés azt jelzi, hogy az előbb leírt állítások a helyes, elfogadott következtetési szabályok alapján kapcsolódnak egymáshoz. Az „elfogadott igazságok” kifejezést tág értelemben használja a matematikus társadalom, minden olyan axiómára, tételre, definícióra és állításra gondolunk, amelyeket egy adott közösség egy adott időpontban közösnek tekint. Melyek ezek közül a kulcsfontosságúak, melyekre kell ezek közül hivatkozni egy bizonyítás során? Ezek rendkívül kényes kérdések, hiszen a válasznak figyelembe kell vennie a bizonyítás célközönségét, ami most a tankönyvelemzés révén egy elképzelt osztályközösség lenne. Figyelembe kell venni, hogy mi előzte meg a tankönyvben az adott érvelés és hogy milyen elvárt tudása és megértési szintje van a tanulóknak ezen a ponton.

A keretrendszer kétféle bizonyító érvet tesz ki elénk: az általános példákat és a demonstrációt/szemléltetést. Az általános példa olyan bizonyító érv, amely egy adott, az általános eset reprezentatívjának tekintett esetet használ. Azért is olyan fontos ez, mert erőteljes, könnyen elérhető eszközt nyújthatnak a tanulóknak a meggyőzéshez és

a magyarázathoz. Ez egy lehetőséget ad a tanulóknak matematikai állítások bizonyítására, még akkor is, ha nincs meg a megfelelő matematikai nyelvezetük a bizonyításuk elegánsabb kifejezésére.

A demonstráció/szemléltetés olyan bizonyító érv, amely nem támaszkodik egy adott eset reprezentativitására. Ide tartozik az ellenpélda, az ellentmondás, a *reductio ad absurdum*, a matematikai indukció és sok más fogalom is. A szemléltetést nem kell ábrázolási formához kapcsolni.

Nem bizonyító érv

Az ilyen érvek egy matematikai állítás mellett vagy ellen szólnak, de nem minősülnek bizonyítás szintűnek. Ilyenek az empirikus- és a racionális érvek.

Az empirikus érv olyan érv, amely egy matematikai állítás igazságát úgy kívánja bizonyítani, hogy az állítást az állítás által lefedett összes lehetséges eset megfelelő részhalmazában érvényesíti. A tanulók elköteleződése ezek iránt a érvénytelen empirikus érvelésekhez megerősíti a tévhitet a gyakorlatból, miszerint példákkal lehet általánosan matematikai állításokat bizonyítani.

A racionális érv azért képezi részét a keretrendszernek, mert így megragadható a matematikai állítások mellett vagy ellen szóló érvényes érvek halmaza, amik mégsem minősülnek bizonyító érvnek.

Összességében három okot sorol fel Stylianides a racionális érvekkel való foglalkozás előnyéhez az empirikus érvekkel való foglalkozás ellenében:

1. Az empirikus érvekkel ellentétben a racionális érvek nem támogatják a bizonyítással kapcsolatos pontatlan felfogás kialakulását, amelyet később az oktatásnak kellene kezelnie.
2. Mivel érvényesek, de nem olyan fejlettek, mint a bizonyítások, a racionális érvek jó érvelési lehetőséget kínálnak, amikor a bizonyítás előállítása nem praktikus (pl. időhiány miatt), lehetetlen (pl. fogalmi akadályok miatt) vagy nem kívánatos (pl. mert a tevékenység középpontjában egy állítás igazolásán kívül más fogalom áll).
3. Mivel érvényes, de a bizonyításoknál kevésbé kidolgozott érvekről van szó, a racionális érvek könnyebben hozzáférhetőek a tanulók számára, mint a bizonyítások, és így alkalmasak lehetnek arra, hogy átmeneti szakaszként szolgáljanak az empirikus érvek és a bizonyítások között.

1.3.5. 2. dimenzió: A minta, a sejtés és a bizonyítás céljai

A minta céljai

A minta legfőbb szerepe továbbra is a sejtések kialakítása. Ez okot adhat arra, hogy vizsgáljuk, a tanulók észre tudnak-e venni olyan mintákat, amelyek ténylegesen megelőzik a sejtések generálását – sejtés-előrejelzők –, vagy épp ellenkezőleg – nem-sejtés-előrejelzők –.

Egy minta két esetben lehet nem-sejtés-előrejelző. Először is akkor, ha nincs meg a lehetősége annak hogy sejtéssé bővüljön, másodszor pedig ha a megoldó nem várja el tőle, hogy sejtés alakuljon ki belőle.

A sejtés céljai

Az előző rész azt indukálja, hogy a sejtés fő szerepe a matematikában az, hogy a bizonyítások kidolgozásához vezetnek. Ha van lehetőségük a tanulóknak olyan feltevések felállítására, melyek megelőzik az ezekhez a feltevésekhez kapcsolódó bizonyítások kidolgozását – bizonyítás-előrejelzők –, vagy sem – nem-bizonyítás-előrejelzők –.

Egy feltevés két esetben lehet nem-bizonyítás-előrejelző, ha a megoldó nem foglalkozik tovább a feltevéssel a bizonyítás érdekében, vagy ha a megoldó megvizsgálja a feltevést, de olyan érvet dolgoz ki, mely nem bizonyító érvként jelenik meg.

A minta, a sejtés és a bizonyítás közötti kapcsolat nem mindig lineáris, néha például minta nélkül is adódik sejtés.

A bizonyítás céljai

A matematikai bizonyításnak számos célja van, azonban az alábbiakat a szerző azért választotta ki, hogy a tankönyvi elemzés igényeihez szabottan tudja azokat később felhasználni. A bizonyítás céljai közé sorolja tehát itt a magyarázatot, az igazolást, a hamisítás és az új tudás generálását.

A fent leírt célok nem kapnak egyenlő figyelmet az iskolai matematikában, melyben szinte már hagyományosan csak a bizonyítás igazoló szerepe érvényesült. Knuth egy kutatásában például középiskolás matematikatanárokat kérdezett, hogy szerintük mik a bizonyítás céljai. Az igazolást mindenki válaszul adta, azonban a magyarázatot, mint célt, egyikük sem említette, pedig a kutatók munkái az elmúlt években pont azt követelik, hogy nagyobb hangsúly kerüljön erre a magyarázó szerepre.

1.3.6. A kutatás eredményei

A CMP 24 egységét vizsgálta, 6-8. osztályig, mely magába foglalta az algebra, a számelmélet és a geometria összes egységét. Az elemzés 4855 feladatot tartalmazott, ezeknek pedig körülbelül 40%-a úgy lett megtervezve, hogy tartalmazzon a tanulóknak legalább

egy lehetőséget az érvelésre. Ezeket a feladatokat a szerző indoklási-és-bizonyítási-feladatoknak (IBF) keresztelte el. A feladatok fele nem tartalmazott semmilyen ilyesféle lehetőséget, így ezeket nem-indoklási-és-bizonyítási-feladatoknak (nIBF) nevezte el. A maradék mintegy 10%-nyi feladat nem sorolható egyik kategóriába sem, így ezekkel az elemzés nem is foglalkozott tovább.

A mintában szereplő IBF-ok 62%-a a tanulóknak lehetőséget adott arra, hogy indoklást adjanak, a 18%-ában határozott-, a 6%-ában pedig plauzibilis mintákat azonosíthattak. 12%-ban megjelent a szemléltetés is. Általános példákat egyáltalán nem talált a szerző az elemzés során a tankönyvekben.

A tartalmi területeket illetően a számelméleti egységben nagyobb eséllyel volt IBF, mint a másik két tartalmi terület egységeiben. A geometriai egységekben a feladatok kisebb valószínűséggel terveztek lehetőségeket mintákra, mint a másik két tartalmi terület egységeiben.

Stylianides úgy találja, hogy az érvek hierarchiájában a matematikai kifinomultság alapján eleinte empirikus érvekkel kell találkoznia a tanulóknak – kis mértékben – ami után jönnek a racionális érvek. Ezután áttérhetünk a bizonyítások terepére, ahol eleinte általános példákkal operálhatunk, majd eljuthatunk a szemléltetésig.

Összefoglalva, a modell a következő állításokat javasolja a hierarchiában szereplő négy különböző típusú érvre vonatkozóan:

1. Ne legyenek empirikus érvek a középiskolai matematika tankönyvsorozatban.
2. Az érvelések minden évfolyamon fontosak, de számuknak csökkenniük kell az összes évfolyamon.
3. A bizonyítások számának növekednie kellene az évfolyamokon.
4. A szemléltetések relatív százalékos arányának és az általános példák arányának növekednie kell az évfolyamokon.

Az aránytalan IBF előfordulás a tartalmi területek között várható és jó is, hogy van, hiszen a tanulók számára pár helyen könnyebb, pár helyen viszont nehezebb ilyen feladatokat kialakítani.

Miért pont a számelméletben van a legtöbb IBF a tankönyvsorozatban? A szerző szerint ez azzal függ össze, hogy a tanulók milyen szinten értik a különböző tartalmak definíciós fogalmait. A számelméleti fogalmak (páros számok, tényezők, szorzók) már kisgyermekkortól hozzáférhetőek, sőt a terület számos eredménye már kisgyermek számára is érthető, ezzel serkentve a kíváncsiságukat olyan felfedezésekre, melyek természetükből adódóan felvetik a bizonyítás igényét.

Az előzőekkel ellentétben azonban normális lehetne egy olyan modellnek is a kialakítása, ahol az IBF-ok kiegyensúlyozottan oszlanak el a tankönyvsorozatban. Például,

ha egy ilyenben a geometriai IBF-ek szinte egyeduralkodók lennének egy könyvben, az azt üzenné, hogy a bizonyításoknak csak a geometriában van központi szerepe. A korábbi szakirodalomban leírt „Új Matematika” mozgalomnak hála sok középiskolai tanárban el is mélyült ez a hiedelem.

Az ilyen fajta elemzés sok kérdésre választ adhat. A legkézenfekvőbb ezek közül talán az adott ország írott tanterveinek, a tanárok által végrehajtott IBF-ek és a tankönyvek által biztosított IBF-ek összhangjának harmonikussága vagy épp zajossága.

Az analitikus/módszertani megközelítés fontos következménye lehet, hogy alapul szolgálhat más tartalmi területek vizsgálatához az IB szempontjából.

2. fejezet

Módszer

2.1. A minta

A vizsgálatomat az Egri Pásztorvölgyi Általános Iskola és Gimnázium intézményében vittem véghez, az iskola gimnáziumi részében. Az iskola középiskolai osztályaiban nyelvi előkészítő évvel indul a képzés, tehát minden tanuló – kivéve, aki később jött át ide egy másik iskolából – volt „0. osztályos”, így a tanulók java egy évvel idősebb a hagyományosnak vehető életkorokhoz képest az egyes osztályokban. Az intézménynek remek eredményei, nagy neve van regionális szinten, még ahhoz képest is, hogy kisebb létszámmal dolgozhatnak – évfolyamonként két osztály van a középiskolai részen –, mint a többi, nagyobb intézmény.

A következőekben bemutatom a kísérletben résztvevők csoportprofilját. Az intézményen belül egy 10. évfolyamon tanuló osztályban végeztem a kísérletemet. Az osztályt az egész 2022. szeptemberétől 2023. júniusáig terjedő időszakban tanítottam matematikából. Reflektálva az osztály diákjaira, egy vegyes csoportról beszélhetek, aminek a teljesítménye, matematikai képzettsége átlagon felülinek, jónak mondható. A csoport teli van szélsőségekkel, vannak rendkívül fejlett matematikai gondolkodással és problémamegoldó gondolkodással rendelkezők, akik ezt alkalmazni is tudják az órákon, dolgozatokon, versenyeken, ugyanakkor vannak a matematika iránt nem érdeklődő, dacosan viselkedő, továbbá gyengébb matematikai eredményű diákok is. Az osztály jelentős része bár jó képességű, ám már a kezdetekben is feltűnt az indoklási, bizonyítási kultúrájuk szegénysége az egyes témakörökben, ezáltal pedig adta magát a lehetőség ennek a felmérésére és fejlesztésére.

Ahhoz, hogy a csoport bizonyításokat tudjon tanulni, első lépésként először érvelést kell tanítani nekik, hiszen annak rugalmassága, felfedezésbeli nyitottsága előnyös lehet a későbbi bizonyítás tanításban [4].

Az osztály 36 fős, azonban mindhárom felmérést csak 28 tanuló írta meg, így a továbbiakban erről a 28 fős tanulócsoportról fogok írni. A 28 fő nemek szerinti megosz-

lása: 17 lány és 11 fiú. Az osztályátlag 9. évfolyam végén 4-es, míg 10. évfolyam végén 3,83 volt.

2.2. A témakör kerettantervi háttere

A vizsgálat során a valószínűességszámítás és statisztika témakörén belül dolgoztam a diákokkal. Érdemes kiemelni a téma különlegességét az indoklás és érvelés, valamint a bizonyítási folyamat szempontjából. Stylianides szerint az amerikai tankönyvekben a számelméleti feladatok túlsúlya abból adódik, hogy ezek a fogalmak már kisgyermekkorban hozzáférhetőek, természetüknél fogva pedig felvetik a bizonyítás szükségességét. Egy matematikai tankönyvben, és így a pedagógusok tanítási módszereiben is, fontos a kiegyensúlyozottság az indoklási feladatok terén a különböző témakörökben [17]. A valószínűességszámítás témakörben különösen fontos az érvelés, mert bár a magyar gyakorlatban az esélylatolgatás már alsóban is előfordul, a tanulók esélyekkel kapcsolatos ítéletalkotása gyakran téves.

A leíró statisztika számos területén találkozunk egészen fiatal korokban a tanulók a diagramokkal, továbbá az átlag fogalmával, melyre ebből az irányból lehet építeni. A leíró statisztika alapvető fogalmai a mindennapi szóhasználatban is előfordulnak, amely megalapozhatja a tanulók téma iránti érdeklődését.

A témakör feldolgozása során a 9-10. évfolyamnak javasolt tanyagon túl néhány 11-12. évfolyamnak javasolt tartalmat is beemeltem az oktatásba, így ezekkel kiegészítve fogok írni a témakörök általam tanított részeiről. Később a 2.3.2. szakaszban írok arról, hogy az ott szereplő indoklási-érvelési feladatokat új ismereteket elsajátító órákon használtam fel, azonban az összes óraszám tizennyolc volt, ami megmagyarázza a tanított anyag széleskörűségét.

2.2.1. Valószínűességszámítás

A Kerettanterv [11] 9-10. évfolyamon azt javasolja, hogy valószínűségi kísérletek során beszéljünk eseményről, eseménytéréről, elemi eseményről, relatív gyakoriságról, valószínűségről, egymást kizáró eseményekről, illetve független eseményekről. Ezeket tudnia kell megkülönböztetnie és alkalmaznia a tanulóknak. Annak eredményéül, hogy a tanulók a témakört tanulják, véletlen események kimenetelére ésszerűen tippelnek és képesek a véletlen kísérletek adatainak rendszerezésére, relatív gyakoriságok számolására. A diákoknak meg kell ismerkednie a klasszikus valószínűségi modellel és alkalmaznia is kell azt. A Kerettanterv kiemeli az eloszlások digitális eszközökkel való ábrázolását, amivel ugyan foglalkoztunk a témakör tanulása során, de a vizsgálatához nem illeszkedett szorosan.

A 11-12. évfolyamon kiírt javasolt tananyagból az eseményekkel foglalkoztunk mélyebben, hiszen megismerték a tanulók az események összegét, szorzatát, komplementerét, az egymást kizáró események fogalmát, de túllépve ezeken még a teljes eseményrendszer fogalmával is találkoztak.

2.2.2. Leíró statisztika

A 9-10. évfolyamon az adatgyűjtés és -rendszerezésen van eleinte a hangsúly, majd ezek középértékekkel (átlag, medián, módusz, illetve a középértékeken túl terjedelem) történő jellemzése kap nagyobb szerepet. Az oszlop- és kördiagramokkal való ábrázolás még ebben az időszakban a kiemelt tananyag. A témakör tanulása után nem csak ezek elvégzése a cél, hanem az is, hogy a diákok értelmezni tudják a kapott középértékeket és ábrákat. Az előzőből következően ajánlott foglalkozni diagramokkal – vagy egyéb grafikus elemmel – megadott manipulációkkal felismerés és javítás szintjén.

A 11-12. évfolyamos tananyag jelentős kiegészítést adott a leíró statisztikai részhez, hiszen ide vettük a kvartilisek és a szórás fogalmát is, továbbá előzőből továbbmenve a dobozdiagram (sodrófa diagram, box-plot diagram) készítésével és alkalmazásával is foglalkoztunk.

2.3. A vizsgálat menete

2.3.1. Az előteszt

A vizsgálat során a valószínűségi számítás és statisztika témakörén belül dolgoztam a diákokkal. A tanmenet tíz órát szánt az új tananyag feldolgozására a fentebb említett témakörben. Mielőtt még elkezdtük az anyagot – a tanulók előismereteire építve – egy előtesztet végeztettem el velük, mely kilenc feladatból állt. A kérdések mindegyike a valószínűségi gondolkodást, a valószínűségi számítási feladatok megoldását, a statisztikai alapfogalmakat és a statisztikai számításokat veszi alapul. A teszteket anonim módon töltötték ki a tanulók.

Az első feladatcsoportban lévő három feladatban „másoktól” készen kapott állításokra kellett reflektálniuk aszerint, hogy igaz vagy hamis az állítás. Fontos része volt minden feladatnak az adott válaszuk indoklása. Alapvető része az indoklási képességek elsajátításának ez a gyakorlattípus, ahol egyszerű, általuk kívülről kapott állításokat kell értékelniük a tanulóknak logikai értékük szerint.

Az alábbi három kérdésre kellett válaszolniuk az előteszt *első feladatcsoportjában*. Az egyes tesztfeladatok alatt olvasható azok elvárt megoldása vagy megoldási iránya.

Tesztfeladat - 1.

Dönts el az alábbi állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszodat indokold!

Eleonóra: „Feldobtam ezt az 50 forintost már 12-szer, de mindig írás lett! Mivel az előző dobásaim mind így sikerültek, a következő feldobásom után most már biztosan fejet fogok kapni!”

Az első tesztfeladatban Eleonóra állítása hamis, mivel az egyes írás/fej dobásának valószínűsége nem függ az előző dobásaitól, minden dobás előtt $\frac{1}{2}$ lesz a valószínűsége az írás és a fej dobásának is.

Tesztfeladat - 2.

Dönts el az alábbi állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszodat indokold!

Ferenc: „Itt van ez a 10 kérdéses teszt, mindenhol három válaszlehetőség van és egy helyes válasz. Úgyis mindegy, hogy tanultam-e! Ha véletlenszerűen kitöltöm, úgyis meglesz az 5 helyes válaszáért járó kettő. Ennyi az egész, vagy átmegyek vagy nem, szóval 50% esélyem van átmenni úgy, hogy véletlenszerű válaszokkal töltöm ki a tesztet.”

A második tesztfeladatban Ferenc állítása hamis. Ferenc hibásan azt feltételezi, hogy ha egy kísérletnek kétféle kimenetele lehet (átmegy vagy sem), a két kimenetel valószínűsége mindig egyenlő, azaz $\frac{1}{2}$. Pontos valószínűségi számításokra nincs szükség a válaszhoz és az indokláshoz, de egyébként ebben az esetben a dolgozat legalább elégségesre való teljesítésének valószínűsége:

$$\frac{\binom{10}{5} \cdot 2^5 + \binom{10}{6} \cdot 2^4 + \binom{10}{7} \cdot 2^3 + \binom{10}{8} \cdot 2^2 + \binom{10}{9} \cdot 2^1 + 2^0}{3^{10}} \approx 0,213$$

Tesztfeladat - 3.

Dönts el az alábbi állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszodat indokold!

József: „Eddig a félévben szereztem hat darab 5-öst matekból. Tanár Úr azt mondta, hogy átlag alapján kapjuk a jegyet és 4,5-től már ötöst ad. Ez azt jelenti, hogy az utolsó dolgozaton bármit is írok, úgyis ötös leszek, hiszen már így is rengeteg ötöst írtam!”

A harmadik tesztfeladatban József állítása hamis, nem kaphat bármilyen osztályzatot a dolgozatára. Ha József dolgozata netalán elégtelenre sikerülne, az átlaga körülbelül 4,43 lenne, ami nem éri el az jeles osztályzat eléréséhez kitűzött számot (4,5), tehát 4-es osztályzatot kapna a félév végére.

A második feladatcsoportban három szituációban egy állítás igazságtartalmára főszereplők reflektálnak és indokolják meg véleményüket. A feladatmegoldó diákoknak a főszereplő indoklását kell helyességük szerint értékelniük indoklással ellátva.

Az indoklás egy másik szintje az, mikor mások indoklásáról kell következtetéseket levonnunk, s érvelnünk azokról. Ha hatékonyabban dolgoznak ebben a gyakorlattípusban a tanulók, könnyebben tudnak diskurzust folytatni egyes problémakörökről, kérdésekről egymással.

Érdemes belegondolni, hogy milyen különbség van a mindennapi indoklás és a konkrét matematikai indoklás között. Gila Hanna szerint legtöbbször folyamat és eredmény tekintetében is különbözik a kettő, hiszen a mindennapokban sokszor elfogadunk egy állítást bármilyen bizonyítás nélkül is sokszor, mivel triviálisnak, intuitívan hihetőnek tartjuk, azonban a matematikában ez felettébb kevés [4]. Az itt szereplő példák szituációi is ezt a mindennapiság és matematika közötti különbséget kívánja szimbolizálni a három feladatban.

A Kerettanterv [11] szerint a matematika egyik fő tanulási-tanítási célja, a tanuló mérlegelő gondolkodásának fejlesztése, ez pedig meg kell jelenjen kooperatív tevékenységekben is, ahol "... a közös munkában érvel, képes a vitára, az érvei ütköztetésére. Mérlegeli és kontrollálja mind a társai, mind a saját véleményét." A célom ennek a készségnek a megjelenítése ebben a feladatcsoportban.

Az alábbi három kérdésre kellett válaszolniuk az előteszt második feladatcsoportjában.

Tesztfeladat - 4.

Az alábbi szituációban állítanak valamit a történet főszereplőjének, Kornélnak. Döntsd el Kornél indoklásáról, hogy helyes vagy helytelen! Válaszodat indokold!

Szituáció: Az iskolában a hagyományos naplóról elektronikus naplóra állnak át. A régi naplóból át kell vezetni az osztályzatokat az új, elektronikus naplóba. Irodalomból a régi naplóban szerepel Kornélnál egy $3/4$ osztályzat (ennek a jelentése tulajdonképpen egy 3,5-es osztályzat), azonban a rendszer ezt nem ismeri.

A tanár állítása: Beírok akkor egy 3-ast és egy 4-est, hiszen ezek átlaga is épp 3,5.

Kornél véleménye és indoklása: Eddig három ötösöm van az évben. Ha egy 3-ast és egy 4-est ír be nekem, az rosszabb az átlagom szempontjából, mintha 3,5-et kapnék, de még annál is rosszabb, mintha csak egy 3-ast kapnék, hiszen a 3-as és 4-es beírásával olyan, mintha kétszer is megkaptam volna a 3,5-es jegyet!

A negyedik tesztfeladathoz Juhász István és Orosz Gyula Matematika 10. tankönyvének 261. oldaláról [8] kaptam a motivációm. Ebben a tesztfeladatban a tanár állítása szerint, ha egy 3-as és egy 4-es osztályzatot ír be, az megegyezik azzal a szituációval, hogy egy 3,5-es osztályzatot ír be neki, amit viszont nem tud.

Ha beír Kornélnak egy 3-as és egy 4-es osztályzatot, akkor a három ötös jegy mellett az átlaga $\frac{3+4+5+5+5}{5} = \frac{22}{5} = 4,4$ lenne.

Azt is állította Kornél, hogy ha megkapja a 4-est és a 3-ast is, az olyan, mintha kétszer kapná meg a 3,5-es jegyet: $\frac{3,5+3,5+5+5+5}{5} = \frac{22}{5} = 4,4$.

Ha Kornélnak lehetne 3,5-es jegyet beírni, az átlaga a következőképpen alakulna: $\frac{3,5+5+5+5}{4} = \frac{18,5}{4} = 4,625$.

Kornél azt állította, hogy ha csak egy 3-ast kapna, még az is jobb lenne, mintha egy 3-ast és egy 4-est kapna. Ha csak egy 3-ast kapna, az átlaga a következőképpen alakulna: $\frac{3+5+5+5}{4} = \frac{18}{4} = 4,5$.

Kornél minden részállítása helyes volt, így az egész állítása és indoklása is helyes, hiszen:

- Ha egy 3-ast és egy 4-est kap, az átlaga 4,4, míg ha egy 3,5-est kapna, az átlaga 4,625 lenne, tehát az első eset valóban rosszabb az átlag szempontjából.
- Ha egy 3-ast és egy 4-est kap, az átlaga 4,4, míg ha egy 3-ast kapna, az átlaga 4,5 lenne, tehát az első eset valóban rosszabb az átlag szempontjából.

- Ha egy 3-ast és egy 4-est kap, az átlaga 4,4, míg ha kétszer kapja meg a 3,5-es osztályzatot, az átlaga szintén 4,4. Ez alapján valóban olyan a 3-as és 4-es beírása, mintha kétszer kapná meg a 3,5-es osztályzatot az átlaga szempontjából.

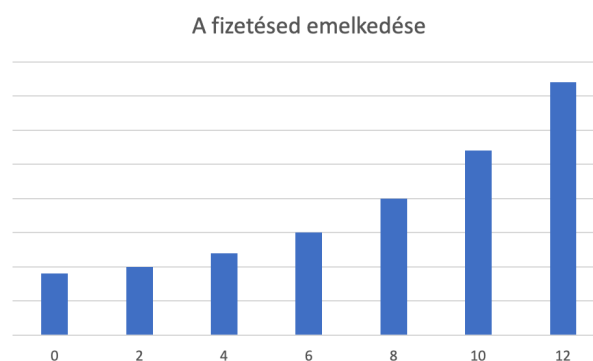
Tesztfeladat - 5.

Az alábbi szituációban állítanak valamit a történet főszereplőjének, Orsolyának. Döntsd el Orsolya indoklásáról, hogy helyes vagy helytelen! Válaszodat indokold!

Szituáció: Állásinterjún vagy, miután egy jó barátod a cégből állást ajánlott neked egy kávézás során a cégüknél. Éppen a fizetésed emelkedéséről beszél a cég egy embere, aki nagyon szeretné, hogy elfogadd az állásajánlatukat.

A cég emberének állítása: Nézd ezt a diagramot, nálunk exponenciálisan növekedhet a fizetésed! A vízszintes tengelyen a cégnél eltöltött éveket láthatod. Ilyen fizetésbeli emelkedést sehol máshol nem tudnak ígérni!

Orsolya véleménye és indoklása: Ez tényleg hihetetlen, eleinte még nem tűnik olyan soknak a pénz, de mivel egyre magasabbak az oszlopdiagram oszlopai, pár év múlva már nagyon sok pénzt kereshetek ennél a cégnél!



Az ötödik tesztfeladatban relatív, hogy mit nevez Orsolya sok pénznek. A növekedés ugyan egyértelmű, azonban a diagram függőleges tengelyén nem látjuk a beosztást, nem tudjuk, hogy mennyi pénzt jelentenek az egyes oszlopok. Ilyen módon tekinthetjük úgy, hogy egy beosztás 5 forintot jelent, ezáltal 12 év munka után körülbelül 36 forint lesz Orsolya fizetése, amit a legtöbb helyzetben nem nevezünk „sok pénznek”. Orsolya állítása ezek alapján helytelennek tekinthető.

Tesztfeladat - 6.

Az alábbi szituációban állítanak valamit a történet főszereplőjének, Ádámnak. Döntsd el Ádám indoklásáról, hogy helyes vagy helytelen! Válaszodat indokold!

Szituáció: Budapesten vagy a Keleti pályaudvaron és megpillantasz egy szerencsejátékoszó furfangos embert, Gyuri bácsit, aki játékra invitál téged.

Gyuri bácsi állítása: Gyere fiam! Itt olyan játékot játszatsz, ahol egyenlő eséllyel indulunk! Itt egy szabályos dobókocka, illetve egy 20 forintos érme, de egyik sincs ám megbuherálva! Egy körben te egyszer dobsz a dobókockával, én meg háromszor az érmével. Te akkor nyersz meg egy kört, ha a körön belül 4-est dobsz a dobókockával, én meg akkor, ha mindhárom érmefeldobás ugyanazt kapom, de mindegy, hogy ez fej vagy írás, csak ugyanolyannak kell lennie! Ha egyikünknek sem jön be vagy épp mindkettőnknek, akkor egyikünk sem nyer a körben. Érthető ez? Na, aki előbb szerez 5 győzelmet, az kap a másiktól 10000 forintot!

Ádám véleménye és indoklása: Játszok! Tényleg egyenlő eséllyel játszunk, hiszen én 6 félét tudok dobni a kockával, ő is $3 \cdot 2$ -t hiszen mindhárom feldobásánál kétfélét dobhat. Meg amúgy is, nekem csak egy jót kell dobnom, neki meg hármat!

A hatodik tesztfeladatban Ádám helytelenül dönt és indokol. A szabályos dobókockával valóban 6-félét tud dobni, így a 4-es dobásának valószínűsége $\frac{1}{6}$. Gyuri bácsi háromszor dobja fel az érmét, s akkor nyer, ha mindhárom dobása megegyezik. Ezáltal az összes elemi esemény száma $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$, hiszen mindhárom dobásánál háromfélét dobhat. Ezekből az lesz a kedvező neki, amikor mindhárom írás, vagy mindhárom fej lesz, ez pedig két lehetőség az összesből. Összességében Gyuri bácsi $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ eséllyel dobja meg a nyeresét jelentő érmesorozatot.

A harmadik feladatcsoportban a tanulóknak három gyakorlati feladatot kell megoldaniuk a valószínűségszámítás és statisztika témaköréből, ahol a saját állításaikat – melyek a feladatok végső megoldásai – kell megindokolniuk.

Az első két feladatcsoportban végig mások állításaira, indoklásaira kellett indoklást gyártaniuk a tanulóknak, most azonban ebben a feladatcsoportban az indokolni kívánt főproduktumot is maguknak kell előállítaniuk.

Az alábbi három kérdésre kellett válaszolniuk az előteszt harmadik feladatcsoportjában:

Tesztfeladat - 7.

Mennyi az esélye, hogy két szabályos dobókockát feldobva két páros vagy két páratlan számot dobunk? Válaszodat indokold!

A kiírt eseményt tekintve az összes eset száma $6 \cdot 6$, mivel mindkét dobásnál hatféle kimenetel van. Két párosat $3 \cdot 3$ módon lehet dobni, mivel mindkét dobásnál a három páros szám valamelyike kerül ki. Ugyanígy két páratlan dobásnál is, tehát a 9 kétszerese a kedvező esetek a száma. Összességében az esemény valószínűsége tehát $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Tesztfeladat - 8.

A tanár döntési lehetőséget ad Károlynak, hogy matematikából ő dönthesse el, hogy milyen érték alapján kapja a végső jegyét a bizonyítványába. Dönthet a jegyei módusza, mediánja, vagy átlaga mellett. Mit javasolsz, melyiket válassza Károly, ha a célja a lehető legjobb jegyet kapni matematikából? Válaszodat indokold!

Károly jegyei: 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5.

A nyolcadik tesztfeladatban Károly jegyeinek módusza 4, mediánja 3, átlaga pedig 3. Ezek alapján a móduszt érdemes választania Károlynak.

Tesztfeladat - 9.

Jankának és osztályának egy totót ad fel a tanárunk matek órán, amikor is a következő a feladat:

„I. Tippeld meg a következő kísérletben a k értékét!

Feldobunk öt darab dobókockát, majd megszámloljuk, hogy hányon sikerült 6-ost dobunk! Ez a szám lesz a k .”

- a) $k \leq 9$
- b) $9 < k < 18$
- c) $18 \leq k$

Segíts megtalálni Jankának a legvalószínűbb lehetőséget, hogy nagyobb esélye legyen a találatra a totón!

A kilencedik tesztfeladatban öt darab dobókockával legfeljebb 5 hatost dobhatunk, ezáltal a hatosok száma biztosan kisebb lesz, mint 9. Tekintve, hogy az a) lehetőség valószínűsége 1, a másik kettőé pedig 0, az a) lesz a legvalószínűbb lehetőség.

Az előteszt 2023. március 27-én (hétfő) zajlott le, 12:05 és 12:50 között, egy 45 perces tanóra keretében. A tesztpapírokat előre kiosztottam a 45 perc kezdete előtt és pontosan az óra végeztével be is szedtem. A diákoknak utasításban kiadtam, hogy figyelmesen olvassanak el minden feladatot és legjobb tudásuk szerint oldják meg azokat, az indoklást sem lefelejtve a válaszaik mellől. A diákok rendben és csendben dolgoztak végig, a legtöbbben idő előtt végeztek is a munkával.

A teszt elvégzése során nem adtam semmilyen segítséget a tanulóknak, csupán azt hangsúlyoztam minden alkalommal, hogy jelenlegi tudásuk alapján válaszoljanak, és ami még fontosabb, indokoljanak! A teszt végezte után több kérdéssel fordultak hozzám a tanulók, melyek rendszerint inkább a teszt értelmét vizsgálták, mintsem a tartalmát. A témakör tanítása során igyekeztem elérni, hogy megértsék az indoklás témakörének iskolájának fontosságát is a tanulók, ne csak indokolni tudjanak az egyes esetekben.

2.3.2. A témakör elsajátításának időszaka

Gila Hanna szerint egy tantervnek tükröznie kell a matematikai gyakorlatot azzal, hogy bemutatja a bizonyítás – és így az érvelés – formális és informális módjait is, azonban ennek mind nincs értelme, ha a pedagógusok nem bocsátják rendelkezésre a matematikai eszközök teljes skáláját. Ha rendelkeznek a megfelelő eszközökkel a diákok, akkor van esélyünk megtanítani őket egy matematikai érv követésére és értékelésére, illetve hogy kidolgozhassák a saját matematikai érveiket [4]. A témakör elsajátításának időszakában ezek szerint az elvek szerint igyekeztem haladni és ezzel együtt fejleszteni a diákokat. Cél, hogy a diákok megszerezzék ezalatt az időszak alatt a szükséges érvelési eszköztárukat, az órai indoklási feladatoknak és a rengeteg kommunikációnak hála.

Egy másik munkájában Gila Hanna ír az 1950-1980-as évekbeli „New Math” nevű tantervi reform bukásáról, melyet túlzott absztraktságának, tisztán formális megközelítésének köszönhetett. A formális matematika szigorú, meghatározott szabályok alkotta kerete elvett a megértésből, ahelyett hogy hozzáadott volna, ehhez képest a lazább, hétköznapiasabb informális matematika könnyebben érthető. Egyszerűbb magyarázatokkal operálhat a tanuló [5]. Kitűztem, hogy a témakör során előkerülő érvelési készséget fejlesztő feladatokban az informális-formális spektrumon féltávon, vagy ha szükséges inkább az informális irányba vezessem még most a tanulókat, formális áthallásokkal, hogy hozzászokhassanak ezekhez.

A tanítási-tanulási folyamat során mindvégig a Pólya-féle problémamegoldási négy szakasz [15] mentén igyekeztem kalauzolni a diákokat a helyes megfejtések irányába. Ez a négy szakasz a feladat megértéséből, tervkészítésből, a terv végrehajtásából végül

pedig a megoldás vizsgálatából állt [15]. Ez a négy szakasz alkalmazható a bizonyítások és az indoklás folyamatára, melyekre a négy szakasz az állítás megértéséből, a sejtések megfogalmazásából és a bizonyítási/indoklási terv készítéséből, a konkrét bizonyítás/indoklás végrehajtásából, majd a visszatekintésből áll [5]. Egy modernebb tanulmányban kerül megfogalmazásra, hogy a tanulónak óriási problémája van az állítások logikai szervezésével kapcsolatban [2], erre pedig gyógyírként szolgálhat a Pólya-féle négy fázis indoklásra átfogalmazott változata. Ehhez az gondolatrendszerhez csatolható még Pólya György pár gondolata, melyet Stylianides idéz meg egy munkájában, ahol arról szól, hogy a minták, a sejtések és bizonyítások közötti kapcsolatot fel kell fedeztetni a diákokkal. A minták sejtéseket, a sejtések indoklásokat/bizonyításokat generálhatnak [17].

A témakör tanítása során a kerettantervi elemeknek megfelelő ismereteken haladtam végig a tanulókkal a valószínűségszámítás és statisztika témakörén belül. Csaknem minden egyes órán egy külön – általában körülbelül – 10-15 perces blokkban egy, az adott óra témájához illeszkedő indoklási feladattal foglalkoztam a tanulókkal. Az alábbi bekezdésekben ezeket a feladatokat mutatom be és reflexiót fűzök az órán tapasztaltakhoz.

Órai feladat - 1.

Adj meg önállóan egy elemi eseményt, illetve egy eseményt – ami nem elemi esemény – a következő kísérletekkel kapcsolatban:

1. Szabályos dobókocka dobása.
2. Érmé feldobása.
3. Lap húzása egy francia kártyapakliból.
4. Nyerő számok kisorsolása ötöslottóban.

Beszéljétek meg a padtársotokkal az általatok megadott elemi eseményeket és eseményeket! Véleményezzétek indoklással, a párotok megoldásait, hogy szerintetek miért helyesek, vagy épp miért helytelenek!

Az első órai feladat az eseményekkel foglalkozik, azon belül is az eseményekkel és az elemi eseményekkel. A feladat során a megadott négy kísérlet esetén kellett megadniuk egy – nem elemi – eseményt, továbbá egy elemi eseményt a diákoknak.

Ennél a feladatnál TPS (Think-Pair-Share) módszert alkalmaztam a tanulóknál, ami egy kooperatív vitastratégia, amelyet Frank Lyman fejlesztett ki kollégáival [13]. A

módszert számos kooperatív tanulással foglalkozó szakirodalom feldolgozta már, alapvetően sikeresnek elkönyvelve azt, a tanulók kritikus gondolkodásának fejlesztése irányából [9] [10]. A nevét a három szakaszáról kapta, ahol az elsőben (Think) a tanulók magukban gondolkodnak a kérdéseken, próbálnak azokban előrehaladni. Eztán a második szakaszban (Pair) párokat alkotnak – jellemzően a padtársukkal – és megbeszélik együtt a megoldásaikat, diskurálnak azokról. A végső szakaszban (Share) pár tanuló megosztja közös megoldásait és konklúzióit a problémáról, feladatról az egész osztálynak.

A TPS-módszerhez híven az önálló példák megadására 5 percet hagytam nekik, ami után kaptak még 5 percet, hogy közösen megvitassák egymás megoldásait, végül megosztotta pár páros a saját megoldásait az osztállyal. Mivel tapasztalatlanok ezen a területen a tanulók, az egyik tanulóval bemutattunk egy példát az elvárt párbeszédre. Mivel a téma elején járt az osztály, így tapasztalatlanságukból adódóan számos hibás példa került elő, így a párok másik tagjának mindig akadt olyan eset, ahol társa állításának helytelenségét kellett megindokolnia.

A páros munka féltávjánál egy remek párbeszédet hallva kiemeltem a diákokat, hogy mondják el az egész tanteremnek is miről beszéltek, a 3. kísérletet illetően:

- **X** tanuló: „A 3. kísérlet esetén elemi esemény az ásز húzása, míg esemény (ami nem elemi) a treff húzása.”
- **Y** tanuló: „Az ásز húzása helytelen példa a kísérletet illető elemi eseményekre, mivel az ásز húzása tovább bontható: treff ásز húzása, pikk ásز húzása, stb. eseményekre. Elemi eseményre példaként bármely konkrét lap kihúzását lehet mondani. A treff húzása példának helyes, mint olyan esemény, amely nem elemi esemény, hiszen az esemény több elemi eseményre lehet bontani: treff 2 húzása, treff 8 húzása, stb. ”

A példa hatására több tanulón is láttam, hogy megérti a feladatot. A tanulók között járva egészen kiváló megoldásokat és indoklásokat hallhattam, de figyeltem a gyakori hibás példákat és hibás indoklásokat is. Az idő lejártá után minden egyes részhez együtt is megadtunk egy-egy helyes példát, illetve megadtam egy helytelen példát vagy indoklást is a tanulóknak, aminél annak helytelenségére hangos érveket kellett mondaniuk.

Minden matematikatanár célja kell, hogy legyen, hogy megtanítsa a tanulóinak az indoklás szabályait, meg kell velük ismertetnie az indoklás mintáit és a megfelelő kifejezéseket, mint például a feltételezés, a sejtés, a példa, az ellenpélda, a cáfolat [4]. Ez előző tanulói párbeszéd alkalmával részletesebben tudtunk beszélni a tanulókkal a példa, ellenpélda és cáfolat hármáról. Mitől volt jó az Y tanuló cáfolata, hogyan hozott az X példákra ellenpéldákat, hogy az elfogadható legyen cáfolatként, illetve indoklasként.

Órai feladat - 2.

Szabályos dobókockával dobunk. Az alábbi eseményrendszerek közül melyik alkot erre tekintve teljes eseményrendszert? Válaszodat indokold!

1. $A = \{1\}; B = \{2\}; C = \{3\}; D = \{4\}; E = \{5\}; F = \{6\}$
2. $A = \{1; 3; 4\}; B = \{2; 6\}$
3. $A = \{1; 2; 6\}; B = \{5\}; C = \{2; 3; 4\}$
4. $A = \{1; 6\}; B = \{2; 4\}; C = \{3; 5\}$

A második órai feladat a teljes eseményrendszer fogalmával foglalkozik. A dobókocka dobását tekintve kellett önállóan megvizsgálniuk az egyes megadott eseményrendszereket, hogy azok teljes eseményrendszerek vagy sem. Válaszuk indoklásánál a teljes eseményrendszer tulajdonságait kellett felvetniük, hogy azok megjelennek-e vagy sem. A tanulók ennél a feladatnál megtanulhatták, hogy egy állítás indoklásánál fontos a fogalmak elméleti háttere és azt bármikor eszközként is használhatjuk állításunk bebiztosításához.

Órai feladat - 3.

Egy iskola egy osztályában a következő megállapításokat teszik a tanulók:

1. *Klaudia*: „Dobtam harmincszor a dobókockával, de egyszer sem kaptam 6-ost, így a relatív gyakorisága a 6-os dobásának 0. Ez azt jelenti, hogy ez lehetetlen esemény!”
2. *Viktor*: „Húztam egy lapot a francia kártya pakliból, majd visszatettem és megismételtem ezt 100-szor. A kísérlet során feljegyeztem, hogy hányszor kaptam treffet, pikket, kárót és kőrt, majd elosztottam az egyes számokat 100-zal. Az értékek, amiket kaptam, az egyes események relatív gyakoriságai a kísérletben.”
3. *Ferenc*: „Feldobtam 45-ször ezt a 20 forintost, 30-szor fejet kaptam, 15-ször pedig írást. Ez azt jelenti, hogy nagyobb eséllyel tudok fejet dobni ezzel az érmével!”

Értékeljétek önállóan az állítások helyességét, indokoljátok meg azt, majd beszéljétek meg a párotokkal azokat!

A harmadik órai feladat hasonló felépítéssel dolgozik, mint az első, itt is TPS-módszert alkalmaztam, itt is először önállóan kell értékelnie az állítások helyességét a tanulóknak (4 perc), majd a padtársukkal kellett diskurálniuk az állításaik és indoklásaik helyességéről (4 perc). A feladat a relatív gyakoriság témakörét mélyíti el, illetve a valószínűségi gondolkodást, továbbá magának a valószínűségnek a fogalmát is célozza.

A tanulók szemmel láthatóan hatékonyabban dolgoztak, mint az első órai feladatnál, bátrabban mertek mondatokat megfogalmazni az állításokról, érződött, hogy – még ha minimális is – indoklási élményeik vannak a matematikaórákról.

Egy remekbeszabott párbeszéd a csoport egyik párjától, az első feladatrészeiről:

- **X** tanuló: „Klaudia állítása helyes, hiszen ha egy esemény valószínűsége 0, az esemény lehetetlen esemény.”
- **Y** tanuló: „Igen, a lehetetlen eseményt jól megfogalmaztad, de Klaudiánál a 6-os dobásának a relatív gyakorisága lett 0, a relatív gyakoriságból pedig nem lehet egyenesen következtetni a valószínűségre.”

A Stylianides [17] által leírt érveket hozom elő most ezen párbeszéd tekintetében. X tanuló empirikus érvel próbálja Klaudia kijelentésének alátámasztását megejteni egyfajta tapasztalati érvel, mely helytelen ebben az esetben, további hiányos fogalmi háttér is megmutatkozik az elmondottakban, amire az Y tanuló rá is világít, egyfajta magyarázó érvel csatol vissza X-re, ami viszont hiányos, hiszen az úgy lett volna

teljes, hogy még leírja, hogy a hatos dobásának a valószínűsége $\frac{1}{6}$. Y tanuló a valószínűség és relatív gyakoriság közötti különbségre világít rá, így ez ebben a szituációban bizonyításnak tekinthető, mert az adott osztályban elvárt ismeretekre támaszkodik.

Órai feladat - 4.

Kihívnak minket egy játékra. Van két kocka, amit megszámoztak 1-től 12-ig terjedő számokkal úgy, hogy az egyikre az 1, 3, 5, 7, 9, 11 számokat, a másikra pedig a 2, 4, 6, 8, 10, 12-t írták.

A játék előtt választanunk kell egy kockát. A játék során mindkét játékos dob egyet a saját kockájával és az nyer, aki a nagyobb számot dobja. Melyik kockát válasszuk, hogy nagyobb esélyünk legyen a győzelemre? Válaszodat indokold!

A negyedik órai feladat során valószínűségszámítási gyakorlati feladatot oldhattak meg a tanulók és a megoldásuk helyességét kellett indokolniuk számításukkal. A korábbi két dobókockás feladatoknál vizuális eszközökkel – táblázat használatával –, illetve strukturált adatgyűjtéssel is megoldásokat adtunk a diákokkal. A legtöbben még ragaszkodtak a táblázatos ábrázoláshoz, de voltak akik már a rövidebb, a kedvező elemi események strukturált kigyűjtésével adták meg a kedvező esetek számát. A feladat megoldását a tanulók nagy hányada meg tudta adni, előtte helyes számításokkal alátámasztva – megindokolva – azt.

Órai feladat - 5.

A következő kockajátékot ketten játsszák. Az egyik a játékos, a másik pedig a bank. A játékosnak roppant egyszerű dolga van: eldönti, hogy mekkora pénzösszeget akar kockáztatni, majd kap egy szabályos dobókockát, amivel négyszer dob.

Ha sikerül elkerülnie azt, hogy 6-ost dobjon, akkor visszakapja a pénzének a dupláját, ha viszont a dobott számok között akár csak egy 6-is is szerepel, akkor elveszíti a pénzét.

Megéri-e játszania a játékosnak? Válaszodat indokold!

Az ötödik órai feladat során valószínűségszámítási gyakorlati feladatot oldhattak meg a tanulók és a megoldásuk helyességét kellett indokolniuk számításukkal. A legtöbb diákot a megoldás és így a helyes indoklás megszerzésében a feladatmegoldási képességei korlátozták.

Az ötödik órai feladat legegyszerűbben komplementer esemény használatával megoldható – $P(\text{dob 6-ost}) = 1 - P(\text{nem dob 6-ost})$ –, az óra témája is ennek használata volt, így egyfajta irányítást mutatva ezen feladat megoldására. Akik kényelmesen mozogtak már az óra középső/végső szakaszában az ilyen feladatok körében, azoknak problémamegoldásuk helytálló volt.

Órai feladat - 6.

Rudolf egy teszt jellegű dolgozatot ír biológiából a következő tanítási napon, ami 10 kérdésből fog állni és minden kérdésnél 4 válaszlehetőség közül kell kiválasztania az egyetlen helyes választ. A dolgozaton 5 helyes választól jár legalább kettes osztályzat a tanulóknak.

Az dolgozat előtti utolsó biológia óra végén Rudolf meglátta a Tanárnő holnapi dolgozathoz készített megoldókulcsának bal alsó sarkán a következőt: „8. D, 9. A, 10. B”. Rudolf úgy vette, hogy három helyes válasza már biztosan van, így már nem is tanul a dolgozatra, a többi 7 kérdésre tippelve ad majd választ, továbbá kijelentette:

Rudolf: „Így biztosan át fogok menni tanulás nélkül is!”

Rudolf az egyik osztálytársának Károlynak is elmondta az előző információit, amire így reagált Károly:

Károly: „Egyáltalán nem biztos, hogy meglesz így a kettes! Sőt, szerintem még így is nagyobb esély van arra, hogy egyest kapsz, minthogy legalább kettest!”

Mi a logikai értéke Rudolf és Károly állításának? Válaszodat indokold!

A hatodik órai feladatban az előző két feladathoz hasonlóan egy gyakorlatibb feladatról van szó, mégis két fiktív tanuló állítását kellett értékelniük, amelyeket a megoldásról próbáltak „megsejteni”.

Rudolf állítását mindenféle számítás nélkül is megcáfolta minden tanuló. A főszereplőnk biztos eseménynek hívja az elégséges megszerzését – azaz a legalább két helyes válasz adását a maradék hét kérdésből –, a következő kísérletet tekintve: hét kérdés, kérdésenként négy válaszlehetőség, amiből egy helyes válasz esetén tippelés. Nyilvánvalóan, ebben a kísérletben lehetséges esemény az is, hogy nulla, vagy egy helyes választ ad Rudolf a maradék hét kérdésre, ezáltal a legalább két helyes válasz adása – a maradék 7 kérdésből – egyáltalán nem egy biztos esemény. Rudolf állítása ezáltal hamis.

Károly állítása egy sokkal összetettebb volt, hiszen ő egyszerre két dolgot is állított. Az előzőek alapján az állítás első felével egyetérthetünk, valóban nem biztos, hogy

meglesz Rudolfnak a kettes osztályzat ezekkel a körülményekkel. Az állítás második felében Károly szerint nemcsak hogy nem biztos, hogy átmegy Rudolf, de még nagyobb esély is van arra, hogy elégtelent kap a végén. A gondolatmenetben eddig minden tanuló önállóan eljutott, továbbá arra is rájöttek a legtöbben, hogy számításokra lesz szükségük az indokláshoz, s így a megoldás megadásához.

A számítás során érdemes volt kihasználnia a tanulóknak a komplementer-eseményekre vonatkozó – már a korábbiaknál is használt – képletet: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Egy pár perc várakozás után beavattattam – azokat is ebbe, akik esetleg nem tudtak hogyan elindulni ebben. Az elégséges megszerzésének valószínűségére $\approx 0,55$ lett az eredményünk végül már együttesen, ami azt jelenti, hogy bár valóban nem biztos az, hogy Rudolf megkapja az elégségest, de mégis nagyobb esélye van erre, minthogy elégtelent kapjon. Károly állításának második fele hamis volt, így a teljes állítását is hamisnak tekintjük.

Ebben a feladatban – mint pár másik önálló feladatban – a tanulóknak sajátjuként kellett megadniuk a választ és az ahhoz csatolt indoklást. A korábbiakban leírtam, hogy mennyire fontos a társas interakció és kommunikáció az érvelés tanításában, azonban Balacheff szerint a társas interakció bizonyos körülmények között korlátozó tényező lehet. Úgy gondolta, hogy a tanulók a sikervágyaik miatt nem feltétlenül képesek összehangolni az egymásétól eltérő nézőpontjaikat [1]. Ezek miatt a gondolatok miatt az érvelési órai feladatok között szerepelnek önálló munkavégzést, illetve páros munkát is igénylő feladatok.

Órai feladat - 7.

Egy iskola egy osztályában a következő megállapításokat teszik a tanulók:

1. *Ákos*: „Ha egy adatsokaság szórása nulla, akkor minden adat nulla!”
2. *Eleonóra*: „Egy kísérlet után a kapott adatsokaság terjedelme megadja az összes lehetséges kimenetel számát!”
3. *Kolos*: „Egy adatsokaság alsó kvartilisének és felső kvartilisének átlaga éppen a medián!”
4. *Flóra*: „Egy adatsokaság módusza egyben az adatsokaság átlagához legközelebb álló adat is!”

A párok egyik tagja értékelje a páros számú állítások helyességét, míg a másik a páratlan számúakat. Ezután indokoljátok meg társatoknak az egyes megoldásaitokat!

A hetedik órai feladatban már áttérünk a statisztika témakörére a tanulókkal, ahol is az adatsokaságokat jellemző értékekről tanultunk. A tanulók itt is a TPS-módszer keretein belül adhattak megoldásokat az állítások helyességére, azonban az eddigi TPS-módszeres feladatokkal ellentétben itt már különböző állításokkal foglalkoztak a tanulók az önálló gondolkodási (Think) részben. A párok két tagjának tehát most különböző állításokat kellett értékelnie, majd bemutatnia egymásnak, tálalva az általa elemzett állítás helyességéről szóló véleményét, illetve az ehhez tartozó indoklást. Miután ez megtörtént, az eddig hallgató társ reagál a párjától hallottakra, elfogadja indoklása helyességét vagy sem és indokol.

A tanulók ebben a szakaszban már teljesen megértették, hogy az érvelés magába foglalja az érvek kialakításában, kritizálásban val cserét és együttműködést is, a Gila Hanna által írtaknak megfelelően [4]. Bár az előteszt – és később az azzal megegyező utóteszt és késleltetett utóteszt – feladatai között a társak nem számíthatnak egymásra, de másokra ugyanúgy kell reagálniuk, társas szituációkban kell emberekre reflektálniuk, véleményt formálniuk. Ha ezt hatékonyan tudják megtenni, a fejlesztés eredményektől függetlenül is célt ért.

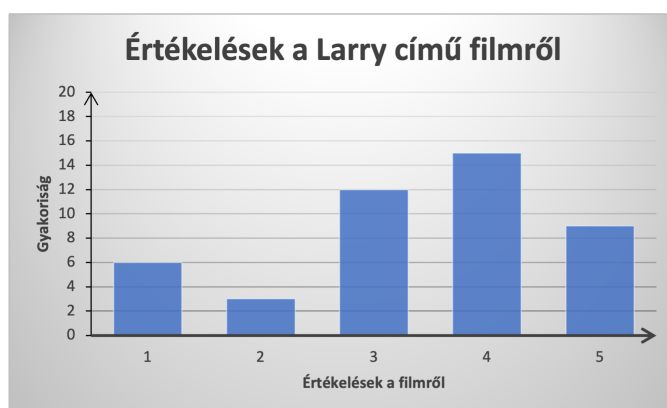
A National Council of Teachers of Mathematics az 1980-2000 közötti években ajánlásokat adott ki az iskolai matematikaoktatással kapcsolatban, melyben egy fő pontként kiemelték, hogy a matematikai alapkészségek meghatározásának túl kell mutatniuk azon, hogy csupán a számítási készségeket foglalják magukba burkoltan. Ezen belül részajánlások tértek ki a kommunikációs készségek elsajátítására, illetve a logikus érvelés, információfeldolgozás és döntéshozatal folyamatainak alapvetőnek tekintésére [5]. A feladat tükrözi ezeket a mai napig népszerű és jónak tartott elveket, fejleszti a diákok kommunikációs- és érveléshez köthető készségeit egyaránt.

A tanulók egyik legjobban vett akadály volt ez a feladat, kiemelkedő munkamorál volt jellemző ennél a feladatnál, megérzésem szerint a rengeteg indoklási-érvelési tapasztalásuk okán. A tanulók javarésze érezte az állítások számszerű példákkal könnyű válaszhatóságát, ebben az irányban pedig ellenpéldákat igyekeztek kreálni. Páran ugyan nem így indultak el, de mikor felvetült az ellenpélda kifejezés, szinte kivétel nélkül mindenki páros célba ért. Érezhetően jobban reflektáltak egymás munkáira, megnyilvánulásaira a párok, konstruktív gondolatokat osztottak meg egymással a megoldásokkal kapcsolatban.

Órai feladat - 8.

Alkossatok önállóan három igaz és három hamis állítást az alábbi képen látható diagramról!

Olvassátok fel egymásnak felváltva általatok kreált állításokat a padtársatokkal! A másik félnek mindig ki kell találnia, hogy az adott állítás igaz vagy hamis, és meg is kell indokolnia a választát!



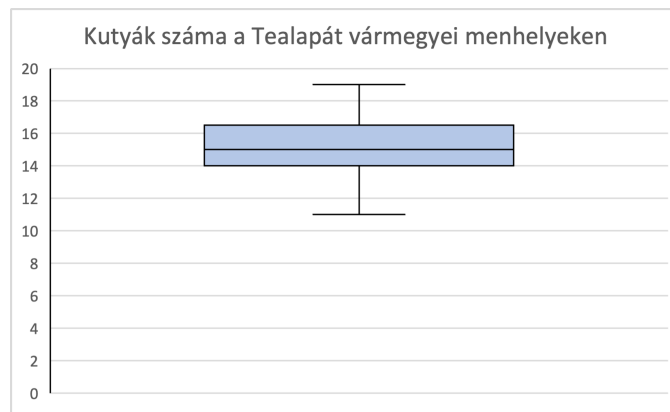
A nyolcadik órai feladatban a párok tagjainak készakarva kell igaz és hamis állításokat megadniuk a feladathoz mellékelt oszlopdiagramról. A feladat remek működését az biztosította, hogy akarva akaratlanul is rendkívül egyszerű állításokat adtak meg a tanulók a diagrammal kapcsolatban, legyenek azok igazak vagy hamisak. A magától értetődőnek tűnő állítások helyességéről talán nehezebb indokolniuk, hiszen a „látszik, egyértelmű” kifejezések jönnek ki a tapasztaltabb matematikával foglalkozók szájából is. Ebben a feladatban most pontosan az jelentette a kihívást, hogy ezeket megindokolják a tanulók, de hamar ráéreztek ennek az ízére is.

Órai feladat - 9.

Alkossatok önállóan három igaz és három hamis állítást az alábbi képen látható diagramról!

Olvassátok fel egymásnak felváltva általatok kreált állításokat a padtársatokkal! A másik félnek mindig ki kell találnia, hogy az adott állítás igaz vagy hamis, és meg is kell indokolnia a választát!

A kilencedik órai feladat az előző példánk testvére, annyi különbséggel, hogy az általuk eddig ritkábban látott dobozdiagrammal kellett dolgozniuk. Különbséget volt még,



hogy kiemeltem a tanulóknak azt, hogy igyekezzenek kreatívabb, nehezebb állításokat adni társuknak, hogy többet kelljen gondolkodnia annak logikai értékéről. A diákoknak sikerült magasabb szintre emelni az állítások megfogalmazását, olyannyira, hogy feladatra plusz időt kellett adnom, mert valóban nagyobb kihívást jelentő állításokat adtak egymásnak.

Órai feladat - 10.

Madeinország dörzsölt vezetője, II. Tihamér megjelentette az alábbi diagramot a nemzeti újságban, aminek folytán országának – Párnalandia felé – csökkenő tartozásáról értekezett:

II. Tihamér: „Ahogyan az ábra is mutatja, az elmúlt 10 évben fokozatosan csökkent Hazánk Párnalandia felé való tartozása, ami a korábbi horribilis mértékű tartozáshoz képest idénre már elenyésző mennyiségű! Ez is a rendszer hatékonyságát és sikerességét mutatja!”

Madeinország lakójaként belső feladatodnak érzed az ilyen megnyilvánulások kritikus elemzését. Vizsgáld meg a diagramot és II. Tihamér állítását! Igazat mondott vagy hazudott az ország vezetője? Válaszodat indokold!

A tizedik órai feladat óráján a diagramok kritikus vizsgálatáról beszéltünk a tanulókkal, több manipulációt is megvizsgáltunk a diagramok és statisztikai értékek tekintetében. A diagramok kritikus vizsgálata, illetve azok manipulációja kerettantervi elem a statisztika témakörében [11].

Ez a konkrét feladat a diagram részeinek megjelenítését teszi célkeresztbe, önálló feladat formájában. A tanulók jelentős részének problémát okozott ez a feladat, úgy tűnt, még ha világos is a legtöbбекnek, hogy miért kell kritikusan néznünk egy diagramot, továbbá néztünk több nevezetes buktatót ezek esetén, nehezen tudják átvinni a diagramokról megszerzett ismereteiket ezekbe a gyakorlati, életszerű példákba.



A megoldásra – kisebb segítségnyújtások mellett – fokozatosan csaknem mindenki rájött, konstatálva azt, hogy egy-egy kisebb változtatás, egy-egy kisebb hiányosság a diagramon mennyire más jelentéseket adhat annak. Jelen esetben a diagram hiányzó része a függőleges tengely maga, ami megadná nekünk, hogy mennyi is az a bizonyos tartozás és milyen mértékben csökkent az. Egyes grafikonokon az y tengely értékei gyakran nem 0-tól indulnak. Így például, ha az y tengely első beosztása 9 egység, a legfelső pedig 10 egység, akkor alig csökkent az adósság, pedig a diagram oszlopai pont, hogy ellenkezőleg, annak nagymérték csökkenését hitetik el.

2.3.3. Az utóteszt

A tanulók az utóteszt során az előteszt feladatait oldották meg ismételten. Az utótesztre a Valószínűségszámítás és Statisztika témakörét feldolgozó témazáró dolgozat után következő órán került sor, 2023. május 22-én (hétfőn), 12:05-12:50 között, egy 45 perces tanóra keretein belül.

A tanulók az utóteszten – az előteszthez képest – csendesen, kevés kérdéssel és gyorsabban dolgoztak. A vizsgálatom reményében ezekhez a tulajdonságokhoz csatlakozott a hatékonyság növekedése is, azonban ez majd csak a teszt elemzése során tudom meg. Az utóteszt körülményei megegyeznek az előteszt körülményeivel, pontosan ugyanabban az órában és napon írhatták meg a tanulók ezt a tesztet is, ugyancsak anonim módon.

Az utóteszt célja annak a felmérése volt, hogy a célzott indoklást középpontba helyező feladatmegoldások, fejlesztések hatására fejlődött-e a csoport tanulóinak önálló indoklási- és érvelési képessége, az előtesztben tapasztalt eredményekhez képest.

2.3.4. A késleltetett utóteszt

A késleltetett utóteszt már a következő tanévben zajlott le a tanulóknál, mikor már nem én tanítottam a csoportot. Ennek ideje 2023. október 2-a, hétfő, ugyanúgy 12:05-12:50 között, ugyanannak a 45 perces tanórának a keretein belül, mint az elő- és utótesztben.

Az utóteszthez képest a tanulók zajosabban, zavartabban dolgoztak, az előteszthez képest azonban még mindig kevésbé hangosan. A tanulók ekkorra már jól ismerték a tesztet, hiszen harmadjára találkoztak vele, még ha nagyobb kihagyásokkal is.

A késleltetett utóteszt célja annak a felmérése volt, hogy a tanulók mennyire emlékeznek a jól bevált indoklási-érvelési sémákra, mennyire tudják előhúzni az órákon tanultakat és végső soron, ha növekedett a hatékonyságuk az utóteszten, csökkent-e, s mennyivel csökkent az indoklási hatékonyságuk az eltelt idő alatt.

3. fejezet

A teszteredmények elemzése

3.1. A tesztek értékelésének módja

A tesztek értékelésekor minden egyes tesztfeladatra két pontot kaphattak a tanulók a megoldásaik szerint, amiből egy pont a feladat helyes megoldására járt, míg egy pont pedig a megoldásuk helyes indoklása alapján volt megszerezhető. Az előző fejezetben az egyes bemutatott tesztfeladatok alatt részletezve van azok megoldása is, azonban nem csupán csak pontosan ezeket fogadtam el, hanem a főbb lényegi részeket tartalmazó, esetlegesen csonkább indoklásokat is pontot érőnek tekintettem. Az adatokat táblázatba rendeztem és statisztikai próbáknak vetettem azokat alá. A statisztikai elemzést a JASP (0.18.1.0) verziójában ([7].) végeztem.

3.2. Leíró statisztikai jellemzés

A 3.1. táblázatban leíró statisztikai jellemzést adtam az egyes tesztek egyes részeiről. Az elemzés során külön fogok foglalkozni a megoldásokra, illetve az indoklásokra kapott pontszámokkal, továbbá az utóbbi kettőt egy kalap alá vevő összes pontszámmal, amelyet a tanulók elértek az előteszten (00E), az utóteszten (01U) és a késleltetett utóteszten (002K). Az egyes teszteken összesen 18 pont volt a maximálisan megszerezhető, ezekből 9 a megoldásokra, 9 pedig az indoklásokra.

Mindhárom tesztet 28 tanuló írta meg. Jól látható ebben a táblázatban, hogy az átlagok azt mutatják, amit el is várnánk a mintától, az előteszt eredményei mind a megoldási, mind az indoklási és így az összes pontszám esetén is gyengébbek, mint az utóteszté és késleltetett utóteszté, azonban a késleltetett utóteszt átlagai gyengébbek, mint az utóteszt eredményei. Nyilvánvalóan ez még kevés ahhoz, hogy a tanítási folyamatot sikeresnek könyveljem el, de kedvező irányokat jelez elő ez az adatcsoport. Az átlagok szórása az összes pontszámot tekintve kiegyensúlyozottnak mondható a három teszt adatait vizsgálva, míg a megoldási pontoknál a szórás egyre csökkent az

előtesztől a késleltetett utótesztig haladva, addig az indoklási pontokat tekintve épp az előtesztnél volt a legkisebb az eltérés. Ennek az oka az előteszt gyenge átlaga, és szerzett pontjainak kis terjedelme lehet.

A legmagasabb elért pontszámok az előteszthez mindig stagnáltak vagy növekedtek az utóteszten, majd a késleltetett utóteszten az előzőhöz képest stagnáltak vagy csökkentek. Ezekhez képest az elért pontok terjedelme rendre csökkent vagy stagnált az utótesztre, majd növekedett onnan a késleltetett utótesztre. Látható például, hogy – az előzőekhez híven – az összes pontszámot tekintve az utóteszt leggyengébb eredménye közelítőleg megegyezik az előtesztek átlagpontszámával.

Érdekes még megemlíteni, hogy a tanulók megoldási pontjai között minden teszten volt maximális, az indoklási pontokat tekintve viszont egyetlen kilenc pontos eredmény sem született.

	Megoldás			Indoklás			Összes		
	00E	01U	02K	00E	01U	02K	00E	01U	02K
Valid	28	28	28	28	28	28	28	28	28
Mean	4.893	6.500	6.071	2.143	4.000	3.357	7.036	10.500	9.429
Std. Deviation	2.006	1.478	1.331	1.297	1.587	1.569	2.899	2.560	2.501
Minimum	1.000	4.000	3.000	0.000	2.000	1.000	3.000	7.000	5.000
Maximum	9.000	9.000	9.000	5.000	7.000	7.000	13.000	15.000	14.000

3.1. ábra. Leíró statisztika

3.3. Az összes pontszám összehasonlítása az előtesztben, az utótesztben és a késleltetett utótesztben

A statisztikai elemzést az összes pontszám vizsgálatával kezdem. Az adatokat először Levene-tesztnek (3.2. táblázat) vettem alá, amellyel azt akartam megtudni, hogy alkalmazhatók-e a mintára ANOVA-tesztet. A Levene-teszt azt vizsgálja, hogy az egyes tesztek szórási értékei között van-e szignifikáns különbség. Ha a szórások túlságosan eltérőek, az befolyásolhatja az ANOVA-teszt eredményeit. Mivel $p = 0,764 > 0,05$, a Levene-teszt szerint ANOVA-tesztet alkalmazhatok (3.3. táblázat), hiszen ez azt mutatja, hogy a tesztek szórásai közötti különbségek valószínűleg véletlen eredmények.

Összes pontszám

Levene teszt:

Test for Equality of Variances (Levene's)

F	df1	df2	p
0.271	2.000	81.000	0.764

$p > 0.05$, ANOVA analízist alkalmazunk

3.2. ábra. Levene-teszt - az összes pontszámra

A számolt F statisztikai érték azt mutatja, hogy a csoportok közötti változás milyen mértékben tér el a véletlen variabilitástól. Az itt kapott 12,455 magas értéknek számít, a hozzá tartozó $p < ,001$ érték pedig alacsony. Az ANOVA-teszt ezek alapján kimutatta, hogy a tesztek közötti különbségek statisztikailag szignifikánsak voltak ($F(2, 81) = 12,455, p < ,001$).

ANOVA - Összes

Cases	Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
Teszt	176.167	2	88.083	12.455	< .001
Residuals	572.821	81	7.072		

Note. Type III Sum of Squares

3.3. ábra. ANOVA-teszt az összes pontszámra

Az ANOVA-tesztből megtudtam, hogy a tesztek között szignifikáns különbség van, viszont ebből nem tudtam meg, hogy pontosan mely tesztek között van ez a bizonyos különbség. A Post Hoc Comparisons – Tukey-Kramer – tesztrel (3.4. táblázat) választ kapok ezen kérdéses információkra. A teszt eredményei alapján az előteszt eredménye szignifikánsan különbözik mind az utóteszt, mind a késleltetett utóteszt eredményétől, de az utóteszt és a késleltetett utóteszt eredményei között nincs szignifikáns különbség, mint azt a p_{tukey} értékei mutatják is. A 3.5. ábrán – ami a teszt-hez tartozik – a hibavonal a standard error-t jelöli.

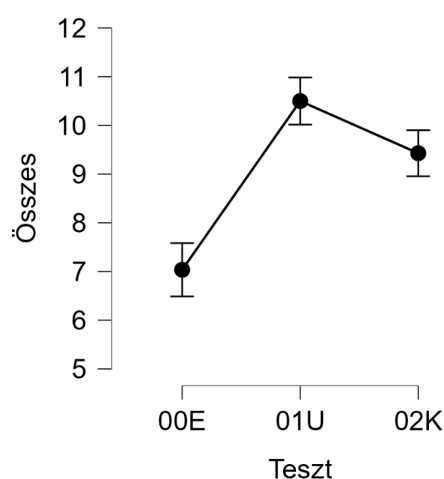
Post Hoc Comparisons - Teszt

		Mean Difference	SE	t	p_{Tukey}
00E	01U	-3.464	0.711	-4.874	< .001 ***
	02K	-2.393	0.711	-3.367	0.003 **
01U	02K	1.071	0.711	1.508	0.293

** $p < .01$, *** $p < .001$

Note. P-value adjusted for comparing a family of 3

3.4. ábra. Post Hoc Comparisons teszt - összes pontszám



3.5. ábra. Post Hoc Comparisons teszt - összes pontszám

3.4. A megoldásra kapott pontszám összehasonlítása az előtesztben, az utótesztben és a késleltetett utótesztben

A megoldásokra kapott pontszámok vizsgálatával folytatom a tesztek analitikus elemzését. Ehhez először ismét a Levene-teszthez (3.6. táblázat) nyúltam a korábban már leírt okokból. A megoldásokat tekintve a Levene-teszt alapján nem alkalmazhatok ANOVA-tesztet, mivel $p = 0,030 < 0,05$. Ezért a következő lépésben nem paraméteres Kruskal-Wallis tesztet (3.7. táblázat) alkalmazok.

A Kruskal-Wallis teszt azt vizsgálja, hogy a – legalább – három független teszt között van-e statisztikailag szignifikáns különbség a rangsorolt értékeik alapján. A teszt azt mutatja, hogy a tesztek eredményei között szignifikáns eltérés van ($U(2) = 10,608$, $p = 0,005$).

A megoldásra kapott pontszám

Test for Equality of Variances (Levene's)

F	df1	df2	p
3.661	2.000	81.000	0.030

3.6. ábra. Levene-teszt a megoldásra kapott pontszámra

Kruskal-Wallis Test

Factor	Statistic	df	p
Teszt	10.608	2	0.005

3.7. ábra. Kruskal-Wallis-teszt a megoldásra kapott pontszámra

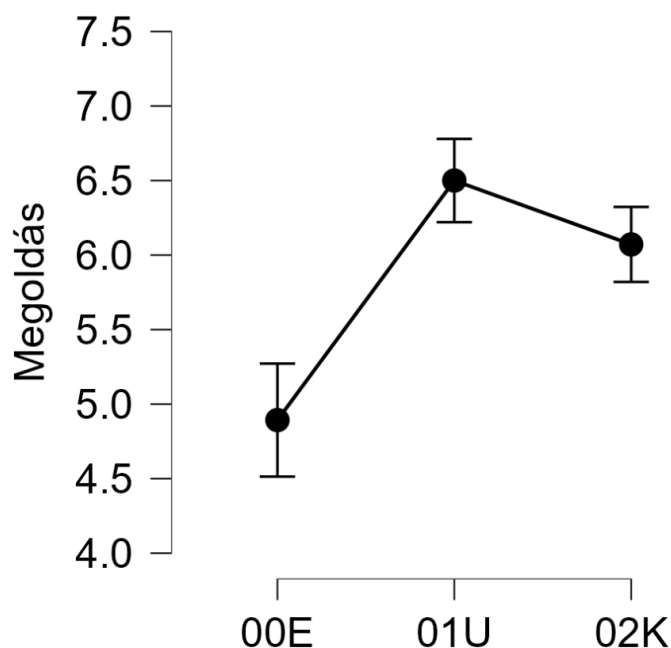
A szignifikáns eltérésről már tudok, kérdés, hogy mely tesztek között jelent ez meg, így ismételten egy Post Hoc Comparisons tesztet alkalmazok, a Dunn-féle Post Hoc Comparisons tesztet. Ezt a post hoc tesztet szokás alkalmazni Kruskal-Wallis tesztet követően, emiatt döntöttem emellett. A páros összehasonlítás szignifikáns különbséget mutat az előteszt és az utóteszt, valamint az előteszt és a késleltetett utóteszt eredményei között.

Dunn's Post Hoc Comparisons - Teszt

Comparison	z	W_i	W_j	p
00E - 01U	-3.177	31.018	51.339	0.001 **
00E - 02K	-2.209	31.018	45.143	0.027 *
01U - 02K	0.969	51.339	45.143	0.333

* p < .05, ** p < .01

3.8. ábra. Dunn's Post Hoc Comparisons teszt - megoldásra kapott pontszám



3.9. ábra. Dunn's Post Hoc Comparisons teszt - megoldásra kapott pontszám

3.5. Az indoklásra kapott pontszám összehasonlítása az előtesztben, az utótesztben és a késleltetett utótesztben

Az előzőeknek megfelelően vizsgáltam az indoklásra kapott pontszámokat is az egyes tesztek során. A Levene-teszt (3.10. táblázat) eredménye alapján, mivel $p = 0,505 > 0,05$, alkalmazhatok ANOVA-tesztet.

Assumption Checks

Test for Equality of Variances (Levene's)

F	df1	df2	p
0.690	2.000	81.000	0.505

3.10. ábra. Levene-teszt az indoklásra kapott pontszámra

Az indoklási pontszámokat vizsgáló ANOVA-teszt (3.11. táblázat) alapján szignifikáns különbség van a tesztek között, ám ismét meg kell vizsgálnom, hogy mely tesztek között van ez a különbség, ehhez az összes pontszám vizsgálatának mintájára Post Hoc Comparisons – Tukey-Kramer – tesztet alkalmazok.

ANOVA - Indoklás					
Cases	Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
Teszt	49.810	2	24.905	11.216	< .001
Residuals	179.857	81	2.220		

Note. Type III Sum of Squares

3.11. ábra. ANOVA-teszt az indoklásra kapott pontszámra

A tesztek összehasonlítása után az előzőeknek megfelelő eredményt kaptam. Az előteszt és utóteszt eredménye között szignifikáns eltérést mutat úgy, ahogy az előteszt és a késleltetett utóteszt eredménye között is. Az utóteszt és a késleltetett utóteszt eredményei között nincs szignifikáns különbség.

Post Hoc Comparisons - Teszt					
		Mean Difference	SE	t	p _{key}
00E	01U	-1.857	0.398	-4.663	< .001 ***
	02K	-1.214	0.398	-3.049	0.009 **
01U	02K	0.643	0.398	1.614	0.246

* p < .05, ** p < .01, *** p < .001

3.12. ábra. Post Hoc Comparisons teszt - az indoklásra kapott pontszám

3.6. Hatásméret

Zárásként megvizsgáltam az eredmények hatásméretét. Az előteszt és az utóteszt eredménye közötti összehasonlítás minden kategóriában szignifikáns eltérést mutatott. Vizsgálatunk szempontjából ennek a különbségnek az analizálása volt a legfőbb célom, így ezen két teszt eredményeit összevetettem T-próbával. A teszt az előteszt és utóteszt közötti szignifikáns eltéréshez közepes hatásméretet mutatott. A 3.13. táblázat negatív Cohen's d értékei arra utalnak, hogy az előtesztben rendre gyengébbek az eredmények, míg a hatásméret 0,2 és 0,5 közé tehető mind a megoldásra kapott, mind az indoklásra kapott, mind az összes pontszám tekintetében, ez pedig közepes hatásméretként értelmezhető.

Independent Samples T-Test					
	t	df	p	Cohen's d	SE Cohen's d
Összes	-4.739	54	< .001	-1.267	0.316
Megoldás	-3.413	54	0.001	-0.912	0.294
Indoklás	-4.795	54	< .001	-1.281	0.317

Note. Student's t-test.

3.13. ábra. Independent Samples T-test

Összegzés

Előzetes a tanulóim érvelési készségének fejlesztése volt. A témakör elsajátítása során sikerként könyveltem el a tanulók kommunikációját egymással, hiszen az érveléses órai feladatok során egyre hatékonyabban tudtak egymással diskurzust folytatni, illetve egyre könnyebben fejezték ki gondolataikat az indoklás segítségével.

Az előteszt kifejezetten gyengén sikerült a csoportnak, szinte várhatóan gyengén is, hiszen a statisztika és valószínűességszámítás témakörében, továbbá az indoklás talaján is tapasztalatlanabbak voltak még ekkor. A folyamatos fejlesztés hatására szignifikánsan javult a teljesítményük a témazárót követő – de attól független – utótesztre. Egyértelmű fejlődést mutattak be a diákok mind a feladatok megoldásában, mind a megoldásaik indoklásában az utóteszt során. Pozitív tapasztalat volt még a vizsgálat során, hogy a késleltetett utóteszthez érve, a tanulók teljesítménye nem romlott jelentősen az utóteszthez képest, még itt is sokkal elfogadhatóbb indoklásokat fogalmaztak meg, mint az előtesztben.

A jövőbe mutatóan minden egyes matematikát oktatónak gondolkodnia kell az érvelési feladatok tanórákra bevitelén. Persze az előző gondolatom nem a létjogosultságát kérdőjelezi meg ezeknek a feladatoknak a matematikaoktatás keretein belül, hanem a konkrét helyek és a konkrét alkalmak felfedezését szorgalmazza, ahol kiválóan tudjuk fejleszteni a tanulóink ilyen irányú készségeit. Az utolsó órákon tapasztalt kommunikációs sokszínűséget és fejlődést hallva az jutott mindig eszembe, hogy nagyon megérte azt az óránként 10-15 percet erre felhasználni, hiszen ezzel, hogy jobban tudják kifejezni a gondolataikat a tanulók, célzottabban tudnak segítséget kérni, illetve segítséget adni is egymásnak, amikor arra van szükség. Észrevehető volt a szakmai nyelv erőteljesebb megjelenése is – ami egyébként a csoportnál kevésbé volt jellemző –, ez pedig kétségtelenül a rengeteg szóbeli feladatmegoldásnak volt köszönhető, hiszen ezek során a diákok kénytelenek voltak egész mondatokat megfogalmazni az egyes problémákról.

Stylianides szeirnt a bizonyítások – és érvelések – céljai közé kell sorolnunk a magyarázatot, az igazolást, a hamisítást és az új tudás generálását [17], ezt pedig meg kell mutatnunk a tanulóinknak is.

Végző gondolatként azt mondanám, hogy az érvelési készségek fejlesztése mindig egy fontos feladata volt a matematikaoktatásnak, azt pedig nem szabad hagynia a matematikatanári társadalomnak, hogy kikopjon az évek során a tanítási gyakorlatunkból.

Ezt a gondolatot pedig az érvelésfejlesztés a bőséges jótékony hatásával *indokolja meg* nekünk.

Irodalomjegyzék

- [1] BALACHEFF, N.: *The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof.* In A. J. Bishop, E. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192), (1991). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- [2] DURAND-GUERRIER, V., BOERO, P., DOUEK, N., EPP, S.S., TANGUAY, D.: *Examining the role of logic in teaching proof.* In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 369-389), (2012). Dordrecht: Springer.
- [3] FISCHBEIN, E.: *Intuition and proof.* *For the learning of mathematics* 3(2), 8-24. (1982).
- [4] HANNA, G.: *Mathematical Proof, Argumentation, and Reasoning.* In: Lerman, S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham (2020). https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_102
- [5] HANNA, G.: *Proof in mathematics education, 1980-2020: An Overview.* *Journal of Educational Research in Mathematics* (2020). <https://doi.org/10.29275/jerm.2020.08.sp.1.1>
- [6] HAREL, G., & SOWDER, L.: *Students' proof schemes: Results from exploratory studies.* In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education, III* (pp. 234-283). Washington DC: Mathematical Association of America (1998).
- [7] JASP (0.18.1.0) statisztikai elemzőprogram. <https://jasp-stats.org>
- [8] JUHÁSZ ISTVÁN, OROSZ GYULA: *Matematika 10. tankönyv.* Oktatási Hivatal https://www.tankonyvkatalogus.hu/pdf/OH-MAT10TB__teljes.pdf (2023. 11. 27.)
- [9] KADDOURA, M.: *Think Pair Share: A Teaching Learning Strategy to Enhance Students' Critical Thinking.* *Educational Research Quarterly*, v36 n4 p3-24 (2013). <http://erquarterly.org/index.php?pg=content> (2023. 11. 22.)

- [10] KAGAN, S., KAGAN, M.: *Kagan Cooperative Learning*. San Clemente, California. A: Kagan Publishing (2009).
- [11] *Kerettanterv, Matematika 9-12. évfolyam*. Oktatási Hivatal (2020).
- [12] LAKATOS IMRE: *Bizonyítások és cáfolatok*. Gondolat Kiadó, Budapest (1981)
- [13] LYMAN, F.T.: *The responsive classroom discussion: The inclusion of all students*. College Park: University of Maryland Press, pp. 109 – 113. (1981).
- [14] *Nemzeti alaptanterv (2020)*. Magyar Közlöny, 17. szám. (2020. január 31.)
- [15] PÓLYA GYÖRGY: *A gondolkodás iskolája*. Gondolat Kiadó, Budapest (1971).
- [16] RÉNYI A.: *Gondolatok a valószínűségszámítás tanításáról*. (1969-1970).
- [17] STYLIANIDES, GABRIEL J.: *Reasoning-and-Proving in School Mathematics Text-books*. Mathematical Thinking and Learning, 11:4, 258-288. (2009).

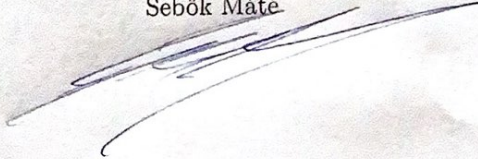
Nyilatkozat

Alulírott *Sebők Máté*, büntetőjogi felelősségem tudatában kijelentem, hogy az általam benyújtott, *Tizedik évfolyamos tanulók érvelési készségének fejlesztése a statisztika és valószínűségszámítás témakörben* című szakdolgozat önálló szellemi termékem. Amennyiben mások munkáját felhasználtam, azokra megfelelően hivatkozom, beleértve a nyomtatott és az internetes forrásokat is.

Aláírással igazolom, hogy az elektronikusan feltöltött és a papíralapú szakdolgozatom formai és tartalmi szempontból mindenben megegyezik.

Eger, 2023. december 4.

Sebők Máté



Mellékletek

Órai feladat - 1.

Adj meg önállóan egy elemi eseményt, illetve egy eseményt – ami nem elemi esemény – a következő kísérletekkel kapcsolatban:

1. Szabályos dobókocka dobása.
2. Érmefeldobás.
3. Lap húzása egy francia kártyapakliból.
4. Nyerő számok kisorsolása ötöslottóban.

Beszélgétek meg a pártársotokkal az általatok megadott elemi eseményeket és eseményeket! Véleményezzétek indoklással, a pártok megoldásait, hogy szerintetek miért helyesek, vagy épp miért helytelenek!

Órai feladat - 2.

Szabályos dobókockával dobunk. Az alábbi eseményrendszerek közül melyik alkot erre tekintve teljes eseményrendszert? Válaszodat indokold!

1. $A = \{1\}; B = \{2\}; C = \{3\}; D = \{4\}; E = \{5\}; F = \{6\}$
2. $A = \{1; 3; 4\}; B = \{2; 6\}$
3. $A = \{1; 2; 6\}; B = \{5\}; C = \{2; 3; 4\}$
4. $A = \{1; 6\}; B = \{2; 4\}; C = \{3; 5\}$

Órai feladat - 3.

Egy iskola egy osztályában a következő megállapításokat teszik a tanulók:

1. *Klaudia*: „Dobtam harmincszor a dobókockával, de egyszer sem kaptam 6-ost, így a relatív gyakorisága a 6-os dobásának 0. Ez azt jelenti, hogy ez lehetetlen esemény!”
2. *Viktor*: „Húztam egy lapot a francia kártya pakliból, majd visszatettem és megismételtem ezt 100-szor. A kísérlet során feljegyeztem, hogy hányszor kaptam treffet, pikket, kárót és kőrt, majd elosztottam az egyes számokat 100-zal. Az értékek, amiket kaptam, az egyes események relatív gyakoriságai a kísérletben.”
3. *Ferenc*: „Feldobtam 45-ször ezt a 20 forintost, 30-szor fejet kaptam, 15-ször pedig írást. Ez azt jelenti, hogy fejet nagyobb eséllyel tudok dobni ezzel az érmével!”

Értékeljétek önállóan az állítások helyességét, indokoljátok meg azt, majd beszéljétek meg a párotokkal azokat!

Órai feladat - 4.

Kihívunk minket egy játékra. Van két kocka, amit megszámoztak 1-től 12-ig terjedő számokkal úgy, hogy az egyikre az 1, 3, 5, 7, 9, 11 számokat, a másikra pedig a 2, 4, 6, 8, 10, 12-t írták.

A játék előtt választanunk kell egy kockát. A játék során mindkét játékos dob egyet a saját kockájával és az nyer, aki a nagyobb számot dobja. Melyik kockát válasszuk, hogy nagyobb esélyünk legyen a győzelemre? Válaszodat indokold!

Órai feladat - 5.

A következő kockajátékot ketten játsszák. Az egyik a játékos, a másik pedig a bank. A játékosnak roppant egyszerű dolga van: eldönti, hogy mekkora pénzösszeget akar kockáztatni, majd kap egy szabályos dobókockát, amivel négyszer dob.

Ha sikerül elkerülnie azt, hogy 6-ost dobjon, akkor visszakapja a pénzének a dupláját, ha viszont a dobott számok között akár csak egy 6-is is szerepel, akkor elveszíti a pénzét.

Megéri-e játszania a játékosnak? Válaszodat indokold!

Órai feladat - 6.

Rudolf egy teszt jellegű dolgozatot ír biológiából a következő tanítási napon, ami 10 kérdésből fog állni és minden kérdésnél 4 válaszlehetőség közül kell kiválasztania az egyetlen helyes választ. A dolgozaton 5 helyes választól jár legalább kettes osztályzat a tanulóknak.

Az dolgozat előtti utolsó biológia óra végén Rudolf meglátta a Tanárnő holnapi dolgozathoz készített megoldókulcsának bal alsó sarkán a következőt: „8. D, 9. A, 10. B”. Rudolf úgy vette, hogy három helyes válasza már biztosan van, így már nem is tanul a dolgozatra, a többi 7 kérdésre tippelve ad majd választ, továbbá kijelentette:

Rudolf: „Így biztosan át fogok menni tanulás nélkül is!”

Rudolf az egyik osztálytársának Károlynak is elmondta az előző információit, amire így reagált Károly:

Károly: „Egyáltalán nem biztos, hogy meglesz így a kettes! Sőt, szerintem még így is nagyobb esély van arra, hogy egyest kapsz, minthogy legalább kettest!”

Mi a logikai értéke Rudolf és Károly állításának? Válaszodat indokold!

Órai feladat - 7.

Egy iskola egy osztályában a következő megállapításokat teszik a tanulók:

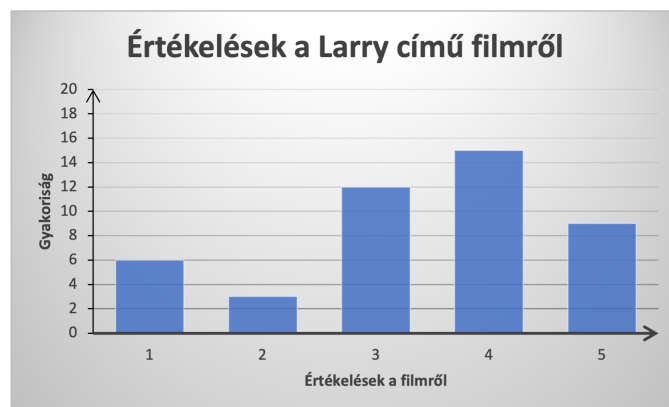
1. *Ákos:* „Ha egy adatsokaság szórása nulla, akkor minden adat nulla!”
2. *Eleonóra:* „Egy kísérlet után a kapott adatsokaság terjedelme megadja az összes lehetséges kimenetel számát!”
3. *Kolos:* „Egy adatsokaság alsó kvartilisének és felső kvartilisének átlaga éppen a medián!”
4. *Flóra:* „Egy adatsokaság módusza egyben az adatsokaság átlagához legközelebb álló adat is!”

A párok egyik tagja értékelje a páros számú állítások helyességét, míg a másik a páratlan számúakat. Ezután indokoljátok meg társatoknak az egyes megoldásaitokat!

Órai feladat - 8.

Alkossatok önállóan három igaz és három hamis állítást az alábbi képen látható diagramról!

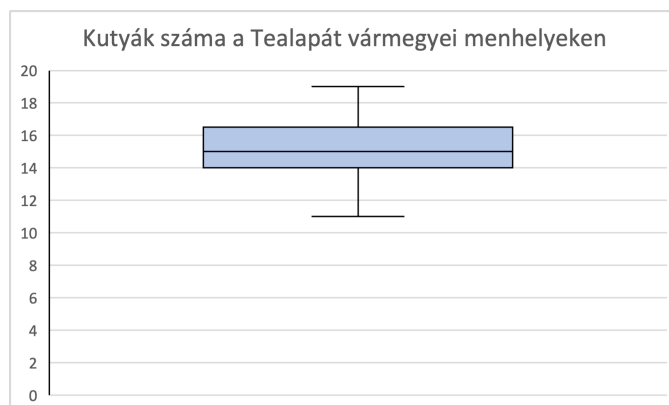
Olvassátok fel egymásnak felváltva általatok kreált állításokat a padtársatokkal! A másik félnek mindig ki kell találnia, hogy az adott állítás igaz vagy hamis, és meg is kell indokolnia a választát!



Órai feladat - 9.

Alkossatok önállóan három igaz és három hamis állítást az alábbi képen látható diagramról!

Olvassátok fel egymásnak felváltva általatok kreált állításokat a padtársatokkal! A másik félnek mindig ki kell találnia, hogy az adott állítás igaz vagy hamis, és meg is kell indokolnia a választát!



Órai feladat - 10.

Madeinország dörzsölt vezetője, II. Tihamér megjelentette az alábbi diagramot a nemzeti újságban, aminek folytán országának – Párnalandia felé – csökkenő tartozásáról értekezett:

II. Tihamér: „Ahogyan az ábra is mutatja, az elmúlt 10 évben fokozatosan csökkent Hazánk Párnalandia felé való tartozása, ami a korábbi horribilis mértékű tartozáshoz képest idénre már elenyésző mennyiségű! Ez is a rendszer hatékonyságát és sikerességét mutatja!”

Madeinország lakójaként belső feladatodnak érzed az ilyen megnyilvánulások kritikus elemzését. Vizsgáld meg a diagramot és II. Tihamér állítását! Igazat mondott vagy hazudott az ország vezetője? Válaszodat indokold!



Tesztfeladat - 1.

Dönts el az alábbi állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszodat indokold!

Eleonóra: „Feldobtam ezt az 50 forintost már 12-szer, de mindig írás lett! Mivel az előző dobásaim mind így sikerültek, a következő feldobásom után most már biztosan fejet fogok kapni!”

Tesztfeladat - 2.

Dönts el az alábbi állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszodat indokold!

Ferenc: „Itt van ez a 10 kérdéses teszt, mindenhol három válaszlehetőség van. Úgyis mindegy, hogy tanultam-e! Ha véletlenszerűen kitöltöm, úgyis meglesz az 5 helyes válaszért járó kettes. Ennyi az egész, vagy átmegyek vagy nem, szóval 50% esélyem van átmenni úgy, hogy véletlenszerű válaszokkal töltöm ki a tesztet.”

Tesztfeladat - 3.

Dönts el az alábbi állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszodat indokold!

József: „Eddig a félévben szereztem hat darab 5-öst matekból. Tanár Úr azt mondta, hogy átlag alapján kapjuk a jegyet és 4,5-től már ötöst ad. Ez azt jelenti, hogy az utolsó dolgozaton bármit is írok, úgyis ötös leszek, hiszen már így is rengeteg ötöst írtam!”

Tesztfeladat - 4.

Az alábbi szituációban állítanak valamit a történet főszereplőjének, Kornélnak. Döntsd el Kornél indoklásáról, hogy helyes vagy helytelen! Válaszodat indokold!

Szituáció: Az iskolában a hagyományos naplóról elektronikus naplóra állnak át. A régi naplóból át kell vezetni az osztályzatokat az új, elektronikus naplóba. Irodalomból a régi naplóban szerepel Kornélnál egy $3/4$ osztályzat (ennek a jelentése tulajdonképpen egy 3,5-es osztályzat), azonban a rendszer ezt nem ismeri.

A tanár állítása: Beírok akkor egy 3-ast és egy 4-est, hiszen ezek átlaga is épp 3,5.

Kornél véleménye és indoklása: Eddig három ötösöm van az évben. Ha egy 3-ast és egy 4-est ír be nekem, az rosszabb az átlagom szempontjából, mintha 3,5-et kapnék, de még annál is rosszabb, mintha csak egy 3-ast kapnék, hiszen a 3-as és 4-es beírásával olyan, mintha kétszer is megkaptam volna a 3,5-es jegyet!

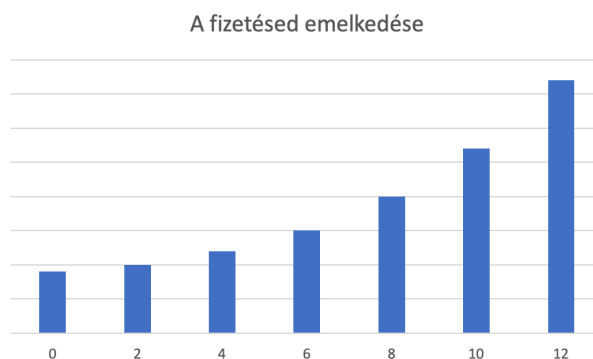
Tesztfeladat - 5.

Az alábbi szituációban állítanak valamit a történet főszereplőjének, Orsolyának. Döntsd el Orsolya indoklásáról, hogy helyes vagy helytelen! Válaszodat indokold!

Szituáció: Állásinterjún vagy, miután egy jó barátod a cégből állást ajánlott neked egy kávézás során a cégüknél. Éppen a fizetésed emelkedéséről beszél a cég egy embere, aki nagyon szeretné, hogy elfogadd az állásajánlatukat.

A cég emberének állítása: Nézd ezt a diagramot, nálunk exponenciálisan növekedhet a fizetésed! A vízszintes tengelyen a cégnél eltöltött éveket láthatod. Ilyen fizetésbeli emelkedést sehol máshol nem tudnak ígérni!

Orsolya véleménye és indoklása: Ez tényleg hihetetlen, eleinte még nem tűnik olyan soknak a pénz, de mivel egyre magasabbak az oszlopdiagram oszlopai, pár év múlva már nagyon sok pénzt kereshetek ennél a cégnél!



Tesztfeladat - 6.

Az alábbi szituációban állítanak valamit a történet főszereplőjének, Ádámnak. Döntsd el Ádám indoklásáról, hogy helyes vagy helytelen! Válaszodat indokold!

Szituáció: Budapesten vagy a Keleti pályaudvaron és megpillantasz egy szerencsejátékoszó furfangos embert: Gyuri bácsit, aki játékra invitál téged.

Gyuri bácsi állítása: Gyere fiam! Itt olyan játékot játszatsz, ahol egyenlő eséllyel indulunk! Itt egy szabályos dobókocka, illetve egy 20 forintos érme, de egyik sincs ám megbuherálva! Egy körben te egyszer dobsz a dobókockával, én meg háromszor az érmével. Te akkor nyersz meg egy kört, ha a körön belül 4-est dobsz a dobókockával, én meg akkor, ha mindhárom érmefeldobás ugyanazt kapom, de mindegy, hogy ez fej vagy írás, csak ugyanolyannak kell lennie! Ha egyikünknek sem jön be vagy épp mindkettőnknek, akkor egyikünk sem nyer a körben. Érthető ez? Na, aki előbb szerez 5 győzelmet, az kap a másiktól 10000 forintot!

Ádám véleménye és indoklása: Játsszok! Tényleg egyenlő eséllyel játszunk, hiszen én 6 félét tudok dobni a kockával, ő is $3 \cdot 2$ -t hiszen mindhárom feldobásánál kétfélét dobhat. Meg amúgy is, nekem csak egy jót kell dobnom, neki meg hármat!

Tesztfeladat - 7.

Mennyi az esélye, hogy két dobókockát feldobva két páros vagy két páratlan számot dobunk? Válaszodat indokold!

Tesztfeladat - 8.

A tanár döntési lehetőséget ad Károlynak, hogy matematikából ő dönthesse el, hogy milyen érték alapján kapja a végső jegyét a bizonyítványába. Dönthet a jegyei módusza, mediánja, vagy átlaga mellett. Mit javasolsz, melyiket válassza Károly, ha a célja a lehető legjobb jegyet kapni matematikából? Válaszodat indokold!

Károly jegyei: 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5.

Tesztfeladat - 9.

Jankának és osztályának egy totót ad fel a tanárunk matek órán, amikor is a következő a feladat:

„I. Tippeld meg a következő kísérletben a k értékét!

Feldobunk öt darab dobókockát, majd megszámloljuk, hogy hányon sikerült 6-ost dobunk! Ez a szám lesz a k .”

a) $k \leq 9$

b) $9 < k < 18$

c) $18 \leq k$

Segíts megtalálni Jankának a legvalószínűbb lehetőséget, hogy nagyobb esélye legyen a találatra a totón!