



Tizedik évfolyamos tanulók érvelési képességének fejlesztése a statisztika és valószínűségszámítás témakörben

Készítette

Sebők Máté

Matematikatanár, testnevelő tanár ONA

Témavezető

Dr. Kovács Zoltán

egyetemi docens

EGER, 2023

Tartalomjegyzék

Bevezetés	3
1. A téma szakirodalmi áttekintése	6
2. Módszer	9
2.1. A minta	9
2.2. A témakör kerettantervi háttere	10
2.2.1. Valószínűségszámítás	10
2.2.2. Leíró statisztika	11
2.3. A vizsgálat menete	11
2.3.1. Az előteszt	11
2.3.2. A témakör elsajátításának időszaka	18
2.3.3. Az utóteszt	29
2.3.4. A késleltetett utóteszt	29
3. A teszteredmények elemzése	31
3.1. A tesztek pontozása	31
3.2. Leíró statisztikai jellemzés	31
3.3. Az összes pontszám összehasonlítása az előtesztben, az utótesztben és a késleltetett utótesztben	32
3.4. A megoldásra kapott pontszám összehasonlítása az előtesztben, az utótesztben és a késleltetett utótesztben	33
3.5. Az indoklásra kapott pontszám összehasonlítása az előtesztben, az utótesztben és a késleltetett utótesztben	35
3.6. Hatásméret	36
Összegzés	37
Limitáció és további kutatás	38
Irodalomjegyzék	39

Bevezetés

Az indoklás és érvelés fejlesztése és tanítása egy csaknem minden tantárgyban előjöhethető tananyag lehet, viszont a matematika területén ezeknek kiemelt fontosságú szerepe van. Pontosabban csak lenne, hiszen a szoros tantervi keretek miatt sokszor csak a szőnyeg alá söpörjük ezek oktatását. Valamelyest hibás az előző állításom, indokolnunk mindig kell, hiszen egy feladatmegoldás menetét is hívhatjuk indoklásnak a végső megoldást tekintve, de a ezek direkt megjelenése, mint állításokra való reagálás háttérbe szorul. Stylianides ír arról, hogy diákok emiatt a hozzáállás miatt komoly nehézségekkel küzdenek az indoklás és bizonyítás terén [17].

Az indoklás, érvelés és bizonyítás hármasa gyakran jelenik meg együttesen egyes szakirodalmakban, de mégis mi haszna van ezeknek? Gila Hanna úgy gondolta, hogy az indoklás és bizonyítás szolgálhat nekünk új módszerek bemutatására, új hipotézisek felállítására, valamint a különböző matematikai területek közötti kapcsolatok bemutatására [4]. Az indoklás és érvelés direkt megjelenése, mely állításokra, véleményekre kerül viszontválaszként egy gyakran elfelejtett része a matematikatanításnak. Az általa leírt hasznos tényezők sokszor nem jelennek meg kellő mértékben, számos tanterv pedig elmulasztja ezen lehetőségek feltárását.

Ahhoz, hogy a diákok között konstruktív vita alakulhasson ki, hatékonyan reflektáljanak egymás állításaira, akár matematikai, akár mindennapi viszonylatban, az kell, hogy indoklási és érvelési feladatok jelenjenek meg óráinkon, ezzel érvelési szituációkat biztosítva a tanulóknak. Nem elvetendő tény, hogy nem csak a diákkorukra szóló hasznos tudást adunk át a tanulóknak az ilyen óraelemekkel, hanem egy életre szóló tanítást kapnak ezzel. Végső soron oktatásunk célja az kell legyen, hogy a tanulók az előzetes matematikai problémamegoldásaik segítségével hatékonyan tudjanak megoldani való életbeli problémákat is.

A 2020-as Nemzeti alaptanterv (NAT) [14] a 9-12. évfolyamon az indoklás és bizonyítás irányából célként és fejlesztési területként kitűzi, hogy a nevelési-oktatási szakasz végére a tanuló „sejtéseket fogalmaz meg és logikus lépésekkel igazolja azokat”. A 2020-as NAT-hoz illeszkedő Kerettanterv [11] már nyíltabban, részletesebben kifejezi a téma fontosságát: „... a bizonyításokon keresztül mutatható meg a matematika logikus és következetes felépítése.” Emellett pedig az új fogalmak megalkotása, összefüggések és stratégiák felfedezése, továbbá a problémamegoldó gondolkodás használata és fej-

lesztése folyamatának eredményeként fogalmazza meg, hogy: „... a tanuló meg tudja állapítani adott állítás, tétel érvényességi és alkalmazási körét, megállapításai, állításai mellett logikusan tud érvelni.”

Munkám célja egy tizedik évfolyamos csoport érvelési készségeinek fejlesztése volt, méghozzá a statisztika és valószínűségszámítás területén. Ehhez csaknem minden témakörbeli óránkon egy 10-15 perces blokkban az előbb leírt fejlesztéssel foglalkoztam a tanulókkal. A feladatok különböző stílusúak, mivel van, ahol egyszerű állítások logikai értékéről kell dönteniük, illetve megindokolniuk döntésüket, továbbá van, ahol mások indoklásának a helyességéről kellett vélekedniük, végül pedig a feladatmegoldásaik indoklási részét is többször tüzetesen átvizsgáltuk. Ezen órai feladatok során kiemelt szerepet kapott a társas tanulás folyamata is, hiszen – mint korábban írtam is – fontosnak tartom azt, hogy egymásra reflektálva tudjanak ezek a tanulók konstruktívan együtt dolgozni.

Rényi Alfréd már 1970-ben megírta, hogy a hétköznapi életben tulajdonképpen állandóan szembekerülünk a véletlennel, a valószínűségszámítás pedig arra is megtanít bennünket, hogy miként lehet az egyes döntésekkel járó kockázatokat figyelembe venni egy ésszerű magatartás kialakításánál [16]. A valószínűségszámítás tehát dönteni is megtanít minket, a döntéseinket pedig rendre valamilyen erős érv, vagy indok befolyásolja. Azzal, hogy a diákok megtanulnak dönteni, azzal megtanulnak hatásosabban indokolni is. Rényi szerint a valószínűségszámítás tanítása megtanítja a tanulókat arra, hogy a világos és logikus gondolkodás akkor is hasznos, ha bizonytalansággal van dolguk.

A NAT (2020) több témakörben is részletezi az érvelési készségek fejlesztését [14], mint elvárás. Az általam vizsgált témakörben ez nincs kiemelve, ellenben a számos adatgyűjtéssel, rendszerezéssel, adatábrázolással és valószínűségi számítással kapcsolatos gondolattal, melyek ésszerű fejlesztésébe logikusan bekapcsolhatóak az érvelési készséget célzottan fejlesztő feladatok.

Az ilyen irányú órai fejlesztést nehéz felmérni csupán az órán tapasztaltakkal – bár a legtöbb órai feladathoz konkrét órai példákat is bemutatok –, így kvantitatív elemzéseket is végeztem. Az órai fejlesztéseket megelőzően – a témakör tanításának kezdete előtt – egy előtesztet végeztettem el a tanulóimmal, melynek kilenc feladata már a korábbi ismereteikkel is megoldhatónak mondható volt, ezzel felmérve a fejlesztés előtti készségeiket. A témakör végét jelentő témazáró dolgozatot követően ugyanezt a tesztet egy utóteszt formájában is elvégeztettem velük, hogy felmérjem mennyit fejlődött az érvelési készségük a témakör tanulása során. Mindezek után négy és fél hónappal az utótesztet követően – a következő tanévben – ugyanezt a tesztet megírtam a tanulókkal egy késleltetett utóteszt formájában is, felmérve azt, hogy mennyit felejtettek az előteszthez, illetve az utóteszthez képest.

A fejlesztés a vizsgálat alapján sikeres volt, a tanulók érvelési készségei közepes

hatásmérettel fejlődtek az előteszt és utóteszt közötti időszakban, ráadásul a megszerzett tudás keveset kopott a későbbi késleltetett utóteszt idejére. Ebben a munkámban a vizsgálat és fejlesztés módján túl annak sikerességéről és hatásosságáról fogok írni hosszabban, megmutatva, hogy miként tudtam elérni a tanulók témakörön belüli fejlődését.

1. fejezet

A téma szakirodalmi áttekintése

Az érvelés, indoklás, magyarázat, bizonyítás szavakat széles körben használja a matematikatanítás szakirodalma, (angol nyelven: argument, reason, explain, prove), gyakran elmosódott határokkal, a jelentések közötti átfedéssel. A helyzetet tovább árnyalja, hogy a fogalmak jelentése történetileg is változott. Például a matematikai bizonyítás fogalma is fejlődött az idők során. A mai tudományos gyakorlatban a tendencia az, hogy a bizonyítások sokkal szigorúbbak és formálisabbak, mint például egy évszázaddal ezelőttiek. Ugyanakkor a technológia megjelenése megváltoztatta nemcsak az érveléshez történő általános hozzáállásunkat, hanem az automatikus bizonyítást lehetővé tévő szoftverek megjelenésével a bizonyítás fogalmát is. A bizonyítás fogalma arra is jó példa, hogy az egyes fogalmak mást jelenthetnek a matematikusok körében és az osztálytermi gyakorlatban. Jelen munkában a fogalmak meghatározásakor Hanna [4] és Stylianides [17] kategorizálási rendszerét veszem alapul, és a megközelitésem az iskolai gyakorlatra szorítkozik.

Az érvelés olyan gyűjtőfogalom, melyek magában foglal minden olyan szóbeli vagy írásbeli kommunikációs formát, amelynek célja, hogy másokat meggyőzzön egy állítás igazságáról. Az érvelés kifejezést használom a legbővebb értelemben, amely lehet matematikai értelemben is elfogadható (a továbbiakban bizonyítás értékű) és matematikai értelemben nem elfogadható (nem bizonyítás értékű). Az érvelés minden formája értékes szerepet játszik a mindennapi életben és az iskolai matematikai gyakorlatban.

A bizonyítás értékű érvelés az adott tanulói közösségben ismertnek tekinthető és elfogadott igazságokon alapuló okfejtés egy matematikai állítás mellett vagy ellen. Az okfejtés kifejezés kijelentések összefüggő sorozatát jelöli, ahol a kijelentések a helyes következtetés elfogadott sémái (pl. modus ponens, modus tollens, reductio ad absurdum stb.) alapján kapcsolódnak egymáshoz. Egyszerű példa bizonyítás értékű érvelésre az iskolában már korán és gyakran alkalmazott ellenpélda. A másik példa a bizonyítás. A bizonyítás az érvelés strukturált formája a logika formális nyelvének használatával. A bizonyítás értékű érvelés harmadik formája az iskolai gyakorlatban az általánosítható példa (az angol szakirodalomban „generic example”). Az általánosítható példa egy

érvelést egy konkrét példán keresztül mutat be, ugyanakkor a konkrét példa az általános eset összes jellegzetességét magában hordozza, és az érvelés logikai struktúrája kifogástalan. Olyan esetekben fordulhat elő, ahol az általános eset kezelése olyan szimbólumhasználatot igényelne, amely a tanuló kognitív fejlettségének nem feltétlenül felel meg. A magyar gyakorlatban például az általánosítható példa módszerével bizonyítjuk a kilenccel való oszthatóság szabályát a felső tagozatban [17].

A nem bizonyítás értékű érvelés formái az empirikus érvelés és a magyarázat. Az empirikus érvelés egy matematikai állítás igazságát az állítás igazsághalmazának egy valódi részhalmazán vizsgálja, azaz példákon keresztül vizsgálja az állítást, ugyanakkor a példák nem merítik ki az összes esetet, és az érvelés nem is tekinthető általánosítható példának. A magyarázat az adott matematikai állítás ellen vagy mellett szóló hiányos érvelés, amely nem hivatkozik a felhasznált igaznak elfogadott állításokra és a bizonyítási lánc ilyen módon hiányos [17].

A matematikai oktatás célja, hogy a diákok megértsék a bizonyításokat, tudják követni és reprodukálni a tanár vagy a tankönyv bizonyítását és maguk is képesek legyenek bizonyítások előállítására. A fejlődés kezdeti szakaszában ezek a bizonyítások rövid (egy-két lépéses) logikai láncot alkotnak, de az életkor és a kognitív fejlettség előrehaladtával lehetnek hosszabbak is. Ugyanakkor a matematikatanítás célja az is, hogy a tanuló meg tudja különböztetni az empirikus érvelést a bizonyítástól. A bizonyítás másik szerepe az oktatásban, hogy új módszerek bemutatására, hipotézisek inspirálására és a matematika különböző részei közötti kapcsolatok bemutatására is szolgálhat [4].

Az érvelés tanítása a matematikatanítással kapcsolatos kutatások egyik fontos eleme. A szakirodalmakban megoszlanak a vélemények arról, hogy mennyire hasznos a diákokat a bizonyítás tanulásának egyik lépéseként nem bizonyítás értékű érvelésre ösztönözni. Egyes kutatók fontosnak találják, hogy a tanulók a matematikai bizonyítás megértése során plauzibilis érveléssel is találkozzanak, maguk is fogalmazzanak meg empirikus érveket, míg mások azt mondják, hogy ezzel csak a tanuló meggyőzését (az állítás igazságában vetett hitét) érjük el, közben elvonjuk a figyelmet a bizonyítás tanításáról. Pólya György és Lakatos Imre munkássága nagy hatással volt a plauzibilis érvelés fontosságának megértésében [12] [15]. Pólya hangsúlyozza a heurisztikus érvelés és a plauzibilis érvelés fontosságát a bizonyítások konstruálásában, de mindvégig hangsúlyozza a plauzibilis érvelés ideiglenes voltát a bizonyítások véglegességével szemben. Lakatos a matematikát kvázi-empirikus tudománynak tekintette, és szintén hangsúlyozta az informális módszereket [4].

Balacheff szerint [1] a bizonyítás tanításának legfőbb célja hogy a tanulók a pragmatikus érveléstől eljussanak a matematikai bizonyításig. Harel és Sowder egy tanulmányában kiemelte [6], hogy mennyire fontos megértetni a diákokkal a bizonyítás és a meggyőzés közötti különbséget. Emellett osztályozták az érveléstípusokat, melyeket

gyakran bizonyításnak tekint a közvélemény:

1. Külső meggyőző séma, amely egy tanár tekintélyére vagy az érvelés felszínes formájára támaszkodik.
2. Empirikus bizonyítási séma, amely konkrét példák, induktív érvelésen vagy közvetlen méréseken alapul.
3. Deduktív bizonyítási séma, ahol egy feltevés igazságát logikai levezetéssel határozzák meg.

Elmondható, hogy ezek a sémák nem egymást kizáróak, hiszen egy ember akár többet is „birtokolhat” belőlük. Egy későbbi munkájában Harel nem kívánatos gondolkodásmódnak nevezte az első kategóriát, aminek mégis van pedagógiai értéke, hiszen hatékony segítséget nyújthatnak az ötletek generálásában, felismerésekben.

Fischbein munkája [3] [5] hozzájárult a mindennapi életben való érvelés és a magasabb fokú szigorúságot igénylő matematikai érvelés közötti kapcsolat konceptualizálásához. Az intuitív struktúrák az aktív megértés és a produktív gondolkodás lényeges összetevői, hiszen ezek képezhetik a tudás egyetlen – vagy fő – formáit, ha a megfelelő analitikus struktúrák hiányoznak. Lényeges felismerni, hogy a tudás intuitív és analitikus formái mélyen összefüggnek egymással.

Az érvelés-bizonyítás tanításának története szorosan összefonódik a különböző matematikatanítási irányzatokkal. A „New Math” mozgalom során fókuszba kerültek az axiomatikus alapok és a logikai szigor. A logika eszközeinek alkalmazása kétség kívül bemutatta a matematika egységességét és az érvelés alapjául szolgált, azonban ez az újítás nem volt tartós, és sok tanár túl absztraktnak és nehezen taníthatónak találta. Az 1980-2000 közötti időszakot a konstruktivista elméletek előtérbe kerülése jellemezte, amelyek az aktív tanulást és a diákok részvételét hangsúlyozzák az információ feldolgozásában. Felismerték, hogy a bizonyítás fogalma viszonylagos, és az érvelés informális jellegű is lehet, miközben megőrzi érvényességét. Körülbelül a 2000-es évektől kezdve egyre fontosabb szerepet kap az oktatásban a digitális technológia. Például a dinamikus geometriai alkalmazások elősegítik a diákok geometriai felfedezéseit és a plauzibilis érvelést. A digitális eszközök által biztosított tapasztalatok értelmezésében felértékelődik a kritikai gondolkodás szerepe, és a formális bizonyítások és az absztrakt indoklások szükségessége [5].

2. fejezet

Módszer

2.1. A minta

A vizsgálatomat az Egri Pásztorvölgyi Általános Iskola és Gimnázium intézményében vittem véghez, az iskola gimnáziumi részében. Az iskola középiskolai osztályaiban nyelvi előkészítő évvel indul a képzés, tehát minden tanuló – kivéve, aki később jött át ide egy másik iskolából – volt „0. osztályos”, így a tanulók java egy évvel idősebb a hagyományosnak vehető életkorokhoz képest az egyes osztályokban. Az intézménynek remek eredményei, nagy neve van regionális szinten, még ahhoz képest is, hogy kisebb létszámmal dolgozhatnak – évfolyamonként két osztály van a középiskolai részen –, mint a többi, nagyobb intézmény.

A következőkben bemutatom a kísérletben résztvevők csoportprofilját. Az intézményen belül egy 10. évfolyamon tanuló osztályban végeztem a kísérletemet. Az osztályt az egész 2022. szeptemberétől 2023. júniusáig terjedő időszakban tanítottam matematikából. Reflektálva az osztály diákjaira, egy vegyes csoportról beszélhetek, aminek a teljesítménye, matematikai képzettsége átlagon felülinek, jónak mondható. A csoport teli van szélsőségekkel, vannak rendkívül fejlett matematikai gondolkodással és problémamegoldó gondolkodással rendelkezők, akik ezt alkalmazni is tudják az órákon, dolgozatokon, versenyeken, ugyanakkor vannak a matematika iránt nem érdeklődő, dacosan viselkedő, továbbá gyengébb matematikai eredményű diákok is. Az osztály jelentős része bár jó képességű, ám már a kezdetekben is feltűnt az indoklási, bizonyítási kultúrájuk szegénysége az egyes témakörökben, ezáltal pedig adta magát a lehetőség ennek a felmérésére és fejlesztésére.

Ahhoz, hogy a csoport bizonyításokat tudjon tanulni, első lépésként először érvelést kell tanítani nekik, hiszen annak rugalmassága, felfedezésbeli nyitottsága előnyös lehet a későbbi bizonyítás tanításban [4].

Az osztály 36 fős, azonban mindhárom felmérést csak 28 tanuló írta meg, így a továbbiakban erről a 28 fős tanulócsoportról fogok írni. A 28 fő nemek szerinti megosz-

lása: 17 lány és 11 fiú. Az osztályátlag 9. évfolyam végén 4-es, míg 10. évfolyam végén 3,83 volt.

2.2. A témakör kerettantervi háttere

A vizsgálat során a valószínűségszámítás és statisztika témakörén belül dolgoztam a diákokkal. Érdemes kiemelni a téma különlegességét az indoklás és érvelés, valamint a bizonyítási folyamat szempontjából. Stylianides szerint az amerikai tankönyvekben a számelméleti feladatok túlsúlya abból adódik, hogy ezek a fogalmak már kisgyermekkorban hozzáférhetőek, természetüknél fogva pedig felvetik a bizonyítás szükségességét. Egy matematikai tankönyvben, és így a pedagógusok tanítási módszereiben is, fontos a kiegyensúlyozottság az indoklási feladatok terén a különböző témakörökben [17]. A valószínűségszámítás témakörben különösen fontos az érvelés, mert bár a magyar gyakorlatban az esélylatolgatás már alsóban is előfordul, a tanulók esélyekkel kapcsolatos ítéletalkotása gyakran téves.

A leíró statisztika számos területén találkozunk egészen fiatal korokban a tanulók a diagramokkal, továbbá az átlag fogalmával, melyre ebből az irányból lehet építeni. A leíró statisztika alapvető fogalmai a mindennapi szóhasználatban is előfordulnak, amely megalapozhatja a tanulók téma iránti érdeklődését.

A témakör feldolgozása során a 9-10. évfolyamnak javasolt tanyagon túl néhány 11-12. évfolyamnak javasolt tartalmat is beemeltem az oktatásba, így ezekkel kiegészítve fogok írni a témakörök általam tanított részeiről. Később a 2.3.2. szakaszban írok arról, hogy az ott szereplő indoklási-érvelési feladatokat új ismereteket elsajátító órákon használtam fel, azonban az összes óraszám tizenhét volt, ami megmagyarázza a tanított anyag széleskörűségét.

2.2.1. Valószínűségszámítás

A Kerettanterv [11] 9-10. évfolyamon azt javasolja, hogy valószínűségi kísérletek során beszéljünk eseményről, eseménytérrel, elemi eseményről, relatív gyakoriságról, valószínűségről, egymást kizáró eseményekről, illetve független eseményekről. Ezeket tudnia kell megkülönböztetnie és alkalmaznia a tanulóknak. Annak eredményéül, hogy a tanulók a témakört tanulják, véletlen események kimenetelére ésszerűen tippelnek és képesek a véletlen kísérletek adatainak rendszerezésére, relatív gyakoriságok számolására. A diákoknak meg kell ismerkednie a klasszikus valószínűségi modellel és alkalmaznia is kell azt. A Kerettanterv kiemeli az eloszlások digitális eszközökkel való ábrázolását, amivel ugyan foglalkoztunk a témakör tanulása során, de a vizsgálatához nem illeszkedett szorosan.

A 11-12. évfolyamon kiírt javasolt tananyagból az eseményekkel foglalkoztunk mé-

lyebben, hiszen megismerték a tanulók az események összegét, szorzatát, komplementerét, az egymást kizáró események fogalmát, de túllépve ezeken még a teljes eseményrendszer fogalmával is találkoztak.

2.2.2. Leíró statisztika

A 9-10. évfolyamon az adatgyűjtés és -rendszerezésen van eleinte a hangsúly, majd ezek középértékekkel (átlag, medián, módusz, illetve a középértékeken túl terjedelem) történő jellemzése kap nagyobb szerepet. Az oszlop- és kördiagramokkal való ábrázolás még ebben az időszakban a kiemelt tananyag. A témakör tanulása után nem csak ezek elvégzése a cél, hanem az is, hogy a diákok értelmezni tudják a kapott középértékeket és ábrákat. Az előzőből következően ajánlott foglalkozni diagramokkal – vagy egyéb grafikus elemmel – megadott manipulációkkal felismerés és javítás szintjén.

A 11-12. évfolyamos tananyag jelentős kiegészítést adott a leíró statisztikai részhez, hiszen ide vettük a kvartilisek és a szórás fogalmát is, továbbá előzőből továbbmenve a dobozdiagram (sodrófa diagram, box-plot diagram) készítésével és alkalmazásával is foglalkoztunk.

2.3. A vizsgálat menete

2.3.1. Az előteszt

A vizsgálat során a valószínűségszámítás és statisztika témakörén belül dolgoztam a diákokkal. A tanmenet tizennyolc órát szánt a tananyag teljeskörű feldolgozására (új anyagot feldolgozó-, gyakorlóóra, dolgozatok) a fentebb említett témakörben. Mielőtt még elkezdtük az anyagot – a tanulók előismereteire építve – egy előtesztet végeztettem el velük, mely kilenc feladatból állt. A kérdések mindegyike a valószínűségi gondolkodást, a valószínűségszámítási feladatok megoldását, a statisztikai alapfogalmakat és a statisztikai számításokat veszi alapul. A teszteket anonim módon töltötték ki a tanulók.

Az első feladatcsoportban lévő három feladatban „másoktól” készen kapott állításokra kellett reflektálniuk aszerint, hogy igaz vagy hamis az állítás. Fontos része volt minden feladatnak az adott válaszuk indoklása. Alapvető része az indoklási képességek elsajátításának ez a gyakorlattípus, ahol egyszerű, általuk kívülről kapott állításokat kell értékelniük a tanulóknak logikai értékük szerint.

Az alábbi három kérdésre kellett válaszolniuk az előteszt *első feladatcsoportjában*. Az egyes tesztfeladatok alatt olvasható azok elvárt megoldása vagy megoldási iránya.

Tesztfeladat - 1.

Dönts el az alábbi állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszodat indokold!

Eleonóra: „Feldobtam ezt az 50 forintost már 12-szer, de mindig írás lett! Mivel az előző dobásaim mind így sikerültek, a következő feldobásom után most már biztosan fejet fogok kapni!”

Az első tesztfeladatban Eleonóra állítása hamis, mivel az egyes írás/fej dobásának valószínűsége nem függ az előző dobásaitól, minden dobás előtt $\frac{1}{2}$ lesz a valószínűsége az írás és a fej dobásának is.

Tesztfeladat - 2.

Dönts el az alábbi állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszodat indokold!

Ferenc: „Itt van ez a 10 kérdéses teszt, mindenhol három válaszlehetőség van és egy helyes válasz. Úgyis mindegy, hogy tanultam-e! Ha véletlenszerűen kitöltöm, úgyis meglesz az 5 helyes válaszáért járó kettes. Ennyi az egész, vagy átmegyek vagy nem, szóval 50% esélyem van átmenni úgy, hogy véletlenszerű válaszokkal töltöm ki a tesztet.”

A második tesztfeladatban Ferenc állítása hamis. Ferenc hibásan azt feltételezi, hogy ha egy kísérletnek kétféle kimenetele lehet (átmegyek vagy sem), a két kimenetel valószínűsége mindig egyenlő, azaz $\frac{1}{2}$. Pontos valószínűségi számításokra nincs szükség a válaszhoz és az indokláshoz, de egyébként ebben az esetben a dolgozat legalább elégségesre való teljesítésének valószínűsége:

$$\frac{\binom{10}{5} \cdot 2^5 + \binom{10}{6} \cdot 2^4 + \binom{10}{7} \cdot 2^3 + \binom{10}{8} \cdot 2^2 + \binom{10}{9} \cdot 2^1 + 2^0}{3^{10}} \approx 0,213$$

Tesztfeladat - 3.

Dönts el az alábbi állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszodat indokold!

József: „Eddig a félévben szereztem hat darab 5-öst matekból. Tanár Úr azt mondta, hogy átlag alapján kapjuk a jegyet és 4,5-től már ötöst ad. Ez azt jelenti, hogy az utolsó dolgozaton bármit is írok, úgyis ötös leszek, hiszen már így is rengeteg ötöst írtam!”

A harmadik tesztfeladatban József állítása hamis, nem kaphat bármilyen osztályzatot a dolgozatára. Ha József dolgozata netalán elégtelenre sikerülne, az átlaga körülbelül 4,43 lenne, ami nem éri el az jeles osztályzat eléréséhez kitűzött számot (4,5), tehát 4-es osztályzatot kapna a félév végére.

A *második feladatcsoportban* három szituációban egy állítás igazságtartalmára főszereplők reflektálnak és indokolják meg véleményüket A feladatmegoldó diákoknak a főszereplő indoklását kell helyességük szerint értékelniük indoklással ellátva.

Az indoklás egy másik szintje az, mikor mások indoklásáról kell következtetéseket levonnunk, s érvelnünk azokról. Ha hatékonyabban dolgoznak ebben a gyakorlattípusban a tanulók, könnyebben tudnak diskurzust folytatni egyes problémakörökről, kérdésekről egymással.

Érdemes belegondolni, hogy milyen különbség van a mindennapi indoklás és a konkrét matematikai indoklás között. Gila Hanna szerint legtöbbször folyamat és eredmény tekintetében is különbözik a kettő, hiszen a mindennapokban sokszor elfogadunk egy állítást bármilyen bizonyítás nélkül is sokszor, mivel triviálisnak, intuitívan hihetőnek tartjuk, azonban a matematikában ez felettébb kevés [4]. Az itt szereplő példák szituációi is ezt a mindennapiság és matematika közötti különbséget kívánja szimbolizálni a három feladatban.

A Kerettanterv [11] szerint a matematika egyik fő tanulási-tanítási célja, a tanuló mérlegelő gondolkodásának fejlesztése, ez pedig meg kell jelenjen kooperatív tevékenységekben is, ahol "... a közös munkában érvel, képes a vitára, az érvei ütköztetésére. Mérlegeli és kontrollálja mind a társai, mind a saját véleményét." A célom ennek a készségnek a megjelenítése ebben a feladatcsoportban.

Az alábbi három kérdésre kellett válaszolniuk az előteszt második feladatcsoportjában.

Tesztfeladat - 4.

Az alábbi szituációban állítanak valamit a történet főszereplőjének, Kornélnak. Döntsd el Kornél indoklásáról, hogy helyes vagy helytelen! Válaszodat indokold!

Szituáció: Az iskolában a hagyományos naplóról elektronikus naplóra állnak át. A régi naplóból át kell vezetni az osztályzatokat az új, elektronikus naplóba. Irodalomból a régi naplóban szerepel Kornélnál egy $3/4$ osztályzat (ennek a jelentése tulajdonképpen egy 3,5-es osztályzat), azonban a rendszer ezt nem ismeri.

A tanár állítása: Beírok akkor egy 3-ast és egy 4-est, hiszen ezek átlaga is épp 3,5.

Kornél véleménye és indoklása: Eddig három ötösöm van az évben. Ha egy 3-ast és egy 4-est ír be nekem, az rosszabb az átlagom szempontjából, mintha 3,5-et kapnék, de még annál is rosszabb, mintha csak egy 3-ast kapnék, hiszen a 3-as és 4-es beírásával olyan, mintha kétszer is megkaptam volna a 3,5-es jegyet!

A negyedik tesztfeladathoz Juhász István és Orosz Gyula Matematika 10. tankönyvének 261. oldaláról [8] kaptam a motivációm. Ebben a tesztfeladatban a tanár állítása szerint, ha egy 3-as és egy 4-es osztályzatot ír be, az megegyezik azzal a szituációval, hogy egy 3,5-es osztályzatot ír be neki, amit viszont nem tud.

Ha beír Kornélnak egy 3-as és egy 4-es osztályzatot, akkor a három ötös jegy mellett az átlaga $\frac{3+4+5+5+5}{5} = \frac{22}{5} = 4,4$ lenne.

Azt is állította Kornél, hogy ha megkapja a 4-est és a 3-ast is, az olyan, mintha kétszer kapná meg a 3,5-es jegyet: $\frac{3,5+3,5+5+5+5}{5} = \frac{22}{5} = 4,4$.

Ha Kornélnak lehetne 3,5-es jegyet beírni, az átlaga a következőképpen alakulna: $\frac{3,5+5+5+5}{4} = \frac{18,5}{4} = 4,625$.

Kornél azt állította, hogy ha csak egy 3-ast kapna, még az is jobb lenne, mintha egy 3-ast és egy 4-est kapna. Ha csak egy 3-ast kapna, az átlaga a következőképpen alakulna: $\frac{3+5+5+5}{4} = \frac{18}{4} = 4,5$.

Kornél minden részállítása helyes volt, így az egész állítása és indoklása is helyes, hiszen:

- Ha egy 3-ast és egy 4-est kap, az átlaga 4,4, míg ha egy 3,5-est kapna, az átlaga 4,625 lenne, tehát az első eset valóban rosszabb az átlag szempontjából.
- Ha egy 3-ast és egy 4-est kap, az átlaga 4,4, míg ha egy 3-ast kapna, az átlaga 4,5 lenne, tehát az első eset valóban rosszabb az átlag szempontjából.
- Ha egy 3-ast és egy 4-est kap, az átlaga 4,4, míg ha kétszer kapja meg a 3,5-es

osztályzatot, az átlaga szintén 4,4. Ez alapján valóban olyan a 3-as és 4-es beírása, mintha kétszer kapná meg a 3,5-es osztályzatot az átlaga szempontjából.

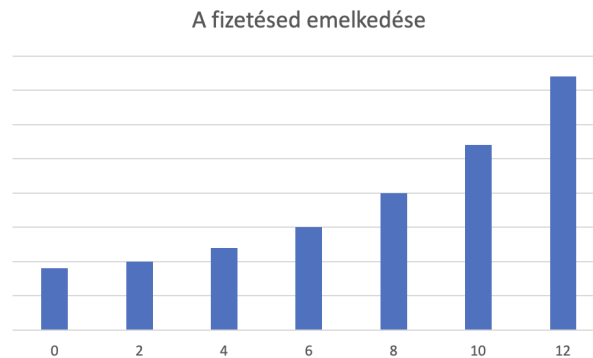
Tesztfeladat - 5.

Az alábbi szituációban állítanak valamit a történet főszereplőjének, Orsolyának. Döntsd el Orsolya indoklásáról, hogy helyes vagy helytelen! Válaszodat indokold!

Szituáció: Állásinterjún vagy, miután egy jó barátod a cégből állást ajánlott neked egy kávézás során a cégükénél. Éppen a fizetésed emelkedéséről beszél a cég egy embere, aki nagyon szeretné, hogy elfogadd az állásajánlatukat.

A cég emberének állítása: Nézd ezt a diagramot, nálunk exponenciálisan növekedhet a fizetésed! A vízszintes tengelyen a cégnél eltöltött éveket láthatod. Ilyen fizetésbeli emelkedést sehol máshol nem tudnak ígérni!

Orsolya véleménye és indoklása: Ez tényleg hihetetlen, eleinte még nem tűnik olyan soknak a pénz, de mivel egyre magasabbak az oszlopdiagram oszlopai, pár év múlva már nagyon sok pénzt kereshetek ennél a cégnél!



Az ötödik tesztfeladatban relatív, hogy mit nevez Orsolya sok pénznek. A növekedés ugyan egyértelmű, azonban a diagram függőleges tengelyén nem látjuk a beosztást, nem tudjuk, hogy mennyi pénzt jelentenek az egyes oszlopok. Ilyen módon tekinthetjük úgy, hogy egy beosztás 5 forintot jelent, ezáltal 12 év munka után körülbelül 36 forint lesz Orsolya fizetése, amit a legtöbb helyzetben nem nevezünk „sok pénznek”. Orsolya állítása ezek alapján helytelennek tekinthető.

Tesztfeladat - 6.

Az alábbi szituációban állítanak valamit a történet főszereplőjének, Ádámnak. Döntsd el Ádám indoklásáról, hogy helyes vagy helytelen! Válaszodat indokold!

Szituáció: Budapesten vagy a Keleti pályaudvaron és megpillantasz egy szerencsejátékoszó furfangos embert, Gyuri bácsit, aki játékra invitál téged.

Gyuri bácsi állítása: Gyere fiam! Itt olyan játékot játszatsz, ahol egyenlő eséllyel indulunk! Itt egy szabályos dobókocka, illetve egy 20 forintos érme, de egyik sincs ám megbuherálva! Egy körben te egyszer dobsz a dobókockával, én meg háromszor az érmével. Te akkor nyersz meg egy kört, ha a körön belül 4-est dobsz a dobókockával, én meg akkor, ha mindhárom érmefeldobás ugyanazt kapom, de mindegy, hogy ez fej vagy írás, csak ugyanolyannak kell lennie! Ha egyikünknek sem jön be vagy épp mindkettőnknek, akkor egyikünk sem nyer a körben. Érthető ez? Na, aki előbb szerez 5 győzelmet, az kap a másiktól 10000 forintot!

Ádám véleménye és indoklása: Játsszok! Tényleg egyenlő eséllyel játszunk, hiszen én 6 félét tudok dobni a kockával, ő is $3 \cdot 2$ -t hiszen mindhárom feldobásánál kétfélét dobhat. Meg amúgy is, nekem csak egy jót kell dobnom, neki meg hármat!

A hatodik tesztfeladatban Ádám helytelenül dönt és indokol. A szabályos dobókockával valóban 6-félét tud dobni, így a 4-es dobásának valószínűsége $\frac{1}{6}$. Gyuri bácsi háromszor dobja fel az érmét, s akkor nyer, ha mindhárom dobása megegyezik. Ezáltal az összes elemi esemény száma $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$, hiszen mindhárom dobásánál háromfélét dobhat. Ezekből az lesz a kedvező neki, amikor mindhárom írás, vagy mindhárom fej lesz, ez pedig két lehetőség az összesből. Összességében Gyuri bácsi $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ eséllyel dobja meg a nyeresét jelentő érmesorozatot.

A harmadik feladatcsoportban a tanulóknak három gyakorlati feladatot kell megoldaniuk a valószínűségszámítás és statisztika témaköréből, ahol a saját állításaikat – melyek a feladatok végső megoldásai – kell megindokolniuk.

Az első két feladatcsoportban végig mások állításaira, indoklásaira kellett indoklást gyártaniuk a tanulóknak, most azonban ebben a feladatcsoportban az indokolni kívánt főproduktumot is maguknak kell előállítaniuk.

Az alábbi három kérdésre kellett válaszolniuk az előteszt harmadik feladatcsoportjában:

Tesztfeladat - 7.

Mennyi az esélye, hogy két szabályos dobókockát feldobva két páros vagy két páratlan számot dobunk? Válaszodat indokold!

A kiírt eseményt tekintve az összes eset száma $6 \cdot 6$, mivel mindkét dobásnál hatféle kimenetel van. Két párosat $3 \cdot 3$ módon lehet dobni, mivel mindkét dobásnál a három páros szám valamelyike kerül ki. Ugyanígy két páratlan dobásnál is, tehát a 9 kétszerese a kedvező esetek a száma. Összességében az esemény valószínűsége tehát $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Tesztfeladat - 8.

A tanár döntési lehetőséget ad Károlynak, hogy matematikából ő dönthesse el, hogy milyen érték alapján kapja a végső jegyét a bizonyítványába. Dönthet a jegyei módusza, mediánja, vagy átlaga mellett. Mit javasolsz, melyiket válassza Károly, ha a célja a lehető legjobb jegyet kapni matematikából? Válaszodat indokold!

Károly jegyei: 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5.

A nyolcadik tesztfeladatban Károly jegyeinek módusza 4, mediánja 3, átlaga pedig 3. Ezek alapján a móduszt érdemes választania Károlynak.

Tesztfeladat - 9.

Jankának és osztályának egy totót ad fel a tanárunk matek órán, amikor is a következő a feladat:

„I. Tippeld meg a következő kísérletben a k értékét!

Feldobunk öt darab dobókockát, majd megszámloljuk, hogy hányon sikerült 6-ost dobunk! Ez a szám lesz a k .”

a) $k \leq 9$

b) $9 < k < 18$

c) $18 \leq k$

Segíts megtalálni Jankának a legvalószínűbb lehetőséget, hogy nagyobb esélye legyen a találatra a totón!

A kilencedik tesztfeladatban öt darab dobókockával legfeljebb 5 hatost dobhatunk, ezáltal a hatosok száma biztosan kisebb lesz, mint 9. Tekintve, hogy az a) lehetőség valószínűsége 1, a másik kettőé pedig 0, az a) lesz a legvalószínűbb lehetőség.

Az előteszt 2023. március 27-én (hétfő) zajlott le, 12:05 és 12:50 között, egy 45 perces tanóra keretében. A tesztpapírokat előre kiosztottam a 45 perc kezdete előtt és pontosan az óra végeztével be is szedtem. A diákoknak utasításban kiadtam, hogy figyelmesen olvassanak el minden feladatot és legjobb tudásuk szerint oldják meg azokat, az indoklást sem lefelejtve a válaszaik mellől. A diákok rendben és csendben dolgoztak végig, a legtöbben idő előtt végeztek is a munkával.

A teszt elvégzése során nem adtam semmilyen segítséget a tanulóknak, csupán azt hangsúlyoztam minden alkalommal, hogy jelenlegi tudásuk alapján válaszoljanak, és ami még fontosabb, indokoljanak! A teszt végezte után több kérdéssel fordultak hozzám a tanulók, melyek rendszerint inkább a teszt értelmét vizsgálták, mintsem a tartalmát. A témakör tanítása során igyekeztem elérni, hogy megértsék az indoklás témakörének iskolájának fontosságát is a tanulók, ne csak indokolni tudjanak az egyes esetekben.

2.3.2. A témakör elsajátításának időszaka

Gila Hanna szerint egy tantervnek tükröznie kell a matematikai gyakorlatot azzal, hogy bemutatja a bizonyítás – és így az érvelés – formális és informális módjait is, azonban ennek mind nincs értelme, ha a pedagógusok nem bocsátják rendelkezésre a matematikai eszközök teljes skáláját. Ha rendelkeznek a megfelelő eszközökkel a diákok, akkor van esélyünk megtanítani őket egy matematikai érv követésére és értékelésére, illetve hogy kidolgozhassák a saját matematikai érveiket [4]. A témakör elsajátításának időszakában ezek szerint az elvek szerint igyekeztem haladni és ezzel együtt fejleszteni a diákokat. Cél, hogy a diákok megszerezzék ezalatt az időszak alatt a szükséges érvelési eszköztárukat, az órai indoklási feladatoknak és a rengeteg kommunikációnak hála.

Egy másik munkájában Gila Hanna ír az 1950-1980-as évekbeli „New Math” nevű tantervi reform bukásáról, melyet túlzott absztraktságának, tisztán formális megközelítésének köszönhetett. A formális matematika szigorú, meghatározott szabályok alkotta kerete elvett a megértésből, ahelyett hogy hozzáadott volna, ehhez képest a lazább, hétköznapiasabb informális matematika könnyebben érthető. Egyszerűbb magyarázatokkal operálhat a tanuló [5]. Kitűztem, hogy a témakör során előkerülő érvelési készséget fejlesztő feladatokban az informális-formális spektrumon féltávon, vagy ha szükséges inkább az informális irányba vezessem még most a tanulókat, formális áthallásokkal, hogy hozzászokhassanak ezekhez.

A tanítási-tanulási folyamat során mindvégig a Pólya-féle problémamegoldási négy szakasz [15] mentén igyekeztem kalauzolni a diákokat a helyes megfejtések irányába. Ez a négy szakasz a feladat megértéséből, tervkészítésből, a terv végrehajtásából végül

pedig a megoldás vizsgálatából állt [15]. Ez a négy szakasz alkalmazható a bizonyítások és az indoklás folyamatára, melyekre a négy szakasz az állítás megértéséből, a sejtések megfogalmazásából és a bizonyítási/indoklási terv készítéséből, a konkrét bizonyítás/indoklás végrehajtásából, majd a visszatekintésből áll [5]. Egy modernebb tanulmányban kerül megfogalmazásra, hogy a tanulónak óriási problémája van az állítások logikai szervezésével kapcsolatban [2], erre pedig gyógyírként szolgálhat a Pólya-féle négy fázis indoklásra átfogalmazott változata. Ehhez az gondolatrendszerhez csatolható még Pólya György pár gondolata, melyet Stylianides idéz meg egy munkájában, ahol arról szól, hogy a minták, a sejtések és bizonyítások közötti kapcsolatot fel kell fedeztetni a diákokkal. A minták sejtéseket, a sejtések indoklásokat/bizonyításokat generálhatnak [17].

A témakör tanítása során a kerettantervi elemeknek megfelelő ismereteken haladtam végig a tanulókkal a valószínűségszámítás és statisztika témakörén belül. Csaknem minden egyes órán egy külön – általában körülbelül – 10-15 perces blokkban egy, az adott óra témájához illeszkedő indoklási feladattal foglalkoztam a tanulókkal. Az alábbi bekezdésekben ezeket a feladatokat mutatom be és reflexiót fűzök az órán tapasztaltakhoz.

Órai feladat - 1.

Adj meg önállóan egy elemi eseményt, illetve egy eseményt – ami nem elemi esemény – a következő kísérletekkel kapcsolatban:

1. Szabályos dobókocka dobása.
2. Érmé feldobása.
3. Lap húzása egy francia kártyapakliból.
4. Nyerő számok kisorsolása ötöslottóban.

Beszéljétek meg a padtársotokkal az általatok megadott elemi eseményeket és eseményeket! Véleményezzétek indoklással, a párotok megoldásait, hogy szerintetek miért helyesek, vagy épp miért helytelenek!

Az első órai feladat az eseményekkel foglalkozik, azon belül is az eseményekkel és az elemi eseményekkel. A feladat során a megadott négy kísérlet esetén kellett megadniuk egy – nem elemi – eseményt, továbbá egy elemi eseményt a diákoknak.

Ennél a feladatnál TPS (Think-Pair-Share) módszert alkalmaztam a tanulóknál, ami egy kooperatív vitastratégia, amelyet Frank Lyman fejlesztett ki kollégáival [13].

A módszert számos kooperatív tanulással foglalkozó szakirodalom feldolgozta már, alapvetően sikeresnek elkönyvelve azt, a tanulók kritikus gondolkodásának fejlesztése irányából [9] [10]. A nevét a három szakaszáról kapta, ahol az elsőben (Think) a tanulók magukban gondolkodnak a kérdéseken, próbálnak azokban előrehaladni. Ezután a második szakaszban (Pair) párokat alkotnak – jellemzően a padtársukkal – és megbeszélik együtt a megoldásaikat, diskurálnak azokról. A végső szakaszban (Share) pár tanuló megosztja közös megoldásait és konklúzióit a problémáról, feladatról az egész osztálynak.

A TPS-módszerhez híven az önálló példák megadására 5 percet hagytam nekik, ami után kaptak még 5 percet, hogy közösen megvitassák egymás megoldásait, végül megosztotta pár páros a saját megoldásait az osztállyal. Mivel tapasztalatlanok ezen a területen a tanulók, az egyik tanulóval bemutattunk egy példát az elvárt párbeszédre. Mivel a téma elején járt az osztály, így tapasztalatlanságukból adódóan számos hibás példa került elő, így a párok másik tagjának mindig akadt olyan eset, ahol társa állításának helytelenségét kellett megindokolnia.

A páros munka féltávjánál egy remek párbeszédet hallva kiemeltem a diákokat, hogy mondják el az egész tanteremnek is miről beszéltek, a 3. kísérletet illetően:

- **X** tanuló: „A 3. kísérlet esetén elemi esemény az ász húzása, míg esemény (ami nem elemi) a treff húzása.”
- **Y** tanuló: „Az ász húzása helytelen példa a kísérletet illető elemi eseményekre, mivel az ász húzása tovább bontható: treff ász húzása, pikk ász húzása, stb. eseményekre. Elemi eseményre példaként bármely konkrét lap kihúzását lehet mondani. A treff húzása példának helyes, mint olyan esemény, amely nem elemi esemény, hiszen az esemény több elemi eseményre lehet bontani: treff 2 húzása, treff 8 húzása, stb. ”

A példa hatására több tanulón is láttam, hogy megérti a feladatot. A tanulók között járva egészen kiváló megoldásokat és indoklásokat hallhattam, de figyeltem a gyakori hibás példákat és hibás indoklásokat is. Az idő lejártá után minden egyes részhez együtt is megadtunk egy-egy helyes példát, illetve megadtam egy helytelen példát vagy indoklást is a tanulóknak, aminél annak helytelenségére hangos érveket kellett mondaniuk.

Minden matematikatanár célja kell, hogy legyen, hogy megtanítsa a tanulóinak az indoklás szabályait, meg kell velük ismertetnie az indoklás mintáit és a megfelelő kifejezéseket, mint például a feltételezés, a sejtés, a példa, az ellenpélda, a cáfolat [4]. Ez előző tanulói párbeszéd alkalmával részletesebben tudtunk beszélni a tanulókkal a példa, ellenpélda és cáfolat hármáról. Mitől volt jó az Y tanuló cáfolata, hogyan hozott az X példákra ellenpéldákat, hogy az elfogadható legyen cáfolatként, illetve indoklasként.

Órai feladat - 2.

Szabályos dobókockával dobunk. Az alábbi eseményrendszerek közül melyik alkot erre tekintve teljes eseményrendszert? Válaszodat indokold!

1. $A = \{1\}; B = \{2\}; C = \{3\}; D = \{4\}; E = \{5\}; F = \{6\}$
2. $A = \{1; 3; 4\}; B = \{2; 6\}$
3. $A = \{1; 2; 6\}; B = \{5\}; C = \{2; 3; 4\}$
4. $A = \{1; 6\}; B = \{2; 4\}; C = \{3; 5\}$

A második órai feladat a teljes eseményrendszer fogalmával foglalkozik. A dobókocka dobását tekintve kellett önállóan megvizsgálniuk az egyes megadott eseményrendszereket, hogy azok teljes eseményrendszerek vagy sem. Válaszuk indoklásánál a teljes eseményrendszer tulajdonságait kellett felvetniük, hogy azok megjelennek-e vagy sem. A tanulók ennél a feladatnál megtanulhatták, hogy egy állítás indoklásánál fontos a fogalmak elméleti háttere és azt bármikor eszközként is használhatjuk állításunk bebiztosításához.

Órai feladat - 3.

Egy iskola egy osztályában a következő megállapításokat teszik a tanulók:

1. *Klaudia*: „Dobtam harmincszor a dobókockával, de egyszer sem kaptam 6-ost, így a relatív gyakorisága a 6-os dobásának 0. Ez azt jelenti, hogy ez lehetetlen esemény!”
2. *Viktor*: „Húztam egy lapot a francia kártya pakliból, majd visszatettem és megismételtem ezt 100-szor. A kísérlet során feljegyeztem, hogy hányszor kaptam treffet, pikket, kárót és kőrt, majd elosztottam az egyes számokat 100-zal. Az értékek, amiket kaptam, az egyes események relatív gyakoriságai a kísérletben.”
3. *Ferenc*: „Feldobtam 45-ször ezt a 20 forintost, 30-szor fejet kaptam, 15-ször pedig írást. Ez azt jelenti, hogy nagyobb eséllyel tudok fejet dobni ezzel az érmével!”

Értékeljétek önállóan az állítások helyességét, indokoljátok meg azt, majd beszéljétek meg a párotokkal azokat!

A harmadik órai feladat hasonló felépítéssel dolgozik, mint az első, itt is TPS-módszert alkalmaztam, itt is először önállóan kell értékelnie az állítások helyességét a tanulóknak (4 perc), majd a padtársukkal kellett diskurálniuk az állításaik és indoklásaik helyességéről (4 perc). A feladat a relatív gyakoriság témakörét mélyíti el, illetve a valószínűségi gondolkodást, továbbá magának a valószínűségnek a fogalmát is célozza.

A tanulók szemmel láthatóan hatékonyabban dolgoztak, mint az első órai feladatnál, bátrabban mertek mondatokat megfogalmazni az állításokról, érződött, hogy – még ha minimális is – indoklási élményeik vannak a matematikaórákról.

Egy remekbeszabott párbeszéd a csoport egyik párjától, az első feladatrészeiről:

- **X** tanuló: „Klaudia állítása helyes, hiszen ha egy esemény valószínűsége 0, az esemény lehetetlen esemény.”
- **Y** tanuló: „Igen, a lehetetlen eseményt jól megfogalmaztad, de Klaudiánál a 6-os dobásának a relatív gyakorisága lett 0, a relatív gyakoriságból pedig nem lehet egyenesen következtetni a valószínűségre.”

A Stylianides [17] által leírt érveket hozom elő most ezen párbeszéd tekintetében. X tanuló empirikus érvel próbálja Klaudia kijelentésének alátámasztását megejteni egyfajta tapasztalati érvel, mely helytelen ebben az esetben, további hiányos fogalmi háttér is megmutatkozik az elmondottakban, amire az Y tanuló rá is világít, egyfajta magyarázó érvel csatol vissza X-re, ami viszont hiányos, hiszen az úgy lett volna

teljes, hogy még leírja, hogy a hatos dobásának a valószínűsége $\frac{1}{6}$. Y tanuló a valószínűség és relatív gyakoriság közötti különbségre világít rá, így ez ebben a szituációban bizonyításnak tekinthető, mert az adott osztályban elvárt ismeretekre támaszkodik.

Órai feladat - 4.

Kihívnak minket egy játékra. Van két kocka, amit megszámoztak 1-től 12-ig terjedő számokkal úgy, hogy az egyikre az 1, 3, 5, 7, 9, 11 számokat, a másikra pedig a 2, 4, 6, 8, 10, 12-t írták.

A játék előtt választanunk kell egy kockát. A játék során mindkét játékos dob egyet a saját kockájával és az nyer, aki a nagyobb számot dobja. Melyik kockát válasszuk, hogy nagyobb esélyünk legyen a győzelemre? Válaszodat indokold!

A negyedik órai feladat során valószínűségszámítási gyakorlati feladatot oldhattak meg a tanulók és a megoldásuk helyességét kellett indokolniuk számításukkal. A korábbi két dobókockás feladatoknál vizuális eszközökkel – táblázat használatával –, illetve strukturált adatgyűjtéssel is megoldásokat adtunk a diákokkal. A legtöbben még ragaszkodtak a táblázatos ábrázoláshoz, de voltak akik már a rövidebb, a kedvező elemi események strukturált kigyűjtésével adták meg a kedvező esetek számát. A feladat megoldását a tanulók nagy hányada meg tudta adni, előtte helyes számításokkal alátámasztva – megindokolva – azt.

Órai feladat - 5.

A következő kockajátékot ketten játsszák. Az egyik a játékos, a másik pedig a bank. A játékosnak roppant egyszerű dolga van: eldönti, hogy mekkora pénzösszeget akar kockáztatni, majd kap egy szabályos dobókockát, amivel négyszer dob.

Ha sikerül elkerülnie azt, hogy 6-ost dobjon, akkor visszakapja a pénzének a dupláját, ha viszont a dobott számok között akár csak egy 6-is is szerepel, akkor elveszíti a pénzét.

Megéri-e játszania a játékosnak? Válaszodat indokold!

Az ötödik órai feladat során valószínűségszámítási gyakorlati feladatot oldhattak meg a tanulók és a megoldásuk helyességét kellett indokolniuk számításukkal. A legtöbb diákot a megoldás és így a helyes indoklás megszerzésében a feladatmegoldási képességei korlátozták.

Az ötödik órai feladat legegyszerűbben komplementer esemény használatával megoldható – $P(\text{dob 6-ost}) = 1 - P(\text{nem dob 6-ost})$ –, az óra témája is ennek használata volt, így egyfajta irányítást mutatva ezen feladat megoldására. Akik kényelmesen mozgottak már az óra középső/végső szakaszában az ilyen feladatok körében, azoknak problémamegoldásuk helytálló volt.

Órai feladat - 6.

Rudolf egy teszt jellegű dolgozatot ír biológiából a következő tanítási napon, ami 10 kérdésből fog állni és minden kérdésnél 4 válaszlehetőség közül kell kiválasztania az egyetlen helyes választ. A dolgozaton 5 helyes választól jár legalább kettes osztályzat a tanulóknak.

Az dolgozat előtti utolsó biológia óra végén Rudolf meglátta a Tanárnő holnapi dolgozathoz készített megoldókulcsának bal alsó sarkán a következőt: „8. D, 9. A, 10. B”. Rudolf úgy vette, hogy három helyes válasza már biztosan van, így már nem is tanul a dolgozatra, a többi 7 kérdésre tippelve ad majd választ, továbbá kijelentette:

Rudolf: „Így biztosan át fogok menni tanulás nélkül is!”

Rudolf az egyik osztálytársának Károlynak is elmondta az előző információit, amire így reagált Károly:

Károly: „Egyáltalán nem biztos, hogy meglesz így a kettes! Sőt, szerintem még így is nagyobb esély van arra, hogy egyest kapsz, minthogy legalább kettest!”

Mi a logikai értéke Rudolf és Károly állításának? Válaszodat indokold!

A hatodik órai feladatban az előző két feladathoz hasonlóan egy gyakorlatibb feladatról van szó, mégis két fiktív tanuló állítását kellett értékelniük, amelyeket a megoldásról próbáltak „megsejteni”.

Rudolf állítását mindenféle számítás nélkül is megcáfolta minden tanuló. A főszereplőnk biztos eseménynek hívja az elégséges megszerzését – azaz a legalább két helyes válasz adását a maradék hét kérdésből –, a következő kísérletet tekintve: hét kérdés, kérdésenként négy válaszlehetőség, amiből egy helyes válasz esetén tippelés. Nyilvánvalóan, ebben a kísérletben lehetséges esemény az is, hogy nulla, vagy egy helyes választ ad Rudolf a maradék hét kérdésre, ezáltal a legalább két helyes válasz adása – a maradék 7 kérdésből – egyáltalán nem egy biztos esemény. Rudolf állítása ezáltal hamis.

Károly állítása egy fokkal összetettebb volt, hiszen ő egyszerre két dolgot is állított. Az előzőek alapján az állítás első felével egyetérthetünk, valóban nem biztos, hogy

meglesz Rudolfnak a kettes osztályzat ezekkel a körülményekkel. Az állítás második felében Károly szerint nemcsak hogy nem biztos, hogy átmegy Rudolf, de még nagyobb esély is van arra, hogy elégtelent kap a végén. A gondolatmenetben eddig minden tanuló önállóan eljutott, továbbá arra is rájöttek a legtöbben, hogy számításokra lesz szükségük az indokláshoz, s így a megoldás megadásához.

A számítás során érdemes volt kihasználnia a tanulóknak a komplementer-eseményekre vonatkozó – már a korábbiaknál is használt – képletet: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Egy pár perc várakozás után beavattattam – azokat is ebbe, akik esetleg nem tudtak hogyan elindulni ebben. Az elégséges megszerzésének valószínűségére $\approx 0,55$ lett az eredményünk végül már együttesen, ami azt jelenti, hogy bár valóban nem biztos az, hogy Rudolf megkapja az elégségest, de mégis nagyobb esélye van erre, minthogy elégtelent kapjon. Károly állításának második fele hamis volt, így a teljes állítását is hamisnak tekintjük.

Ebben a feladatban – mint pár másik önálló feladatban – a tanulóknak sajátjuként kellett megadniuk a választ és az ahhoz csatolt indoklást. A korábbiakban leírtam, hogy mennyire fontos a társas interakció és kommunikáció az érvelés tanításában, azonban Balacheff szerint a társas interakció bizonyos körülmények között korlátozó tényező lehet. Úgy gondolta, hogy a tanulók a sikervágyaik miatt nem feltétlenül képesek összehangolni az egymásétól eltérő nézőpontjaikat [1]. Ezek miatt a gondolatok miatt az érvelési órai feladatok között szerepelnek önálló munkavégzést, illetve páros munkát is igénylő feladatok.

Órai feladat - 7.

Egy iskola egy osztályában a következő megállapításokat teszik a tanulók:

1. *Ákos*: „Ha egy adatsokaság szórása nulla, akkor minden adat nulla!”
2. *Eleonóra*: „Egy kísérlet után a kapott adatsokaság terjedelme megadja az összes lehetséges kimenetel számát!”
3. *Kolos*: „Egy adatsokaság alsó kvartilisének és felső kvartilisének átlaga éppen a medián!”
4. *Flóra*: „Egy adatsokaság módusza egyben az adatsokaság átlagához legközelebb álló adat is!”

A párok egyik tagja értékelje a páros számú állítások helyességét, míg a másik a páratlan számúakat. Ezután indokolják meg társatoknak az egyes megoldásaitokat!

A hetedik órai feladatban már áttérünk a statisztika témakörére a tanulókkal, ahol

is az adatsokaságokat jellemző értékekről tanultunk. A tanulók itt is a TPS-módszer keretein belül adhattak megoldásokat az állítások helyességére, azonban az eddigi TPS-módszeres feladatokkal ellentétben itt már különböző állításokkal foglalkoztak a tanulók az önálló gondolkodási (Think) részben. A párok két tagjának tehát most különböző állításokat kellett értékelnie, majd bemutatnia egymásnak, tálalva az általa elemzett állítás helyességéről szóló véleményét, illetve az ehhez tartozó indoklást. Miután ez megtörtént, az eddig hallgató társ reagál a párjától hallottakra, elfogadja indoklása helyességét vagy sem és indokol.

A tanulók ebben a szakaszban már teljesen megértették, hogy az érvelés magába foglalja az érvek kialakításában, kritizálásban val cserét és együttműködést is, a Gila Hanna által írtaknak megfelelően [4]. Bár az előteszt – és később az azzal megegyező utóteszt és késleltetett utóteszt – feladatai között a társak nem számíthatnak egymásra, de másokra ugyanúgy kell reagálniuk, társas szituációkban kell emberekre reflektálniuk, véleményt formálniuk. Ha ezt hatékonyan tudják megtenni, a fejlesztés eredményektől függetlenül is célt ért.

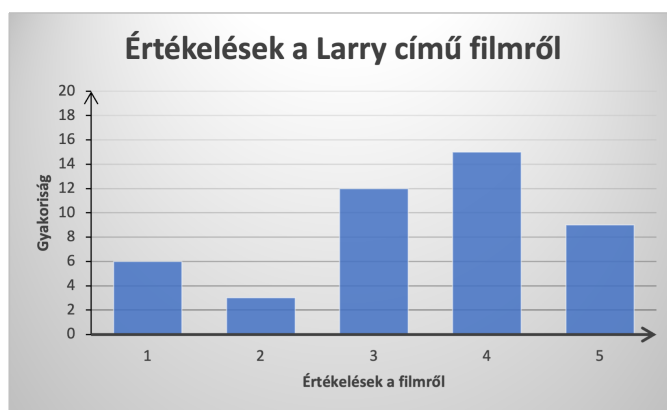
A National Council of Teachers of Mathematics az 1980-2000 közötti években ajánlásokat adott ki az iskolai matematikaoktatással kapcsolatban, melyben egy fő pontként kiemelték, hogy a matematikai alapkészségek meghatározásának túl kell mutatniuk azon, hogy csupán a számítási készségeket foglalják magukba burkoltan. Ezen belül részajánlások tértek ki a kommunikációs készségek elsajátítására, illetve a logikus érvelés, információfeldolgozás és döntéshozatal folyamatainak alapvetőnek tekintésére [5]. A feladat tükrözi ezeket a mai napig népszerű és jónak tartott elveket, fejleszti a diákok kommunikációs- és érveléshez köthető készségeit egyaránt.

A tanulók egyik legjobban vett akadály volt ez a feladat, kiemelkedő munkamorál volt jellemző ennél a feladatnál, megérzésem szerint a rengeteg indoklási-érvelési tapasztalásuk okán. A tanulók javarésze érezte az állítások számszerű példákkal könnyű válaszhatóságát, ebben az irányban pedig ellenpéldákat igyekeztek kreálni. Páran ugyan nem így indultak el, de mikor felvetült az ellenpéllda kifejezés, szinte kivétel nélkül mindenki páros célba ért. Érezhetően jobban reflektáltak egymás munkáira, megnyilvánulásaira a párok, konstruktív gondolatokat osztottak meg egymással a megoldásokkal kapcsolatban.

Órai feladat - 8.

Alkossatok önállóan három igaz és három hamis állítást az alábbi képen látható diagramról!

Olvassátok fel egymásnak felváltva áttalatok kreált állításokat a padtársatokkal! A másik félnek mindig ki kell találnia, hogy az adott állítás igaz vagy hamis, és meg is kell indokolnia a választát!



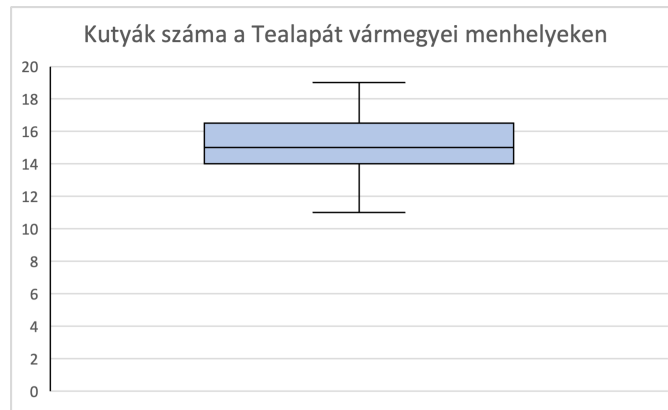
A nyolcadik órai feladatban a párok tagjainak készakarva kell igaz és hamis állításokat megadniuk a feladathoz mellékelt oszlopdiagramról. A feladat remek működését az biztosította, hogy akarva akaratlanul is rendkívül egyszerű állításokat adtak meg a tanulók a diagrammal kapcsolatban, legyenek azok igazak vagy hamisak. A magától értetődőnek tűnő állítások helyességéről talán nehezebb indokolniuk, hiszen a „látszik, egyértelmű” kifejezések jönnek ki a tapasztaltabb matematikával foglalkozók szájából is. Ebben a feladatban most pontosan az jelentette a kihívást, hogy ezeket megindokolják a tanulók, de hamar ráéreztek ennek az ízére is.

Órai feladat - 9.

Alkossatok önállóan három igaz és három hamis állítást az alábbi képen látható diagramról!

Olvassátok fel egymásnak felváltva áttalatok kreált állításokat a padtársatokkal! A másik félnek mindig ki kell találnia, hogy az adott állítás igaz vagy hamis, és meg is kell indokolnia a választát!

A kilencedik órai feladat az előző példánk testvére, annyi különbséggel, hogy az általuk eddig ritkábban látott dobozdiagrammal kellett dolgozniuk. Különbséget volt még,



hogyan kiemeltém a tanulóknak azt, hogy igyekezzenek kreatívabb, nehezebb állításokat adni társuknak, hogy többet kelljen gondolkodnia annak logikai értékéről. A diákoknak sikerült magasabb szintre emelni az állítások megfogalmazását, olyannyira, hogy feladatra plusz időt kellett adnom, mert valóban nagyobb kihívást jelentő állításokat adtak egymásnak.

Órai feladat - 10.

Madeinország dörzsölt vezetője, II. Tihamér megjelentette az alábbi diagramot a nemzeti újságban, aminek folytán országának – Párnalandia felé – csökkenő tartozásáról értekezett:

II. Tihamér: „Ahogyan az ábra is mutatja, az elmúlt 10 évben fokozatosan csökkent Hazánk Párnalandia felé való tartozása, ami a korábbi horribilis mértékű tartozáshoz képest idénre már elenyésző mennyiségű! Ez is a rendszer hatékonyságát és sikerességét mutatja!”

Madeinország lakójaként belső feladatodnak érzed az ilyen megnyilvánulások kritikus elemzését. Vizsgáld meg a diagramot és II. Tihamér állítását! Igazat mondott vagy hazudott az ország vezetője? Válaszodat indokold!

A tizedik órai feladat óráján a diagramok kritikus vizsgálatáról beszéltünk a tanulókkal, több manipulációt is megvizsgáltunk a diagramok és statisztikai értékek tekintetében. A diagramok kritikus vizsgálata, illetve azok manipulációja kerettantervi elem a statisztika témakörében [11].

Ez a konkrét feladat a diagram részeinek megjelenítését teszi célkeresztbe, önálló feladat formájában. A tanulók jelentős részének problémát okozott ez a feladat, úgy tűnt, még ha világos is a legtöbбекnek, hogy miért kell kritikusan néznünk egy diagramot, továbbá néztünk több nevezetes buktatót ezek esetén, nehezen tudják átvinni a diagramokról megszerzett ismereteiket ezekbe a gyakorlati, életszerű példákba.



A megoldásra – kisebb segítségnyújtások mellett – fokozatosan csaknem mindenki rájött, konstatálva azt, hogy egy-egy kisebb változtatás, egy-egy kisebb hiányosság a diagramon mennyire más jelentéseket adhat annak. Jelen esetben a diagram hiányzó része a függőleges tengely maga, ami megadná nekünk, hogy mennyi is az a bizonyos tartozás és milyen mértékben csökkent az. Egyes grafikonokon az y tengely értékei gyakran nem 0-tól indulnak. Így például, ha az y tengely első beosztása 9 egység, a legfelső pedig 10 egység, akkor alig csökkent az adósság, pedig a diagram oszlopai pont, hogy ellenkezőleg, annak nagymérték csökkenését hitetik el.

2.3.3. Az utóteszt

A tanulók az utóteszt során az előteszt feladatait oldották meg ismételten. Az utótesztre a Valószínűségszámítás és Statisztika témakörét feldolgozó témazáró dolgozat után következő órán került sor, 2023. május 22-én (hétfőn), 12:05-12:50 között, egy 45 perces tanóra keretein belül.

A tanulók az utóteszten – az előteszthez képest – csendesen, kevés kérdéssel és gyorsabban dolgoztak. A vizsgálatom reményében ezekhez a tulajdonságokhoz csatlakozott a hatékonyság növekedése is, azonban ez majd csak a teszt elemzése során tudom meg. Az utóteszt körülményei megegyeznek az előteszt körülményeivel, pontosan ugyanabban az órában és napon írhatták meg a tanulók ezt a tesztet is, ugyancsak anonim módon.

Az utóteszt célja annak a felmérése volt, hogy a célzott indoklást középpontba helyező feladatmegoldások, fejlesztések hatására fejlődött-e a csoport tanulójának önálló indoklási- és érvelési képessége, az előtesztben tapasztalt eredményekhez képest.

2.3.4. A késleltetett utóteszt

A késleltetett utóteszt már a következő tanévben zajlott le a tanulóknál, mikor már nem én tanítottam a csoportot. Ennek ideje 2023. október 2-a, hétfő, ugyanúgy 12:05-12:50

között, ugyanannak a 45 perces tanórának a keretein belül, mint az elő- és utótesztben.

Az utóteszthez képest a tanulók zajosabban, zavartabban dolgoztak, az előteszthez képest azonban még mindig kevésbé hangosan. A tanulók ekkorra már jól ismerték a tesztet, hiszen harmadjára találkoztak vele, még ha nagyobb kihagyásokkal is.

A késleltetett utóteszt célja annak a felmérése volt, hogy a tanulók mennyire emlékeznek a jól bevált indoklási-érvelési sémákra, mennyire tudják előhúzni az órákon tanultakat és végső soron, ha növekedett a hatékonyságuk az utóteszten, csökkent-e, s mennyivel csökkent az indoklási hatékonyságuk az eltelt idő alatt.

3. fejezet

A teszteredmények elemzése

3.1. A tesztek pontozása

A tesztek értékelésekor minden egyes tesztfeladatra két pontot kaphattak a tanulók a megoldásaik szerint, amiből egy pont a feladat helyes megoldására járt, míg egy pont pedig a megoldásuk helyes indoklása alapján volt megszerezhető. Az előző fejezetben az egyes bemutatott tesztfeladatok alatt részletezve van azok megoldása is, azonban nem csupán csak pontosan ezeket fogadtam el, hanem a főbb lényegi részeket tartalmazó, esetlegesen csonkább indoklásokat is pontot érőnek tekintettem. Az adatokat táblázatba rendeztem és statisztikai próbáknak vetettem azokat alá.

3.2. Leíró statisztikai jellemzés

A 3.1. táblázatban leíró statisztikai jellemzést adtam az egyes tesztek egyes részeiről. Az elemzés során külön fogok foglalkozni a megoldásokra, illetve az indoklásokra kapott pontszámokkal, továbbá az utóbbi kettőt egy kalap alá vevő összes pontszámmal, amelyet a tanulók elértek az előteszten (00E), az utóteszten (01U) és a késleltetett utóteszten (002K). Az egyes teszteken összesen 18 pont volt a maximálisan megszerezhető, ezekből 9 a megoldásokra, 9 pedig az indoklásokra.

Mindhárom tesztet 28 tanuló írta meg. Jól látható ebben a táblázatban, hogy az átlagok lekövetik azt, amit el is várnánk a mintától, az előteszt eredményei mind a megoldási, mind az indoklási és így az összes pontszám esetén is gyengébbek, mint az utóteszté és késleltetett utóteszté, azonban a késleltetett utóteszt átlagai gyengébbek, mint az utóteszt eredményei. Nyilvánvalóan ez még kevés ahhoz, hogy a tanítási folyamatot sikeresnek könyveljem el, de kedvező irányokat jelez elő ez az adatcsoport. Az átlagok szórása az összes pontszámot tekintve kiegyensúlyozottnak mondható a három teszt adatait vizsgálva, míg a megoldási pontoknál a szórás egyre csökkent az előteszttől a késleltetett utótesztig haladva, addig az indoklási pontokat tekintve épp

az előtesztnél volt a legkisebb az eltérés. Ennek az oka az előteszt gyenge átlaga, és szerzett pontjainak kis terjedelme lehet.

A legmagasabb elért pontszámok az előtesztthez mindig stagnáltak vagy növekedtek az utóteszten, majd a késleltetett utóteszten az előzőhöz képest stagnáltak vagy csökkentek. Ezekhez képest az elért pontok terjedelme rendre csökkent vagy stagnált az utótesztre, majd növekedett onnan a késleltetett utótesztre. Látható például, hogy – az előzőekhez hűen – az összes pontszámot tekintve az utóteszt leggyengébb eredménye közelítőleg megegyezik az előtesztek átlagpontszámával.

Érdekes még megemlíteni, hogy a tanulók megoldási pontjai között minden teszten volt maximális, az indoklási pontokat tekintve viszont egy 9 pontos eredményt sem mutathat fel a csoport.

	Megoldás			Indoklás			Összes		
	00E	01U	02K	00E	01U	02K	00E	01U	02K
Valid	28	28	28	28	28	28	28	28	28
Mean	4.893	6.500	6.071	2.143	4.000	3.357	7.063	10.500	9.429
Std. Deviation	2.006	1.478	1.331	1.297	1.587	1.569	2.899	2.560	2.501
Minimum	1.000	4.000	3.000	0.000	2.000	1.000	3.000	7.000	5.000
Maximum	9.000	9.000	9.000	5.000	7.000	7.000	13.000	15.000	14.000

3.1. táblázat. Leíró statisztika

3.3. Az összes pontszám összehasonlítása az előtesztben, az utótesztben és a késleltetett utótesztben

A statisztikai elemzést az összes pontszám vizsgálatával kezdem. Az adatokat először Levene-tesztnek (3.2. táblázat) vettem alá, amellyel azt akartam megtudni, hogy alkalmazhatók-e a mintára ANOVA-tesztet. A Levene-teszt azt vizsgálja, hogy az egyes tesztek szórási értékei között van-e szignifikáns különbség. Ha a szórások túlságosan eltérőek, az befolyásolhatja az ANOVA-teszt eredményeit. Mivel $p = 0,764 > 0,05$, a Levene-teszt szerint ANOVA-tesztet alkalmazhatok (3.3. táblázat), hiszen ez azt mutatja, hogy a tesztek szórásai közötti különbségek valószínűleg véletlen eredmények.

F	df1	df2	p
0.271	2.000	81.000	0.764

3.2. táblázat. Levene-teszt az összes pontszámra

A számolt F statisztikai érték azt mutatja, hogy a csoportok közötti változás milyen mértékben tér el a véletlen variabilitástól. Az itt kapott 12,455 magas értéknek számít, a hozzá tartozó $p < ,001$ érték pedig alacsony. Az ANOVA-teszt ezek alapján kimutatta, hogy a tesztek közötti különbségek statisztikailag szignifikánsak voltak ($F(2, 81) = 12,455, p < ,001$).

Cases	Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
Teszt	176.167	2	88.083	12.455	<.001
Residuals	572.821	81	7.072		

3.3. táblázat. ANOVA-teszt az összes pontszámra

Az ANOVA-tesztből megtudtam, hogy a tesztek között szignifikáns különbség van, viszont ebből nem tudtam meg, hogy pontosan mely tesztek között van ez a bizonyos különbség. A Post Hoc összehasonlító – Tukey-Kramer – tesztel (3.4. táblázat) választ kapok ezen kérdéses információkra. A teszt eredményei alapján az előteszt eredménye szignifikánsan különbözik mind az utóteszt, mind a késleltetett utóteszt eredményétől, de az utóteszt és a késleltetett utóteszt eredményei között nincs szignifikáns különbség, mint azt a p_{tukey} értékei mutatják is. A 3.1. ábrán – ami a tesztthez tartozik – a hibavonal a standard errort jelöli.

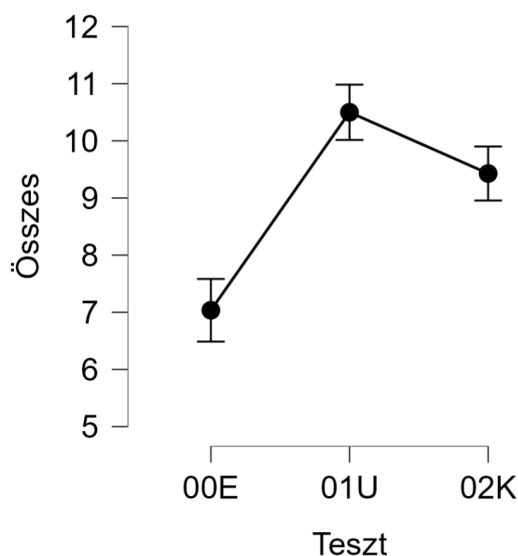
		Mean Difference	SE	t	P_{tukey}	
00E	01U	-3.464	0.711	-4.874	<.001	***
	02K	-2.393	0.711	-3.367	0.003	**
01U	02K	1.071	0.711	1.508	0.293	

** $p < .01$, *** $p < .001$

3.4. táblázat. Post Hoc összehasonlító teszt - összes pontszám

3.4. A megoldásra kapott pontszám összehasonlítása az előtesztben, az utótesztben és a késleltetett utótesztben

A megoldásokra kapott pontszámok vizsgálatával folytatom a tesztek analitikus elemzését. Ehhez először ismét a Levene-teszt (3.5. táblázat) nyúltam a korábban már leírt okokból. A megoldásokat tekintve a Levene-teszt alapján nem alkalmazhatok ANOVA-tesztet, mivel $p = 0,030 < 0,05$. Ebből az indíttatásból a következő lépésben nem paraméteres Kruskal-Wallis tesztet (3.6. táblázat) alkalmazok.



3.1. ábra. Post Hoc összehasonlító teszt - összes pontszám

F	df1	df2	p
3,661	2.000	81.000	0.030

3.5. táblázat. Levene-teszt a megoldásra kapott pontszámra

A Kruskal-Wallis teszt azt vizsgálja, hogy a három független teszt között van-e statisztikailag szignifikáns különbség a rangsorolt értékeik alapján. A teszt azt mutatja, hogy a tesztek eredményei között szignifikáns eltérés van ($U(2) = 10,608$, $p = 0,005$).

Factor	Statistic	df	p
Teszt	10.608	2	0.005

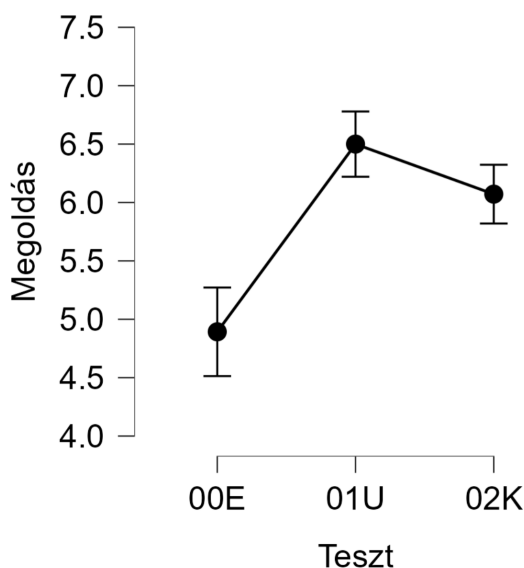
3.6. táblázat. Kruskal-Wallis-teszt a megoldásra kapott pontszámra

A szignifikáns eltérésről már tudok, kérdés, hogy mely tesztek között jelent ez meg, így ismételten egy Post Hoc összehasonlító tesztet alkalmazok, a Dunn-féle Post Hoc összehasonlító tesztet. Ezt a post hoc tesztet szokás alkalmazni Kruskal-Wallis tesztet követően, emiatt döntöttem emellett. A páros összehasonlítás szignifikáns különbséget mutat az előteszt és az utóteszt, valamint az előteszt és a késleltetett utóteszt eredményei között.

Comparisons	z	W _i	W _j	p	
00E - 01U	-3.177	31.018	51.339	0.001	**
00E - 02K	-2.209	31.018	45.143	0.027	*
01U - 02K	0.969	51.339	45.143	0.333	

* $p < .05$, ** $p < .01$

3.7. táblázat. Dunn-féle Post Hoc összehasonlító teszt - megoldásra kapott pontszám



3.2. ábra. Dunn-féle Post Hoc összehasonlító teszt - megoldásra kapott pontszám

3.5. Az indoklásra kapott pontszám összehasonlítása az előtesztben, az utótesztben és a késletetett utótesztben

Az előzőeknek megfelelően vizsgáltam az indoklásra kapott pontszámokat is az egyes tesztek során. A Levene-teszt (3.8. táblázat) eredménye alapján, mivel $p = 0,505 > 0,05$, alkalmazhatok ANOVA-tesztet.

F	df1	df2	p
0.690	2.000	81.000	0.505

3.8. táblázat. Levene-teszt az indoklásra kapott pontszámra

Az indoklási pontszámokat vizsgáló ANOVA-teszt (3.9. táblázat) alapján szignifikáns különbség van a tesztek között, ám ismét meg kell vizsgálnom, hogy mely tesztek között van ez a különbség, ehhez az összes pontszám vizsgálatának mintájára Post Hoc összehasonlító – Tukey-Kramer – tesztet alkalmazok.

Cases	Sum of Squares	df	Mean Square	F	p
Teszt	49.810	2	24.905	11.216	<.001
Residuals	179.857	81	2.220		

3.9. táblázat. ANOVA-teszt az indoklásra kapott pontszámra

A tesztek összehasonlítása után az előzőeknek megfelelő eredményt kaptam. Az előteszt és utóteszt eredménye között szignifikáns eltérést mutat úgy, ahogy az előteszt és a késleltetett utóteszt eredménye között is. Az utóteszt és a késleltetett utóteszt eredményei között nincs szignifikáns különbség.

		Mean Difference	SE	t	P _{tukey}	
00E	01U	-1.857	0.398	-4.663	<.001	***
	02K	-1.214	0.398	-3.049	0.009	**
01U	02K	0.643	0.398	1.614	0.246	

** $p < .01$, *** $p < .001$

3.10. táblázat. Post Hoc összehasonlító teszt - indoklásra kapott pontszám

3.6. Hatásméret

Zárásként megvizsgáltam az eredmények hatásméretét. Az előteszt és az utóteszt eredménye közötti összehasonlítás minden kategóriában szignifikáns eltérést mutatott. Vizsgálatunk szempontjából ennek a különbségnek az analizálása volt a legfőbb célom, így ezen két teszt eredményeit összevetettem T-próbával. A teszt az előteszt és utóteszt közötti szignifikáns eltéréshez közepes hatásméretet rendel. A 3.11. táblázatban a negatív Cohen-féle d értékek arra utalnak, hogy az előtesztben rendre gyengébbek az eredmények, míg a hatásméret 0,2 és 0,5 közé tehető mind a megoldásra kapott, mind az indoklásra kapott, mind az összes pontszám tekintetében, ez pedig közepes hatásméretként értelmezhető.

	t	df	p	Cohen's d	SE Cohen's d
Összes	-4.739	54	<.001	-1.267	0.316
Megoldás	-3.413	54	0.001	-0.912	0.294
Indoklás	-4.795	54	<.001	-1.281	0.317

3.11. táblázat. Independent Samples T-Test

Összegzés

Előzetes a tanulóim érvelési készségének fejlesztése volt. A témakör elsajátítása során sikerként könyveltem el a tanulók kommunikációját egymással, hiszen az érveléses órai feladatok során egyre hatékonyabban tudtak egymással diskurzust folytatni, illetve egyre könnyebben fejezték ki gondolataikat az indoklás segítségével.

Az előteszt gyengén sikerült a csoportnak, várhatóan gyengén, hiszen a statisztika és valószínűségszámítás témakörében, továbbá az indoklás területén is tapasztalatlanabbak voltak még ekkor. A folyamatos fejlesztés hatására szignifikánsan javult a teljesítményük a témazárót követő – de attól független – utótesztre. Egyértelmű fejlődést mutattak be a diákok mind a feladatok megoldásában, mind a megoldásaik indoklásában az utóteszt során. Pozitív tapasztalat volt még a vizsgálat során, hogy a késleltetett utóteszthez érve, a tanulók teljesítménye nem romlott jelentősen az utóteszthez képest, még itt is sokkal elfogadhatóbb indoklásokat fogalmaztak meg, mint az előtesztben.

A jövőbe mutatóan minden egyes matematikát oktatónak gondolkodnia kell az érvelési feladatok tanórákra bevitelén. Persze az előző gondolatom nem a létjogosultságát kérdőjelezi meg ezeknek a feladatoknak a matematikaoktatás keretein belül, hanem a konkrét helyek és a konkrét alkalmak felfedezését szorgalmazza, ahol kiválóan tudjuk fejleszteni a tanulóink ilyen irányú készségeit. Az utolsó órákon tapasztalt kommunikációs sokszínűséget és fejlődést hallva az jutott mindig eszembe, hogy nagyon megérte azt az óránként 10-15 percet erre felhasználni, hiszen ezzel, hogy jobban tudják kifejezni a gondolataikat a tanulók, célzottabban tudnak segítséget kérni, illetve segítséget adni is egymásnak, amikor arra van szükség. Észrevehető volt a szakmai nyelv erőteljesebb megjelenése is – ami egyébként a csoportnál kevésbé volt jellemző –, ez pedig kétségkívül a rengeteg szóbeli feladatmegoldásnak volt köszönhető, hiszen ezek során a diákok kénytelenek voltak egész mondatokat megfogalmazni az egyes problémákról.

Stylianides szerint a bizonyítások – és érvelések – céljai közé kell sorolnunk a magyarázatot, az igazolást, a hamisítást és az új tudás generálását [17], ezt pedig meg kell mutatnunk a tanulóinknak is.

Végül azt mondanám, hogy az érvelési készségek fejlesztése mindig egy fontos feladata volt a matematikaoktatásnak, azt pedig nem szabad hagynia a matematikatanári társadalomnak, hogy kikopjon az évek során a tanítási gyakorlatunkból. Ezt a gondolatot pedig az érvelésfejlesztés a bőséges jótékony hatásával *indokolja meg* nekünk.

Limitáció és további kutatás

Kutatásom limitációja, hogy a kis csoportlétszám miatt a következtetések általánosíthatósága korlátozott.

A további kutatásokban szükséges lenne magasabb létszám esetén vizsgálni az itt leírt beavatkozásomat, továbbá a magasabb létszám mellett kontrollcsoportos kísérletet lehetne végezni, amellyel sokkal átfogóbb képet kaphatnék a diákok – beavatkozás általi – fejlődéséről az érvelési- és kommunikációs készség irányából.

Irodalomjegyzék

- [1] BALACHEFF, N.: *The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof*. In A. J. Bishop, E. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192), (1991). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.
- [2] DURAND-GUERRIER, V., BOERO, P., DOUEK, N., EPP, S.S., TANGUAY, D.: *Examining the role of logic in teaching proof*. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 369-389), (2012). Dordrecht: Springer.
- [3] FISCHBEIN, E.: *Intuition and proof*. *For the learning of mathematics* 3(2), 8-24. (1982).
- [4] HANNA, G.: *Mathematical Proof, Argumentation, and Reasoning*. In: Lerman, S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham (2020). https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_102
- [5] HANNA, G.: *Proof in mathematics education, 1980-2020: An Overview*. *Journal of Educational Research in Mathematics* (2020). <https://doi.org/10.29275/jerm.2020.08.sp.1.1>
- [6] HAREL, G., & SOWDER, L.: *Students' proof schemes: Results from exploratory studies*. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education, III* (pp. 234-283). Washington DC: Mathematical Association of America (1998).
- [7] JASP (0.18.1.0) statisztikai elemzőprogram. <https://jasp-stats.org>
- [8] JUHÁSZ ISTVÁN, OROSZ GYULA: *Matematika 10. tankönyv*. Oktatási Hivatal https://www.tankonyvkatalogus.hu/pdf/OH-MAT10TB__teljes.pdf (2023. 11. 27.)
- [9] KADDOURA, M.: *Think Pair Share: A Teaching Learning Strategy to Enhance Students' Critical Thinking*. *Educational Research Quarterly*, v36 n4 p3-24 (2013). <http://erquarterly.org/index.php?pg=content> (2023. 11. 22.)

- [10] KAGAN, S., KAGAN, M.: *Kagan Cooperative Learning*. San Clemente, California. A: Kagan Publishing (2009).
- [11] *Kerettanterv, Matematika 9-12. évfolyam*. Oktatási Hivatal (2020).
- [12] LAKATOS IMRE: *Bizonyítások és cáfolatok*. Gondolat Kiadó, Budapest (1981)
- [13] LYMAN, F.T.: *The responsive classroom discussion: The inclusion of all students*. College Park: University of Maryland Press, pp. 109 – 113. (1981).
- [14] *Nemzeti alaptanterv (2020)*. Magyar Közlöny, 17. szám. (2020. január 31.)
- [15] PÓLYA GYÖRGY: *A gondolkodás iskolája*. Gondolat Kiadó, Budapest (1971).
- [16] RÉNYI A.: *Gondolatok a valószínűségszámítás tanításáról*. (1969-1970).
- [17] STYLIANIDES, GABRIEL J.: *Reasoning-and-Proving in School Mathematics Text-books*. Mathematical Thinking and Learning, 11:4, 258-288. (2009).

NYILATKOZAT

Kijelentem, hogy mesterséges intelligencia alkalmazást/programot (pl. képkalkotó, szövegalkotó) nem használtam a dolgozat készítése során.

Jelen nyilatkozat aláírásával tudomásul veszem, hogy amennyiben bizonyítható, hogy a dolgozatot nem magam készítettem, illetve mesterséges intelligencia alkalmazás/program segítségét vettem igénybe vagy a dolgozattal kapcsolatban szerzői jogi jogsértés ténye merül fel, a Szekció megtagadja a dolgozat befogadását.

Dátum: Budapest, 2025. 01. 19.



Sebők Máté

Mellékletek

Tesztfeladat - 1.

Dönts el az alábbi állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszodat indokold!

Eleonóra: „Feldobtam ezt az 50 forintost már 12-szer, de mindig írás lett! Mivel az előző dobásaim mind így sikerültek, a következő feldobásom után most már biztosan fejet fogok kapni!”

Tesztfeladat - 2.

Dönts el az alábbi állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszodat indokold!

Ferenc: „Itt van ez a 10 kérdéses teszt, mindenhol három válaszlehetőség van. Úgyis mindegy, hogy tanultam-e! Ha véletlenszerűen kitöltöm, úgyis meglesz az 5 helyes válaszáért járó kettes. Ennyi az egész, vagy átmegyek vagy nem, szóval 50% esélyem van átmenni úgy, hogy véletlenszerű válaszokkal töltöm ki a tesztet.”

Tesztfeladat - 3.

Dönts el az alábbi állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszodat indokold!

József: „Eddig a félévben szereztem hat darab 5-öst matekból. Tanár Úr azt mondta, hogy átlag alapján kapjuk a jegyet és 4,5-től már ötöst ad. Ez azt jelenti, hogy az utolsó dolgozaton bármit is írok, úgyis ötös leszek, hiszen már így is rengeteg ötöst írtam!”

Tesztfeladat - 4.

Az alábbi szituációban állítanak valamit a történet főszereplőjének, Kornélnak. Döntsd el Kornél indoklásáról, hogy helyes vagy helytelen! Válaszodat indokold!

Szituáció: Az iskolában a hagyományos naplóról elektronikus naplóra állnak át. A régi naplóból át kell vezetni az osztályzatokat az új, elektronikus naplóba. Irodalomból a régi naplóban szerepel Kornélnál egy 3/4 osztályzat (ennek a jelentése tulajdonképpen egy 3,5-es osztályzat), azonban a rendszer ezt nem ismeri.

A tanár állítása: Beírok akkor egy 3-ast és egy 4-est, hiszen ezek átlaga is épp 3,5.

Kornél véleménye és indoklása: Eddig három ötösöm van az évben. Ha egy 3-ast és egy 4-est ír be nekem, az rosszabb az átlagom szempontjából, mintha 3,5-et kapnék, de még annál is rosszabb, mintha csak egy 3-ast kapnék, hiszen a 3-as és 4-es beírásával olyan, mintha kétszer is megkaptam volna a 3,5-es jegyet!

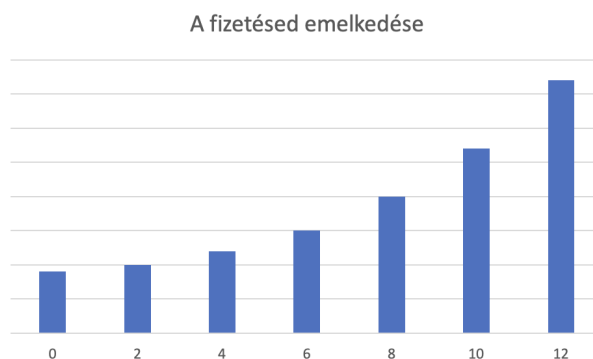
Tesztfeladat - 5.

Az alábbi szituációban állítanak valamit a történet főszereplőjének, Orsolyának. Döntsd el Orsolya indoklásáról, hogy helyes vagy helytelen! Válaszodat indokold!

Szituáció: Állásinterjún vagy, miután egy jó barátod a cégből állást ajánlott neked egy kávézás során a cégüknel. Éppen a fizetésed emelkedéséről beszél a cég egy embere, aki nagyon szeretné, hogy elfogadd az állásajánlatukat.

A cég emberének állítása: Nézd ezt a diagramot, nálunk exponenciálisan növekedhet a fizetésed! A vízszintes tengelyen a cégnél eltöltött éveket láthatod. Ilyen fizetésbeli emelkedést sehol máshol nem tudnak ígérni!

Orsolya véleménye és indoklása: Ez tényleg hihetetlen, eleinte még nem tűnik olyan soknak a pénz, de mivel egyre magasabbak az oszlopdiagram oszlopai, pár év múlva már nagyon sok pénzt kereshetek ennél a cégnél!



Tesztfeladat - 6.

Az alábbi szituációban állítanak valamit a történet főszereplőjének, Ádámnak. Döntsd el Ádám indoklásáról, hogy helyes vagy helytelen! Válaszodat indokold!

Szituáció: Budapesten vagy a Keleti pályaudvaron és megpillantasz egy szerencsejátékos furfangos embert: Gyuri bácsit, aki játékra invitál téged.

Gyuri bácsi állítása: Gyere fiam! Itt olyan játékot játszatsz, ahol egyenlő eséllyel indulunk! Itt egy szabályos dobókocka, illetve egy 20 forintos érme, de egyik sincs ám megbuherálva! Egy körben te egyszer dobsz a dobókockával, én meg háromszor az érmével. Te akkor nyersz meg egy kört, ha a körön belül 4-est dobsz a dobókockával, én meg akkor, ha mindhárom érmefeldobás ugyanazt kapom, de mindegy, hogy ez fej vagy írás, csak ugyanolyannak kell lennie! Ha egyikünknek sem jön be vagy épp mindkettőnknek, akkor egyikünk sem nyer a körben. Érthető ez? Na, aki előbb szerez 5 győzelmet, az kap a másiktól 10000 forintot!

Ádám véleménye és indoklása: Játsszok! Tényleg egyenlő eséllyel játszunk, hiszen én 6 félét tudok dobni a kockával, ő is $3 \cdot 2$ -t hiszen mindhárom feldobásánál kétfélét dobhat. Meg amúgy is, nekem csak egy jót kell dobnom, neki meg hármat!

Tesztfeladat - 7.

Mennyi az esélye, hogy két dobókockát feldobva két páros vagy két páratlan számot dobunk? Válaszodat indokold!

Tesztfeladat - 8.

A tanár döntési lehetőséget ad Károlynak, hogy matematikából ő dönthesse el, hogy milyen érték alapján kapja a végső jegyét a bizonyítványába. Dönthet a jegyei módusza, mediánja, vagy átlaga mellett. Mit javasolsz, melyiket válassza Károly, ha a célja a lehető legjobb jegyet kapni matematikából? Válaszodat indokold!

Károly jegyei: 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5.

Tesztfeladat - 9.

Jankának és osztályának egy totót ad fel a tanáruk matek órán, amikor is a következő feladat:

„I. Tippeld meg a következő kísérletben a k értékét!

Feldobunk öt darab dobókockát, majd megszámloljuk, hogy hányon sikerült 6-ost dobunk! Ez a szám lesz a k .”

a) $k \leq 9$

b) $9 < k < 18$

c) $18 \leq k$

Segíts megtalálni Jankának a legvalószínűbb lehetőséget, hogy nagyobb esélye legyen a találatra a totón!

Órai feladat - 1.

Adj meg önállóan egy elemi eseményt, illetve egy eseményt – ami nem elemi esemény – a következő kísérletekkel kapcsolatban:

1. Szabályos dobókocka dobása.
2. Érze feldobása.
3. Lap húzása egy francia kártyapakliból.
4. Nyerő számok kisorsolása ötöslottóban.

Beszélgétek meg a padtársotokkal az általatok megadott elemi eseményeket és eseményeket! Véleményezétek indoklással, a párotok megoldásait, hogy szerintetek miért helyesek, vagy épp miért helytelenek!

Órai feladat - 2.

Szabályos dobókockával dobunk. Az alábbi eseményrendszerek közül melyik alkot erre tekintve teljes eseményrendszert? Válaszodat indokold!

1. $A = \{1\}; B = \{2\}; C = \{3\}; D = \{4\}; E = \{5\}; F = \{6\}$
2. $A = \{1; 3; 4\}; B = \{2; 6\}$
3. $A = \{1; 2; 6\}; B = \{5\}; C = \{2; 3; 4\}$
4. $A = \{1; 6\}; B = \{2; 4\}; C = \{3; 5\}$

Órai feladat - 3.

Egy iskola egy osztályában a következő megállapításokat teszik a tanulók:

1. *Klaudia*: „Dobtam harmincszor a dobókockával, de egyszer sem kaptam 6-ost, így a relatív gyakorisága a 6-os dobásának 0. Ez azt jelenti, hogy ez lehetetlen esemény!”
2. *Viktor*: „Húztam egy lapot a francia kártya pakliból, majd visszatettem és megismételtem ezt 100-szor. A kísérlet során feljegyeztem, hogy hányszor kaptam treffet, pikket, kárót és kőrt, majd elosztottam az egyes számokat 100-zal. Az értékek, amiket kaptam, az egyes események relatív gyakoriságai a kísérletben.”
3. *Ferenc*: „Feldobtam 45-ször ezt a 20 forintost, 30-szor fejet kaptam, 15-ször pedig írást. Ez azt jelenti, hogy fejet nagyobb eséllyel tudok dobni ezzel az érmével!”

Értékeljétek önállóan az állítások helyességét, indokoljátok meg azt, majd beszéljétek meg a párotokkal azokat!

Órai feladat - 4.

Kihívnak minket egy játékra. Van két kocka, amit megszámoztak 1-től 12-ig terjedő számokkal úgy, hogy az egyikre az 1, 3, 5, 7, 9, 11 számokat, a másikra pedig a 2, 4, 6, 8, 10, 12-t írták.

A játék előtt választanunk kell egy kockát. A játék során mindkét játékos dob egyet a saját kockájával és az nyer, aki a nagyobb számot dobja. Melyik kockát válasszuk, hogy nagyobb esélyünk legyen a győzelemre? Válaszodat indokold!

Órai feladat - 5.

A következő kockajátékot ketten játsszák. Az egyik a játékos, a másik pedig a bank. A játékosnak roppant egyszerű dolga van: eldönti, hogy mekkora pénzösszeget akar kockáztatni, majd kap egy szabályos dobókockát, amivel négyszer dob.

Ha sikerül elkerülnie azt, hogy 6-ost dobjon, akkor visszakapja a pénzének a dupláját, ha viszont a dobott számok között akár csak egy 6-is is szerepel, akkor elveszíti a pénzét.

Megéri-e játszania a játékosnak? Válaszodat indokold!

Órai feladat - 6.

Rudolf egy teszt jellegű dolgozatot ír biológiából a következő tanítási napon, ami 10 kérdésből fog állni és minden kérdésnél 4 válaszlehetőség közül kell kiválasztania az egyetlen helyes választ. A dolgozaton 5 helyes választól jár legalább kettes osztályzat a tanulóknak.

Az dolgozat előtti utolsó biológia óra végén Rudolf meglátta a Tanárnő holnapi dolgozathoz készített megoldókulcsának bal alsó sarkán a következőt: „8. D, 9. A, 10. B”. Rudolf úgy vette, hogy három helyes válasza már biztosan van, így már nem is tanul a dolgozatra, a többi 7 kérdésre tippelve ad majd választ, továbbá kijelentette:

Rudolf: „Így biztosan át fogok menni tanulás nélkül is!”

Rudolf az egyik osztálytársának Károlynak is elmondta az előző információit, amire így reagált Károly:

Károly: „Egyáltalán nem biztos, hogy meglesz így a kettes! Sőt, szerintem még így is nagyobb esély van arra, hogy egyest kapsz, minthogy legalább kettest!”

Mi a logikai értéke Rudolf és Károly állításának? Válaszodat indokold!

Órai feladat - 7.

Egy iskola egy osztályában a következő megállapításokat teszik a tanulók:

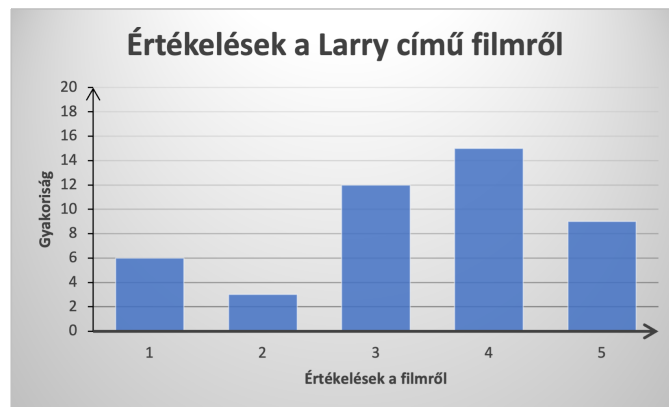
1. *Ákos:* „Ha egy adatsokaság szórása nulla, akkor minden adat nulla!”
2. *Eleonóra:* „Egy kísérlet után a kapott adatsokaság terjedelme megadja az összes lehetséges kimenetel számát!”
3. *Kolos:* „Egy adatsokaság alsó kvartilisének és felső kvartilisének átlaga éppen a medián!”
4. *Flóra:* „Egy adatsokaság módusza egyben az adatsokaság átlagához legközelebb álló adat is!”

A párok egyik tagja értékelje a páros számú állítások helyességét, míg a másik a páratlan számúakat. Ezután indokoljátok meg társatoknak az egyes megoldásaitokat!

Órai feladat - 8.

Alkossatok önállóan három igaz és három hamis állítást az alábbi képen látható diagramról!

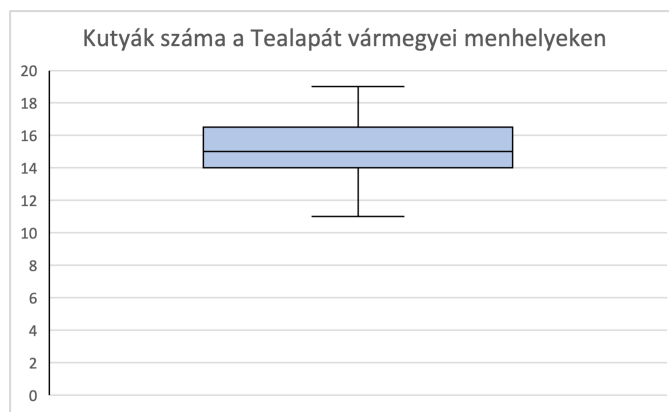
Olvassátok fel egymásnak felváltva általatok kreált állításokat a padtársatokkal! A másik félnek mindig ki kell találnia, hogy az adott állítás igaz vagy hamis, és meg is kell indokolnia a választát!



Órai feladat - 9.

Alkossatok önállóan három igaz és három hamis állítást az alábbi képen látható diagramról!

Olvassátok fel egymásnak felváltva általatok kreált állításokat a padtársatokkal! A másik félnek mindig ki kell találnia, hogy az adott állítás igaz vagy hamis, és meg is kell indokolnia a választát!



Órai feladat - 10.

Madeinország dörzsölt vezetője, II. Tihamér megjelentette az alábbi diagramot a nemzeti újságban, aminek folytán országának – Párnalandia felé – csökkenő tartozásáról értekezett:

II. Tihamér: „Ahogyan az ábra is mutatja, az elmúlt 10 évben fokozatosan csökkent Hazánk Párnalandia felé való tartozása, ami a korábbi horribilis mértékű tartozáshoz képest idénre már elenyésző mennyiségű! Ez is a rendszer hatékonyságát és sikerességét mutatja!”

Madeinország lakójaként belső feladatodnak érzed az ilyen megnyilvánulások kritikus elemzését. Vizsgáld meg a diagramot és II. Tihamér állítását! Igazat mondott vagy hazudott az ország vezetője? Válaszodat indokold!

