



Óbudai Egyetem

Bánki Donát Gépész és Biztonságtechnikai Mérnöki Kar

Mechatronikai és Járműtechnikai Intézet

Lokális helymeghatározás új módszerekkel

TDK dolgozat

Szerző:

Molnár Zoltán

Konzulens:

Prof. Dr. Szabolcsi Róbert

2023

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés.....	3
2. Meglévő helyzetmeghatározási technológiák.....	4
2.1 A GPS technológia működése	4
2.2 Az UWB technológia.....	6
2.3 Valós idejű helymeghatározó rendszerek (RTLS)	6
2.4 Jelterjedési idő alapú távolságmérési módszerek	7
3. Az LHR koncepciója.....	9
3.1 Az LHR módszer	9
3.2 Az LHR adók jelei	11
3.3 Hogyan mérjük a jeleket?	12
3.3.1 Többfrekvenciás módszer:.....	12
3.3.2 Általános célú egyfrekvenciás módszer:	14
3.3.3 Kétfrekvenciás módszer	15
3.3 Rendszerhasználati jogosultság, és üzembiztonság	16
3.4 Roaming lehetősége	17
4. Az LHR koncepció matematikai megközelítése	17
4.1 A különbségképzési mérés elméleti modellje.	17
4.2 Koordináta geometriai megközelítés	2
4.3 A matematikai probléma megfogalmazása	3
4.4 A 2D modell levezetése:	4
4.5 Jelkésleltetési problémák eliminálása:.....	8
4.6 Matematikai limitációk:.....	10
4.7 A valós 3D modell levezetése	10
4.8 A 3D modell matematikai korlátai	17
4.9 A jelek mintavételezése és átlagolása.....	19
5. Összefoglalás és konklúzió.....	21
Irodalomjegyzék	25
Ábrajegyzék	27
Az illusztrációs ábrák forrásjegyzéke:	27

1. Bevezetés

A keresztfiam 4 éves születésnapjára kapott egy olyan elektromos traktort, amire rá tud ülni, és saját maga vezetheti. Természetesen a kis srác ment mindenben keresztül, nemcsak a kertben, hanem kimerészkedett vele az utcára is. Ennek kapcsán felmerült bennem az a mérnöki kérdés, hogy lehet-e valami eszközt beépíteni a járgányba, amivel be lehet korlátozni, hogy hol játszhatnak ezzel a játékkal a gyerekek. Először olyan módszerre gondoltam, amit a robot fűnyírók is használnak, ahol egy vezetékkel körbe van kerítve egy terület, és csak ott vágja le a fűvet. [1] Láttam olyan virtuális kerítést kutyáknak, ahol szintén körbe volt kerítve vezetékkel egy terület, és egy gyenge elektromos sokkoló a kutya nyakán „csipkedte” a kutyust, ha közel ment a dróthoz [2] A mi esetünkben ez a módszer nem tudná megoldani a problémát, mivel ez a traktor nagyobb lendülettel egyszerűen átgurul a vezetéken, és az udvaron a tagolt játszóterület bonyolultsága szempontjából sem lenne ez a megoldás jó ötlet, és ne becsüljük le egy gyerek problémamegoldó képességét sem.

Az irodalomkutatás során találkoztam az AGV technológiával is, amelyek különböző módon irányítanak autonóm járműveket egy adott területen. Az AGV (automated guided vehicle), magyarul automatizált irányított jármű egy olyan mobil robot, amely valamilyen markerek (vonalak vagy vezetékek) mentén halad, vagy ultrahang, rádióhullámok, kamerák, mágnesek, lézerek segítségével navigál egy adott területen. [3] Gondolkodtam a GPS technológián is, de az akár több méteres pontatlanság alkalmatlan lett volna a mi esetünkben. A probléma azonban nem hagyott nyugodni, és utánajártam ezeknek a technológiáknak. Léteznek olyan kereskedelmi GPS rendszerek, mint amit például a mezőgazdaságban a precíziós növénytermesztésnél is használnak, amik megfelelnek erre a célra, mert néhány centiméteres, sőt akár milliméteres pontosságot is el tudnak érni, de ezt, mint fizetős szolgáltatást lehet csak igénybe venni. Megismerkedtem az UWB technológiával is, amelyeket okostelefonokba, okosórákba és okoseszközökbe építenek be az egymáshoz viszonyított távolság mérésére kb. 80 méteren belül teljes rálátás esetén 10 cm alatti pontossággal. Ez egy szélessávú kommunikációs protokoll. Hasonlít a WiFi-hez és a Bluetooth-hoz, de sokkal nagyobb sáv szélességen működik. Erre a technológiára épül rá egy valós idejű helymeghatározó rendszer: az RTLS (Real-Time Location System) és ebből próbálja kihozni a maximumot. [4] Ez a technológia is felkeltette az érdeklődésemet, de a néhány tíz méter hatótávolságot túl kevésnek találtam, és idegenkedtem attól is, hogy valójában ez nem egy helyzetmeghatározásra kifejlesztett technológia, hanem egy magas frekvenciatarományban működő adatátviteli szabvány, amit mellesleg fel lehet használni pozíció meghatározására is.

A bevezetés elején felvázolt problémára a kereskedelmi célú GPS lett volna a legjobb megoldás, viszont ez rendkívül költséges szolgáltatás lenne. Ráadásul felmerült bennem a kérdés, hogy miért kellene az úrből megoldani ezt a problémát méregdrága atomórákkal felszerelt műholdflották segítségével, ha a rádióhullámokat a Földön is elő tudjuk állítani, és atomórákra sincs szükség, ha megfelelő módszert alkalmazunk. Ez inspirált egy új gondolati modell kidolgozására egy kis és közepes hatótávolságú lokális helyzetmeghatározó rendszer (LHR) ötletének kidolgozására. Céлом tehát egy olyan hiánypótló hely- és helyzetmeghatározó módszer megalkotása, amely bármilyen álló, vagy mozgásban lévő önálló eszköz, helyét és orientációját is képes centiméter, vagy akár milliméter pontossággal meghatározni akár néhány kilométeres területen is, így segítve ezen eszközök helyzetének meghatározását és megváltoztatását egy általunk telepített és definiált koordináta-rendszerben.

2. Meglévő helyzetmeghatározási technológiák

2.1 A GPS technológia működése

A GPS egy olyan helymeghatározó rendszer, amellyel térbeli helyzetmeghatározást, idő- és sebességmérést végezhetünk a földön, a vízen vagy a levegőben. A GPS rendszer alapja a műholdas távolságmérés.

Ha ismerjük a rádióhullámok terjedési sebességét, a rádióhullám kibocsátásának és beérkezésének idejét, akkor meghatározhatjuk a forrás, azaz az adó távolságát. Mivel a rádióhullámok vákuumban és levegőben kb. 300000 km/s sebességgel terjednek, a pontos távolság méréséhez rendkívül pontosan kell ismernünk ezeket az időket. Gondoljunk bele, hogy a rádióhullámok 1ns, azaz 10^{-9} másodperc alatt 30cm-t tesznek meg. Ezért a műholdakban két nagyon pontos cézium vagy rubídium atomórát alkalmaznak a pontosság növelésének érdekében. Ezeket az órákat az összes műholdon összeszinkronizálják. A GPS flottában működő műholdak szabályos időközönként kibocsájtott jelei tartalmazzák a műholdak pontos helyzetét és a rajta mérhető pontos időt is.

A műholdak helyzetét is pontosan ismernünk kell. A GPS flotta műholdjai 20200 km magasságban, 12 óránként kerülnek meg a földet. 6 orbitális síkban helyezkednek el, amik egymáshoz képest 60 fokkal elvannak forgatva, míg az egyenlítőhöz viszonyított pályaelhajlásuk 55 fok. A földi atmoszféra felett keringő műholdak pályája nagy pontossággal kiszámítható. A legtöbb GPS vevő tartalmazza az ún. almanach-ot, ami a műholdak pillanatnyi helyzetét tartalmazza. Az USA védelmi minisztériuma a precízebb helyzet-meghatározás érdekében létrehozta a földi figyelő és követő hálózatát, aminek a feladata a GPS műholdak követése, napi vizsgálata, az aktuális pozícióik és sebességük mérése, az esetleges pálya- és egyéb korrekciók végrehajtása és ezen pontosított adatoknak az elküldése a műhold felé. [5]



1. ábra: GPS műholdak a Föld körül

A GPS műholdak 2 frekvencián sugároznak. L1: (1575,42 MHz) illetve L2 (1227,60 MHz) Az L1 a navigációs adatokat és az SPS (Standard Positioning Service) kód jelet küldi, az L2 pedig az ionoszférikus és más zavaró tényezőkből adódó módosítás adatait és a PPS (Precise Positioning Service) kód jelet küldi. [5]

1988-ban polgári felhasználásra is engedélyezték a GPS rendszer alkalmazását, de attól tartva, hogy ellenséges szervezetek is felhasználhatják ezt a technológiát, kétféle kód sugárzásával próbálták meg csökkenteni ezt a biztonsági kockázatot. Az egyik az ún. C/A (coarse/acquisition), amelyet polgári használatra szántak és 15 méteres pontosságot biztosít, a másik pedig az ún. P(Y) kód (Precision code), melynek pontossága 1 cm és kizárólag titkos katonai GPS-vevővel lehet dekódolni, szabadon nem hozzáférhető. [5]

1994 és 1998 között az Egyesült Államok a polgári felhasználású kódot mesterségesen még tovább rontotta. Ezt az ún. SA (selective availability) zavaró jel sugárzásával oldották meg. A GPS civil vevők pontossága így 150-300 méter fölé csökkent. Bár több mérés átlagolásával pontosabb eredmény is elérhető volt, a mozgó járműveknél ez szinte már használhatatlanná vált. Nemzetközi nyomásra végül Clinton elnök, 2000. május 2-án megszüntette a zavaró jelek sugárzását. Így a valós idejű helymeghatározás pontossága megnőtt és a néhány méteres pontosság is elérhetővé vált. [5]

A felhasználók a vevőkből, processzorokból és antennákból álló GPS vevőket használják, amelyek lehetővé teszik a szárazföldi, tengeri vagy légi felhasználók számára a GPS műhold sugárzott jeleinek vételét, és ezen információk felhasználását a pontos helyzetük, sebességük és idejük kiszámítására. A GPS-konceptió a műholdaktól mért távolságokra alkalmazott trilateráción alapul. és lehetővé teszi a GPS-vevő számára, hogy kiszámítsa pontos helyét és időbázisát. Ez a koncepció négy műholdat igényel, hogy pontosan pozícionálják a vevőt a háromdimenziós térben, ezáltal lehetővé téve a vevő számára, hogy ne csak a kétdimenziós felszíni helyzetét számítsa ki a Földön, hanem a magasságát is. A műholdak pontos referenciapontként működnek, és jelük részeként egy pszeudó kódot továbbítanak. Ezzel a kóddal a vevő méri azt az időkéstetést, amíg a jel eléri a vevőt, ami a műhold hatótávolságának (úgynevezett „pszeudotávolságnak”) közvetlen mérését jelenti. [6]

A műhold és a földi vevőegység közötti távolság meghatározásnak két módszere van: a kód mérés és a fázismérés.

A kód mérés esetén a műholdról érkező modulált jelet a vevő összehasonlítja a saját jelével és addig "csúsztatja, késlelteti", amíg a két jel, fedésbe nem kerül egymással. A kód mérést viszonylag kis pontosság jellemzi, ennek oka az, hogy az C/A kód frekvenciája 1 MHz, ami távolságban kifejezve 300 m-t jelent. [7]

A fázismérés esetén a vivőhullám fázisát hasonlítjuk össze a vevőben előállított referenciajel fázisával. A vivőjel frekvenciája 1575 MHz, vagyis több mint ezerszerese a kód frekvenciának, így ennek megfelelő pontosságnövekedést érhetünk el. A vivőjel hullámhossza $\lambda = 19,05 - 24,45 \text{ cm}$ így a jel kiértékelése mm-es pontossággal végezhető el. A fázisméréssel csak az egy hullámhosszon belüli távolság (az ún. maradék távolság) határozható meg, viszont nem tudjuk, hogy éppen hányadik hullámot mérjük. a műhold és a vevő közötti távolságon. [7]

A pontosság fokozása érdekében egy külön szolgáltatást vezettek be: a differenciális GPS (DGPS) szolgáltatást. A DGPS alatt olyan valós idejű, relatív, kód-, vagy fázismérést felhasználó rendszert értünk, amelyben a referencia-állomás adatait szolgáltatásként tudjuk

fogni valamilyen kommunikációs csatornán. A DGPS esetén a referencia-állomás az egyes műholdakra mért (kód- és fázis) távolságok korrekcióját és azok változásait sugározza. Korrekció alatt a mért távolság és a térbeli koordinátákból számított távolságok különbségét (koordináta különbségeket) értjük. A mozgó vevő ezekkel a korrekciókkal javítja saját méréseit és így számítja helyzetét. A korrekciós adatok sugárzásának késési ideje természetesen rontja a pontosságot. [7]

2.2 Az UWB technológia

Rengeteg módszer áll rendelkezésünkre rádióhullámok segítségével helyzetet meghatározni. Gyakorlatilag minden vezeték nélküli kommunikációs hálózaton voltak próbálkozások és megoldások is erre. A celluláris mobilhálózatoknál cella szinten lehet körülbelüli helyzetet megadni. WiFi-vel vagy Bluetooth segítségével egy épületen belül lehet pozíciót meghatározni, viszont csak kispontossággal és elég körülményesen. Kezd elterjedni viszont egy olyan kommunikációs technológia, amelyet nagy pontosságú beltéri helyzetmeghatározáshoz is fel lehet használni. Ez pedig az UWB (Ultra Wide Band) technológia, ami a legújabb iPhone és Samsung mobiltelefonokban és okos eszközökben is megtalálható.

Az ultraszéles sáv (UWB) egy rövid hatótávolságú vezeték nélküli kommunikációs protokoll, mint például a Wi-Fi vagy a Bluetooth. Rövid impulzusokból álló rádióhullámokat használ 3,1 és 10,5 GHz közötti frekvenciatartományban, engedély nélküli alkalmazásokban. Az UWB kifejezést 500 MHz-nél nagyobb vagy egyenlő sávszélességre (BW) vagy a középső frekvenciához képest 20%-nál nagyobb sávszélességre (FBW) használják. [8]

Ez a technológia GHz-es tartományban működik 500 MHz-es sávszélesség igénybevételével. 2 nanoszekundumos impulzusokkal kommunikál más UWB eszközökkel. Nagyon pontos távolság meghatározásra képes: néhány deciméter, de akár centiméteres nagyságrendben. [9]

Az UWB technológia előnye a helyzetmeghatározás szempontjából:

- Nagy pontosságú helyzetmeghatározás (cm. . .dm nagyságrend),
- Nem zavar más technológiákat (WiFi, Bluetooth, stb.), illetve a zajtűrő képessége is kiváló,
- Kis teljesítményű adók segítségével működtethető a technológia,

Az UWB technológia kedvezőtlen tulajdonságai az alábbiak:

- Széles spektrumon történő működés miatt átlapolódik más technológiákkal, ezért szigorú előírások vonatkoznak a kibocsátott maximális teljesítménysűrűsége.
- A kis teljesítmény miatt csak kis területen működik
- Az UWB csak közvetlen rálátás esetén hatékony igazán [10]
- Bonyolult számolásigényes algoritmusokkal határozza meg a pozíciót
- Kevés pozíciót határoz meg másodpercenként (kb. 10 pozíciót)

2.3 Valós idejű helymeghatározó rendszerek (RTLS)

A hatalmas logisztikai cégek és a gyáróriások igényeként merült fel a valós idejű helymeghatározás az ipari komplexumokon belül az ipari és logisztikai folyamatok ellenőrzésére, optimalizálására és szabályozására, és az Ipar 4.0-nak is az egyik alappillérvé vált az RTLS technológia.

Az RTLS számos probléma megoldásában segít, a munkavállalók biztonságának javításától a munkafolyamatok javításáig. Azáltal, hogy láthatják, hol található az összes eszköz, a vállalkozások azonosíthatják a szűk keresztmetszeteket a szerelősorokon, optimalizálhatják a járművek és targoncák útvonalait, megvédhetik a berendezéseket az elvesztéstől és ellopástól, és így tovább. [11]

Az ipari szabványokhoz alkalmazkodva három szempontnak kell megfelelnie:

- hatótávolság
- pontosság
- pozíciófrissítési arány

A hatótávolság és pontosság annak függvénye, hogy milyen rádiófrekvenciás (RF) jelekkel dolgozik a rendszer. A Chirp Spread Spectrum (CSS) esetén, amelyet a delfinek és a denevérek távolságmeghatározó képessége ihletett, és az 1940-es években radarokban alkalmaztak, 1-2 méteres pontosság érhető el 1000 méteres maximális hatótáv mellett. [12] Az Ultra-Wideband (UWB) esetén pedig általános esetben kb. 50 méteren belül 10-40 cm pontosság érhető el, de jó rálátás és speciális körülmények mellett akár 200 méter is lehet a hatótáv. [13]

A pozíciófrissítési arány azt jelzi, hogy milyen gyakran frissül az eszközök helye a rendszerben. Például a nehéz áruk és gépek esetében a napi frissítések elegendőek, a készleteknél 30 másodpercenként, a raklapok nyomon követése esetén 10 másodpercenként, vagy a lopásmegelőzés érdekében minden másodpercben kell figyelni a pozíciót.

Fontos megjegyezni, hogy egy RTLS úgy épül fel, hogy vannak a fixen telepített anchorok, amik veszik az ún. TAG-eknek a jelét, amik tulajdonképpen azok az eszközök, amiket nyomon kell követni. Tehát a pozíció-adat a rendszerben keletkezik, amit még vissza kell juttatni a TAG-okhoz, ha például mobilrobotokról, vagy automatikusan működő targoncákról van szó. Az RTLS központi HUB-ja számítja, tárolja, és szolgáltatja a TAG-ek pozícióit.

2.4 Jelterjedési idő alapú távolságmérési módszerek

Több módszer is ismert a jelterjedésen alapuló távolságmérések témakörében. Az előzőekben említett GPS, CSS és UWB technológiák helymeghatározása is ezeken alapul. Ilyenek például:

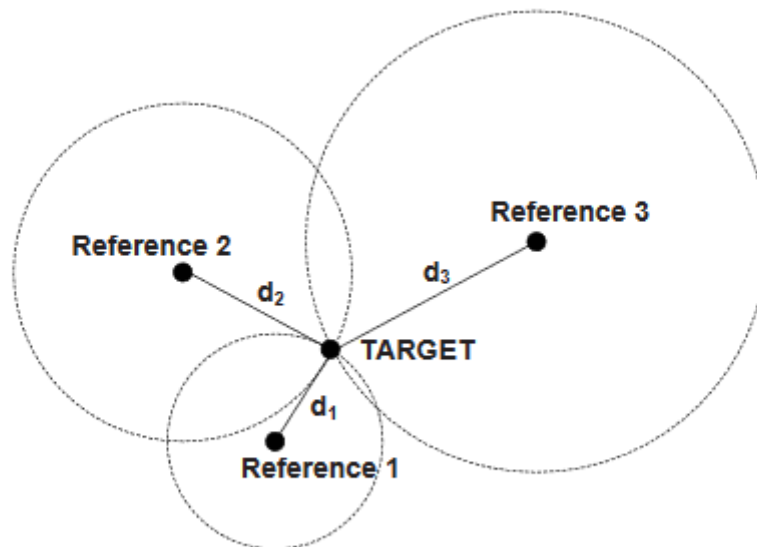
- Körbefordulási idő alapján -Round-trip Time (RTT).
- Érkezési idő alapján - Time of Arrival (ToA),
- Érkezési idők különbségének alapján - Time Difference of Arrival (TDoA)
- Kétirányú távolságmérés – Two Way Ranging (TWR)
- Érkezési szög alapú távolságmérés - Angle of Arrival (AoA)
- Érkezési fáziskülönbség alapú távolságmérés - Phase Difference of Arrival (PDoA)

Az RTT módszert akkor alkalmazzák, amikor egyáltalán nincsenek szinkronizálva sem a fix telepítésű antennáink, sem a mobil eszközünk egymással. A körbefordulási idő alapján történő (RTT) távolságméréskor. kiküldünk egy jelet a vevő felé, ami egy időbélyeg formájában visszaküldi az érkezési időt az adó felé. Ezután kétirányú távolságmérési protokollt használva, meghatározható a távolság a vevő és az adó között

ToA esetén a vevő és az adók szinkronizálva kell legyen egymással, így a vevő megtudja állapítani, hogy az adótól mennyi idő alatt érkezett meg a jel a referenciaponthoz. Ebből kiszámolja a távolságát és a becsült érték alapján felrajzolható egy kör, amelynek a referencia pont, azaz a vevő a középpontja és a sugár hossza egyenlő a mért távolsággal. Amennyiben a

mérést legalább 3 referenciapont esetén elvégezzük, akkor grafikusán felrajzolható 3 kör, amelyek metszéspontja megadja a vevő helyét a 2. ábra szerint. Ez a módszer a trilateráció.

A ToA módszer hátránya az, hogy egy átlagos mobilkészlet órajele nincs szinkronizálva a referenciapontok órajelével, ezért nem végezhető pontos mérés. Másrészt a nagypontosságú szinkronizált eszközök nagyon költségesek.



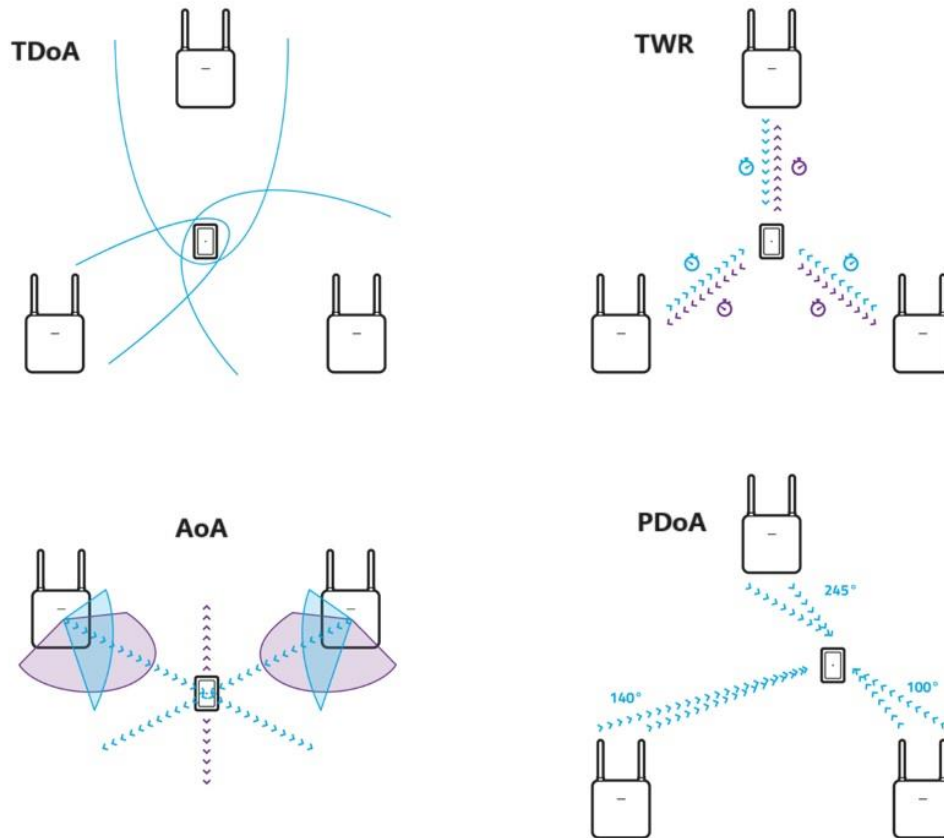
2. ábra: Trilateráció. [14]

Amennyiben nincs szinkronizálás a fix telepítésű antennák (anchor) és a mobil eszközök között, viszont az anchorok szinkronizálva vannak, akkor alkalmazható az érkezési idők különbségének alapján történő távolságmérés (TDOA). Ezt a 3. ábra bal felső része szemlélteti. Ebben az esetben a mobil eszköz két-két anchor közötti jelek érkezési idejének különbségét méri. [14]

A TWR, azaz a kétirányú távolságmérés esetén az adó küld egy jelet a vevőnek, amit a vevő azonnal (vagy ismert idejű késleltetéssel) visszaküld. Az adó a fogadott és a küldött jel időbélyegének késleltetéssel korrigált különbségének fele lesz a pontos távolság, amit a 3. ábra jobb felső része szemléltet.

Az AoA esetén a jel beérkezésének irányát, azaz szögét mérjük meg. Ilyenkor a mobil eszköz adja a jelet, és az anchorok veszik. Ezek a fix telepítésű vevők be tudják mérni a jel irányát, és így meghatároznak egy síkot az adó eszköz irányában. Egy másik anchor ugyanígy meghatároz egy síkot, és ahol ezen síkok metszik egymást a padló síkjával, ott helyezkedik el a mobil eszközünk. Ezt szemlélteti a 3. ábra bal alsó része

A PDoA módszer egy-egy anchor két antennájából érkező jelének fáziskülönbségét méri a mobil eszköz a 3. ábra jobb alsó részén szemléltetett módon. [15]



3. ábra: Jelterjedési idő alapú távolságmérési módszerek. [15]

3. Az LHR koncepciója

Az LHR egy olyan hely- és helyzetmeghatározó rendszer, amit bárhol egyszerűen telepíthetünk, legyen az a földfelszín egy adott területe, egy szoba, egy ipari csarnok, vagy tetszőleges rádióhullámokkal besugározható térrész bárhol a föld alatt, földfelszínen, levegőben, vagy bárhol a világűrben. Nem kell hozzá műhold, atomóra, és semmilyen drága speciális műszer vagy elektronika. Lényeges, hogy olcsó és független technológia legyen, ami nagy lökést adhat a különböző autonóm eszközök elterjedésének, különösen a drónoknak. A technológia nem csak a bevezetésben felvetett problémára, azaz hobbi és otthoni felhasználásra alkalmas, hanem kereskedelmi, ipari, űrkutatási célra is felhasználható.

3.1 Az LHR módszer

A módszer szintén a rádióhullámok terjedési sebességén alapul, viszont nem az adóktól mért távolságot mérjük (TOA), mint a GPS-nél, hanem az egyes adókból érkező jelek időkülönbségét (TDOA), ami az LHR esetünkben fáziskülönbség is egyben.

Léteznek más beltéren is jól alkalmazható időkülönbség mérésén alapuló helyzetmeghatározó módszerek, mint a korábban említett UWB technológia [10], de az LHR módszer nem egy meglévő kommunikációs technológiára épülő RTLS, hanem egy olyan új módszer és technológia ötlete, amely kizárólag helymeghatározó rendszerhez lett kitalálva. A meglévő RTLS technológiákhoz képest nem az anchor-ok számítják, és tartják nyilván a TAG-eket, azaz azokat az eszközöket, amelyekről helyzet-információkat igénylünk, hanem ezekben az eszközökben keletkezik, és számítható ez az információ, amit megoszthat a rendszerrel. Az LHR-nél a továbbiakban a fixen telepített anchorok helyett adókról, TAG-ek helyett vevőkről

fogunk beszélni. Az LHR sokkal egyszerűbben működik, és olyan módszerekre támaszkodik, amelyeket egy rendszerbe építve egy jól használható, gyorsabb és pontosabb megoldást kínál. A továbbiakban ezt a saját módszert szeretném részletesen bemutatni, melynek a pillérei a következők:

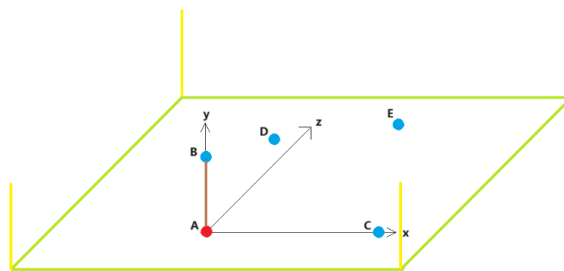
- Jelérkezési idők különbségének alapján működik (TDOA).
- Egyszerűen számolható matematikai formulát használ.
- Moduláció alkalmazása a nagyobb terület lefedésére.
- Minimális sávszélesség, az ajánlott módszernél egy vivőfrekvencia és egyfrekvenciás szinusz jel, mint moduláló jel.
- Az ajánlott módszernél az összes adó azonos frekvencián sugároz időosztásban.
- Átlagolás módszere a pontosság növelése érdekében.
- Egyirányú helyzetmeghatározás esetén, amikor nem fontos a rendszernek is ismerni a pozíciókat, korlátlan számú eszköz is használhatja ezt a módszert

A 3D térben a GPS technológiánál legalább 4 műholdtól mért távolságra van szükségünk a pozíciónk meghatározásához. Ha viszont távolság különbséget mérünk, akkor minimum 5 adóra van szükség. Annak bizonyítására a dolgozat nem tér ki, hogy miért pont 5, viszont a későbbiekben a matematikai levezetés fejezet megmutatja annak levezetését, hogy 5 adó pontos pozíciójának, és a tőlük érkező jelek különbségének ismeretéből pontosan meghatározható a vevő pozíciója. Van két járulékos nyeresége a különbségképzési módszernek, az egyik, hogy nincs szükség pontos idő ismeretére, a másik pedig, hogy a különbségképzés által az azonos elemekből megépített adók átviteli karakterisztikái is kivonódnak egymásból (mint például a késleltetés, fáziseltolás, fázisforgatás stb.), így egyáltalán nem befolyásolják a rendszer pontosságát. A módszerből adódóan tehát elegendő az 5 adó jelének és pozíciójának pontos ismerete, ami a későbbiekben levezetésre kerül.

A módszerhez tartozik az adók, illetve antennáik elhelyezése is. A későbbiekben a matematikai levezetésnél 5 darab tetszőlegesen elhelyezett adóval lesz bizonyítva a módszer, amiből az egyik jelöli a koordináta-rendszerünk origóját. Az otthoni célú egyszerű telepíthetőség érdekében viszont kidolgoztam egy egyszerű eljárást az adók és antennáik elhelyezésével kapcsolatban, ahol nem kell precízen kimérni ezek pontos elhelyezkedését. Az adókat jelöljük A, B, C, D, és E-vel. Ezen módszer szerint az A lesz a mester adó, ami az origóban helyezkedik el. Ezt helyezzük el egy függőleges árbóc alján, a B-t pedig az árbóc tetején. Ez fogja nekünk kijelölni a függőleges irányt, A C-t az A adó magasságában helyezzünk el célszerűen úgy, hogy ez adja a vízszintes irányt, azaz a szélesség koordinátát, lehetőleg minél messzebb az A adótól. A D és E adókat is célszerűen helyezzük el, de lehetőleg távol az A-tól és a C-től, és egymástól is a 4. ábra szerint.

Csak az árbócon lévő két adó távolságát kell pontosan ismerni, ez lesz a referencia érték, az összes többi adó távolságát, és pozícióját a LHR fogja megmérni és kiszámítani kétirányú távolságmérési protokoll (TWR) segítségével. Adott tehát a függőleges irány, amit az árbócon lévő két adó jelöl ki, valamint kijelöljük célszerűen a vízszintes irányt, a többi adót pedig tetszőlegesen, de célszerűen elhelyezzük az adott térrészben, és a többit rábízhatjuk az LHR-re, amely TWR protokollal meghatározhatja a többi adó pontos helyét. Ebben a dolgozatban ezt nem fogom részletezni, mert csak ötletet szerettem volna adni arra, hogyan lehet a rendszer telepítését is egyszerűsíteni. Tulajdonképpen precíziós térképészeti módszerrel is meg lehet adni egy nagyobb területen és tetszőlegesen elhelyezett adók pozícióját is, viszont ezen adatokat

át kell konvertálni az általunk definiált 3D koordináta-rendszerbe úgy, hogy figyelembe vesszük a föld görbületét is.

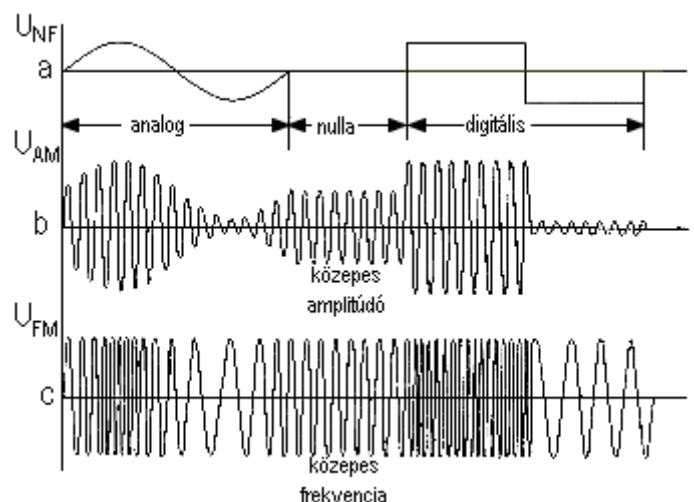


4. ábra: Az adók elhelyezkedése a lokális térrészben

3.2 Az LHR adók jelei

A következő probléma, amit meg kellett oldani, hogy milyen rádiófrekvenciás jeleket alkalmazzunk a méréshez. Abból indultam ki, hogy ha túl kicsi a jel hullámhossza, akkor nem tudom megállapítani egy nagyobb terület esetén, hogy melyik hullámot mérem. Egy 100 MHz-es rádiójelnek 3m a hullámhossza. Ez azt jelenti, hogy egy 9 m-es térrészben egy egyenes mentén három helyen is ugyanabban a fázisban van a jel. Nem lehet egyértelműen meghatározni a pozíciót ebben az esetben. Ha viszont 300 m-es hullámhosszú jellel dolgozunk, ami 1 MHz, akkor középhullámú adókat kellene építenünk, ami nem kivitelezhető apró méretben. A megoldás pedig az, hogy moduláljunk egy nagyfrekvenciás jelet egy olyan hullámhosszú jellel, ami a mérésünkhöz megfelelő. Például egy 10 kHz-es moduláló jellel akár egy 30 km-es területen is tudunk fáziskülönbséget mérni a pozíció meghatározásához. Természetesen a demodulált jelek fázisának különbségét kell mérnünk. Mivel a 10 kHz-es jelet képtelenség elfogadható teljesítménnyel és hatásfokkal kisugározni, ezért kell magasfrekvenciás vivőfrekvenciát használnunk. A legoptimálisabb megoldás, ha a 100-1000 MHz frekvenciatartományból választunk vivőfrekvenciát, ahol a földfelszíni reflexió és elhajlás kevésbé rontja az átvitel minőségét, és elég jó a jel áthatolási képessége a falakon és a tereptárgyakon. A modulációs lehetőségek közül pedig az FM moduláció biztosítja a legjobb zaj és zavarvédelmet. [16]

Lehetne impulzusokat, vagy kódokat is sugározni, mint ahogy a GPS és az UWB is teszi, de az LHR módszernél tiszta egyfrekvenciás szinusz jellel kell dolgoznunk, amit valamilyen modulációs technikával sugárzunk ki. Mivel egy nagy hullámhosszú (1-300 km) demodulált jel triggerelési időértékeit mérjük, ez egyben a fázisával is megegyezik az adott területen. A fáziseltérés méréséhez viszont impulzusokat, vagy négyszögjeleket érdemes használni, ezért ezt a demodulált jel sokszoros erősítésével, azaz túlvezérlésével érhetjük el, így a szinusz jel négyszögjellé torzul. Ez viszont csak a vevőben történik meg, így az éterben kényelmesen át lehet sugározni, mivel a szinusz jelnek csak egyetlen vonal a spektruma van, míg a négyszögjelnek elméletileg végtelen. Ez pedig a rendszer sávszélességigényénél fontos szempont.



5. ábra: A rádiómoduláció szemléltetése. a) moduláló jel; b) AM moduláció; c) FM moduláció. [17]

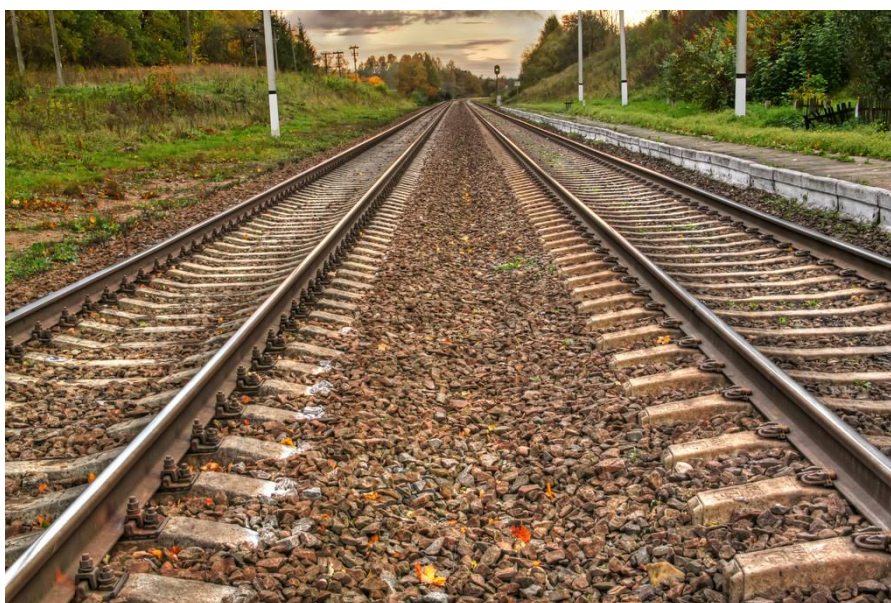
3.3 Hogyan mérjük a jeleket?

Annak függvényében, hogy milyen pontosságot szeretnénk elérni, és mekkora sebességgel mozognak a vevővel ellátott eszközök, és hogy milyen költségekkel tervezzük a rendszert megvalósítani, három módszert dolgoztam ki. Egy költség-, technológia-, és frekvenciaintenzív többfrekvenciás módszert, egy kevésbé költséges, kisebb pontosságú egyetlen frekvencián időosztásban működő általános célú módszert, valamint egy nagyterületre alkalmazható kétfrekvenciás megoldást.

3.3.1 Többfrekvenciás módszer:

Az alap gondolatom az volt, hogy mind az öt adóban egyszerre indítom el a modulációt ugyanazzal a 10 KHz-es moduláló jellel, de öt különböző vivőfrekvencián. A vevő veszi mind az öt adó jelét, amihez gyakorlatilag öt vevőegység szükséges, demodulálja a jelet, kivezerli és négyszögjellé alakítja, és egy mikrokontroller öt különböző bemenetén felfutóélre triggerelve egy megszakítás kezelő függvény programja egy időbélyegzővel látná el az adott adóról érkező jelet. Minden egyes adó által sugárzott jelről 10000 darab időadatunk van másodpercenként. Ezekből az adatokból tudunk időkülönbségeket, és végsősoron pontos helyet számolni. Mivel rengeteg adatunk van, ezeket átlagolva rendkívül pontos eredmény várható. Ráadásul nagy sebességeknél is rendkívüli pontosság érhető el. Ha például egy repülőgép közel hangsebességgel repül (legyen ez 333 m/s) akkor méterenként 30 időadat áll a rendelkezésre, ami óriási lehetőség sebesség pontos mérésére. A 10 kHz-es moduláló jel 30 km hullámhosszú, tehát egy akkora területen üzemeltethető egy ilyen rendszer, ahol az adók 30 km távolságon belül helyezkednek el. Egy ilyen rendszer alkalmas lehet egy komplett repülőtér légi és földi irányítására, amennyiben minden légi jármű folyamatosan megosztja a valós pozícióját. De ez a rendszer nemcsak a repülőgépek pontos helyét, hanem az orientációját is meg tudja mutatni a levegőben, ha legalább három ilyen vevőt szerelünk rá például úgy, hogy egyet-egyét a szárnyak végére, és a harmadikat pedig a farok legtetetejére. Az így kapott három külön pozícióból meghatározható a géptörzs iránya, dőlése és a csűrése is. Ez eleme lehetne egy pilótákat segítő rendszernek, ami a műhorizonthoz képest úgy láttatja a gépet, mintha azt a földről néznénk. Fel- és leszállást segítő rendszer része is lehet ez a megoldás, sőt akár egy teljesen automata felszálló és landoló rendszer is kialakítható vele.

A rendszer a következő elemekből épül fel. Hatóságilag engedélyezett frekvenciatartomány. A frekvenciasáv szélességébe bele kell férnie az öt darab modulált vivőfrekvenciának. Öt darab adó és antenna, melynek magasságát a terület mérete, a földfelszín görbülete, a tereptárgyak mérete, illetve a használt légtér magassága határozza meg. Itt jegyezném meg, és pont a repülőteres példa világít rá jól a különbségképzési módszer azon tulajdonságára, hogy a LHR pontossága nagymértékben függ attól, hogy milyen távol helyeztük el az adókat egymástól, és ezek milyen távol vannak a vevőtől. Ha az adók egymáshoz viszonyított távolsága kisebb a vevőtől mért távolságtól, akkor egyre pontatlanabb adatokat mérhetünk. Ezt a jelenséget a végtelenbe futó párhuzamos egyeneseknél figyelhetjük meg, mint például a hosszú egyenes vasúti sín pároknál. Ha ránézünk egy ilyen sinpárra, akkor pár száz méter után úgy látszik, (úgy mérhető), mintha összeérnének. Minél kisebb a távolság köztük, annál közelebb van az a határ, ahol már nem tudunk különbséget tenni a két sín között. Ugyanígy válik mérhetetlenné a különbség a távolság függvényében ennél a módszernél. Emiatt csak azon térrész környezetében lehet nagy pontossággal használni az LHR-t, amit az adók körülhatárolnak.



6. ábra Párhuzamos sinpárok a végtelenben

További rendszerkomponenseket a vevők jelentenek. Nagy tárolókapacitású gyors mikrokontrollerek vagy processzorok. A gyakorlatban egy mikrokontroller kezelni sem tud 5 darab néhány órajelen belül beérkező megszakítást, tehát célszerű minden adó vételére külön vevőt és külön mikrokontrollert használni, és ezeket összeszinkronizálni. A kereskedelmi forgalomban lévő ultragyors mikrokontrollerek (TMS320F28374D) 200 MHz-es maximális órajellel működnek. [18] Ez a LHR szempontjából azt jelenti, hogy 5 ns az órajel periódusa. Ha két órajel között történik meg a demodulált négyszögösített jel triggerelése, akkor csak a következő órajelnél indul el a megszakítás függvény. Ez pedig ebben az esetben akár 1,5 m pontatlanságot is jelenthet. Nyilvánvalóan sok jel átlagolása növeli a pontosságot, de az igazi szép és precíz megoldás egy erre a célra készített célhardver, vagyis chip lenne, ami GHz-es órajellel működne, és egybe lenne integrálva egy vevővel, és egy négyszögjellel alakító erősítővel. Akár az összes vevőt és mikrokontrollert is egybe lehetne integrálni, valamint egy feldolgozó processzort is, és ebből lehetne később az LHR vevőket megépíteni.

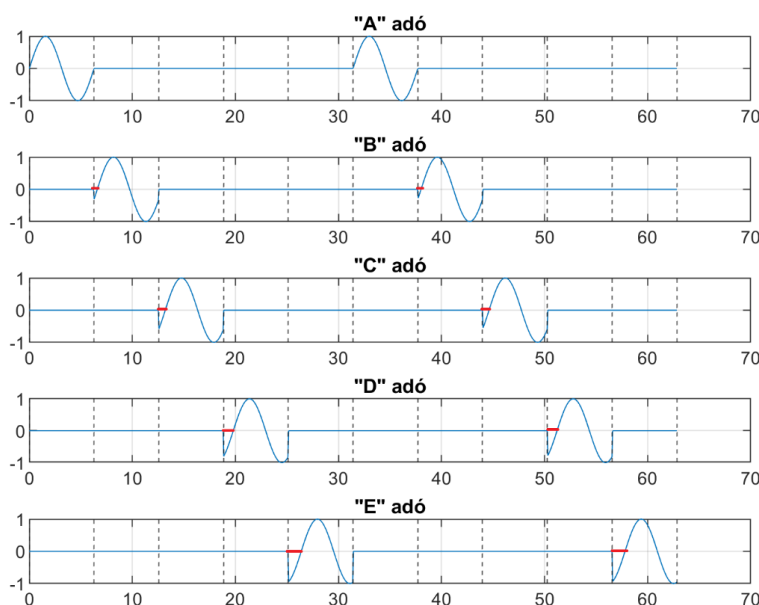
3.3.2 Általános célú egyfrekvenciás módszer:

Ez a módszer is arra épül, hogy a vevőbe az öt adóból beérkező jelek különbségéből számolja ki a vevő pontos helyét, viszont nem öt különböző vivő-frekvenciára modulált jel fáziskülönbségét vizsgáljuk, hanem csak egyetlen vivő-frekvenciát használunk öt különböző időben.

Az összes adó ugyanazt a modulált jelet sugározza úgy, hogy egy meghatározott időintervallumban bekapcsol az egyik adó, a többi pedig lekapcsol, majd egy másik időpontban egy másik kapcsol be, a többi pedig elhalkul. Ennek a moduláló jel periódusidejének egész számú többszörösének kell lennie. Például egy 10 kHz-es moduláló jel periódusideje 0,1ms. Az A adó a 0-0,1ms időablakban sugároz, a B adó a 0,1-0,2ms, a C adó a 0,2-0,3ms, D adó a 0,3-0,4ms, és az E adó pedig a 0,4-0,5ms időablakban sugározza ki a moduláló szinusz jelet. A periodikus jel definíciójának értelmében pedig, ha egy jel eleget tesz az alábbi kitételnek:

$$u(t) \equiv u(t + k \cdot T), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

azaz periodikus, akkor T periódusonként ugyanaz ismétlődik, vagyis a jel előállítható a korábbi adatokból akkor is, ha megszakadt a jel forrása. Az időosztás következtében egy mozgó vevő pozícióját kisebb pontossággal tudjuk meghatározni, mint a többfrekvenciás módszerrel, viszont egy adott pontossági kritérium mellett jól meghatározható, hogy mekkora maximális sebességgel mozoghat a helymeghatározást végző eszköz, vagy mekkora elméleti maximális pontosság érhető el egy adott sebességgel haladó vevő esetén. Ezen feltételek mellett a tér egy adott pontjában a jelek fáziskülönbsége meghatározható bármelyik pozitív null-átmenet (vagy triggerelési küszöb) és a periódusidő egészszámú többszöröseként előállított másik jel ugyanezen triggerelési szinten mért időbélyegzőinek különbségéből. Ez megegyezik azzal a fáziskülönbséggel, amit a többfrekvenciás módszerrel kapnánk, de csak ötöd annyi gyakorisággal.



7. ábra: A vevőben detektált és demodulált jelek az egyes adókból

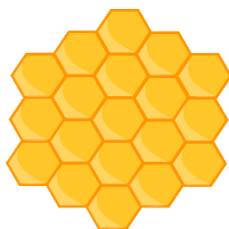
Ez a módszer akkor tekinthető pontosnak, ha a vevő egyhelyben áll, vagy elhanyagolható az az út, amit megtesz az alatt, amíg mind az öt adóból megérkezik a jel. Egy 10 kHz-es moduláló jelnél az 5 periódus, azaz 0,5ms alatti elmozdulásnak kell elhanyagolhatónak lennie. Egy 360 km/h sebességgel száguldó TGV szuperexpressz esetén:

$$s = v \cdot \Delta t \rightarrow s = 100 \text{ m/s} \cdot 0,0005 \text{ s} = 0,05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$$

Amennyiben egy ilyen sebességű járműnél elhanyagolhatónak tekintjük az 5cm-t, akkor ez a módszer is használható. A mérés pontossága a moduláló jel frekvenciájának a növelésével szintén növelhető, viszont akkor annak a területnek a mérete fog csökkenni, amelyen az LHR-t alkalmazzuk. Például 100 KHz-es jel esetén a 30 km helyett 3 km-en lehet csak alkalmazni, és ráadásul ez a maximális elméleti távolság. Viszont az előbbi példánál 5 mm-es elméleti pontosság is elérhető.

A rendszer költsége jelentősen csökken azért, hogy egyetlen frekvenciát kell használnia, és a vevőt is egyetlen vevővel és egyetlen gyors mikrokontrollerrel lehet üzemeltetni.

Van még egy járulékos költségcsökkentő tényezője az időosztásban működő általános célú rendszernek, mégpedig az, hogy több rendszer is telepíthető egymás mellé úgy, hogy mindenki ugyanazt a frekvenciát, vagy frekvenciatartományt használja, hasonlóan a GSM mobiltelefonok celluláris hálózatához. [19] Képzeljünk el egy családi házas lakóövezetet, ahol minden ingatlanhoz telepítünk egy ilyen rendszert. Ha egy intelligens szoftver méhsejtszerű struktúrába szervezi ezeket a különálló rendszereket, és az adó teljesítmények is beállíthatók, valamint megelégszünk azzal, hogy csak kb. minden tizedik jelet tudjuk mérni, akkor bármekkora területet le lehet fedni vele. Az előző TGV-s példából kiindulva 100 m/s helyett, csak 10 m/s sebesség alatt tudunk 5 cm-es pontosságot elérni, de úgy is mondhatjuk, hogy 100 m/s sebesség mellett maximum 50 cm pontossággal lehet számolni.



8. ábra: Méhsejt struktúra

3.3.3 Kétfrekvenciás módszer

Lehetséges duális rendszert is alkalmazni, ami azt jelenti, hogy két különböző vivőfrekvenciára modulálunk két különböző nagyságrendbe eső moduláló jelet, amivel kompromisszumok nélkül lehet nagyobb hatótávolságot és nagyobb pontosságot is elérni nagy sebesség mellett. Ha példának okáért egy 30 km-es térrészben alkalmazunk egy 10 KHz-es moduláló jelet egy f1 vivőfrekvencián és egy 100 KHz-es moduláló jelet egy f2 vivőfrekvencián, akkor az f1 jel egy durvább pontossággal adja meg az aktuális pozíciót, míg az f2 jel tovább pontosítja ezt.

Ha például egy 300 km-es területet szeretnénk lefedni nagy pontossággal, például légi irányítás szempontjából, akkor öt darab megfelelően magas nagy teljesítményű adóval a kétfrekvenciás módszert alkalmazva egy ekkora területen is nagy sebességű és nagy pontosságú helymeghatározás érhető el. Például egy 1 KHz-es jellel modulált f1 vivőfrekvenciával kisebb pontosság határozható meg ezen a területen, viszont egy második 10 vagy 100 KHz-es jellel

modulált f_2 vivőfrekvenciájú jel néhány centiméterre vagy milliméterre pontosít. Természetesen ez elméleti érték, mert a Föld görbülete, a tereptárgyak, hegyek mérete jelentősen befolyásolja ezt, és az időjárási és légköri viszonyokkal is számolni kell.

Az 1-15 KHz-es moduláló jelek analóg modulációs eljárásnál jól használhatók, viszont egy ennél nagyobb például 100 KHz-es moduláló jel esetén érdemes megvizsgálni a digitális modulációs eljárásokat is, mint például az amplitúdó billentyűzés (ASK) vagy a frekvencia billentyűzés (FSK) módszerét is, [20] ahol egy 1 0 1 0 bitcsoportot küldünk időosztásban az egyes adókról, viszont a vevőben nem ennek a digitális adatnak van információértéke, hanem például a második 1-es értékű bit rendelkezésre állásának időbélyegzőjének. A pozíció meghatározásának a többi lépése ugyanaz, mint az analóg modulációs eljárás esetén

3.3 Rendszerhasználati jogosultság, és üzembiztonság

Feltették nekem azt a kérdést, akiknek beszéltem az ötletéről, hogy egy szinusz hullámot mindenki tud detektálni egy megfelelő vevővel. Hogyan lehetne titkosítani a rendszert, hogy csak az használhassa, akinek jogosultsága van hozzá. Mert különben nincs benne semmi biznisz, és bekerül az ötletem egy fiók mélyére. Van erre is egy nagyon egyszerű megoldás. Ennek a rendszernek is, mint minden más rendszernek van egy átviteli karakterisztikája, egy fázistolása, egy késleltetése, amit a különbségképzés módszerével eliminálni lehet, amiről később még szó lesz. Ha viszont beiktatunk minden adónál egy szándékos késleltetést, ami ráadásul az idő függvényében is változik, akkor ezen működésleltetés algoritmusának a hiányában csak több száz méteres pontosság érhető el, ami viszont használhatatlanná teszi a rendszert. Az algoritmust vagy a hardverbe lehet beleépíteni otthoni felhasználás esetén, vagy egyéb kommunikációs csatornán (pl. internet) lehetne egy adott területre és egy adott időszakra megvásárolni. Erre pedig már lehet egy üzleti modellt is építeni.

A rendszer zavarhatósága is kérdés lehet. Mint minden rádióhullámot, ezt is lehet zavarni. Létezik azonban számtalan trükk, hogy megnöveljük mind a titkosságot, mind az üzembiztonságot. Ilyen például a frekvenciaugrás módszere, ahol bár egyetlen frekvencián érkezik a fázis-információ, ez a frekvencia egy algoritmusnak megfelelően időről-időre változik, és csak ennek az algoritmusnak az ismeretében (nevezhetjük titkosítási kódnak) tudunk jelfázist mérni, és pozíciót meghatározni. [21] A folyamatosan változó frekvenciának, különösen, ha nagyon eltérő frekvenciatartományokból veszük, rendkívül nehéz a zavarása. Azt pedig szinte lehetetlen kivitelezni, hogy rossz szándékkal olyan téves jeleket sugározzanak, ami nem valós pozíciókat eredményez, ugyanis az adók és egy intelligens vevő könnyen tudja detektálni, hogy a mért jelek nem valós információkat hordoznak, mert az adóknál megváltozik azok ismert pozíciója a hamis jel értelmében, a vevőnél pedig megszakad a pozíció kontinuitása. több száz métert ugrik a pozíció az egyik pillanatról a másikra. Ezen zavaró adók jelforrásai pedig nagyon pontosan és gyorsan bemérhetők.

Az üzembiztonságra is a méhsejtszerű celluláris struktúra lehet a megoldás. A szomszédos adók együttműködhetnek egymással, és a vevők így nem csak az adott területhez tartozó öt adó jelét tudják venni, hanem a szomszédban lévő többiét is, és ez mind a pontosság, mind az üzembiztonság szempontjából előnyös lehet.

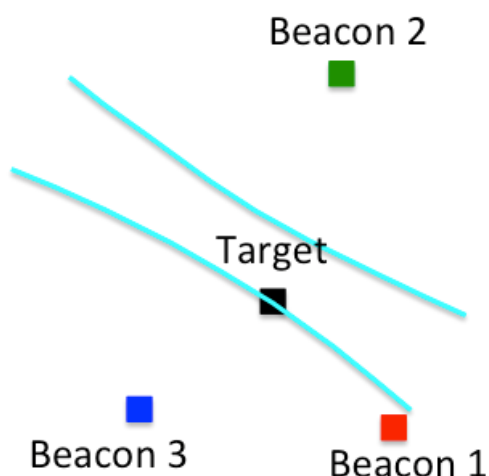
3.4 Roaming lehetősége

Beszéltünk a méhsejtszerű struktúráról, ahol a különböző helyeken felállított adók ugyanazon a frekvencián tudják sugározni a jelüket, viszont különböző időablakokban. Amennyiben a vevő rendelkezik ezen adók pontos helyzetével, és az időablak információkkal, akkor a saját pozíciójának pontos ismeretében tudni fogja, hogy mikor melyik adók jeleire van szükség. Gyakorlatilag csak a jelek átlagolását kell újratekinteni ilyenkor, maga a folyamat teljesen zökkenőmentes. Ha pedig az átlagolási időablak határán történik meg a roaming, akkor pedig teljesen folyamatos a művelet. Természetesen ehhez az adóknak időnként figyelni kell egymás pozícióját is. Különösen otthoni kategóriás roaming esetén, mert előfordulhat, hogy elmozdul egy antenna, és máris pontatlanná válik a rendszer. A GSM hálózatoknál ezt a folyamatot körzetátadásnak (handover) nevezik. Ez lehetővé teszi egy megkezdett beszélgetés esetén a zökkenőmentes és folyamatos körzetváltást az egyes cellák között. [22] Ugyanilyen módszer szerint lehetne a roamingot az LHR-ben is megvalósítani.

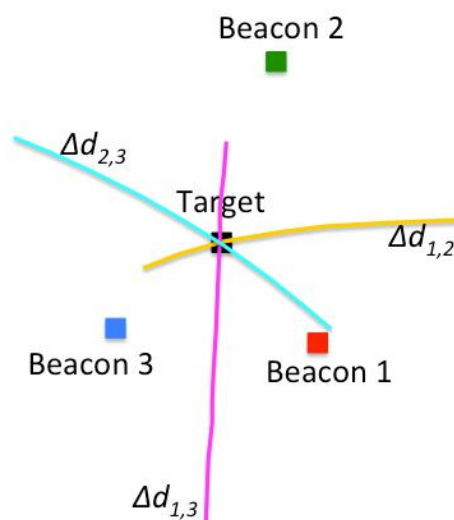
4. Az LHR koncepció matematikai megközelítése

4.1 A különbségképzési mérés elméleti modellje.

Az irodalom kutatásaim során a TDoA kiszámítására többféle megközelítést találtam. A legtöbb koncepció szerint ugyanannyi jeladóra van szükség, mint a ToA módszernél, tehát 2D esetén 3, míg 3D esetén 4 jeladóra. Két jel közötti különbség egy olyan hiperbolát ad eredményül, aminek két ága is van, ahogy ezt a 9. ábra is mutatja, ami általában megnehezíti a valós metszéspont megtalálását. Azonban, ha ismertük az eszköz hozzávetőleges helyét vagy az előző pozíciót, akkor az egyik ág elhagyható. Ezt a folyamatot megismételjük a többi jeladó párral is, és akkor 3 darab egyágú hiperbolát kapunk, (10. ábra) melynek a metszéspontja a pontos pozíció. [23]



9. ábra: TDoA számítás1 [23]



10. ábra: TDoA számítás2 [23]

A TDoA alapú helyzetmeghatározás problémája alapvetően optimalizálási probléma. A probléma megoldására jól alkalmazható az a lineáris megközelítés, amely a nemlineáris

kifejezést lineárisra alakítja. A lineáris megközelítés alapvetően két módszert foglal magában, nevezetesen a lineáris legkisebb négyzetek (LS) és a súlyozott lineáris LS (WLS) módszert. [24] Ezek viszont bonyolult matematikai formulákkal terhelt algoritmusok.

Abból indultam ki, hogy a helyzetmeghatározás egy koordináta geometriai probléma. A gyakorlatban általában területhatárokhöz viszonyítva próbálunk pozicionálni. Miért ne jelölhetnénk ki tetszőlegesen egy koordináta rendszert a területünkön, és ezen koordináta rendszerben értelmezzük mind a jel forrásokat, mind pedig a vevőket. Legyen az origó is egy jeladó, vagy pedig az origót válasszuk célszerűen egy olyan pontba, ahol adót tudunk telepíteni. A terület egy meghatározó határvonala pedig legyen az X tengellyel párhuzamos, bárhol is vettük fel az origót. A függőleges irány pedig legyen az Y tengely iránya. A Z tengely pedig már adja magát. A TDoA számítása során 4 darab jeladóval számoltak. 4 darab adónak viszont csak 3 darab lineárisan független jelkülönbség értéke lehet. Ez viszont kevés a trilaterációhoz, és ezért kell különféle matematikai eljárásokkal támogatni a módszert. Az LHR-ben viszont 5 darab jel forrásunk van. A vevő dolgozza fel a 4 darab jelkülönbséget, ami teljesen egyértelmű eredményhez vezet. A valóságban nem érdekel minket az adóktól mért távolság, hanem csak a vevő X, Y és Z koordinátája a saját koordináta rendszerünkben. Ha pedig nem távolságokat, hanem koordinátákat kell számolni, akkor csak a négy alapművelettel kell operálnunk, ahogy ez a levezetés végén ki fog derülni. Szeretném először kétdimenzióban szemléltetni az LHR működését, és matematikai modelljét, amit később háromdimenzióra fogunk kiterjeszteni.

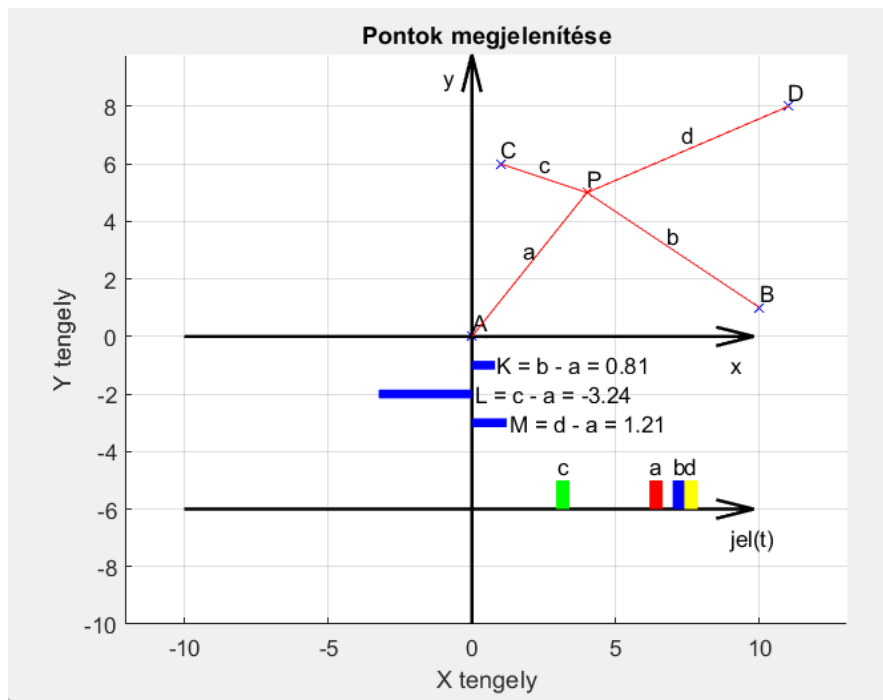
4.2 Koordináta geometriai megközelítés

A 11. ábra felső része azt szemlélteti, hogy a sajátmagunk által definiált koordináta rendszerben hol vannak az adók, és a vevők. A különbségképzési módszernél egyel több jel forrásra (adó) van szükségünk, mint a ToA módszernél. Ezt nem fogom bizonyítani, de a matematikai levezetés után ez egyértelmű, mivel így jönnek ki valós koordináták a vevő pozíciójára.

Ha az $A(0,0)$ adó a koordináta-rendszerünk origója, és a $B(B_x, B_y)$, $C(C_x, C_y)$ és a $D(D_x, D_y)$ adók koordinátáit is ismerjük, akkor a „P” vevőben mérhető adókból jövő jelek különbségeiből ($K=b-a$; $L=c-a$; $M=d-a$) egyértelműen meghatározható a vevő „P(P_x, P_y) koordinátái.

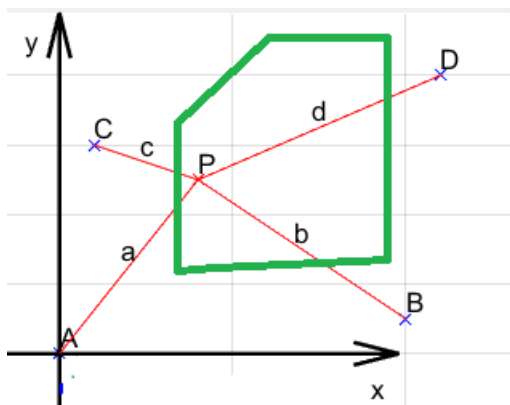
A 11. ábra alsó részén az egyes adók által sugárzott és a vevő által detektált jelek vannak jelölve különböző színekkel. A nulla időpontot a vevő határozza meg. Pont az a lényeg, hogy a TDoA módszernél nem szükséges ismernünk a jel kibocsátásának időpontját, mivel a K, L, és az M értéke ugyanaz marad, bárhol vesszük fel a nulla értéket. Gyakorlatilag ezeket a különbségeket fogjuk mérni a vevőben, és ezek lesznek a módszer bemenő paraméterei. Ezeket vízszintes kék vonallal jelöltem a 11. ábra középső részén.

Az elvi modellünk, ezt a három impulzuskülönbséget fogja feldolgozni, és a „P” vevőnk „x” és „y” koordinátáit fogja megmondani eredményül a síkban abban a koordináta-rendszerben, amit mi választottunk ki tetszőlegesen. A mért időt a $\Delta t = \frac{\Delta \ell}{c}$ képlettel számíthatjuk, tehát az út megváltozása egyenlő az elektromágneses hullám terjedési sebességének és az eltelt időnek a szorzatával, ami azt jelenti, hogy az idő méréseiből távolságot tudunk meghatározni. A matematikai modellünk levezetésénél koordinátákat használok ezért nem jelölöm a mértékegységeket.



11. ábra: Az LHR kétdimenziós modellje

4.3 A matematikai probléma megfogalmazása



1. Segédábra

Adott egy kert, amelyben felvettünk egy koordináta-rendszert a kerítés mentén. A zöld bekerített füves területet szeretném egy robotfűnyíróval lenyírni. A sarokban lévő kerítésoszlopra felrögzíttem a Mester adót, valamint a B, C és a D pontban lévő fákra is egy-egy adót. A P pontban lévő robotfűnyíró hogyan tudja meghatározni a saját pozícióját és elvégezni a feladatát, ha az A, B, C, D adók koordinátái ismertek, és a robot csak ezen adókból egyszerre indított impulzusait tudja venni és feldolgozni. A modellünkben minden adóhoz ugyanabból a szinusz-generátorból egyszerre érkezik a jel. Ezt például úgy lehet elérni, hogy az összes adó ugyanolyan hosszú

jelkábellel van összekötve a jelgenerátorral.

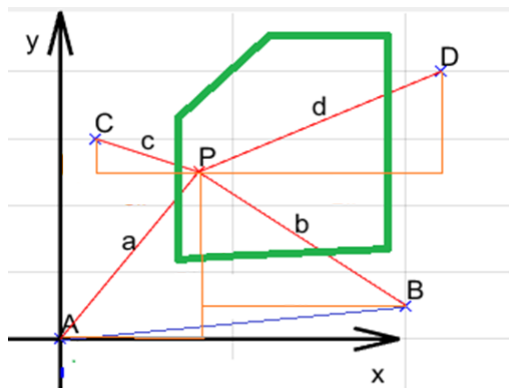
Ezen példa megoldása által szeretném bemutatni a modell levezetését koordinátageometria feladatként a Püthagorasz-tétel segítségével.

4.4 A 2D modell levezetése:

Kezdeti paraméterek:

- A(0,0) Mester adó
- B(B_x,B_y); C(C_x,C_y); D(D_x,D_y) az adók koordinátái
- 4 darab demodulált jel fáziskülönbségei (K=b-a; L=c-a; M=d-a). Ezeket tudjuk mérni.
- A vevő koordinátái, amit meg akarunk tudni P(P_x,P_y)

Írjuk fel az egyes adók és a robot közötti távolságok négyzetét az x és y koordinátákkal:



2. Segédábra

$$a^2 = P_x^2 + P_y^2$$

1. egyenlet

$$b^2 = (B_x - P_x)^2 + (B_y - P_y)^2$$

2. egyenlet

$$c^2 = (C_x - P_x)^2 + (C_y - P_y)^2$$

3. egyenlet

$$d^2 = (D_x - P_x)^2 + (D_y - P_y)^2$$

4. egyenlet

Vonjuk ki a 2. egyenletből az 1. egyenletet:

$$b^2 - a^2 = (B_x - P_x)^2 + (B_y - P_y)^2 - P_x^2 - P_y^2$$

5. egyenlet

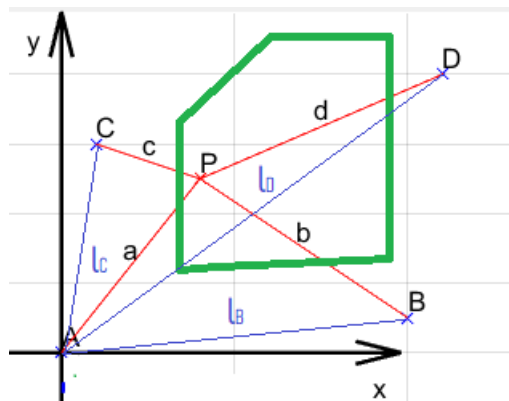
Végezzük el a jobb oldalt a négyzetre emelést:

$$b^2 - a^2 = B_x^2 + P_x^2 - 2B_xP_x + B_y^2 + P_y^2 - 2B_yP_y - P_x^2 - P_y^2$$

$$b^2 - a^2 = B_x^2 + B_y^2 - 2B_xP_x - 2B_yP_y$$

6. egyenlet

A $B_x^2 + B_y^2$ az A origóból a B pontokba mutató vektor hosszának négyzete: jelöljük l_B^2 -vel



3. Segédábra

$$l_B^2 = B_x^2 + B_y^2$$

7. egyenlet

És hasonlóan a többi is:

$$l_C^2 = C_x^2 + C_y^2$$

8. egyenlet

$$l_D^2 = D_x^2 + D_y^2$$

9. egyenlet

Helyettesítsük $B_x^2 + B_y^2$ helyébe: $l_B^2 - t$

$$b^2 - a^2 = l_B^2 - 2B_x P_x - 2B_y P_y$$

10. egyenlet

A baloldalon egy nevezetes azonosság található:

$$(b - a)(b + a) = l_B^2 - 2B_x P_x - 2B_y P_y$$

11. egyenlet

Alakítsuk tovább a baloldalt:

$$(b - a)(b - a + 2a) = l_B^2 - 2B_x P_x - 2B_y P_y$$

12. egyenlet

A $(b-a)$ pontosan az az érték, amit mérni tud a rendszer, tehát a két impulzus érkezési idejének különbsége, vagyis a fáziskülönbség, azaz a K .

$$K(K + 2a) = l_B^2 - 2B_x P_x - 2B_y P_y$$

13. egyenlet

$$K^2 + 2aK = l_B^2 - 2B_x P_x - 2B_y P_y$$

14. egyenlet

Fejezzük ki az „a”-t:

$$a = \frac{l_B^2 - K^2 - 2B_x P_x - 2B_y P_y}{2K}$$

15. egyenlet

Eddig megvagyunk a **2. egyenlet - 1. egyenlettel**. végezzük el ugyanígy a **3. egyenlet - 1. egyenlet** és a **4. egyenlet - 1. egyenlet** esetében is. A feladat jól algoritmizálható, mivel csak az indexek különböznek:

l_B^2 – helyébe kerül: l_C^2 és l_D^2 ; K – helyébe L és M ; B_x, B_y – helyébe C_x, C_y és D_x, D_y

$$a = \frac{l_C^2 - L^2 - 2C_x P_x - 2C_y P_y}{2L}$$

16. egyenlet

$$a = \frac{l_D^2 - M^2 - 2D_x P_x - 2D_y P_y}{2M}$$

17. egyenlet

Tegyük egyenlővé az **15. egyenletet a 16. egyenlettel**:

$$\frac{l_B^2 - K^2 - 2B_x P_x - 2B_y P_y}{2K} = \frac{l_C^2 - L^2 - 2C_x P_x - 2C_y P_y}{2L}$$

18. egyenlet

2-vel egyszerűsíthetünk, és szorozzuk be KL -vel mindkét oldalt:

$$Ll_B^2 - LK^2 - 2LB_xP_x - 2LB_yP_y = Kl_C^2 - KL^2 - 2KC_xP_x - 2KC_yP_y$$

19. egyenlet

Rendezzük a baloldalra a P_x , P_y tartalmú elemeket:

$$2KC_xP_x - 2LB_xP_x + 2KC_yP_y - 2LB_yP_y = Kl_C^2 - Ll_B^2 + LK^2 - KL^2$$

20. egyenlet

$$2P_x(KC_x - LB_x) + 2P_y(KC_y - LB_y) = Kl_C^2 - Ll_B^2 + LK^2 - KL^2$$

21. egyenlet

Mivel nekünk P_x és P_y értéke kell, ezért egyszerűség kedvéért vezessük be a következő változókat:

$$Q_1 = KC_x - LB_x$$

22. egyenlet

$$Q_2 = KC_y - LB_y$$

23. egyenlet

$$Q_3 = Kl_C^2 - Ll_B^2 + LK^2 - KL^2$$

24. egyenlet

Így az előbbi egyenletünk a következőképpen alakul:

$$2P_xQ_1 + 2P_yQ_2 = Q_3$$

25. egyenlet

Ebből fejezzük ki P_x -et:

$$P_x = \frac{Q_3 - 2P_yQ_2}{2Q_1}$$

26. egyenlet

Ugyanígy tegyük egyenlővé az **15. egyenletet a 17. egyenlettel** is és végezzük el a műveleteket:

$$\frac{l_B^2 - K^2 - 2B_xP_x - 2B_yP_y}{2K} = \frac{l_D^2 - M^2 - 2D_xP_x - 2D_yP_y}{2M}$$

27. egyenlet

$$2P_x(KD_x - MB_x) + 2P_y(KD_y - MB_y) = Kl_D^2 - Ml_B^2 + MK^2 - KM^2$$

28. egyenlet

Mivel nekünk P_x és P_y értéke kell, ezért egyszerűség kedvéért vezessük be itt is a következő változókat:

$$Q_4 = KD_x - MB_x$$

29. egyenlet

$$Q_5 = KD_y - MB_y$$

30. egyenlet

$$Q_6 = Kl_D^2 - Ml_B^2 + MK^2 - KM^2$$

31. egyenlet

Így az előbbi egyenletünk a következőképpen alakul:

$$2P_x Q_4 + 2P_y Q_5 = Q_6$$

32. egyenlet

Ebből fejezzük ki P_x -et:

$$P_x = \frac{Q_6 - 2P_y Q_5}{2Q_4}$$

33. egyenlet

A **26. egyenletet** és a **33. egyenletet** tegyük egyenlővé és a P_x -et fejezzük ki:

$$\frac{Q_3 - 2P_y Q_2}{2Q_1} = \frac{Q_6 - 2P_y Q_5}{2Q_4}$$

34. egyenlet

$$Q_3 Q_4 - 2P_y Q_2 Q_4 = Q_1 Q_6 - 2P_y Q_1 Q_5$$

35. egyenlet

$$2P_y Q_1 Q_5 - 2P_y Q_2 Q_4 = Q_1 Q_6 - Q_3 Q_4$$

36. egyenlet

$$2P_y (Q_1 Q_5 - Q_2 Q_4) = Q_1 Q_6 - Q_3 Q_4$$

37. egyenlet

$$P_y = \frac{Q_1 Q_6 - Q_3 Q_4}{2(Q_1 Q_5 - Q_2 Q_4)}$$

38. egyenlet

Ezzel megkaptuk a robot pontos y koordinátáját.

A P_y ismeretében pedig ki tudjuk fejezni például a **33. egyenletből** a P_x -et:

$$P_x = \frac{Q_6 - 2P_y Q_5}{2Q_4}$$

39. egyenlet

Mint látható csak olyan változók vannak az egyenletekben, amelyek ismert, vagy mért bemeneti paramétereket tartalmaznak. Az is kiolvasható a formulákból, hogy az idő szerepe az impulzusok közötti idő különbségében nyilvánul meg, ami rendkívül jól, egyszerűen és olcsón mérhető. Így elimináltuk a precíz, de költséges atomórák, és bonyolult idősinkronizáló eljárások igénybevételét.

4.5 Jelkésleltetési problémák eliminálása:

Van még egy pozitív mellékhatása a módszernek, mégpedig az, hogy a rendszer átviteléből adódó késleltetések, a különbségképzés miatt egyszerűen kivonódnak egymásból. Ebben az alfejezetben ezt szeretném bemutatni:

Nézzük meg a rendszer fizikai átvitelét az időfaktor szempontjából a 2D modellünkben. Tételezzük fel, hogy van egy szinuszgenerátorunk, aminek a jelét négy egyforma hosszú jelkábelen vezetjük a négy adóba moduláló jelként. Így biztosítjuk, hogy mind a négy adóból egyszerre induljanak a sugárzott modulált jelek

1. A vevő szempontjából egy T_0 ismeretlen időpillanatban keletkezik egy jel a jelgenerátorban
2. Az adókhoz $\Delta T_{jelkábel}$ idő múlva érkezik meg a jel. Ez az idő az egyforma hosszú és azonos paraméterű jelkábelrel, és precíz rendszertelepítéssel jól kézben tartható, és ténylegesen egyformának tekinthető az összes jel-útvonal esetén
3. Az adóknak van egy $\Delta T_{adó}$ átviteli késleltetése, amely azonos eszközök esetén, laboratóriumi kalibrálás mellett szintén pontosan beszabályozható, és mind a négy adóra egyformának tekinthető.
4. Vannak a környezeti tényezők, mint például hőmérséklet, páratartalom, nyomás, amik szintén befolyásolhatják az átvitelt, viszont a rendszer lokalitása miatt ezek egyformán jelentkeznek az összes adóban. Ez a $\Delta T_{környezet}$
5. A jel átmegy a közegen egy $\Delta T_N = \frac{d_{adó-vevő}}{c_{közeg}}$ idő alatt $c_{közeg}$ sebességgel, ami a modellünkben az „a, b, c és d” paraméterek. Természetesen $c_{közeg}$ is környezetfüggő, viszont ezek nem, mint késleltetés jelenik meg a rendszerben, hanem az idő-út konvertálásakor kell figyelembe vennünk úgy, hogy a $c_{közeg} = \frac{c}{n}$, ahol „c” a fénysebesség a vákuumban, az n pedig az aktuális közeg törésmutatója, ami főleg a páratartalommal van kapcsolatban. A mi szempontunkból viszont azon időn belül, amíg az összes adóból megérkeznek a jelek, gyakorlatilag változatlanoknak tekinthető a közeg és a lokalitás miatt is egyformának tekinthető.
6. A jel vétele és feldolgozása $\Delta T_{jelfeldolgozás}$ idő alatt történik meg. Itt kell megjegyezni, hogy az egy- és kétfrekvenciás LHR elképzelés szerint nem több különböző frekvencián érkezik a jel, hanem ugyanazon a frekvencián több különböző időpontban. Ilyenkor nem egy jelcsomag érkezik, hanem a nagy pontosságú jelgenerátorban előállított jel T periódusidejével késleltetve érkeznek meg az egyes adókból. Az első periódust az „A” adó sugározza, a másodikat csak a „B” adó, és így tovább, majd kezdődik előről. erről későbbiek folyamán még részletesen beszélünk. Az a lényege ennek a módszernek, hogy elegendő egyetlen vevő az összes jel fogadására és feldolgozására. Az egyetlen vevőnknek egyetlen időkésleltetése van: $\Delta T_{vevő}$. Hosszútávon ez változhat a környezeti paraméterek változásával (például bemelegszik), de a jelcsomag időtartama szempontjából (ami néhány milliszekundum, vagy mikroszekundum) teljesen

elhanyagolható. A teljes jelcsomag, tehát az összes adó jele úgy kerül feldolgozásra, hogy bár az egyes adókból érkező jelek különböző időablakban érkeznek, viszont ezek az időablakok a moduláló frekvencia periódusidejével vannak eltolva, és ezeket egymásra tolva gyakorlatilag egy időablakban érkezett jeleket kapunk, így elég egyetlen $\Delta T_{vevő}$ késleltetéssel számolnunk az összes jel esetében.

7. A beérkező impulzus jelének mintavételezésekor is keletkezik hiba, ami minden egyes beérkezett jel esetén különböző, viszont minimalizálható az átlagolás módszerével, ahogy arról majd később szó lesz. Ezeket a mintavételezési hibákat nevezzük H_N -nek.
8. A jel algoritmikus feldolgozásának ideje is befolyásolhatja a késleltetést, de ez nem a pozíció számításra vonatkozik, hanem csak az információ rendelkezésre állásának szempontjából értelmezhető, tehát mennyi idő múlva kapunk eredményt a méréshez képest, ami a mai processzor feldolgozási kapacitások mellett szintén jelentéktelen. Ez azért is így van, mivel a matematikai módszerből láthatóan csak a négy alapművelettel kell operálnunk. (A négyzetre emelés is gyakorlatilag egy szorzást jelent.) Ezek a műveletek viszont nagyságrendekkel gyorsabban elvégezhetők, mint a nemlineáris függvények számítása. Ezért továbbiakban ezzel nem is foglalkozunk.

Ezek után írjuk fel a négy különböző jel átviteli késleltetését, illetve annak vételi idejét

1. jel: $T_A = T_0 + \Delta T_{jelkábel} + \Delta T_{adó} + \Delta T_{környezet} + \Delta T_1 + \Delta T_{jelfeldolgozás} + H_1$
2. jel: $T_B = T_0 + 1 \cdot T + \Delta T_{jelkábel} + \Delta T_{adó} + \Delta T_{környezet} + \Delta T_2 + \Delta T_{jelfeldolgozás} + H_2$
3. jel: $T_C = T_0 + 2 \cdot T + \Delta T_{jelkábel} + \Delta T_{adó} + \Delta T_{környezet} + \Delta T_3 + \Delta T_{jelfeldolgozás} + H_3$
4. jel: $T_D = T_0 + 3 \cdot T + \Delta T_{jelkábel} + \Delta T_{adó} + \Delta T_{környezet} + \Delta T_4 + \Delta T_{jelfeldolgozás} + H_4$

A rendszer bemenő mért paraméterei pedig a következők

$$a = (T_A - T_0) \cdot c_{közeg}$$

$$b = (T_B - T_0) \cdot c_{közeg}$$

$$c = (T_C - T_0) \cdot c_{közeg}$$

$$d = (T_D - T_0) \cdot c_{közeg}$$

Az algoritmus viszont a K, L, M változókkal számol, amik értéke a következő:

$$K = b - a = (T_B - T_0) \cdot c_{közeg} - (T_A - T_0) \cdot c_{közeg} = (T_B - T_A) \cdot c_{közeg}$$

Behelyettesítve a teljes átvitel idejének egyenletét:

$$K = [T_0 + 1 \cdot T + \Delta T_{jelkábel} + \Delta T_{adó} + \Delta T_{környezet} + \Delta T_2 + \Delta T_{jelfeldolgozás} + H_2 - (T_A = T_0 + \Delta T_{jelkábel} + \Delta T_{adó} + \Delta T_{környezet} + \Delta T_1 + \Delta T_{jelfeldolgozás} + H_1)] \cdot c_{közeg}$$

Egyszerűsítés után:

$$K = (1 \cdot T + \Delta T_2 + H_2 - \Delta T_1 - H_1) \cdot c_{közeg}$$

Mivel a négy különböző periódusban érkező impulzusait összetoljuk egy időablakban, ezért $T=0$ lesz, tehát:

$$K = (\Delta T_2 + H_2 - \Delta T_1 - H_1) \cdot c_{közeg}$$

Ugyanígy a többi bemeneti paraméterre:

$$L = (\Delta T_3 + H_3 - \Delta T_1 - H_1) \cdot c_{közeg}$$

$$M = (\Delta T_4 + H_4 - \Delta T_1 - H_1) \cdot c_{közeg}$$

Mint látható, a bemeneti fáziskülönbség paraméterek csak az adókból érkező jelek idejének különbségétől, a mintavételezés hibájától, és az elektromágneses hullám terjedési sebességétől függ. A fáziskülönbséget így kapjuk meg távolság értéként. Ezzel a különbségképzési módszerrel láthatóan nem csak az időtől való függetlenséget nyertünk, hanem gyakorlatilag az átvitel késleltetéseit is kiiktattuk a rendszerből. A „H” mintavételezési hiba, viszont jelentős lehet, ezzel még később foglalkozni fogunk. A $c_{közeg}$ változása viszont a gyakorlatban elhanyagolható egy mérési ablakon belül. Ezekből is látszik, hogy érdemes a különbségképzési módszerrel meghatározni a pozíciót, annak ellenére is, hogy plusz egy adót kell a rendszerbe iktatnunk.

4.6 Matematikai limitáció:

A pozíciók számításához alkalmazott formulákban jelen van az osztás művelete is, ami problémát okozhat az algoritmus futása közben. A valós környezetben mindenképpen kell megfelelő eredményt kapnunk, de matematikailag előfordulhat, hogy pontszerű szakadás, vagy törés jelenik meg a függvényben. A dolgozatnak nem része ezen matematikai problémák feltárása. Lehet, hogy a valóságban elő sem fordul, hogy a képletekben szereplő nevezők értéke zérus lesz, viszont, ha egy kritikus rendszert üzemeltetünk, egyetlen egy olyan esetet sem engedhetünk meg, ami a rendszerben problémát okoz, mert a nagyszámok törvénye értelmében reális esély van arra, hogy az eszközünk megtalálja ezt a pontot, és Murphy törvénye értelmében ez be is következik, sőt a legkritikusabb szituációban a legszerencsétlenebb módon. Ezért az algoritmusnak le kell tudnia kezelni a zéró osztás problémáját. Erre a legnyilvánvalóbb módszer, ha az osztás művelete előtt ellenőrizzük a nevező értékét, és ha zérus, akkor egy nulla közeli, de nem zéró értéket helyettesíthetünk a nevezőbe. Több mérés és számítás átlagolása pedig biztosítja a pontos koordinátaértéket.

4.7 A valós 3D modell levezetése

Az egyszerűség kedvéért egy síkbeli modellen szemléltettem a koncepciót, és annak tulajdonságait. A valóságban háromdimenzióban kell gondolkodnunk, még akkor is, ha az eszközeink síkban mozognak. Arról nem is beszélve, ha tényleges térbeli mozgást kell végezni (például drónok, targoncák, robotkarok stb.) A síkbeli mozgás esetében pedig azért nem működik a 2D modellünk, mert gyakorlatban lehetetlen az összes adó antennáját az autonóm eszközeink vevőivel egy síkba installálni. Ha pedig nem esik egy síkba az összes adó antennája és vevő antennája, akkor nem kapunk pontos eredményt.

A következőkben a 3D valóságos modellünk matematikai hátterét ismerjük meg, ami a 2D modellünk analógiájára épül. Természetesen a 2D modellben megállapítottak igazak a 3D-re is, viszont plusz egy adót kell beiktatnunk a rendszerbe, ami a gyakorlatban történhet úgy is, hogy az egyik adó antennájának rudjára, vagy tornyára egy másik magasságban helyezzük el egy újabb adót és antennát.

A 2D modell levezetése után csak annyi a dolgunk, hogy vezessük be a „z” koordináta értéket is a rendszerbe, és létesítsünk még egy adót:

Kezdeti paraméterek:

- A(0,0,0) Mester adó
- B(B_x,B_y,B_z); C(C_x,C_y,C_z); D(D_x,D_y,D_z) és E(E_x,E_y,E_z) az adók koordinátái
- 5 darab demodulált jel fáziskülönbségei (K=b-a; L=c-a; M=d-a; N=e-a), amiket mérünk.
- A vevő koordinátái, amit meg akarunk tudni P(P_x,P_y,P_z)

Írjuk fel az egyes adók és a vevő közötti távolságok négyzetét az x, y és z koordinátákkal:

$$a^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$$

40. egyenlet

$$b^2 = (B_x - P_x)^2 + (B_y - P_y)^2 + (B_z - P_z)^2$$

41. egyenlet

$$c^2 = (C_x - P_x)^2 + (C_y - P_y)^2 + (C_z - P_z)^2$$

42. egyenlet

$$d^2 = (D_x - P_x)^2 + (D_y - P_y)^2 + (D_z - P_z)^2$$

43. egyenlet

$$e^2 = (E_x - P_x)^2 + (E_y - P_y)^2 + (E_z - P_z)^2$$

44. egyenlet

Vonjuk ki a **41. egyenletből** a **40. egyenletet**:

$$b^2 - a^2 = (B_x - P_x)^2 + (B_y - P_y)^2 + (B_z - P_z)^2 - P_x^2 - P_y^2 - P_z^2$$

45. egyenlet

Végezzük el a jobb oldalon a négyzetre emelést:

$$b^2 - a^2 = B_x^2 + \cancel{P_x^2} - 2B_xP_x + B_y^2 + \cancel{P_y^2} - 2B_yP_y + B_z^2 + \cancel{P_z^2} - 2B_zP_z - \cancel{P_x^2} - \cancel{P_y^2} - \cancel{P_z^2}$$

46. egyenlet

$$b^2 - a^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 - 2B_xP_x - 2B_yP_y - 2B_zP_z$$

47. egyenlet

Ugyanígy vonjuk ki a **42. egyenlet****43. egyenlet****44. egyenletből** a **40. egyenletet**, és az egyszerűsítés után megkapjuk a **47. egyenlethez** hasonló egyenleteket:

$$c^2 - a^2 = C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 - 2C_xP_x - 2C_yP_y - 2C_zP_z$$

48. egyenlet

$$d^2 - a^2 = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2 - 2D_xP_x - 2D_yP_y - 2D_zP_z$$

49. egyenlet

$$e^2 - a^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 - 2E_xP_x - 2E_yP_y - 2E_zP_z$$

50. egyenlet

A $B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$ az A pontból, mint origóból a B pontokba mutató vektor hosszának négyzete: jelöljük l_B^2 -vel. Ugyanígy a C, D, és az E pontok koordinátáinak négyzetösszegeit l_C^2 ; l_D^2 ; l_E^2 -vel

$$l_B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$$

51. egyenlet

$$l_C^2 = C_x^2 + C_y^2 + C_z^2$$

52. egyenlet

$$l_D^2 = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$$

53. egyenlet

$$l_E^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2$$

54. egyenlet

Helyettesítsük a **47. egyenletbe** $B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$ - helyébe: l_B^2 - t az **51. egyenlet** alapján

$$b^2 - a^2 = l_B^2 - 2B_xP_x - 2B_yP_y - 2B_zP_z$$

55. egyenlet

A baloldalon egy nevezetes azonosság található:

$$(b - a)(b + a) = l_B^2 - 2B_xP_x - 2B_yP_y - 2B_zP_z$$

56. egyenlet

Alakítsuk tovább a baloldalt:

$$(b - a)(b - a + 2a) = l_B^2 - 2B_xP_x - 2B_yP_y - 2B_zP_z$$

57. egyenlet

A (b-a) pontosan az az érték, amit mérni tud a rendszer, tehát a két impulzus érkezési idejének különbsége, vagyis a fáziskülönbség, azaz a K.

$$K(K + 2a) = l_B^2 - 2B_xP_x - 2B_yP_y - 2B_zP_z$$

58. egyenlet

$$K^2 + 2aK = l_B^2 - 2B_xP_x - 2B_yP_y - 2B_zP_z$$

59. egyenlet

Fejezzük ki az „a”-t:

$$a = \frac{l_B^2 - K^2 - 2B_xP_x - 2B_yP_y - 2B_zP_z}{2K}$$

60. egyenlet

Eddig megvagyunk a **41. egyenlet- 40. egyenlettel**: Végezzük el ugyanígy a **42. egyenlet43. egyenlet44. egyenletből** a **40. egyenletet** is. A feladat itt is jól algoritmizálható, mivel csak az indexek különböznek, így a **60. egyenlethez** hasonlóan megkapjuk a következő egyenleteket:

$$a = \frac{l_C^2 - L^2 - 2C_x P_x - 2C_y P_y - 2C_z P_z}{2L}$$

61. egyenlet

$$a = \frac{l_D^2 - M^2 - 2D_x P_x - 2D_y P_y - 2D_z P_z}{2M}$$

62. egyenlet

$$a = \frac{l_E^2 - N^2 - 2E_x P_x - 2E_y P_y - 2E_z P_z}{2N}$$

63. egyenlet

Tegyük egyenlővé a **60. egyenletet** a **61. egyenlettel**:

$$\frac{l_B^2 - K^2 - 2B_x P_x - 2B_y P_y - 2B_z P_z}{2K} = \frac{l_C^2 - L^2 - 2C_x P_x - 2C_y P_y - 2C_z P_z}{2L}$$

64. egyenlet

2-vel egyszerűsíthetünk, és szorozzuk be KL-vel mindkét oldalt:

$$Ll_B^2 - LK^2 - 2LB_x P_x - 2LB_y P_y - 2LB_z P_z = Kl_C^2 - KL^2 - 2KC_x P_x - 2KC_y P_y - 2KC_z P_z$$

65. egyenlet

Rendezzük a baloldalra a $P_x P_y P_z$ tartalmú elemeket:

$$2KC_x P_x - 2LB_x P_x + 2KC_y P_y - 2LB_y P_y + 2KC_z P_z - 2LB_z P_z = Kl_C^2 - Ll_B^2 + LK^2 - KL^2$$

66. egyenlet

$$2P_x(KC_x - LB_x) + 2P_y(KC_y - LB_y) + 2P_z(KC_z - LB_z) = Kl_C^2 - Ll_B^2 + LK^2 - KL^2$$

67. egyenlet

Mivel nekünk $P_x P_y$ és P_z értéke kell, ezért egyszerűség kedvéért vezessük be a következő változókat:

$$R_1 = KC_x - LB_x$$

68. egyenlet

$$R_2 = KC_y - LB_y$$

69. egyenlet

$$R_3 = KC_z - LB_z$$

$$R_4 = Kl_C^2 - Ll_B^2 + LK^2 - KL^2$$

70. egyenlet

Így az előbbi **67. egyenletünk** a következőképpen alakul:

$$2P_x R_1 + 2P_y R_2 + 2P_z R_3 = R_4$$

71. egyenlet

Ebből fejezzük ki P_x -et:

$$P_x = \frac{R_4 - 2P_y R_2 - 2P_z R_3}{2R_1}$$

72. egyenlet

Az eddigiekhez hasonlóan tegyük egyenlővé a **60. egyenletet** a **62. egyenlettel** is:

$$\frac{l_B^2 - K^2 - 2B_x P_x - 2B_y P_y - 2B_z P_z}{2K} = \frac{l_D^2 - M^2 - 2D_x P_x - 2D_y P_y - 2D_z P_z}{2M}$$

73. egyenlet

Az előző analógiája szerint:

$$2P_x(KD_x - MB_x) + 2P_y(KD_y - MB_y) + 2P_z(KD_z - MB_z) = Kl_D^2 - Ml_B^2 + MK^2 - KM^2$$

74. egyenlet

Mivel nekünk P_x , P_y és P_z értéke kell, ezért egyszerűség kedvéért vezessük be a következő változókat:

$$R_5 = KD_x - MB_x$$

75. egyenlet

$$R_6 = KD_y - MB_y$$

76. egyenlet

$$R_7 = KD_z - MB_z$$

77. egyenlet

$$R_8 = Kl_D^2 - Ml_B^2 + MK^2 - KM^2$$

78. egyenlet

Így az előbbi **74. egyenletünk** a következőképpen alakul:

$$2P_x R_5 + 2P_y R_6 + 2P_z R_7 = R_8$$

79. egyenlet

Ebből is fejezzük ki P_x -et:

$$P_x = \frac{R_8 - 2P_y R_6 - 2P_z R_7}{2R_5}$$

80. egyenlet

Majd tegyük egyenlővé a **60. egyenletet** a **63. egyenlettel** is:

$$\frac{l_B^2 - K^2 - 2B_x P_x - 2B_y P_y - 2B_z P_z}{2K} = \frac{l_E^2 - N^2 - 2E_x P_x - 2E_y P_y - 2E_z P_z}{2N}$$

81. egyenlet

Az előző analógiája szerint:

$$2P_x(KE_x - NB_x) + 2P_y(KE_y - NB_y) + 2P_z(KE_z - NB_z) = Kl_E^2 - Nl_B^2 + NK^2 - KN^2$$

82. egyenlet

Vezessük be a következő változókat:

$$R_9 = KE_x - NB_x$$

83. egyenlet

$$R_{10} = KE_y - NB_y$$

84. egyenlet

$$R_{11} = KE_z - NB_z$$

85. egyenlet

$$R_{12} = Kl_E^2 - Nl_B^2 + NK^2 - KN^2$$

86. egyenlet

Így az előbbi **82. egyenletünk** a következőképpen alakul:

$$2P_x R_9 + 2P_y R_{10} + 2P_z R_{11} = R_{12}$$

87. egyenlet

Ebből is fejezzük ki P_x -t:

$$P_x = \frac{R_{12} - 2P_y R_{10} - 2P_z R_{11}}{2R_9}$$

88. egyenlet

A **72. egyenlet** és a **80. egyenlet** tegyük egyenlővé egymással, és fejezzük ki belőle P_y -t:

$$\frac{R_4 - 2P_y R_2 - 2P_z R_3}{2R_1} = \frac{R_8 - 2P_y R_6 - 2P_z R_7}{2R_5}$$

89. egyenlet

$$R_4 R_5 - 2P_y R_2 R_5 - 2P_z R_3 R_5 = R_1 R_8 - 2P_y R_1 R_6 - 2P_z R_1 R_7$$

90. egyenlet

$$2P_y R_1 R_6 - 2P_y R_2 R_5 + 2P_z R_1 R_7 - 2P_z R_3 R_5 = R_1 R_8 - R_4 R_5$$

91. egyenlet

$$2P_y(R_1R_6 - R_2R_5) + 2P_z(R_1R_7 - R_3R_5) = R_1R_8 - R_4R_5$$

92. egyenlet

$$P_y = \frac{R_1R_8 - R_4R_5 - 2P_z(R_1R_7 - R_3R_5)}{2(R_1R_6 - R_2R_5)}$$

93. egyenlet

Hasonlóan A **72. egyenlet** és a **88. egyenlet** is tegyük egyenlővé egymással, és fejezzük ki belőle P_y -t:

$$\frac{R_4 - 2P_yR_2 - 2P_zR_3}{2R_1} = \frac{R_{12} - 2P_yR_{10} - 2P_zR_{11}}{2R_9}$$

94. egyenlet

A levezetést mellőzve, az előző egyenlőség analógiája alapján az R_{5-8} helyébe rendre R_{9-12} -t helyettesítve:

$$P_y = \frac{R_1R_{12} - R_4R_9 - 2P_z(R_1R_{11} - R_3R_9)}{2(R_1R_{10} - R_2R_9)}$$

95. egyenlet

Tegyük egyenlővé a **93. egyenlet** és a **95. egyenlet**, ahol kifejeztük P_y -t:

$$\frac{R_1R_8 - R_4R_5 - 2P_z(R_1R_7 - R_3R_5)}{2(R_1R_6 - R_2R_5)} = \frac{R_1R_{12} - R_4R_9 - 2P_z(R_1R_{11} - R_3R_9)}{2(R_1R_{10} - R_2R_9)}$$

96. egyenlet

$$\begin{aligned} & R_1R_8(R_1R_{10} - R_2R_9) - R_4R_5(R_1R_{10} - R_2R_9) - 2P_z(R_1R_7 - R_3R_5)(R_1R_{10} - R_2R_9) = \\ & R_1R_{12}(R_1R_6 - R_2R_5) - R_4R_9(R_1R_6 - R_2R_5) - 2P_z(R_1R_{11} - R_3R_9)(R_1R_6 - R_2R_5) \end{aligned}$$

97. egyenlet

$$\begin{aligned} & 2P_z(R_1R_{11} - R_3R_9)(R_1R_6 - R_2R_5) - 2P_z(R_1R_7 - R_3R_5)(R_1R_{10} - R_2R_9) = \\ & R_1R_{12}(R_1R_6 - R_2R_5) - R_4R_9(R_1R_6 - R_2R_5) - R_1R_8(R_1R_{10} - R_2R_9) - R_4R_5(R_1R_{10} - R_2R_9) \end{aligned}$$

98. egyenlet

$$\begin{aligned} & 2P_z[(R_1R_{11} - R_3R_9)(R_1R_6 - R_2R_5) - (R_1R_7 - R_3R_5)(R_1R_{10} - R_2R_9)] = \\ & R_1R_{12}(R_1R_6 - R_2R_5) - R_4R_9(R_1R_6 - R_2R_5) - R_1R_8(R_1R_{10} - R_2R_9) - R_4R_5(R_1R_{10} - R_2R_9) \end{aligned}$$

99. egyenlet

$$P_z = \frac{R_1R_{12}(R_1R_6 - R_2R_5) - R_4R_9(R_1R_6 - R_2R_5) - R_1R_8(R_1R_{10} - R_2R_9) - R_4R_5(R_1R_{10} - R_2R_9)}{2[(R_1R_{11} - R_3R_9)(R_1R_6 - R_2R_5) - (R_1R_7 - R_3R_5)(R_1R_{10} - R_2R_9)]}$$

100. egyenlet

Ezzel a szép hosszú összefüggéssel megkaptuk P_z -t. Az így kiszámolt értéket behelyettesítjük valamelyik P_y -ra kifejezett (**93. egyenlet** vagy **95. egyenlet**) P_z helyébe, és megkapjuk P_y -t. Az így megkapott értéket pedig valamelyik P_x -re kifejezett (**72. egyenlet**; **80. egyenlet**, vagy **88. egyenlet**) P_y helyébe, majd megkapjuk P_x -t is.

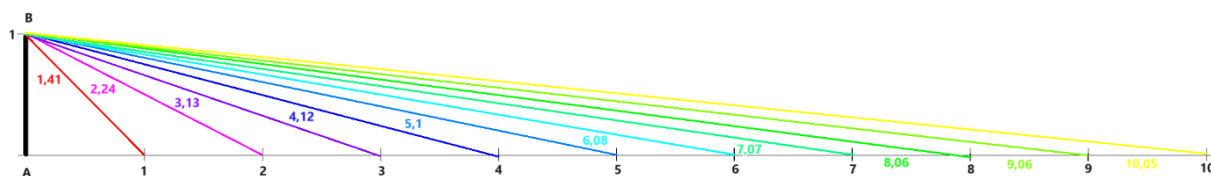
A levezetés megmutatta, hogy egy háromdimenziós térben 5 darab tetszőlegesen elhelyezett adókból sugárzott jelek segítségével meghatározható a vevő pozíciója, amennyiben ismerjük ezen adók antennáinak pozícióját. Ez a módszer tehát lehetőséget nyújt nekünk arra, hogy egy adott térrészben (lehet akár több száz méter, vagy kilométer is) egy viszonylag olcsó technológiával saját pozícionáló rendszert működtessünk.

A számolás jól algoritmizálható és rengeteg olyan elemet tartalmaz, amit elég egyszer kiszámítani, mivel többször előfordul a képletben, mint például az R_2R_5 . A mai processzoroknak és mikrokontrollereknek meg se kottyan egy ilyen képlet kiszámítása, mivel csak a négy alapműveletet tartalmazza, úgyhogy másodpercenként több száz eredményre is számíthatunk, ami azt jelenti a gyakorlatban, hogy valós időben valós koordinátákat kapunk viszonylag nagy sebességek mellett. Egy célhardverrel pedig az összes mért érték, valamint az átlaguk is valós időben számíthatóak.

4.8 A 3D modell matematikai korlátai

Mint látható a levezetésből, a vevő pozíciójának meghatározása rengeteg paraméter függvénye. Ismerni kell mind az öt adó pontos 3D koordinátáját. Természetesen ez megadható. Ismernünk kell ezek közötti távolságokat, ami kiszámítható, és ezen jelforrásokból a vevőbe érkező jelek időkülönbségét, ami mérhető. A levezetésből nyert képlet nevezőjében egy hosszú kifejezés áll, amiről nehéz megállapítani, hogy milyen paraméterek és mért értékek együtt állásánál veszi fel a nulla értéket. Hasonlóan a 2D modellnél itt is a számítást végző algoritmusnak kell ezt a hibalehetőséget kiküszöbölnie.

Van azonban egy másik jelentős probléma, amivel foglalkoznunk kell. Amint korábban említettem, a különbségképzési módszernél az adók egymástól mért távolságának és az adók vevőtől mért távolságának arányával is kell foglalkoznunk, amit a hosszú egyenes sinpárokkal szemléltettem. Nézzük meg, hogy ez matematikailag mit is jelent.



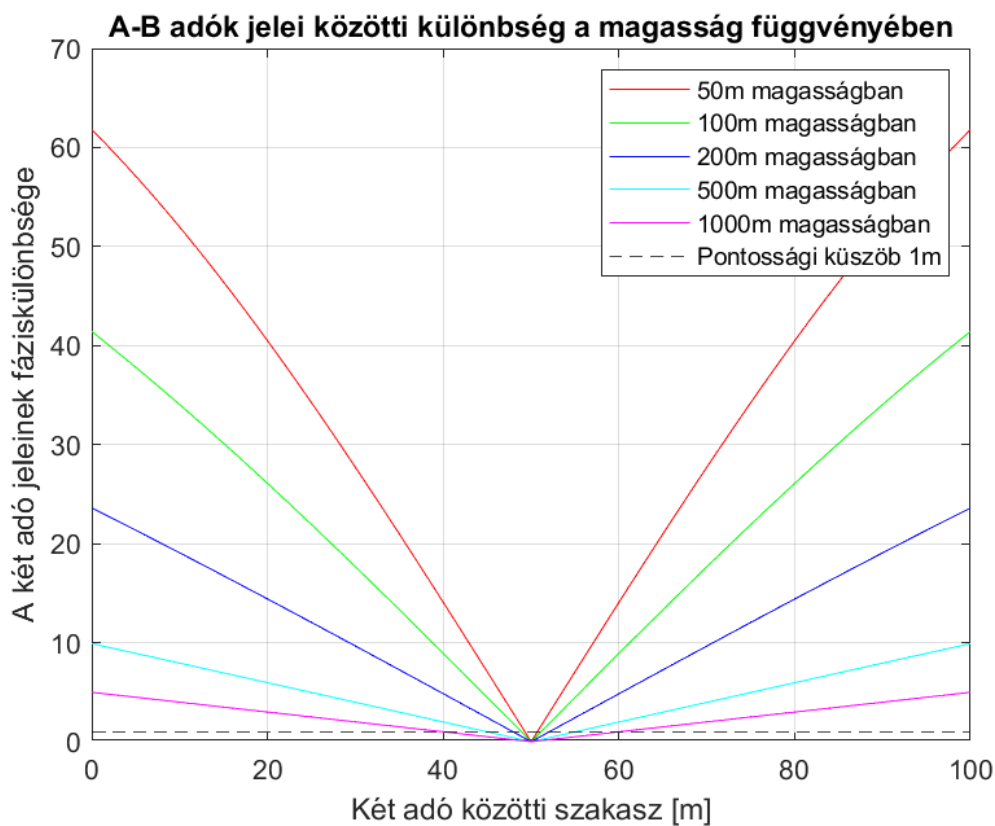
12. ábra: A vevő „A” és „B” adótól mért távolsága

Ahogy a 12. ábrán is látható, minél távolabb van a vevőnk az antenna pártól, annál kevésbé mérhető a különbség. A 13. ábra egy összehasonlító táblázat, ami megmutatja a két adó jele által mérhető távolságokat az adók egymáshoz viszonyított és a vevőhöz viszonyított távolságának függvényében.

	1 m-es adók közötti távolság			10 m-es adók közötti távolság			100 m-es adók közötti távolság		
	Az "A" adótól mért magasság [m]	A "B" adótól mért legnagyobb távolság [m]	Adók jeleinek legnagyobb különbsége [m]	Az "A" adótól mért magasság [m]	A "B" adótól mért legnagyobb távolság [m]	Adók jeleinek legnagyobb különbsége [m]	Az "A" adótól mért magasság [m]	A "B" adótól mért legnagyobb távolság [m]	Adók jeleinek legnagyobb különbsége [m]
	1	1,41	0,41	10	14,14	4,14	100	141,42	41,42
	2	2,24	0,24	20	22,36	2,36	200	223,61	23,61
A vevő adóktól mért távolsága	3	3,16	0,16	30	31,62	1,62	300	316,23	16,23
	4	4,12	0,12	40	41,23	1,23	400	412,31	12,31
	5	5,10	0,10	50	50,99	0,99	500	509,90	9,90
	6	6,08	0,08	60	60,83	0,83	600	608,28	8,28
	7	7,07	0,07	70	70,71	0,71	700	707,11	7,11
	8	8,06	0,06	80	80,62	0,62	800	806,23	6,23
	9	9,06	0,06	90	90,55	0,55	900	905,54	5,54
	10	10,05	0,05	100	100,50	0,50	1000	1004,99	4,99

13. ábra: Az adók jeleinek különbsége a telepítés függvényében

A táblázat jól szemlélteti, hogy a kis távolságokra telepített adók esetén nehéz pontos mérést végezni, viszont minél távolabb vannak egymástól, annál nagyobb területre lehet kiterjeszteni a pontos mérést. A 100 m-es távolságra elhelyezett adók esetén akár 1 km-re is 4,99 m eltéréssel érkeznek meg a rádióhullámok, ami 16,63 ns fáziseltérést jelent, és ez pontosabban mérhető. Egy érdekes matematikai probléma lehet az adók elhelyezkedésének függvényében meghatározni, hogy a 3D tér melyik részén és mekkora környezetében csökken a jel-út különbség mérhetetlenné a rendszer számára. A 14. ábra az egymástól vízszintesen 100 méterre lévő adók jeleinek fáziskülönbségét mutatja méterben kifejezve a magasság függvényében, és jól látható, hogy a két adó közötti távolság felénél alakulhat ki az a vakfolt, ahol a pontossági küszöbérték alá csökken a jelek nullátmenetei között a különbség, vagyis a fáziskülönbség. Az is jól látható, hogy minél távolabb van az adóktól a vevő, annál laposabb a görbe, tehát annál nagyobb ez a vakfolt.



14. ábra A jelek fáziskülönbsége méterben kifejezve

A Föld felszínén nem okoz akadályt nagy távolságokra elhelyezni az adókat, de függőleges irányban ez nehézségeket okozhat. Ha repülők és drónok irányítására szeretnénk felhasználni az LHR technológiát, akkor az a jó hír, hogy az előző gondolatmenet értelmében nem is kell a légtér tetejére elhelyezni adót, mert elegendő, ha elegendően nagy távolságra helyezzük el ezeket egymáshoz képest a cél elérésének érdekében. Ha nincs mód nagy távolságokra elhelyezni az adókat, mint például egy fűrotornyon, akkor egy helikopter leszállást segítő rendszer nem fog megfelelő pontossággal működni több kilométerre a fűrotoronytól. De ez nem is cél, ehhez van más navigációs megoldás, viszont a leszállópálya közelében már nagyon pontos adatokat tud szolgáltatni egy LHR is. A légijárművek esetén általában a földfelszín közelében van szükség nagy pontosságot elérni felszálláskor, vagy leszálláskor. Néhány kilométer magasan ez nem akkora követelmény. Ha két légijármű egymáshoz viszonyított

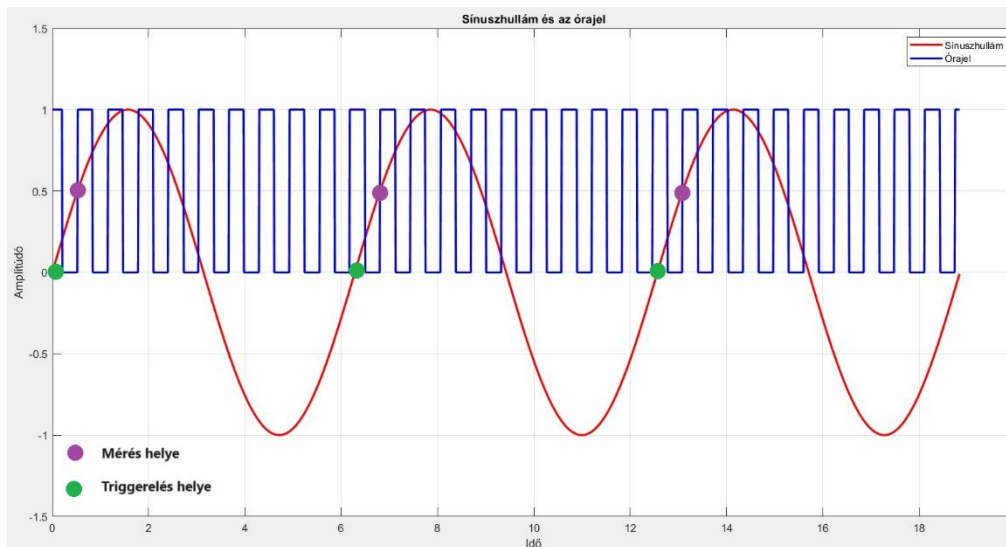
pozíciójának precíznek kell lennie, akkor érdemes magára a repülőre telepíteni egy LHR-t mozgó koordináta-rendszerként például úgy, hogy a szárnyvégeken, a farkon, a gép elején, és még valahol a törzsön helyezzük el az adókat. Ez a technológia rendkívül megkönnyítené a vadászgépek tankolását a levegőben, valamint a kötelékreplést. Ugyanígy nem okozna problémát űrhajók űrállomáshoz történő dokkolásánál, ha csak kis távolságokra tudjuk elhelyezni az adóantennákat, mivel itt is csak a néhány méteres távolságnál van szükségünk pontos pozícióra. Az LHR felhasználható lenne a közeljövőben egy holdbázis kiépítésénél, ahol a pontos landolást segíthetné egy ilyen rendszer, vagy az űrbányászatnál, ahol egy kisméretű meteorhoz rögzítenénk az LHR-t, mert csak a végső megközelítésnél kell tekintettel lenni erre.

4.9 A jelek mintavételezése és átlagolása

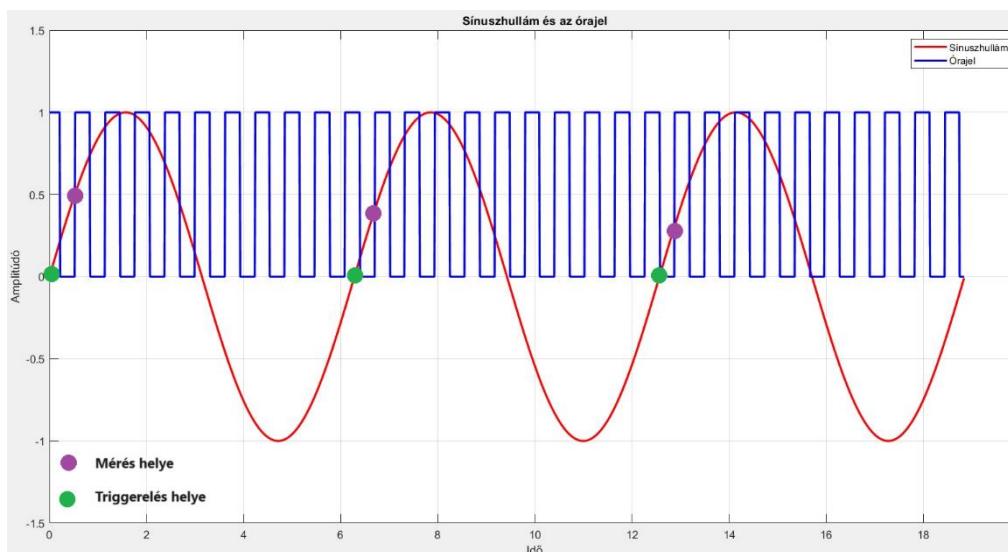
Igazából nem beszélhetünk a szó eredeti értelmében mintavételezésről, hiszen nem a jel alakjára vagyunk kíváncsiak, hanem annak a nullátmenetéről, vagy pontosabban a triggerelés idejéről akarunk információt szerezni. Ezt pedig az időmérés technikájával tudjuk elvégezni. Mivel ez is egy digitális módszer, ezért merészkedtem mintavételezésnek nevezni ezt az eljárást is. Arról van ugyanis szó, hogy az a bemenet, amire érkezik ez a szinuszos jel, pontosabban egy túlvezérelt négyszögjellel alakított jel, egy küszöbérték felett vagy alatt logikai értéket vált, azaz nullából egybe, vagy egyből nullába megy át. Ezt nevezik fel-, vagy lefutóélre történő triggerelésnek. Ez elindít egy folyamatot a mikrokontrollerben. Meghív egy megszakításfüggvényt, ami az aktuális processzoridő-értéket hozzárendeli ehhez a jelátmenethez, és ezt letárolja a jelhez tartozó tömbben. Ahogy korábban említettem ez a 3D térben öt különböző adótoronyból érkező jel miatt 5 darab tömböt jelent. A többfrekvenciás LHR módszer esetében ez azt jelenti, hogy a moduláló jel frekvenciájának megfelelő mennyiségű adat kerül ezekbe a tömbökbe másodpercenként. Az egy frekvenciás módszer esetében viszont csak ötöd annyi adatunk keletkezik. 10 kHz-es moduláló jel esetén 2000 adat tömbönként másodpercenként. Ha mozdulatlan a vevőnk, akkor minden egyes tömbben az első értékhez képest pontosan a moduláló jel periódusidejének egészszáma többszörösével eltolt időadatok lesznek jelen. A valóságban a jel triggerelése jó eséllyel két órajelciklus között fog megtörténni. Ez például azt jelenti, hogy egy 100 MHz-es órajel esetén csak minden 10ns után tudja a processzor elvégezni a műveletet. Ezalatt az idő alatt a jel akár 3 méter utat is megtesz, ami több méteres pontatlanságot jelenthet. Ez nekünk nem megfelelő. A mintavételezés pontosságát lehet fokozni az órajel növelésével, vagy több időbélyeg rendelkezésre állása esetén ezek átlagolásával is. Az órajel növelése technológiai kérdés, viszont az átlagolás technikájával több nagyságrendű pontosság is elérhető.

A mérés technikában mérési sorozatnak nevezzük, ha egy adott mérési mennyiséget n -szer mérünk olyan módon, hogy minden általunk befolyásolható feltétel a mérések alatt változatlan marad. Ha megfelelően nagyszámú mért érték áll rendelkezésünkre, akkor a mérés várható értéke ezen adatok átlagával fog megegyezni. [25] Ahhoz viszont, hogy a jelek beérkezésének idejét átlagolhassuk, ahhoz biztosítani kell azt, hogy a mintavételezési frekvencia és a moduláló jel frekvenciája ne legyen egymásnak egészszáma többszöröse. Erre azért van szükség, mert ha egy jelünk $T_0 - \Delta T$ időpontban triggerelődik, ahol a T_0 a 0. időbélyegző, a ΔT pedig a valóságos triggerelési időtől mért különbség, akkor, ha a moduláló jel egészszáma többszöröse a mintavételezés frekvenciája, akkor ez a ΔT időeltérés minden mérés után ugyanaz lesz, tehát az átlagolásnál nem lesz pontosabb az eredményünk a mérés után. Ezt szemlélteti a 15. ábra, ahol az látható, hogy miután megtörtént a szinusz jel pozitív átmenete, azaz a jel felfutó élre történő

triggerelése, csak a következő szintén felfutó órajelnél tudunk értéket mérni, ami ebben az esetben ugyan az lesz minden periódusban. Az LHR esetében a szinusz jelet négyszögjellé alakítjuk, viszont az ábrán a szinusz jel a szemléletesebb.



15. ábra: Mintavételezés a jel frekvenciájának egészszámú többszörösével



16. ábra: Mintavételezés a jel frekvenciájának NEM egészszámú többszörösével

A 16. ábra viszont azt mutatja, hogy ha a mintavételező órajel nem egészszámú többszöröse a moduláló jelnek, akkor minden triggerelésnél más és más értékeket mérünk, ami pontosabbá teszi a jel tényleges fázisának mérését.

A 17. ábra táblázata megmutatja, hogy amennyiben két 101 Hz-es jel 4,2ms-os fáziseltérését akarjuk megmérni egy 1000 Hz-es órajelű eszközzel. Mivel két órajel közötti időkülönbség 1ms, ezért elméletileg csak 1ms pontossággal tudunk fáziseltérést mérni. Azonban a táblázatban jól látható, hogy mivel a mintavételező órajel frekvenciája nem egészszámú többszöröse a mért jel frekvenciájának, ezért a mi esetünkben minden tizedik időbélyegző eltérést fog mutatni. Minél több eltérés átlagát számoljuk, annál pontosabb közelítést kapunk a valós fáziseltéréshez. A példánkban, ha legalább 60 jel átlagát számoljuk, akkor az 59. jelnél számított 4,1864

értéknél biztosan jobb eredményt kapunk. A mi esetünkben a 4,2ms valós értékhez képest ez 0,0136ms-os hibát jelent.

101 Hz-es demodulált jel mérése 1000 Hz-es órajellel. A két jel közötti fáziseltérés 4,2 ms																				
A jel periódusszáma:																				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1. jel triggerelési idő [ms]	9,90099	19,80198	29,70297	39,60396	49,50495	59,40594	69,30693	79,20792	89,10891	99,00990	108,9109	118,8119	128,7129	138,6139	148,5149	158,4158	168,3168	178,2178	188,1188	198,0198
Időbélyegző:	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	109	119	129	139	149	159	169	179	189	199
2. jel triggerelési idő [ms]	5,70099	15,60198	25,50297	35,40396	45,30495	55,20594	65,10693	75,00792	84,90891	94,80990	104,7109	114,6119	124,5129	134,4139	144,3149	154,2158	164,1168	174,0178	183,9188	193,8198
Hányadik órajel dolgozza fel:	6	16	26	36	46	56	66	76	85	95	105	115	125	135	145	155	165	175	184	194
Két jel közötti időeltérés	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5
Az előző időeltérések átlaga:	4	4	4	4	4	4	4	4	4,111111	4,2	4,181818	4,166667	4,153846	4,142857	4,133333	4,125	4,117647	4,111111	4,157895	4,2

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
207,9208	217,8218	227,7228	237,6238	247,5248	257,4257	267,3267	277,2277	287,1287	297,0297	306,9307	316,8317	326,7327	336,6337	346,5347	356,4356	366,3366	376,2376	386,1386	396,0396	405,9406	415,8416
208	218	228	238	248	258	268	278	288	298	307	317	327	337	347	357	367	377	387	397	406	416
203,7208	213,6218	223,5228	233,4238	243,3248	253,2257	263,1267	273,0277	282,9287	292,8297	302,7307	312,6317	322,5327	332,4337	342,3347	352,2356	362,1366	372,0376	381,9386	391,8396	401,7406	411,6416
204	214	224	234	244	254	264	274	283	293	303	313	323	333	343	353	363	373	382	392	402	412
4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	4	4
4,190476	4,181818	4,173913	4,166667	4,16	4,153846	4,148148	4,142857	4,172414	4,2	4,193548	4,1875	4,181818	4,176471	4,171429	4,166667	4,162162	4,157895	4,179487	4,2	4,195122	4,190476

43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64
425,7426	435,6436	445,5446	455,4455	465,3465	475,2475	485,1485	495,0495	504,9505	514,8515	524,7525	534,6535	544,5545	554,4554	564,3564	574,2574	584,1584	594,0594	603,9604	613,8614	623,7624	633,6634
426	436	446	456	466	476	486	496	505	515	525	535	545	555	565	575	585	595	604	614	624	634
421,5426	431,4436	441,3446	451,2455	461,1465	471,0475	480,9485	490,8495	500,7505	510,6515	520,5525	530,4535	540,3545	550,2554	560,1564	570,0574	579,9584	589,8594	599,7604	609,6614	619,5624	629,4634
422	432	442	452	462	472	481	491	501	511	521	531	541	551	561	571	580	590	600	610	620	630
4	4	4	4	4	4	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	4	4	4	4
4,186047	4,181818	4,177778	4,173913	4,170213	4,166667	4,183673	4,2	4,196078	4,192308	4,188679	4,185185	4,181818	4,178571	4,175439	4,172414	4,169441	4,2	4,196721	4,193548	4,190476	4,1875

17. ábra: A pontosság növelése az átlagolás módszerével

Ismét szeretném hangsúlyozni, hogy ne legyen a moduláló jelünk frekvenciájának egészszámú többszöröse a mintavételezés órajele. Bár a valóságban sem a moduláló jelet, sem az órajelet nem tudjuk teljesen pontosan beszabályozni, de ez csak nagyon kicsi eltérést jelent, és minél kisebb ez az eltérés az egész osztóhoz képest, annál több jel átlaga tudja hozni az elvárt pontosságot. Ezt még további kutatásokkal és mérésekkel lehet optimalizálni.

Szeretném még arra felhívni a figyelmet, hogy zajos környezetben érzékenyek olyan fals jelek, amik rendkívül elronthatják az átlagot. Valamilyen matematikai és szoftveres módszerrel ki kell szűrni azokat a jeleket, amelyek túl nagy eltérést mutatnak a többi jelhez képest. Erre lehet például egy olyan megoldás, hogy a vevő az előző adatokból kalkulálni tudja a nem csak az aktuális pozíciót, hanem a sebességet, a gyorsulást, sőt a gyorsulás időbeli változását is, melyekből meg tudja jósolni a következő mérési eredményt. Ebből következik, hogy a mért pozíciók kontinuitásával is lehet tervezni. A jelet is elegendő abban az időablakban triggerelni, ami belefér a kontinuitási tűrésbe, így véletlen, vagy szándékos zavaró jellel lehetetlen a rendszert átverni, és azonnal észlelhető a rendszer zavara, hibája, és minden szabotázs akció.

5. Összefoglalás és konklúzió

Az Ipar 4.0 szabvány, a mobilrobotok, valamint a drónok és az autonóm járművek fokozatos elterjedése nagy igényt támaszt a fejlesztők részére, hogy megbízható pontos helymeghatározási rendszereket fejlesszenek ki. De nemcsak a technológia akadályozza ezek széleskörű elterjedését, hanem az ára is. A technológiai korlátok szempontjából az előbb említett felhasználási területeken szükséges mind a beltéri, mind a kültéri helyzetmeghatározás, akár több kilométeres távolságokat áthidalva deciméteres, vagy akár centiméteres pontossággal is. Az se ártana, ha ezt egyetlen rendszerbe lehetne integrálni, aminek a kedvező ára lehetővé tenné ezen technológia széleskörű elterjedését.

A TDK munkámban bemutattam a jólismert GPS, valamint a feltörekvő UWB technológiát is. Ismertettem a valós idejű helymeghatározási rendszert (RTLS), és a jelterjedésen alapuló

helyzetmeghatározó módszereket is. Azonban nem találtam kielégítőnek ezen megoldásokat, és a fejlődési trendekkel sem értek egyet, miszerint adatkommunikációs technológiákat és protokollokat használjunk fel helyzetmeghatározásra. A GPS megvalósítása óta nem találkoztam olyan módszerrel, ami az elektromágneses hullámok terjedésének felhasználásával kizárólag helyzetmeghatározásra hoztak volna létre a Föld felszínén. Az Ipar 4.0 és a drónok elterjedése előtt a GPS még így lekorlátozott formában is kielégítette az igényeket, de a legújabb technológiák elterjedéséhez már nem elegendő. Ez akkor is igaz, ha feloldanák a GPS pontosság korlátozását, hogy ne csak kizárólag katonai célra lehessen használni, mert épületeken belül, földfelszín alatt, a Hold felszínén, a Marson, vagy távol az űrben nem lesznek segítségünkre.

A bevezetőben említett probléma megoldására eleinte csak információkat gyűjtöttem, és ötleteket merítettem a különböző megoldásokból, és ezeket a régi jól bevált technológiákat és eljárásokat összegyűrve született meg az LHR koncepció. Univerzális megoldásra törekedtem, amit mindenhol és minden körülmények között tudunk alkalmazni. Ezért ragaszkodtam az elektromágneses hullámok jelterjedésén alapuló helyzetmeghatározáshoz, és a modulációs eljáráshoz, valamint ezért tartom célszerűbbnek a 100-1000 MHz-es tartományból vett vivőfrekvenciát. Drága atomórák használata és időszinkronizálás helyett a TDoA, azaz a jelek beérkezési idejének különbségén alapuló helyzetmeghatározó rendszert. Ezért van a rendszerbe plusz egy adó beiktatva, és a matematikai számítási modell leegyszerűsítve. Az ötlet kidolgozása alatt végig az egyszerűsítés és a mindenre kiterjeszthetőség gondolata vezérelt.

Az LHR egy matematikailag és elvi módszereiben kidolgozott gondolati modell. Szeretném ezt az ötletet a tudományos publikum elé tární megvitatás céljából, és az illetékes ipari képviselőkkel megismertetni. A gondolati modellt még technológiává és rendszerre kell kovácsolni, amivel a későbbiekben a diplomamunkámban szeretnék foglalkozni.

Ez a gondolati modell csak ötleteket ad a technológiával kapcsolatban, de még rengeteg kísérlet és kutatás szükséges a megvalósításhoz. Ezek a területek pedig a következők:

- Hol célszerű az egy-, a két-, vagy a többfrekvenciás modellt alkalmazni?
- Milyen vivőfrekvenciákat használjunk, és milyen antennákat alkalmazzunk?
- Milyen modulációs eljárást alkalmazzunk a különböző módszereknél?
- Hogyan telepítsük az adókat, és hogyan mérjük ki a pontos pozícióikat? Bár erre adtam egy ötletet, de lehet, hogy sokkal jobbak is léteznek.
- Hogyan szinkronizáljuk az adókat?
- Milyen protokollok, algoritmusok vezéreljék az adókat?
- Milyen frekvenciájú moduláló jelet alkalmazzunk, és hogyan állítsuk elő?
- Milyen legyen a vevő felépítése, milyen részekységekből álljon?
- Hogyan történjen a demoduláció, a demodulált jel négyszögjellé alakítása, triggerelése, az időbélyegző elkészítése, tárolása, számítása?
- Vevőt működtető protokollok, algoritmusok kifejlesztése.
- Hogyan történjen a mért pozíció megosztása a rendszerrel?
- Közelség, közeledés figyelő és figyelmeztető algoritmusok készítése.
- Rendszertelepítés és felügyelet kidolgozása.
- Szoftverkomponensek kifejlesztése a különböző alkalmazási területekhez.
- Roaming protokoll kidolgozása, és az egyedi koordinátarendszerek globalizálása.

Mint látható, még sok munkát kell befektetni, hogy megvalósuljon a rendszer. Az is látható, hogy a gondolat modell technológiába kovácsolása multidiszciplináris területeket ölel magába még akkor is, ha a specifikus alkalmazási területeket figyelembe sem vesszük. Szeretném én is kivenni a részem ezen kutatásokban, kísérletekben és szimulációkban bizonyos mértékig egy Diplomamunka keretében, de az illetékes ipari szereplők nélkül lehetetlen megvalósítani ezt a koncepciót.

Amennyiben megvalósulna ez a technológia, akkor viszonylag olcsón és egyszerűen lehetne telepíteni bárhol ahová ember, vagy ember alkotta eszköz el tud jutni. A nagysebességű, nagytávolságú, kül- és beltéren egyaránt alkalmazható és az akár centiméteren belüli pontosság miatt pedig szinte az élet minden területén lehetne alkalmazni:

- Otthoni felhasználásban:
 - o Munkaterület kijelölésre, dokkolásra: robotfűnyíró, robotporszívó, elektromos játékok, kisautók, drónok, háziállatok
 - o Elektronikus kulcs funkció: Ezzel a kulccsal csak meg kell közelíteni a bejáratot, sorompót, kaput a kulcsot birtokló személynek, háziállatnak, vagy autónak, hogy be tudjon menni rajta.
 - o Lopásgátlás és megkeresési funkció akár centiméteres pontossággal: kulcsnak, karórának, telefonnak, tabletnek, laptopnak, pénztárcának, bárminek
 - o Gyermek megőrző: riasztja a szülőt, óvónőt, pedagógust, ha a gyerek elhagy egy kijelölt területet (lakást, kertet, játszóteret, óvodát, iskolát, bevásárlóközpontot, strandot stb).
- Kereskedelem és szolgáltatás területén:
 - o Elektronikus kulcs, elektronikus belépőjegy
 - o Készlet pozíció nyilvántartás
 - o Vevő asszisztencia: áru megkeresése egy bevásárlóközpontban; bevásárlólista útvonaltervezés; áruházkalauz és útvonaltervezés
- Ipari felhasználásban:
 - o Nyomkövetés: alapanyag, késztermék, szerszámok, gépek, járművek és emberek nyomkövetése, hely és orientáció meghatározása
 - o Elektronikus kulcs: emberek, járművek, mobilrobotok beléptetése, kiléptetése; tiltott zónák kijelölése, ellenőrzése
 - o Humán-robot kooperáció: robotkarok, manipulátorok, veszélyes üzemű gépek térbeli helyzetének az ember végtagjainak figyelése, balesetvédelem
 - o Speciális helymeghatározás: mélyművelésű bányászatban, földalatti infrastruktúrákban, védett objektumokban a GPS zavarása mellett
- Közlekedés minden területén, különösen önvezető járművek segítségével útmenti LHR infrastruktúrával:
 - o sávon tartás bármilyen időjárási és útviszonyok mellett is
 - o járművek egymáshoz viszonyított helyzetének, orientációjának figyelése (követési távolságtartás, parkolás)
 - o balesetvédelem: kátyúk, munkavégzési helyek, és egyéb veszélyforrások pontos kijelölése
 - o GPS kiegészítőként: helymeghatározás alagutakban, mélygarázsokban, parkolóházakban, metróhálózatban
- Mezőgazdasági alkalmazás területé:

- Állattenyésztés területein: (állat, gép és ember helyének figyelése)
- Növénytermesztés: precíziós mezőgazdaság nyílt területeken és zárt üvegházakban, csarnokokban is
- Légit közlekedés területén
 - Drónok 3D helyzetmeghatározása, drónforgalom nyomkövetése
 - Repülőterek forgalomfigyelése, leszállás és felszállás segítése
 - Helikopterek, drónok épületek közötti biztonságos vezetése, leszállás segítése sűrű területre rossz látási viszonyok esetén is
 - Pilótákat segítő rendszer
 - Légi tankolás, kötelékrepülés
- Építőiparban:
 - geodéziai mérések kiegészítése épületeken belül és a földfelszín alatt is
 - daruk tehermozgatásának segítése
 - emberek, gépek nyomkövetése, együttműködése
 - építőipari anyagok nyomkövetése, lopásvédelme
- Szállítmányozás területén:
 - hajók, kamionok precíz dokkolása
 - konténerek, vasúti kocsik helymeghatározása, telephelyen belüli nyomkövetése
 - termék nyomkövetés
 - balesetvédelem: emberek, gépek, szállítóeszközök, tárolóeszközök figyelése, együttműködése
- Szórakozás területén:
 - 3D filmkészítés, CGI technológia az LHR segítségével
 - paintball, lézerharc, outdoor tréningek, és egyéb kültéri játékok
 - VR virtuális valóság technológia az LHR támogatásával
- Egészségügy, szociális intézményekben:
 - Kórházon belüli beteg, és szakszemélyzet nyomkövetés
 - Öregotthonok extrafigyelmet követelő lakóinak nyomkövetése intézményen belül
 - Egyedüli idős emberek aktivitásának, elesésének, figyelése lakáson belül
 - Óvodás és bölcsődés gyermekek intézményen belüli figyelése, szökés riasztás
 - Gyermekek őrzés üzletekben, üzletkomplexumokban, játszótéren, játszótérekben...
 - Vakok és gyengénlátók segítése: navigáció utcán, épületeken, intézményeken, kórházakban, üzletekben, eszközök, áruk, megtalálásában,
- Űrtechnológiában:
 - Űrállomás- űrhajó precíz dokkolása
 - Navigáció a Hold, a Mars, kisbolygó, vagy meteor felszínén,

Az LHR tulajdonképpen alkalmas lenne arra is, hogy a meglévő GSM celluláris struktúrába telepített adótornyait felhasználva lefedje az egész Földet ezzel a szolgáltatással, hogy a magánszféra és a gazdasági szereplők is globálisan igénybe vehessék.

Irodalomjegyzék

- [1] Felhasználói útmutató Robomow robotfűnyírókhoz -
https://www.robomow.com/headless/fileadmin/robomow/installations_guides/rs_user_guides_2021/DOC6011H_HU_Robomow_RS_user_guide_S-HU_2019A_Web.pdf
- [2] Elektro nyakörvek - „Hogyan válasszuk ki a megfelelő láthatatlan kerítést, mellyel megakadályozzuk a kutya megszökését?”
<https://www.elektro-nyakorvek.hu/Magazin/elektromos-kutyakerites/hogyan-valasszuk-ki-a-megfelelo-lathatatlan-keritest-mellyel-megakadalyozzuk-a-kutya-megszokesett>
- [3] Hegyi Heni - „Tegyük helyre az AGV-k működését!” - NEW technology magazin, 2020.okt.27.
<https://newtechnology.hu/tegyuk-helyre-az-agv-k-mukodeset/>
- [4] MINEW – „Cutting-Edge Ultra-Wideband (UWB) Module Delivers High Security and Low Power Consumption” - https://www.minew.com/uwb-module/?gclid=Cj0KCQjw4bipBhCyARIsAFsieCwEywD843U5ybMbEi6SNnZ-1Y_fFhX8jI5u18uPTTyzck5osIoLSEoaAuF_EALw_wcB
- [5] Rudolf Ádám – „GPS RENDSZER MŰKÖDÉSE ÉS ALKALMAZÁSA A BIZTONSÁGTECHNIKÁBAN” – Hadmérnök folyóirat - VII. Évfolyam 1. szám - 2012. március
- [6] Sameer Kumar, Kevin B. Moore - „The Evolution of Global Positioning System (GPS) Technology” – Magyarul: „A Globális Helymeghatározó Rendszer (GPS) Technológia Fejlődése” - Journal of Science Education and Technology, - Vol. 11, No. 1, March 2002 (°C 2002)
- [7] Heilmann János, - „Globális helymeghatározó rendszerrel történő vízszintes alappontsűrítés” – NEMZETI SZAKKÉPZÉSI ÉS FELNŐTTKÉPZÉSI INTÉZET
- [8] Samsung Insights - What is ultra-wideband, and how does it work? -
<https://insights.samsung.com/2021/08/25/what-is-ultra-wideband-and-how-does-it-work-3/>
- [9] Dr. Mustafa Bakr – „Introduction to Ultra-Wideband (UWB) Technology „ – All About Circuits – 2020.03.19 - <https://www.allaboutcircuits.com/technical-articles/introduction-to-ultra-wideband-uwb-technology/>
- [10] Kovács Zoltán Márk – „TDoA algoritmusok összehasonlítása UWB alapú beltéri helymeghatározó rendszerben” – TDK Dolgozat – 2021 -
<https://tdk.bme.hu/VIK/DownloadPaper/TDoA-algoritmusok-osszehasonlitasa-UWB-alapu>

- [11] Norman Dziengel – „Everything You Need to Know to Plan & Deploy an RTLS Solution” - Inpixon Indoor Intelligence - 2022.02.25 - <https://www.inpixon.com/blog/plan-deploy-rtls-solution-everything-you-need-to-know>
- [12] Inpixon Indoor Intelligence – „Chirp Spread Spectrum RTLS, Location Tracking és Positioning” - <https://www.inpixon.com/technology/standards/chirp-spread-spectrum>
- [13] Inpixon Indoor Intelligence – „Ultra-Wideband RTLS, Positioning, & Sensor Technology” - <https://www.inpixon.com/technology/standards/ultra-wideband>
- [14] Varga Barna – „BELTÉRI HELYMEGHATÁROZÁS ALAPJAI ZIGBIT MODULOKKAL” – Diplomadolgozat – Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem- https://www.ms.sapientia.ro/~elektronika/fileok/2017/Diplomadolgozat_Varga_Barna_2017_Tvk.pdf
- [15] Kinexon - UWB Technology - <https://kinexon.com/uwb-technology/>
- [16] Jóvér Balázs – „Rádióhullámok és antennák” - áttekintő dolgozat – Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem - 2001-10-24.
- [17] „Tankönyv a hazai rádióamatőr „A” vizsgához” - https://tankonyv.ham.hu/A_vizsga-DJ4UF/?cid=a17, utolsó módosítás: 2023.09.03. 00:34 Eredeti mű: © Eckart Moltrecht DJ4UF, <http://www.amateurfunkpruefung.de>
- [18] Texas Instruments TMS320F2837xD Dual-Core Microcontrollers Datasheet - https://www.ti.com/lit/ds/symlink/tms320f28374d.pdf?ts=1697828723365&ref_url=https%253A%252F%252Fwww.ti.com%252Fproduct%252FTMS320F28374D
- [19] Magyar Telekom – „A mobil technológia műszaki háttere” - https://www.telekom.hu/static-tr/sw/file/a_mobil_technologia_muszaki_hattere.pdf
- [20] Bozsóki István és szerzőtársai – „A HÍRKÖZLÉS ALAPJAI” – Budapesti Műszaki Egyetem - https://tsplab.hu/gyula/InfoKomm/Chap_00.html
- [21] Sparkfun Blog – „Hedy Lamarr and Frequency Hopping Technology” - <https://www.sparkfun.com/news/6147>
- [22] GSM oktatási anyag - <https://www.muszeroldal.hu/measurenotes/gsm.pdf>
- [23] Brian O’Keefe, ECE ’17 – „Finding Location with Time of Arrival and Time Difference of Arrival Techniques” - ECE Senior Capstone Project - 2017 Tech Notes
- [24] Shuai Cao, Xiang Chen , Xu Zhang, and Xun Chen – „Combined Weighted Method for TDOA-Based Localization” - IEEE TRANSACTIONS ON INSTRUMENTATION AND MEASUREMENT, VOL. 69, NO. 5, MAY 2020

- [25] Székely Gyula, Túrós László-Zsolt – „Villamos, elektronikus és virtuális mérések” - Scientia Kiadó Kolozsvár 2020 -
http://real.mtak.hu/117981/1/Villamos%20Elektronikus%20es%20Virtualis%20Meres%20ek_REAL.pdf

Ábrajegyzék

1. ábra: GPS műholdak a Föld körül.....	4
2. ábra: Trilateráció. [14].....	8
3. ábra: Jelterjedési idő alapú távolságmérési módszerek. [15].....	9
4. ábra: Az adók elhelyezkedése a lokális térrészben	11
5. ábra: A rádiómoduláció szemléltetése. a) moduláló jel; b) AM moduláció; c) FM moduláció. [17]	12
6. ábra Párhuzamos sinpárok a végtelenben.....	13
7. ábra: A vevőben detektált és demodulált jelek az egyes adókból.....	14
8. ábra: Méhsejt struktúra	15
9. ábra: TDoA számítás1[23].....	17
10. ábra: TDoA számítás2 [23].....	17
11. ábra: Az LHR kétdimenziós modellje.....	3
12. ábra: A vevő „A” és „B” adótól mért távolsága.....	17
13. ábra: Az adók jeleinek különbsége a telepítés függvényében.....	17
14. ábra A jelek fáziskülönbsége méterben kifejezve.....	18
15. ábra: Mintavételezés a jel frekvenciájának egészszámú többszörösével.....	20
16. ábra: Mintavételezés a jel frekvenciájának NEM egészszámú többszörösével.....	20
17. ábra: A pontosság növelése az átlagolás módszerével.....	21

Az illusztrációs ábrák forrásjegyzéke:

1. ábra: <https://cdn.rios.hu/dl/cnt/2011-02/69910/gps>
6. ábra: <https://cdn.create.vista.com/api/media/medium/44414765/stock-photo-two-lane-track?token=>
8. ábra: https://cdn.pixabay.com/photo/2014/04/03/09/56/honeycomb-309384_1280.png

A többi nem címkézett ábrát MATLAB-ban, vagy Paint-ben készítettem.