

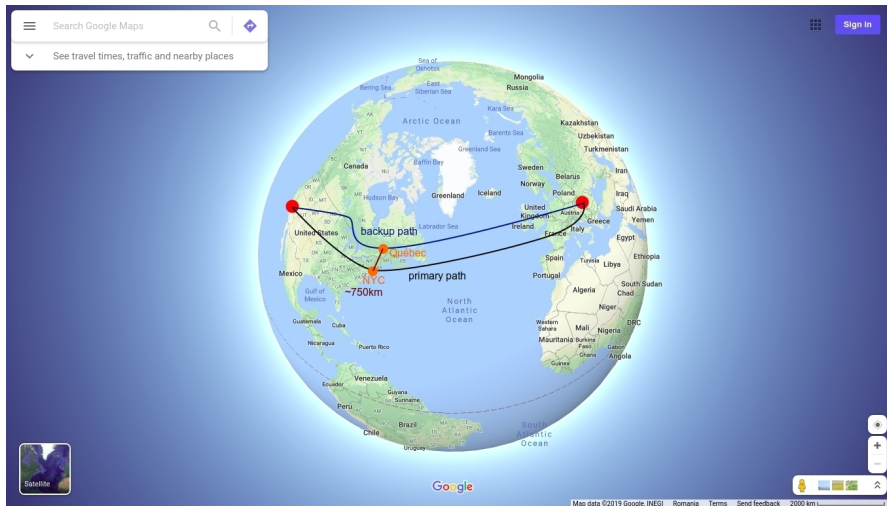
Hatékony algoritmus régiófüggetlen útvonalválasztásra gerinchálózatokon

Gyimesi Péter

Matematika BSc
ELTE TTK

December 19, 2023

Motiváció



Probléma bevezetése

Bemenet:

- Síkgráf $G = (V, E)$, csúcsok $s, t \in V$
- G duálisa: $G^* = (V^*, E^*)$ és egy bijekció az élek és duálisaik között
- $S \subset 2^E$ duálisan összefüggő régiók egy listája

Definíció

Egy régió az élek egy olyan részhalmaza egy hálózatban, aminek az élei egyszerre meghibásodhatnak.

Definíció

Az élek egy $S \subset E$ részhalmaza **duálisan összefüggő**, ha az S éleinek duálisai által alkotott részgráf G^* -ban összefüggő.

Probléma bevezetése

Kimenet:

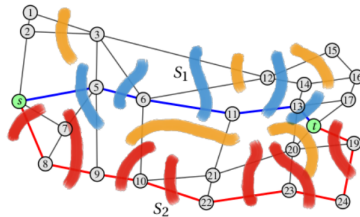
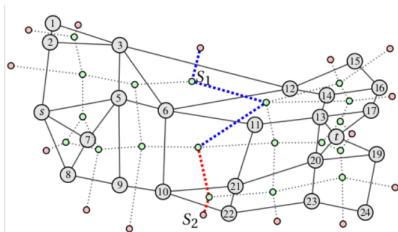
- Egy maximális méretű halmaza régió-független, **nem keresztező** $s - t$ -utaknak. A halmaz méretét jelöljük k -val.

Definíció

Két $s - t$ -út **régió-független** ha nem létezik olyan régió $\mathcal{S}$ -ben, ami mindkettőből tartalmaz élt.

- Az általános eset NP teljes ezért kell néhány megkötést tenni
- Síkbarajzolható a gráf és összefüggőek a régiók
- A kiválasztott utak nem keresztezhetik egymást

Felső becslés

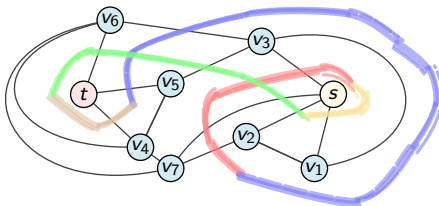


- Ha ki lehet választani r régiót úgy, hogy minden $s - t$ út tartalmazzon élt a régiók uniójából akkor $k \leq r$
- Ennél lehet erősebb felső becslést is mondani

Felső becslés

Egy duális körsétára (C):

- $l(C)$ hány régióból áll a körséta
- $w(C)$ hányszor választja el egymástól az s és t csúcsokat



Tétel (Bérczi-Kovács E., Gyimesi P., Vass B., Tapolcai J., 2023)

Ha $k \geq 2$, akkor

$$k = \min \left\{ \left\lfloor \frac{l(C)}{w(C)} \right\rfloor \mid C \text{ duális körséta, } w(C) \geq 1 \right\}.$$

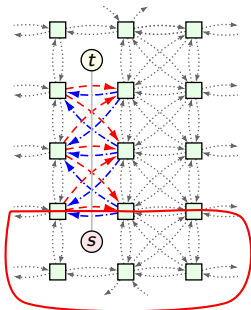
Algoritmus vázlata

Algoritmus vázlata:

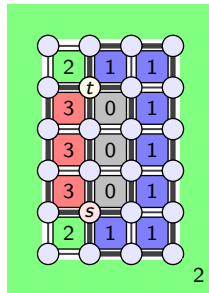
- Próbáljuk meg kitalálni a választ bináris kereséssel
- Adott K érték esetén készítsünk egy súlyozott irányított gráfot, ami pontosan akkor lesz konzervatív, $K \leq k$
- keressünk egy megengedett potenciált a gráfon
- ha a gráf konzervatív, akkor keressünk K régió-független utat

Megjegyzés: 1 út biztosan van, ha a gráf összefüggő, de a $k = 1$ -re elkészített gráf lehet, hogy nem lesz konzervatív

Algoritmus



(a) $D_{\mathcal{R}}^*$ regionális duális gráf. A fekete-pöttyös, piros-csíkos, és kék-csíkos éleknek 1, $1 - k$, és $1 + k$, az értéke. $c_k \geq 5$ -re az alsó piros kör súlya negatív lesz.



(b) A G gráf, ahol a régiók a $v \in V \setminus \{s, t\}$ csúcsok körüli élek (vagyis pontosan a csúcsfüggetlen utak lesznek régió-függetlenek). A számok egy megengedett potenciált jelölnek $c_k = 4$ -re.

Figure: Egy 4×6 csúcsú G példagráf, ahol a régiók pontosan a $v \in V \setminus \{s, t\}$ csúcsok. A kitüntetett P st -út a legrövidebb st -út G -ben.

A segédgráf elkészítése adott K -ra

- Az új gráfnak az eredeti gráf területei lesznek (V^*)
- Vegyünk egy tetszőleges $s - t$ utat.
- Ha valamelyik régió érint egy u és v területet, akkor u -ból v -be menjen egy $1 - K \cdot f_{u,v}$ súlyú él, ahol $f_{u,v}$ azt jelenti, hogy az $u - v$ út a régió belül hányszor keresztezte a kiválasztott $s - t$ utat előjelesen
- Szemléletesen: minden élnek a súlya 1, K pont jár a kiválasztott $s - t$ út keresztezésére ($-K$ a másik irányba)

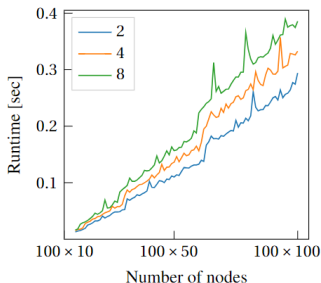
Algoritmus

- Ebben a súlyozott gráfban keressünk egy megengedett potenciált
- Egy tetszőleges csúcsból keressük mindenhova a legrövidebb utat például Bellman-Ford algoritmussal
- Ha nincs megengedett potenciál, akkor van negatív kör
- A negatív kör azt jelenti, hogy van egy olyan duális körséta, ahol $l(C) < w(C) \cdot K$, tehát nincs K régió-független út.
- Ha nincs negatív kör, akkor csoportosítsuk a területeket a k -val osztási maradékuk alapján
- Minden $0 \leq i < K$ -ra lesz olyan $s - t$ út, aminek a bal oldalán csak i a jobb oldalán pedig $i + 1 \pmod k$ értékű területek vannak
- Ezekről be lehet látni hogy régió-függetlenek lesznek

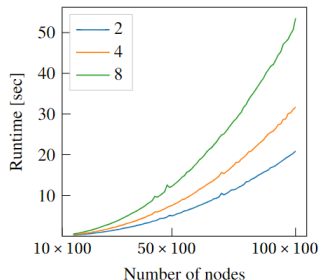
Futási idő

- $k \leq |E|$ független út van, ezért $\log(|E|)$ -szer kell meghívni a szubrutint
- A segédgráfot a bemenet méretének lineáris függvényében el lehet készíteni
- Egy megengedett potenciál keresésére több lehetőség is van
 - Bellman-Ford (1958): $O(|V| \cdot |E|)$
 - SPFA (F. Duan, 1994): ugyanúgy $O(|V| \cdot |E|)$, de átlagosan majdnem lineáris szokott lenni
 - gyorsabb, determinisztikus (Gabow-Tarjan, 1989): $O(\sqrt{|V|}|A| \log(|V|W))$, ahol W a legnagyobb élsúly
 - Közel lineáris időben nagy valószínűséggel (w.h.p.) (Bernstein et al., 2022): $O(|E| \log^8(|V|) \log(W))$
- A teljes algoritmus elérhető itt: <https://github.com/peti1234/SRLG>

Szimulációs eredmények



(c) Grid graphs with 100 rows and varying numbers of columns of the Proposed algorithm. Region sizes: 2, 4, or 8.



(d) Grid graphs with 100 columns and varying numbers of rows for Dervish [18] algorithm. Region sizes: 2, 4, or 8.

100 sorból és néhány oszlopból álló négyzetrács. A vonalak színe a régió méretétől függ. Bal oldalon az új, a jobb oldalon pedig a régi algoritmus futási ideje látható.

Összefoglaló és további munka

- Különleges ötlet, hogy legrövidebb utakat kell számolni, majd ezeknek a $K - val$ osztási maradékát nézni
- IEEE INFOCOM 2024 (konferencia)
- A TDK-ban megoldottam egy általánosabb feladatot, ahol minden régióra meg van adva, hogy legfeljebb hány út keresztezheti (eddig 1 volt)
- Ezt további munka részletesen leírni és implementálni

Köszönöm a figyelmet!