

TDK DOLGOZAT

Forgó fekete lyukak és az Event Horizon Teleszkóp feketelyuk-felvételei

készítette:

Csapó Zita

Fizika BSc hallgató

témavezető:

Dr. Gergely Árpád László

egyetemi tanár

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR

ELMÉLETI FIZIKAI TANSZÉK

SZEGED

2024

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Minkowski-téridő ellipszoid koordinátákban	3
3. A Kerr-téridő	7
3.1. Az Einstein-egyenletek felírása	7
3.2. Az Einstein-egyenletek megoldása	11
3.3. A Kerr megoldás unicitása	19
3.4. A metrika Boyer–Lindquist koordinátákban	19
3.5. Kerr–Schild koordináták	20
4. A Kerr fekete lyuk	21
4.1. Inerciarendszerek sodródása	21
4.2. Szingularitás	22
4.3. Eseményhorizont	23
4.4. Stacionárius határfelület és végtelen vöröseltolódási felület	24
4.5. Ergorégió és Penrose-folyamat	26
5. A Kerr-téridő maximális kiterjesztése	29
5.1. Kruskal-koordináták	29
5.2. A Kerr-téridő Penrose-diagrammja	30
6. Event Horizon Teleszkóp	35
6.1. Az M87* feketelyuk-felvételei	36
6.1.1. A fekete lyuk természete	36
6.1.2. Legbelső stabil körpálya	36
6.1.3. A gyűrű aszimmetriája	40
6.1.4. Polarizáció	41
6.2. A Sagittarius A* felvételei	42

7. Elektromágneses mező görbült téridőben	45
7.1. A téridő $3 + 1$ felbontása	45
7.2. Elektromágnesség közeg hiányában	47
7.3. Alternatív definíciók	51
7.4. Elektromágneses mező Kerr-téridőben	52
8. Összefoglalás és kitekintés	55
9. Függelék	57
9.1. Divergencia és rotáció	57
9.2. Köszönetnyilvánítás	59

1. fejezet

Bevezetés

Roy Kerr új-zélandi fizikus az Einstein-egyenlet egy újabb fekete lyukat tartalmazó megoldására bukkant 1963-ban [1]. Dolgozatom célja a Kerr-téridővel kapcsolatos alapvető ismeretek áttekintése és összegzése.

A 2. fejezet az ellipszoid koordináták fontosabb tulajdonságait vizsgálja sík téridőben, amely segíti a Kerr-téridő egyik leggyakrabban használt koordinátázásának megértését. A 3. fejezet egy megoldási módszert mutat be, amellyel az Einstein-egyenletből a megfelelő feltételek mellett a Kerr-metrika megkapható, valamint diszkutálja az eredményt, pontosabban annak unicitását. A 4. fejezetben a Kerr fekete lyuk szerkezete kerül bemutatásra, annak fontosabb, speciális tulajdonságokkal rendelkező részei és régiói, valamint az a folyamat is, amellyel energiát lehet kinyerni a fekete lyukból. Az 5. fejezet azt tárgyalja, hogy hogyan lehet a megfelelő koordináták használatával a koordinátaszingularitásokat kiküszöbölni, és ábrázolni a Kerr-téridő teljes kauzális szerkezetét oly módon, hogy elférjen egy papírlapon. A 6. fejezet kitekint az elméleti fizika határain túlra is, bemutatva az elmúlt évtized egy igen nagy jelentőségű csillagászati eredményét: két szupermasszív fekete lyukról készült fényképet, és azt, hogy a felvételek mit árulnak el róluk. A 7. fejezetben a jelenleg aktív kutatásomnak az első lépéseit ismertetem, melynek fókuszában egy görbült, $3 + 1$ felbontású téridőben alkalmazható elektromágneses formalizmus áll. Sergei Komissarov [22] forrásban megjelölt publikációját veszem alapul, a cikkben lévő számolásokat reprodukálom, és alkalmazom Kerr-téridőre.

Dolgozatomban $-+++$ szignatúrát és geometriai mértékegységrendszert használok, azaz a fény vákuumbeli terjedési sebességét és a gravitációs állandót egységnyiinek választom ($c = G = 1$). A latin indexek téridő-, a görög indexek pedig térindexek, azaz az előbbiek a $\{0, 1, 2, 3\}$ halmazon, az utóbbiak az $\{1, 2, 3\}$ halmazon futnak végig.

2. fejezet

Minkowski-téridő ellipszoid koordinátákban

Egy sík téridőt az $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ Minkowski-metrika jellemez. A Descartes-koordinátákban kifejezett, $ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b$ módon képzett ívelemnégyzet

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.1)$$

alakú. A derékszögű koordináták mellett igen gyakori a gömbi koordináták használata:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 . \quad (2.2)$$

Descartes-koordinátákról gömbi koordinátákra való áttéréshez a következő koordináta-transzformációkat kell végrehajtani:

$$\begin{aligned} t &= t , \\ x &= r \sin \theta \cos \varphi , \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi , \\ z &= r \cos \theta , \end{aligned} \quad (2.3)$$

ahol $0 \leq r$, $0 \leq \theta \leq \pi$, és $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

A továbbiakban vizsgáljuk a

$$\begin{aligned} t &= t , \\ x &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \varphi , \\ y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \varphi , \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (2.4)$$

transzformációval kapott koordinátákat, ahol a egy tetszőleges, rögzített paraméter ([2] forrás, 320. oldal). Később látni fogjuk, hogy használatuk igen praktikus a Kerr-téridő leírásánál. Képezzük a Minkowski-téridő ívelemnégyzetet:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (2.5)$$

ahol $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$. Látható, hogy a (2.4) koordináták általánosítják a (2.3) koordinátákat, az $a = 0$ esetben ugyanis pont a gömbi koordinátákat kapjuk vissza.

Gömbi koordinátákban az $r =$ állandó feltétel origó középpontú, r sugarú gömbfelületeket ad, azonban a (2.4) koordinátákban ezen felületek az x és y tengely mentén, a paramétertől függő mértékben megnyúlnak. A (2.4) összefüggésekből képzett

$$\frac{x^2}{r^2 + a^2} + \frac{y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1 \quad (2.6)$$

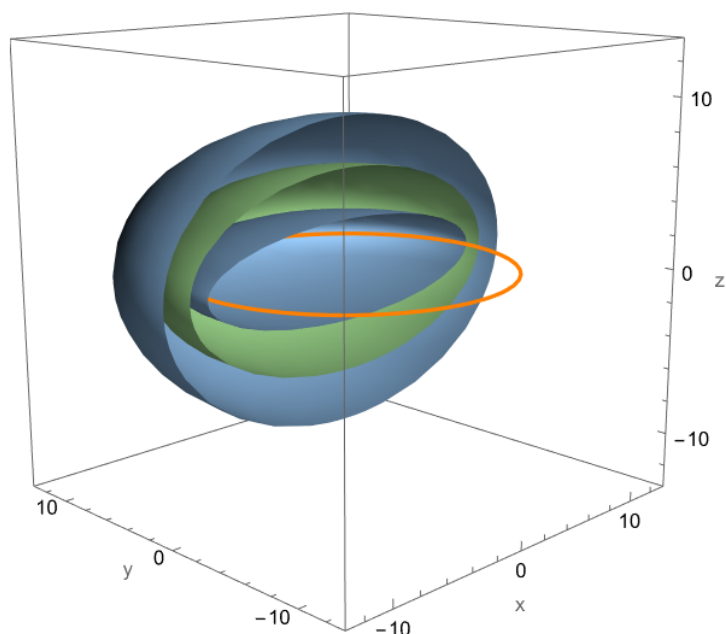
egyenletből látható, hogy az $r =$ állandó felületek ebben az esetben ellipszoidfelületek. Éppen ezért a (2.4) transzformációk által meghatározott (t, r, θ, φ) koordinátákat ellipszoid koordinátáknak nevezzük.

Ellipszoid koordinátákban az $r = 0$ feltétel az

$$x^2 + y^2 = a^2 \sin^2 \theta \quad (2.7)$$

egyenlet által meghatározott, egyenlítői síkban fekvő, a sugarú körlapot adja. Ha az a paramétert 0-nak választjuk, akkor $r = 0$ az origóval lesz egyenlő.

Abban az esetben, ha az r koordináta negatív értékeket vesz fel, a (2.6) egyenlet változatlan alakban érvényes marad, tehát ugyanolyan ellipszoidális felületeket kapunk, melyek az előzőhöz hasonló, ellipszoid koordinátákban felírt Minkowski-téridőt jellemeznek.



2.1. ábra. Az $a = 10$ rögzítése mellett az $r = 3$ (belső kék felület), $r = 9$ (külső kék felület) és $r = -6$ (zöld felület) értékeket használva látszik, hogy kis $|r|$ értékek esetén lapultabb ellipszoidokat kapunk. Az r negatív értékei esetén a pozitív r -rel ábrázolt ellipszoidokkal megegyező felületeket kapunk. A narancssárga a sugarú gyűrű az $r = 0$ feltétel által meghatározott körlap körvonala, melyet $\theta = \pi/2$ rögzítésével kapunk.

3. fejezet

A Kerr-téridő

Megfigyelések szerint a legtöbb csillagászati objektum forgómozgást végez. Az ilyen objektumok környezetének leírásához Kerr-téridőt célszerű használni. A Kerr-téridő stacionárius és tengelyszimmetrikus, és a szimmetriatengely a forgástengellyel esik egybe.

A Kerr-téridő vizsgálatánál az első lépés az

$$R_{ab} = 0 \tag{3.1}$$

vákuumbeli Einstein-egyenlet megoldása, ahol R_{ab} a Ricci-tenzor. A megfelelő határfeltétel ebben az esetben, hogy a téridő aszimptotikusan sík, azaz az $r \rightarrow \infty$ határesetben a téridő a Minkowski-téridőhöz tart. Emellett szükséges feltenni egy sima és konvex eseményhorizont létezését is. Ennek eredményeképpen megkapjuk a téridőt jellemző metrikus tenzort, amely elemzésével tudjuk vizsgálni a téridő szerkezetét és tulajdonságait.

3.1. Az Einstein-egyenletek felírása

Az Einstein-egyenletek explicit alakjának felírásához először meg kell adnunk a keresett metrika paraméteres alakját ([2] forrás 13.1. fejezete). Ehhez válasszunk olyan koordinátarendszert, ahol $x^0 = t$ egy időszerű koordináta, $x^3 = \varphi$ az azimutális szög, valamint x^1 és x^2 térszerű koordináták. Mivel a téridő stacionárius és tengelyszimmetrikus, ezért a metrika független t -től és φ -től, csupán a maradék két térszerű koordináta függvénye:

$$g_{ab} = g_{ab}(x^1, x^2) . \tag{3.2}$$

Megköveteljük azt is, hogy a metrika invariáns legyen az egyidejűleg végrehajtott

$$t \rightarrow -t \quad \text{és} \quad \varphi \rightarrow -\varphi \tag{3.3}$$

transzformációkra. Ez azért szükséges, mert a forgómozgásnál ha az időkoordináta előjelét ellentétesre változtatjuk, akkor a forgás iránya is ellentétes lesz. Az eredeti mozgást akkor kapjuk vissza ha a $\varphi \rightarrow -\varphi$ transzformációt is elvégezzük. Ez a feltétel biztosítja tehát, hogy a központi objektum mozgása kizárólag forgómozgás legyen. Hogy ez teljesüljön, szükséges, hogy $g_{01} = g_{02} = g_{13} = g_{23} = 0$, ugyanis ezen elemek előjelet váltanának a transzformációk hatására. Tehát az ívelemnégyzet a

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{03}dtd\varphi + g_{33}d\varphi^2 + [g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}dx^1dx^2 + g_{22}(dx^2)^2] \quad (3.4)$$

alakot ölti. Jelölésünk legyen $x^1 = r$ valamint $x^2 = \theta$, és tekintsük a szögletes zárójelbeli részt, ami egy tekinthető egy kétdimenziós alsokaságnak:

$$ds_2^2 = g_{rr}dr^2 + 2g_{r\theta}drd\theta + g_{\theta\theta}d\theta^2. \quad (3.5)$$

Megfelelő $\tilde{r}$ és $\tilde{\theta}$ koordináták bevezetésével a középső tag eltüntethető. Ehhez írjuk fel az eredeti koordinátákat, mint az új koordináták függvényei, azaz

$$r = r(\tilde{r}, \tilde{\theta}) \quad \text{és} \quad \theta = \theta(\tilde{r}, \tilde{\theta}),$$

majd képezzük a fenti kifejezések teljes differenciálját:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \tilde{r}}d\tilde{r} + \frac{\partial r}{\partial \tilde{\theta}}d\tilde{\theta}, \quad d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r}}d\tilde{r} + \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{\theta}}d\tilde{\theta}. \quad (3.6)$$

Ezeket behelyettesítve (3.5)-be megkapjuk a kétdimenziós alsokaság ívelemnégyzetét az új koordinátákban:

$$\begin{aligned} ds_2^2 = & \left[g_{rr} \left(\frac{\partial r}{\partial \tilde{r}} \right)^2 + 2g_{r\theta} \frac{\partial r}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r}} + g_{\theta\theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r}} \right)^2 \right] d\tilde{r}^2 + \\ & 2 \left[g_{rr} \frac{\partial r}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial r}{\partial \tilde{\theta}} + g_{r\theta} \left(\frac{\partial r}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial r}{\partial \tilde{\theta}} \right) + g_{\theta\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{\theta}} \right] d\tilde{r}d\tilde{\theta} + \\ & \left[g_{rr} \left(\frac{\partial r}{\partial \tilde{\theta}} \right)^2 + 2g_{r\theta} \frac{\partial r}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{\theta}} + g_{\theta\theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{\theta}} \right)^2 \right] d\tilde{\theta}^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

A $\tilde{g}_{r\theta}$ komponens eltüntethető az új koordinátákkal, ha megszabjuk a

$$\tilde{g}_{r\theta} = g_{rr} \frac{\partial r}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial r}{\partial \tilde{\theta}} + g_{r\theta} \left(\frac{\partial r}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial r}{\partial \tilde{\theta}} \right) + g_{\theta\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{\theta}} = 0 \quad (3.8)$$

feltételt. A továbbiakban tehát az új koordinátákat használjuk, melyekről az egyszerűség kedvéért hagyjuk le a tildét, azaz a jelölés legyen $\tilde{r}$ helyett r , és $\tilde{\theta}$ helyett θ . Így az ívelemnégyzet az előbbinél egyszerűbb

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{03}dtd\varphi + g_{33}d\varphi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 \quad (3.9)$$

alakra hozható.

Újabb jelölések bevezetésével írjuk át a fenti ívelemnégyszetet:

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\psi} (d\varphi - \omega dt)^2 + e^{2\mu} dr^2 + e^{2\lambda} d\theta^2, \quad (3.10)$$

ahol ν , ψ , ω , μ és λ függvények r és θ változókkal. Ebből leolvasható, hogy a metrika komponensei:

$$\begin{aligned} g_{tt} &= e^{2\psi} \omega^2 - e^{2\nu}, & g_{t\varphi} &= g_{\varphi t} = -\omega e^{2\psi}, \\ g_{rr} &= e^{2\mu}, & g_{\theta\theta} &= e^{2\lambda}, & g_{\varphi\varphi} &= e^{2\psi}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

A metrika nem diagonális elemei $g^{t\varphi} = g^{\varphi t}$, így azon kontravariáns komponenseket egyszerűen meghatározhatjuk, amelyek kizárólag r -t és θ -t tartalmazzák:

$$g^{rr} = \frac{1}{g_{rr}} = e^{-2\mu}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{g_{\theta\theta}} = e^{-2\lambda}. \quad (3.12)$$

A többi komponens meghatározásához invertálnunk kell az alábbi mátrixot:

$$X = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{t\varphi} \\ g_{t\varphi} & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

melynek determinánsa $\det X = g_{tt}g_{\varphi\varphi} - (g_{t\varphi})^2 = -e^{2(\nu+\psi)}$. Ebből a komponensek:

$$\begin{aligned} g^{tt} &= \frac{g_{\varphi\varphi}}{\det X} = -e^{-2\nu}, & g^{t\varphi} &= g^{\varphi t} = -\frac{g_{t\varphi}}{\det X} = -\omega e^{-2\nu}, \\ g^{\varphi\varphi} &= \frac{g_{tt}}{\det X} = e^{-2\psi} - e^{-2\nu} \omega^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

A Christoffel-szimbólum komponenseit a metrika valamint az inverz metrika ismeretében a

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ai} (\partial_b g_{ic} + \partial_c g_{bi} - \partial_i g_{bc}) \quad (3.15)$$

összefüggéssel határozzuk meg [4]. A nemeltűnő komponensek:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2}e^{-2\nu} [\omega \partial_r (\omega e^{2\psi}) - \partial_r (\omega^2 e^{2\psi} - e^{2\nu})] , \\
\Gamma_{t\theta}^t &= \Gamma_{\theta t}^t = \frac{1}{2}e^{-2\nu} [\omega \partial_\theta (\omega e^{2\psi}) - \partial_\theta (\omega^2 e^{2\psi} - e^{2\nu})] , \\
\Gamma_{r\varphi}^t &= \Gamma_{\varphi r}^t = \frac{1}{2}e^{-2\nu} [\partial_r (\omega e^{2\psi}) - \omega \partial_r (\omega^2 e^{2\psi} - e^{2\nu})] , \\
\Gamma_{\theta\varphi}^t &= \Gamma_{\varphi\theta}^t = \frac{1}{2}e^{-2\nu} [\partial_\theta (\omega e^{2\psi}) - \omega \partial_\theta (\omega^2 e^{2\psi} - e^{2\nu})] , \\
\Gamma_{tt}^r &= -\frac{1}{2}e^{-2\mu} \partial_r (e^{2\psi} \omega^2 - e^{2\nu}) , \quad \Gamma_{t\varphi}^r = \Gamma_{\varphi t}^r = \frac{1}{2}e^{-2\mu} \partial_r (\omega e^{2\psi}) , \\
\Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2}e^{-2\mu} \partial_r e^{2\mu} , \quad \Gamma_{r\theta}^r = \Gamma_{\theta r}^r = \frac{1}{2}e^{-2\mu} \partial_\theta e^{2\mu} , \\
\Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{1}{2}e^{-2\mu} \partial_r e^{2\lambda} , \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{1}{2}e^{-2\mu} \partial_r e^{2\psi} , \\
\Gamma_{tt}^\theta &= -\frac{1}{2}e^{-2\lambda} \partial_\theta (e^{2\psi} \omega^2 - e^{2\nu}) , \quad \Gamma_{t\varphi}^\theta = \Gamma_{\varphi t}^\theta = \frac{1}{2}e^{-2\lambda} \partial_\theta (\omega e^{2\psi}) , \\
\Gamma_{rr}^\theta &= -\frac{1}{2}e^{-2\lambda} \partial_\theta e^{2\mu} , \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{2}e^{-2\lambda} \partial_r e^{2\lambda} , \\
\Gamma_{\theta\theta}^\theta &= -\frac{1}{2}e^{-2\lambda} \partial_\theta e^{2\lambda} , \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\frac{1}{2}e^{-2\lambda} \partial_\theta e^{2\psi} , \\
\Gamma_{tr}^\varphi &= \Gamma_{rt}^\varphi = -\frac{1}{2}e^{-2\nu} [\omega \partial_r (\omega^2 e^{2\psi} - e^{2\nu}) + e^{-2\psi} (e^{2\nu} - \omega^2 e^{2\psi}) \partial_r (\omega e^{2\psi})] , \\
\Gamma_{t\theta}^\varphi &= \Gamma_{\theta t}^\varphi = -\frac{1}{2}e^{-2\nu} [\omega \partial_\theta (\omega^2 e^{2\psi} - e^{2\nu}) + e^{-2\psi} (e^{2\nu} - \omega^2 e^{2\psi}) \partial_\theta (\omega e^{2\psi})] , \\
\Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{2}e^{-2\nu} [\omega \partial_r (\omega e^{2\psi}) + e^{-2\psi} (e^{2\nu} - \omega^2 e^{2\psi}) \partial_r e^{2\psi}] , \\
\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \frac{1}{2}e^{-2\nu} [\omega \partial_\theta (\omega e^{2\psi}) + e^{-2\psi} (e^{2\nu} - \omega^2 e^{2\psi}) \partial_\theta e^{2\psi}] , \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Az R_{bcd}^a Riemann-tenzorból úgy kapjuk meg a Ricci-tenzort, ha a spúrját képezzük annak, azaz $R_{ab} = R_{aib}^i$. A Riemann-tenzor $R_{acb}^i = \partial_c \Gamma_{ab}^i - \partial_b \Gamma_{ac}^i + \Gamma_{cj}^i \Gamma_{ab}^j - \Gamma_{bj}^i \Gamma_{ac}^j$ definícióját felhasználva, azt kontrahálva δ_i^c Kronecker-deltával a Ricci-tenzor kiszámítására alkalmas képlethez jutunk:

$$R_{ab} = \partial_i \Gamma_{ab}^i - \partial_b \Gamma_{ai}^i + \Gamma_{ij}^i \Gamma_{ab}^j - \Gamma_{bj}^i \Gamma_{ai}^j . \tag{3.17}$$

Ha az így kapott Ricci-tenzor komponenseire felírjuk a (3.1) vákuumbeli egyenletet, akkor a következő egyenletekhez jutunk:

$$\begin{aligned}
&e^{-2\mu} [\partial_r^2 \nu + \partial_r \nu \partial_r (\psi + \nu - \mu + \lambda)] + e^{-2\lambda} [\partial_\theta^2 \nu + \partial_\theta \nu \partial_\theta (\psi + \nu + \mu - \lambda)] \\
&= \frac{1}{2}e^{2\psi-2\nu} [e^{-2\mu} (\partial_r \omega)^2 + e^{-2\lambda} (\partial_\theta \omega)^2] \quad (R_{tt} = 0) , \tag{3.18}
\end{aligned}$$

$$\partial_r (e^{3\psi-\nu-\mu+\lambda} \partial_r \omega) + \partial_\theta (e^{3\psi-\nu+\mu-\lambda} \partial_\theta \omega) = 0 \quad (R_{tr} = R_{rt} = 0) , \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
& e^{-2\mu} [\partial_r^2 \psi + \partial_r \psi \partial_r (\psi + \nu - \mu + \lambda)] + e^{-2\lambda} [\partial_\theta^2 \psi + \partial_\theta \psi \partial_\theta (\psi + \nu + \mu - \lambda)] \\
& = -\frac{1}{2} e^{2\psi-2\nu} [e^{-2\mu} (\partial_r \omega)^2 + e^{-2\lambda} (\partial_\theta \omega)^2] \quad (R_{rr} = 0) ,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_r \partial_\theta (\psi + \nu) - \partial_r (\psi + \nu) \partial_\theta \mu - \partial_\theta (\psi + \nu) \partial_r \lambda + \partial_r \psi \partial_\theta \psi + \partial_r \nu \partial_\theta \nu \\
& = \frac{1}{2} e^{2\psi-2\nu} \partial_r \omega \partial_\theta \omega \quad (R_{\theta\varphi} = R_{\varphi\theta} = 0) ,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
& e^{-2\lambda} [\partial_\theta^2 (\psi + \nu) + \partial_\theta (\psi + \nu) \partial_\theta (\nu - \lambda) + (\partial_\theta \psi)^2] + e^{-2\mu} [\partial_r \nu \partial_r (\psi + \lambda) + \partial_r \psi \partial_r \lambda] \\
& = -\frac{1}{4} e^{2\psi-2\nu} [e^{-2\mu} (\partial_r \omega)^2 - e^{-2\lambda} (\partial_\theta \omega)^2] \quad (G_{\theta\theta} = 0) ,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
& e^{-2\mu} [\partial_r^2 (\psi + \nu) + \partial_r (\psi + \nu) \partial_r (\nu - \mu) + (\partial_r \psi)^2] + e^{-2\lambda} [\partial_\theta \nu \partial_\theta (\psi + \mu) + \partial_\theta \psi \partial_\theta \mu] \\
& = \frac{1}{4} e^{2\psi-2\nu} [e^{-2\mu} (\partial_r \omega)^2 - e^{-2\lambda} (\partial_\theta \omega)^2] \quad (G_{\varphi\varphi} = 0) ,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

ahol $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}$ az Einstein-tenzor, melyben $R = R^a_a$ a görbületi skalár.

3.2. Az Einstein-egyenletek megoldása

A következő alfejezetben Subrahmanyan Chandrasekhar Kerr-metrikára vonatkozó levezetését veszem alapul [3]. A (3.18) és (3.20) egyenleteket adjuk össze, és szorozzuk meg $e^{\lambda+\mu-\beta}$ -val:

$$\partial_r (e^{\lambda-\mu} \partial_r e^\beta) + \partial_\theta (e^{\mu-\lambda} \partial_\theta e^\beta) = 0 , \tag{3.24}$$

majd vonjuk ki őket egymásból, és $e^{\lambda+\mu+\beta}$ -val szorozzunk:

$$\begin{aligned}
& \partial_r [e^{\beta+\lambda-\mu} \partial_r (\psi - \nu)] + \partial_\theta [e^{\beta+\mu-\lambda} \partial_\theta (\psi - \nu)] \\
& = -e^{3\psi-\nu} [e^{\lambda-\mu} (\partial_r \omega)^2 + e^{\mu-\lambda} (\partial_\theta \omega)^2] ,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

ahol a $\beta = \psi + \nu$ jelölést használtuk. A (3.22) és (3.23) egyenletek összege a (3.24) egyenlettel egyezik meg, különbségük pedig:

$$\begin{aligned}
& 4e^{\lambda-\mu} (\partial_r \beta \partial_r \lambda + \partial_r \psi \partial_r \nu) - 4e^{\mu-\lambda} (\partial_\theta \beta \partial_\theta \mu + \partial_\theta \psi \partial_\theta \nu) \\
& = 2e^{-\beta} [\partial_r (e^{\lambda-\mu} \partial_r e^\beta) - \partial_\theta (e^{\mu-\lambda} \partial_\theta e^\beta)] \\
& - e^{2\psi-2\nu} [e^{\lambda-\mu} (\partial_r \omega)^2 - e^{\mu-\lambda} (\partial_\theta \omega)^2] .
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Vezessük be továbbá a $\Delta = e^{2\lambda-2\mu}$ és $\chi = e^{\nu-\psi}$ jelöléseket, melyeket használva a (3.10) ívelemnégyszetet átírhatjuk a

$$ds^2 = -e^\beta \left[\chi dt^2 - \frac{1}{\chi} (d\varphi - \omega dt)^2 \right] + \frac{e^{\mu+\lambda}}{\sqrt{\Delta}} (dr^2 + \Delta d\theta^2) \tag{3.27}$$

formára.

A továbbiakban feltesszük, hogy a téridő tartalmaz eseményhorizontot. Az eseményhorizont a ∂_t és ∂_φ vektorok által kifeszített null-felület, azaz bármely pontjában a felület normálisa egy nullvektor. A felület egyenlete legyen:

$$N(r, \theta) = 0, \quad (3.28)$$

ahol $N(r, \theta)$ függvény értelmezve van a horizonton és annak kis környezetében is. A fenti kifejezés a stacionaritás és a tengelyszimmetria miatt nem függ t -től és φ -tól. Az $N(r, \theta)$ függvény gradiense egy horizontra merőleges vektort fog adni, és mivel a horizont egy null-felület, írhatjuk hogy:

$$g^{ij} \partial_i N \partial_j N = 0, \quad (3.29)$$

amely összefüggésből a

$$\Delta (\partial_r N)^2 + (\partial_\theta N)^2 = 0 \quad (3.30)$$

egyenlethez jutunk. Következik ebből, hogy $\partial_\theta N = 0$ és $\Delta (\partial_r N)^2 = 0$. Az első egyenlőségből látható, hogy N független θ -tól, kizárólag r függvénye. A második egyenlőség akkor teljesül, ha $\Delta = 0$ vagy $\partial_r N = 0$. Az utóbbi eset azt eredményezné, hogy N egy konstans lenne, még hozzá a (3.28) definíció miatt 0 értékkel. Következésképpen nem csak a horizonton teljesülne a $N = 0$ feltétel, hanem annak környezetében is, tehát a (3.28) összefüggés nem egy felületet határozna meg, ami ellentmond a kezdeti feltevésnek. Emiatt szükségszerűen

$$\Delta = 0, \quad (3.31)$$

amely összefüggés így az eseményhorizont egyenlete lesz. Általánosan Δ az r és a θ függvénye, de a koordináták megfelelő megválasztásával elérhető, hogy $\Delta = \Delta(r)$.

Mivel az eseményhorizontot a ∂_t és ∂_φ vektorok feszítik ki, ezért ott a (t, φ) al-tér metrikájának, amely éppen a (3.13) összefüggésben szereplő mátrix, determinánsa nulla. Korábban beláttuk, hogy az említett determináns $-e^{2\psi+2\nu} = -e^{2\beta}$, tehát a $\Delta(r) = 0$ felületen $e^{2\beta} = 0$. Az utóbbi egyenlőség a $\beta \rightarrow -\infty$ határesetben teljesül, ezért érdemes átírni a e^β kifejezést olyan alakra, amely a horizonton is csak véges értékeket tartalmaz. Az általánosság megsértése nélkül írhatjuk, hogy $e^\beta = \sqrt{\Delta} f(r, \theta)$, ahol f egy függvény, amely reguláris mind a horizonton, mind a forgástengelyen. Tegyük fel, hogy e^β szeparábilis a két változójában, amely azt jelenti, hogy az f függvény csak θ -tól függ, ekkor:

$$e^\beta = \sqrt{\Delta} f(\theta). \quad (3.32)$$

Később, a megoldás unicitásáról szóló alfejezetben látni fogjuk, hogy ezen feltételek az általános esetre nem jelentenek megszorítást. A (3.32) ismeretében, felhasználva, hogy $\Delta(r) = e^{2\lambda-2\mu}$, a (3.24) egyenlet felírható

$$\partial_r \left(\sqrt{\Delta} \partial_r \sqrt{\Delta} \right) + \frac{\partial_\theta^2 f}{f} = 0 \quad (3.33)$$

alakban. A fenti egyenlőség teljesül, ha

$$\partial_r^2 \Delta = 2 \quad \text{és} \quad f = \sin \theta . \quad (3.34)$$

Ebből Δ -t két r szerinti integrálással kapjuk meg:

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 , \quad (3.35)$$

ahol M és a integrációs konstansok, melyek fizikai jelentéssel bírnak. M a központi objektum tömegét jelöli, a pedig egy impulzuszmomentummal arányos mennyiség, az ún. forgási paraméter. Felhasználva az eddigi

$$e^{2\lambda-2\mu} = \Delta \quad \text{és} \quad e^\beta = \sqrt{\Delta} \sin \theta \quad (3.36)$$

eredményeinket, valamint θ -ról áttérve a $\kappa = \cos \theta$ változóra, azaz elvégezve a $\partial_\theta = -\sin \theta \partial_\kappa$ helyettesítést, a (3.25) és (3.19) egyenleteket átírhatjuk:

$$\partial_r [\Delta \partial_r (\psi - \nu)] + \partial_\kappa [\delta \partial_\kappa (\psi - \nu)] = -e^{2\psi-2\nu} [\Delta (\partial_r \omega)^2 + \delta (\partial_\kappa \omega)^2] , \quad (3.37)$$

$$\partial_r [\Delta e^{2\psi-2\nu} \partial_r \omega] + \partial_\kappa [\delta e^{2\psi-2\nu} \partial_\kappa \omega] = 0 , \quad (3.38)$$

ahol $\delta = \sin^2 \theta$. Használva a korábban bevezetett $\chi = e^{\nu-\psi}$ jelölést a fenti két egyenletet írjuk át:

$$\partial_r \left(\frac{\Delta}{\chi} \partial_r \chi \right) + \partial_\kappa \left(\frac{\delta}{\chi} \partial_\kappa \chi \right) = \frac{1}{\chi^2} [\Delta (\partial_r \omega)^2 + \delta (\partial_\kappa \omega)^2] , \quad (3.39)$$

$$\partial_r \left(\frac{\Delta}{\chi^2} \partial_r \omega \right) + \partial_\kappa \left(\frac{\delta}{\chi^2} \partial_\kappa \omega \right) = 0 . \quad (3.40)$$

A (3.40) egyenletben szereplő ω kifejezhető egy Φ potenciál segítségével:

$$\partial_r \Phi = \frac{\delta}{\chi^2} \partial_\kappa \omega , \quad \partial_\kappa \Phi = -\frac{\Delta}{\chi^2} \partial_r \omega , \quad (3.41)$$

amely potenciált az alábbi egyenlet határozza meg:

$$\partial_r \left(\frac{\chi^2}{\delta} \partial_r \Phi \right) + \partial_\kappa \left(\frac{\chi^2}{\Delta} \partial_\kappa \Phi \right) = 0 . \quad (3.42)$$

Hasonlóan, a (3.39) egyenlet is felírható Φ segítségével:

$$\partial_r [\Delta \partial_r (\lg \chi)] + \partial_\kappa [\delta \partial_\kappa (\lg \chi)] = \frac{\chi^2}{\Delta} (\partial_\kappa \Phi)^2 + \frac{\chi^2}{\delta} (\partial_r \Phi)^2 . \quad (3.43)$$

Vezessük be a $\Psi = \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{\chi}$ jelölést, és használjuk a (3.42) és (3.43) egyenletekben:

$$\begin{aligned} & \Psi [\partial_r (\Delta \partial_r \Psi) + \partial_\kappa (\delta \partial_\kappa \Psi)] \\ &= \Delta [(\partial_r \Psi)^2 - (\partial_r \Phi)^2] + \delta [(\partial_\kappa \Psi)^2 - (\partial_\kappa \Phi)^2] , \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\Psi [\partial_r (\Delta \partial_r \Phi) + \partial_\kappa (\delta \partial_\kappa \Phi)] = 2\Delta \partial_r \Psi \partial_r \Phi + 2\delta \partial_\kappa \Psi \partial_\kappa \Phi . \quad (3.45)$$

A (3.45) egyenletet szorozzuk meg az i képzetes egységgel, majd adjuk össze (3.44)-t és (3.45)-t:

$$\operatorname{Re}(Z) [\partial_r (\Delta \partial_r Z) + \partial_\kappa (\delta \partial_\kappa Z)] = \Delta (\partial_r Z)^2 + \delta (\partial_\kappa Z)^2 , \quad (3.46)$$

ahol bevezettük a Z komplex függvényt, amely valós része Ψ , és képzetes része Φ , azaz $Z = \Psi + i\Phi$. Hajtsuk végre a $Z = -\frac{1+E}{1-E}$ transzformációt, ahol E egy komplex függvény:

$$(1 - EE^*) [\partial_r (\Delta \partial_r E) + \partial_\kappa (\delta \partial_\kappa E)] = -2E^* [\Delta (\partial_r E)^2 + \delta (\partial_\kappa E)^2] , \quad (3.47)$$

és így az ún. Ernst-egyenlethez jutunk.

A továbbiakban azt keressük, hogy milyen másfajta megoldások elégítik ki az egyenleteket. Ehhez vizsgáljuk meg a (3.27) ívelemnégyzet szögletes zárójelben lévő részét, és végezzük el rajta a $t \rightarrow i\varphi$ és $\varphi \rightarrow -it$ transzformációkat:

$$\chi dt^2 - \frac{1}{\chi} (d\varphi - \omega dt)^2 \rightarrow \frac{1}{\chi} dt^2 + \frac{2\omega}{\chi} dt d\varphi - \frac{\chi^2 - \omega^2}{\chi} = \tilde{\chi} dt^2 - \frac{1}{\tilde{\chi}} (d\varphi - \tilde{\omega} dt)^2 , \quad (3.48)$$

ahol

$$\tilde{\chi} = \frac{\chi}{\chi^2 - \omega^2} , \quad \text{és} \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega}{\chi^2 - \omega^2} . \quad (3.49)$$

Látható, hogy a metrika alakja változatlan marad, vagyis $\tilde{\chi}$ és $\tilde{\omega}$ alternatív megoldásai az Einstein-egyenleteknek. Ezek segítségével felírhatók az előzőekben már tárgyalt egyenletek analógiájára a következő összefüggések:

$$\tilde{\Psi} = \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{\tilde{\chi}} = e^{\psi+\nu} \frac{\chi^2 - \omega^2}{\chi} = e^{2\nu} - \omega^2 e^{2\psi} , \quad (3.50)$$

$$\partial_r \tilde{\Phi} = \frac{\delta}{\tilde{\chi}^2} \partial_\kappa \tilde{\omega} = \frac{\tilde{\Psi}^2}{\Delta} \partial_\kappa \tilde{\omega} , \quad \partial_\kappa \tilde{\Phi} = -\frac{\Delta}{\tilde{\chi}^2} \partial_r \tilde{\omega} = -\frac{\tilde{\Psi}^2}{\delta} \partial_r \tilde{\omega} , \quad (3.51)$$

$$\tilde{Z} = \tilde{\Psi} + i\tilde{\Phi} = -\frac{1 + \tilde{E}}{1 - \tilde{E}} \quad (3.52)$$

A (3.47) Ernst-egyenletet fel lehet írni $\tilde{E}$ -vel:

$$(1 - \tilde{E}\tilde{E}^*) \left[\partial_r (\Delta \partial_r \tilde{E}) + \partial_\kappa (\delta \partial_\kappa \tilde{E}) \right] = -2\tilde{E}^* \left[\Delta (\partial_r \tilde{E})^2 + \delta (\partial_\kappa \tilde{E})^2 \right] . \quad (3.53)$$

Az r helyett térjünk át az $\eta = \frac{r-M}{(M^2-a^2)^{1/2}}$ változóra, ekkor $\partial_r = (M^2 - a^2)^{-1/2} \partial_\eta$, és használjuk ki, hogy $\delta = \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \kappa^2$:

$$\begin{aligned} & (1 - \tilde{E}\tilde{E}^*) \left\{ \partial_\eta \left[(\eta^2 - 1) \partial_\eta \tilde{E} \right] + \partial_\kappa \left[(1 - \kappa^2) \partial_\kappa \tilde{E} \right] \right\} \\ &= -2\tilde{E}^* \left[(\eta^2 - 1) (\partial_\eta \tilde{E})^2 + (1 - \kappa^2) (\partial_\kappa \tilde{E})^2 \right] , \end{aligned} \quad (3.54)$$

mely egyenlet megoldása:

$$\tilde{E} = -p\eta - iq\kappa , \quad (3.55)$$

ahol p és q valós konstansok, melyekre teljesül, hogy $p^2 + q^2 = 1$. Ezt ellenőrizendő írjuk be a megoldást a fenti egyenletbe:

$$\begin{aligned} & (1 - p^2\eta^2 - q^2\kappa^2) \left\{ \partial_\eta \left[(\eta^2 - 1) (-p) \right] + \partial_\kappa \left[(1 - \kappa^2) (-iq) \right] \right\} \\ &= -(-2p\eta + 2iq\kappa) \left[(\eta^2 - 1) p^2 + (1 - \kappa^2) (-q^2) \right] , \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} & (1 - p^2\eta^2 - q^2\kappa^2) (-2p\eta + 2iq\kappa) \\ &= (-2p\eta + 2iq\kappa) \left[(p^2 + q^2) + p^2\eta^2 + q^2\kappa^2 \right] , \end{aligned} \quad (3.57)$$

és láthatjuk, hogy a $p^2 + q^2 = 1$ azonosság alkalmazásával az egyenlőség teljesül. $\tilde{E}$ ismeretében $\tilde{Z}$ egy egyszerű behelyettesítéssel megkapható:

$$\tilde{Z} = -\frac{1 + \tilde{E}}{1 - \tilde{E}} = -\frac{1 - p\eta - iq\kappa}{1 + p\eta + iq\kappa} . \quad (3.58)$$

Vegyük $\tilde{Z}$ valós és képzetes részét, amelyek éppen $\tilde{\Psi}$ -vel és $\tilde{\Phi}$ -vel egyeznek meg:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} &= \operatorname{Re}(\tilde{Z}) = \frac{p^2\eta^2 + q^2\kappa^2 - 1}{1 + 2p\eta + p^2\eta^2 + q^2\kappa^2} = \frac{p^2(\eta^2 - 1) - q^2(1 - \kappa^2)}{(p\eta + 1)^2 + q^2\kappa^2} , \\ \tilde{\Phi} &= \operatorname{Im}(\tilde{Z}) = \frac{2q\kappa}{(p\eta + 1)^2 + q^2\kappa^2} . \end{aligned} \quad (3.59)$$

Ha visszatérünk az r változóra, akkor a fenti egyenletek a

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} &= \frac{\Delta - \frac{q^2}{p^2} (M^2 - a^2) \delta}{\left[r - M + \frac{(M^2 - a^2)^{1/2}}{p} \right]^2 + \frac{q^2}{p^2} (M^2 - a^2) \kappa^2} , \\ \tilde{\Phi} &= \frac{2\kappa \frac{q}{p} (M^2 - a^2)}{\left[r - M + \frac{(M^2 - a^2)^{1/2}}{p} \right]^2 + \frac{q^2}{p^2} (M^2 - a^2) \kappa^2} \end{aligned} \quad (3.60)$$

formát öltik, amelyek meglehetősen bonyolultak, de p és q megfelelő megválasztásával egyszerűbb alakra hozhatók. Legyen

$$p = \frac{(M^2 - a^2)^{1/2}}{M} \quad \text{és} \quad q = \frac{a}{M} . \quad (3.61)$$

Könnyen belátható, hogy a négyzetösszegük pontosan 1-et fog adni, így a fent megadott definíciók teljesítik a p -re és q -ra kiszabott feltételt. Behelyettesítve őket a (3.60) kifejezésekbe:

$$\tilde{\Psi} = \frac{\Delta - a^2\delta}{\rho^2} , \quad \tilde{\Phi} = \frac{2aM\kappa}{\rho^2} , \quad (3.62)$$

ahol a $\rho^2 = r^2 + a^2\kappa^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ jelölést használtuk. A fenti eredményeket írjuk be a (3.51) egyenletekbe:

$$\begin{aligned} \partial_r \tilde{\Phi} &= -\frac{4aMr\kappa}{\rho^4} = \frac{\tilde{\Psi}^2}{\Delta} \partial_\kappa \tilde{\omega} = \frac{(\Delta - a^2\delta)^2}{\rho^4 \Delta} \partial_\kappa \tilde{\omega} , \\ \partial_\kappa \tilde{\Phi} &= \frac{2aM}{\rho^4} (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) = -\frac{\tilde{\Psi}^2}{\delta} \partial_r \tilde{\omega} = -\frac{(\Delta - a^2\delta)^2}{\rho^4 \delta} \partial_r \tilde{\omega} . \end{aligned} \quad (3.63)$$

Látható, hogy a fenti egyenletek csak $\tilde{\omega}$ -t tartalmazzák, mint ismeretlen függvényt. Fejezzük ki a deriváltjait:

$$\partial_\kappa \tilde{\omega} = -\frac{4aMr\kappa\Delta}{(\Delta - a^2\delta)^2} , \quad \partial_r \tilde{\omega} = -\frac{2aM(r^2 - a^2 \cos^2 \theta)\delta}{(\Delta - a^2\delta)^2} , \quad (3.64)$$

amelyekből $\tilde{\omega}$:

$$\tilde{\omega} = \frac{2aMr\delta}{\Delta - a^2\delta} , \quad (3.65)$$

Az ω meghatározásához a (3.50) egyenletet használjuk fel, behelyettesítve $\tilde{\Psi}$ pontos alakját:

$$\frac{\Delta - a^2\delta}{\rho^2} = e^{2\psi} (\chi^2 - \omega^2) = e^{2\nu} - \omega^2 e^{2\psi} , \quad (3.66)$$

majd a (3.49) második egyenletéből kifejezzük ω -t:

$$\omega = \frac{2aMr}{\Delta - a^2\delta} (\chi^2 - \omega^2) = \frac{2aMr\delta}{\rho^2} e^{-2\psi} . \quad (3.67)$$

A (3.66) egyenletet szorozzuk meg $e^{2\psi}$ -vel, ω helyére írjuk be a (3.67) összefüggések eredményeit, és ekkor a

$$\frac{\Delta - a^2\delta}{\rho^2} e^{2\psi} = e^{2\beta} - \omega^2 e^{4\psi} = \frac{\delta}{\rho^4} (\Delta \rho^4 - 4a^2 M^2 r^2 \delta) \quad (3.68)$$

egyenletet kapjuk (felhasználtuk, hogy $e^{2\beta} = \Delta\delta$). Az ω és $e^{2\psi}$ megoldásánál két azonosságot is alkalmazunk:

$$\begin{aligned} \left[(r^2 + a^2) \mp a\sqrt{\Delta\delta} \right] \left(\sqrt{\Delta} \pm a\sqrt{\delta} \right) &= \rho^2 \sqrt{\Delta} \pm 2aMr\sqrt{\delta} , \\ \Sigma^2 (\Delta - a^2\delta) &= \rho^4 \Delta - 4a^2 M^2 r^2 \delta , \end{aligned} \quad (3.69)$$

ahol $\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \delta$. Az első azonosságot és a (3.68) egyenletet felhasználva $e^{2\psi}$ -re nyerünk megoldást:

$$e^{2\psi} = \frac{\delta \Sigma^2}{\rho^2} . \quad (3.70)$$

Ennek ismeretében, a (3.67) egyenletből ω -t kapjuk meg:

$$\omega = \frac{2aMr}{\Sigma^2} . \quad (3.71)$$

Mivel $e^{2\nu} = e^{2\beta-2\psi}$, ezért

$$e^{2\nu} = \frac{\rho^2 \Delta}{\Sigma^2} , \quad (3.72)$$

továbbá χ definícióját felidézve, és abba behelyettesítve:

$$\chi = e^{\nu-\psi} = \frac{\rho^2}{\Sigma^2} \sqrt{\frac{\Delta}{\delta}} . \quad (3.73)$$

Vezessük be az $X = \chi + \omega$, valamint az $Y = \chi - \omega$ függvényeket, és a segítségükkel írjuk át a (3.21) és (3.26) egyenleteket:

$$-\frac{\kappa}{\delta} \partial_r (\lambda + \mu) + \frac{r-M}{\Delta} \partial_\kappa (\lambda + \mu) = \frac{2}{(X+Y)^2} (\partial_r X \partial_\kappa Y + \partial_r Y \partial_\kappa X) , \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} &2(r-M) \partial_r (\lambda + \mu) + 2\kappa \partial_\kappa (\lambda + \mu) \\ &= 4 \cdot \frac{\Delta \partial_r X \partial_r Y - \delta \partial_\kappa X \partial_\kappa Y}{(X+Y)^2} - 3 \cdot \frac{(r-M)^2 - \Delta}{\Delta} + \frac{\kappa^2 + \delta}{\delta} . \end{aligned} \quad (3.75)$$

Mivel χ -t és ω -t ismerjük, így X -et és Y -t is:

$$X = \chi + \omega = \frac{\sqrt{\Delta} + a\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta} (r^2 + a^2 + a\sqrt{\Delta\delta})} , \quad (3.76)$$

$$Y = \chi - \omega = \frac{\sqrt{\Delta} - a\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta} (r^2 + a^2 - a\sqrt{\Delta\delta})} , \quad (3.77)$$

ahol felhasználtuk a (3.69) azonosságai közül a másodikat. A λ és a μ meghatározását a (3.74) és (3.75) egyenletek segítségével végezzük. A számolást megkönnyíti, ha kiírjuk X és Y deriváltjait:

$$\begin{aligned}
\partial_r X &= \frac{\rho^2 (r - M) - 2r (\sqrt{\Delta} + a\sqrt{\delta}) \sqrt{\Delta}}{(r^2 + a^2 + a\sqrt{\Delta\delta})^2 \sqrt{\Delta\delta}} , \\
\partial_\kappa X &= \frac{\kappa\sqrt{\Delta} (r^2 + a^2 + a^2\delta + 2a\sqrt{\Delta\delta})}{(r^2 + a^2 + a\sqrt{\Delta\delta})^2 \delta^{3/2}} , \\
\partial_r Y &= \frac{\rho^2 (r - M) - 2r (\sqrt{\Delta} - a\sqrt{\delta}) \sqrt{\Delta}}{(r^2 + a^2 - a\sqrt{\Delta\delta})^2 \sqrt{\Delta\delta}} , \\
\partial_\kappa Y &= \frac{\kappa\sqrt{\Delta} (r^2 + a^2 + a^2\delta - 2a\sqrt{\Delta\delta})}{(r^2 + a^2 - a\sqrt{\Delta\delta})^2 \delta^{3/2}} ,
\end{aligned} \tag{3.78}$$

majd ezután alkalmazzuk ezeket a (3.74) és (3.75) egyenletekre:

$$-\frac{\kappa}{\delta} \partial_r (\lambda + \mu) + \frac{r - M}{\Delta} \partial_\kappa (\lambda + \mu) = \frac{\kappa}{\rho^2 \Delta \delta} [(r - M) (\rho^2 + 2a^2 \delta) - 2r \Delta] , \tag{3.79}$$

$$2(r - M) \partial_r (\lambda + \mu) + 2\kappa \partial_\kappa (\lambda + \mu) = 4 - \frac{2(r - M)^2}{\Delta} - \frac{4rM}{\rho^2} . \tag{3.80}$$

Belátható, hogy az

$$e^{\lambda+\mu} = \frac{\rho^2}{\sqrt{\Delta}} \tag{3.81}$$

kielégíti a fenti egyenleteket. Mivel $e^{\lambda-\mu} = \sqrt{\Delta}$, így

$$e^{2\mu} = \frac{\rho^2}{\Delta} \quad \text{és} \quad e^{2\lambda} = \rho^2 . \tag{3.82}$$

Ezzel meghatároztuk az metrika összes komponensét, tehát megoldottuk a Kerr-téridőre vonatkozó vákuumbeli Einstein-egyenleteket. A (3.70), (3.71), (3.72) és (3.82) eredményeket behelyettesítve a (3.10) ívelemnégyzet paraméteres alakjába az úgynevezett Boyer–Lindquist koordinátákban [7] felírt Kerr-metrikát kapjuk:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{4Mr}{\rho^2} a \sin^2 \theta dt d\varphi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 \\
&\quad + \rho^2 d\theta^2 + \left[r^2 + a^2 + \frac{2Mr}{\rho^2} a^2 \sin^2 \theta \right] \sin^2 \theta d\varphi^2 .
\end{aligned} \tag{3.83}$$

3.3. A Kerr megoldás unicitása

Felmerülhet a kérdés, hogy a fenti levezetés eredményeképpen kapott Kerr-metrikán kívül léteznek-e még másfajta megoldások is azonos határfeltételek mellett. Brandon Carter 1971-es cikkében [5] bemutatta, hogy stacionárius, tengelyszimmetrikus és aszimptotikusan sík vákuum téridőben, melyben az eseményhorizont sima és konvex, a megoldások folytonos családok diszkrét halmazát alkotják, mely családok legalább egy és legfeljebb kettő, egymástól független paramétertől függenek. David C. Robinson 1975-ben [6] arra is rávilágított, hogy csupán egyetlen ilyen család létezik, még hozzá a Kerr család az a és M paraméterekkel. Tehát adott a és M esetén a Kerr-metrikán kívül, mivel az teljesíti Robinson tételében megfogalmazott feltételeket, nem létezik másik megoldás.

3.4. A metrika Boyer–Lindquist koordinátákban

Az ívelemnégyzet tehát Boyer–Lindquist koordinátákban, mint azt már korábban láttuk, a következő módon írható fel:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{4Mr}{\rho^2} a \sin^2 \theta dt d\varphi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left[r^2 + a^2 + \frac{2Mr}{\rho^2} a^2 \sin^2 \theta \right] \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.84)$$

ahol a korábbiakkal konzisztens módon

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (3.85)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad (3.86)$$

és $a = \frac{J}{M}$ a forgási paraméter, azaz a J impulzusmomentum és a tömeg hányadosa. Ha $a = 0$, akkor a metrika Schwarzschild-metrikába megy át:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (3.87)$$

Az $M = 0$ esetben a Minkowski-metrikát szeretnénk visszakapni, ekkor az ívelemnégyzet a

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.88)$$

alakot ölti, ami valóban a Minkowski-téridő ívelemnégyzete az (2.4) összefüggésekkel definiált ellipszoid-koordinátákban felírva. Ez azt jelenti, hogy a Boyer–Lindquist koordináták az 1. fejezetben, a Minkowski-téridő kapcsán tárgyalt ellipszoid koordináták általánosításai Kerr-téridőre.

3.5. Kerr–Schild koordináták

Ha egy metrika kifejezhető Kerr–Schild koordinátákkal, akkor az ívelemnégyzet egy összegként írható fel [8]:

$$ds^2 = ds_0^2 + H l_a l_b dx^a dx^b , \quad (3.89)$$

ahol ds_0^2 egy sík téridő ívelemnégyzete, H egy skalárfüggvény és l_a pedig nullvektor. Mivel gravitáció az összeg első tagjában nincs jelen, így arról az összes információt a második tag tartalmazza. Kerr-téridő esetén

$$H = \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} \quad (3.90)$$

és

$$l_a = \left(1 , \frac{rx + ay}{a^2 + r^2} , \frac{ry - ax}{a^2 + r^2} , \frac{z}{r} \right) . \quad (3.91)$$

Ezeket behelyettesítve a (3.89) egyenletbe:

$$\begin{aligned} ds^2 = & -dt'^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ & + \frac{2Mr^3}{r^4 + a^2 z^2} \left(dt + \frac{r(xdx + ydy)}{a^2 + r^2} + \frac{a(ydx - xdy)}{a^2 + r^2} + \frac{z}{r} dz \right)^2 , \end{aligned} \quad (3.92)$$

ahol az $r(x, y, z)$ függvényt az

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + a^2 \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right) \quad (3.93)$$

összefüggés határozza meg. Az ívelemnégyzet Boyer–Lindquist koordinátákban felírt alakját akkor kapjuk vissza, ha elvégezzük az alábbi koordináta transzformációkat ([2] forrás, 13.7. fejezet, 322. oldal):

$$\begin{aligned} dt' &= dt - \frac{2Mr}{\Delta} dr , \\ x &= (r \cos \phi + a \sin \phi) \sin \theta , \\ y &= (r \sin \phi - a \cos \phi) \sin \theta , \\ z &= r \cos \theta , \end{aligned} \quad (3.94)$$

ahol $d\phi = d\varphi - \frac{a}{\Delta} dr$.

4. fejezet

A Kerr fekete lyuk

4.1. Inerciarendszerek sodródása

A metrika ismeretében, annak vizsgálatával rálátást nyerhetünk a Kerr-téridő szerkezetére és tulajdonságaira. Elsőként vizsgáljuk meg a fekete lyuk közelében lévő lokális inerciarendszerek viselkedését.

Ha egy metrika nem függ valamely x^a koordinátától, akkor az affin paraméterezésű geodetikus érintőjének t_a kovariáns komponense megmaradó mennyiség a pálya mentén (bizonyítás a [2] forrás 3.19. fejezetében). Esetünkben a Kerr-metrika független φ -től, így egy részecske négyesimpulzusának p_φ komponense a geodetikus mentén állandó ([2] forrás 13.2. fejezete):

$$p_\varphi = -L = \text{áll.} , \quad (4.1)$$

ahol L a részecske impulzusmomentumának forgástengely irányú komponense. Az impulzus t és φ kontravariáns komponenseit az inverz metrikával történő kontrakcióval kapjuk:

$$p^t = g^{tt}p_t + g^{t\varphi}p_\varphi , \quad p^\varphi = g^{\varphi t}p_t + g^{\varphi\varphi}p_\varphi . \quad (4.2)$$

Tekintsünk egy részecskét, amely nem rendelkezik impulzusmomentummal, azaz $p_\varphi = 0$. Felhasználva a

$$p^t = k \frac{dt}{d\lambda} \quad \text{és} \quad p^\varphi = k \frac{d\varphi}{d\lambda} \quad (4.3)$$

definíciókat, ahol k arányossági tényező, és λ a geodetikus affin paramétere, írhatjuk, hogy

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{p^\varphi}{p^t} = \frac{g^{\varphi t}}{g^{tt}} = \omega(r, \theta) . \quad (4.4)$$

Ez azt jelenti, hogy az eredetileg impulzusmomentummal nem rendelkező részecskék a fekete lyuk forgása miatt a (4.4) összefüggésben definiált, ω szögsebességű mozgásra kényszerülnek.

Egy inerciarendszerben a szabad részecske nyugalomban marad vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Gravitáció jelenlétében globális inerciarendszerek nem léteznek, csak a tér egy adott pontjához tartozó lokális inerciarendszerekről beszélhetünk, melyek gyorsulása éppen kompenzálja a gravitációt. Kerr fekete lyuk környezetében tehát egy lokális inerciarendszernek, hogy a szabad részecske hozzá képest nyugalomban legyen, ω szögsebességgel kell mozognia. Ez úgy is felfogható, mintha a fekete lyuk magával rántaná a téridőt maga körül, és azt is forgásra kényszerítené. A jelenség a fekete lyuktól távolodva egyre kevésbé számottevő. Mivel a Kerr-téridő aszimptotikusan sík, így $r \rightarrow \infty$ esetén $g^{\varphi t}$, és ennek okán ω is nullához tart.

4.2. Szingularitás

A (3.84) egyenletből látszik, hogy a Boyer–Lindquist koordinátákban felírt metrika két helyen szinguláris, méghozzá a $\rho = 0$ és a $\Delta = 0$ helyen. Ezen szingularitások lehetnek valódi vagy koordináta szingularitások is. Ennek eldöntéséhez meg kell vizsgálni a Riemann-tenzorból képezhető invariánsokat. Összesen 14 független skalár képezhető, melyek közül vákuum téridő esetén 4 nem azonosan nulla [9]. Ezek a következők:

$$\begin{aligned} I_1 &= C^{abcd}C_{abcd} , \\ I_2 &= -\frac{1}{2}e^{ab}_{cd}C^{cdef}C_{abef} , \\ I_3 &= C_{abcd}C^{cdef}C_{ef}{}^{ab} , \\ I_4 &= -\frac{1}{2}C_{abcd}C^{cdef}C_{ef}{}^{gh}C_{gh}{}^{ab} , \end{aligned} \tag{4.5}$$

ahol $C_{abcd} = g_{ai}R^i_{bcd} - R_{a[c}g_{d]b} + R_{b[c}g_{d]a} + \frac{1}{3}Rg_{a[c}g_{d]b}$ a Weyl-tenzor, és

$$e_{abcd} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon_{abcd} \tag{4.6}$$

a Levi-Civita tenzor, melyben g jelöli a metrika determinánsát, és ε_{abcd} a Levi-Civita szimbólumot. Kerr-téridő esetén $g = \det(g_{ab}) = -(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 \sin^2 \theta$, és az invari-

ások:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{48M^2 (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) (\rho^4 - 16r^2 a^2 \cos^2 \theta)}{\rho^{12}}, \\
I_2 &= \frac{96M^2 r a \cos \theta (3r^2 - a^2 \cos^2 \theta) (r^2 - 3a^2 \cos^2 \theta)}{\rho^{12}}, \\
I_3 &= \frac{96M^3 (r^3 - 3ra^2 \cos^2 \theta) (r^6 - 33r^4 a^2 \cos^2 \theta + 27r^2 a^4 \cos^4 \theta - 3a^6 \cos^6 \theta)}{\rho^{18}}, \\
I_4 &= \frac{96M^3 a}{\rho^{18}} \cos \theta (3r^2 - a^2 \cos^2 \theta) \cdot \\
&\quad (3r^6 - 27r^4 a^2 \cos^2 \theta + 33r^2 a^4 \cos^4 \theta - a^6 \cos^6 \theta), \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Látható, hogy mind a négy skálár csupán az $\rho = 0$ esetben szinguláris, tehát ez valódi szingularitás, a $\Delta = 0$ pedig koordinátaszingularitás. Valódi szingularitás ebből következően ott található, ahol $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$, azaz ahol $r = 0$ és $\theta = \pi/2$. Ezen feltételek Boyer–Lindquist koordinátákban az $r = 0$ körlap egy speciális részét határozzák meg. Írjuk be az $r = 0$ felület (2.7) egyenletébe, hogy $\sin \pi/2 = 1$. Az így kapott

$$x^2 + y^2 = a^2, \tag{4.8}$$

összefüggés egy egyenlítői síkban fekvő, a sugarú körvonalat határoz meg, amely az $r = 0$ körlapot határolja. A Kerr fekete lyuk szingularitását ezért gyűrűszingularitásnak is nevezik.

4.3. Eseményhorizont

Korábban láttuk, hogy az eseményhorizontot meghatározó feltétel

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 = 0. \tag{4.9}$$

Mivel Δ az r négyzetét tartalmazza, ezért $\Delta = 0$ egyenletnek két megoldása van:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \tag{4.10}$$

azaz a Kerr fekete lyuk két eseményhorizonttal is rendelkezik. Az eseményhorizontok egyenlete az $r = r_{\pm}$ feltétellel adható meg, amely Boyer–Lindquist koordinátákban ellipszoidfelületeket ad. A (2.6) egyenletbe r helyére beírva $r_{\pm}$ -t megkapjuk a két felület egyenletét:

$$\frac{x^2 + y^2}{2M (M \pm \sqrt{M^2 - a^2})} + \frac{z^2}{2M (M \pm \sqrt{M^2 - a^2}) - a^2} = 1. \tag{4.11}$$

Az $a = 0$ esetben $r_+ = 2M$, ami éppen a Schwarzschild-sugár, és $r_- = 0$, ami valódi szingularitásba megy át. Ekkor a fekete lyuknak csupán eseményhorizontja van, amely egy $x^2 + y^2 + z^2 = 4M^2$ egyenletű gömbfelület.

A (4.10) egyenletben a gyökjel alatti kifejezés akkor nemnegatív, ha teljesül az

$$|a| \leq M \quad (4.12)$$

feltétel, tehát az a forgási paraméter abszolút értéke felülről korlátos. Az $|a| > M$ esetben a $\Delta = 0$ egyenletnek nem lennének valós gyökei, ami az eseményhorizont eltűnésével járna együtt. A továbbiakban így kizárólag az $|a| \leq M$ esetet tárgyaljuk. Amennyiben $|a| = M$, szintén csak egy horizont található, ugyanis $r_+ = r_- = M$. Ennek egyenlete:

$$\frac{x^2 + y^2}{M^2 - a^2} + \frac{z^2}{M^2} = 1. \quad (4.13)$$

Az ilyen fekete lyukat extrémális Kerr fekete lyuknak nevezzük.

4.4. Stacionárius határfelület és végtelen vörösel-tolódási felület

Tekintsünk egy fotont, amely a téridő egy rögzített pontjából indul $\pm \frac{d}{d\varphi}$ irányba ([2] forrás 13.3. fejezete). Ekkor a pályája mentén r és θ koordináták értéke állandó, tehát az ívelemnégyzet dr^2 és $d\theta^2$ tagjai eltűnnek, így

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}dtd\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 = 0, \quad (4.14)$$

ahol felhasználtuk, hogy fotonok esetén az ívelemnégyzet mindig nullával egyenlő. A (4.14) összefüggésből képzett $g_{\varphi\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2g_{t\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + g_{tt} = 0$ egyenlet megoldásai:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}}. \quad (4.15)$$

Vizsgáljuk meg a megoldásokat azon speciális felületeken, ahol $g_{tt} = 0$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{2g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0. \quad (4.16)$$

Az első megoldást kapjuk abban az esetben, amikor a foton a fekete lyuk forgásával megegyező, és a másodikat, amikor azzal ellentétes irányba indul. Az utóbbi esetben tehát $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, azaz a foton nyugalomban marad, ezért a $g_{tt} = 0$ feltételt teljesítő felületeket stacionárius határfelületnek nevezzük. A nyugalmi tömeggel rendelkező

részecskék a fotonnál csak alacsonyabb sebességet érhetnek el, tehát a fekete lyuk forgásával együtt fognak mozogni, bármekkora ellentétes irányú kezdeti impulzusnyomatékkal is rendelkeztek.

A stacionárius határfelületen belül, ahol g_{tt} pozitív, semmilyen megfigyelő nem maradhat nyugalomban. Ennek belátásához tekintsünk egy részecskét, amely a $g_{tt} > 0$ régióban helyezkedik el. Ha a tér egy adott pontjában rögzített helyen lenne, akkor a négyessebessége $u^a = (u^t, 0, 0, 0)$ alakú volna. A négyessebesség hossza állandó:

$$g_{ab}u^a u^b = g_{tt} (u^t)^2 = -1 . \quad (4.17)$$

A fenti egyenlet azonban nem teljesülhet, ha $g_{tt} > 0$, tehát a négyessebességnek tartalmaznia kell nemnulla térszerű komponenseket is.

A $g_{tt} = 0$ felületek a gravitációs vöröseltolódás szempontjából is rendelkeznek egy érdekes tulajdonsággal. Stacionárius téridőben a rögzített forrás által kibocsátott ν_K frekvenciájú fotont a rögzített megfigyelő

$$\nu_D = \nu_K \sqrt{\frac{g_{tt}(K)}{g_{tt}(D)}} \quad (4.18)$$

frekvenciával detektálja, ahol $g_{tt}(K)$ és $g_{tt}(D)$ jelöli g_{tt} -t a kibocsátás valamint a detektálás helyén és idejében. A $g_{tt}(K) \rightarrow 0$ határesetben $\nu_D \rightarrow 0$, tehát a $g_{tt} = 0$ felületről emittált foton végtelen vöröseltolódást szenved. Emiatt ezen felületet végtelen vöröseltolódási felületnek is nevezzük.

Kerr fekete lyuk esetén, Boyer–Lindquist koordinátákkal dolgozva keressük meg az S -sel jelölt stacionárius határfelületet, vagy végtelen vöröseltolódási felületet. Ehhez g_{tt} zérushelyét kell megtalálnunk:

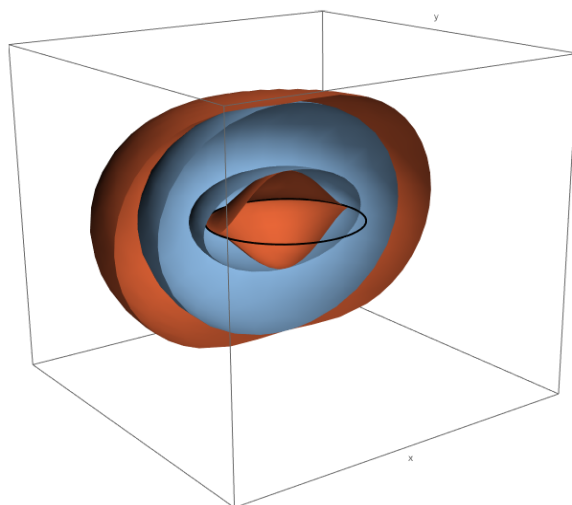
$$g_{tt} = 1 - \frac{2Mr}{\rho^2} = \frac{r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta}{\rho^2} = 0 . \quad (4.19)$$

Ennek az egyenletnek két megoldása is van, tehát a forgó fekete lyuk két ilyen S^+ és S^- felülettel is rendelkezik. A megoldások a következők:

$$r_{S^\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} . \quad (4.20)$$

Az S^+ és S^- felületeket az $r = r_{S^\pm}$ esetben kapjuk, amelyek általános esetben nem, azonban ha $a = 0$, akkor egybeesnek az eseményhorizonttal, ugyanis ekkor $r_{S^+} = 2M$ és $r_{S^-} = 0$. Az (2.6) összefüggésbe $r_{S^\pm}$ -t behelyettesítve megkaphatók az $S^\pm$ felületek egyenletei:

$$\frac{x^2 + y^2}{2M (M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}) - a^2 (1 + \cos^2 \theta)} + \frac{z^2}{2M (M \pm \sqrt{M^2 - a^2}) - a^2 \cos^2 \theta} = 1 . \quad (4.21)$$



4.1. ábra. Az ábra a Kerr-fekete lyuk szerkezetét mutatja be. A fekete kör az a sugarú gyűrűszingularitást, a piros felületek az $S^\pm$ stacionárius határfelületeket, és a kék ellipszoidfelületek az eseményhorizontokat ábrázolják. A külső horizont és a külső stacionárius határfelület között található az ergorégió.

4.5. Ergorégió és Penrose-folyamat

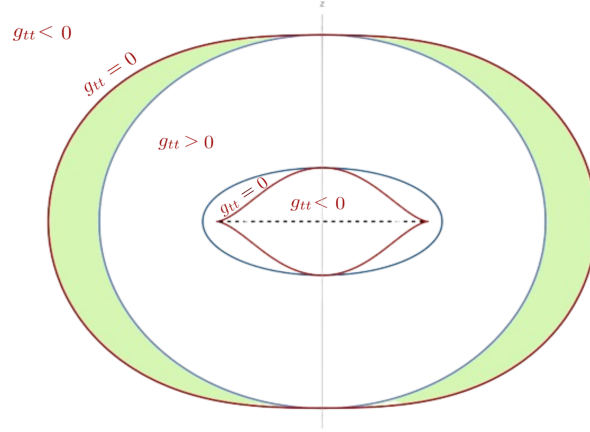
A Kerr fekete lyuk külső eseményhorizontja és külső stacionárius határfelülete közötti térrészt ergorégióknak nevezik. Az ergorégió azzal a speciális tulajdonsággal rendelkezik, hogy lehetséges belőle energiát nyerni a fekete lyuk tömegének és forgási energiájának a rovására. Ezen eljárást Penrose-folyamatnak hívják ([2] forrás 13.9. fejezete).

Tekintsünk egy a végtelenben lévő, térben rögzített helyzetű megfigyelőt, melynek négyessebessége $u^a = (1, 0, 0, 0)$. Egy K esemény során a megfigyelő kibocsát egy X részecskét a fekete lyuk ergorégiójába, melynek energiája a megfigyelő helyzetéből vizsgálva

$$E^{(X)} = \mathbf{p}^{(X)}(K) \cdot \mathbf{u} = p_t^{(X)}(K) , \quad (4.22)$$

ahol $\mathbf{p}^{(X)}(K)$ a részecske négyesimpulzusa a K eseménykor.

Tegyük fel, hogy a részecske, mikor már az ergorégióban tartózkodik, egy Y és egy Z részecskére bomlik egy B -vel jelölt esemény során. Ezután Z mozogjon úgy, hogy idővel eljusson a végtelenig, ahol a megfigyelő az M esemény során az energiáját $E^{(Z)} = p_t^{(Z)}(M)$ nagyságúnak méri. Mivel a Kerr-metrika időfüggetlen, ezért a geodetikus pálya mentén mozgó részecske kovariáns négyesimpulzusának időszerű kompo-



4.2. ábra. A metrika g_{tt} komponensének előjele a Kerr fekete lyuk z forgástengellyel párhuzamos metszetén ábrázolva. Az eseményhorizontok kék, a stacionárius határfelületek piros, a szingularitás fekete, szaggatott vonallal van jelölve. A zöld tartomány az ergorégió.

nense megmaradó mennyiség. Írhatjuk tehát, hogy:

$$p_t^{(Z)}(B) = p_t^{(Z)}(M) \quad , \quad \text{és} \quad p_t^{(X)}(K) = p_t^{(X)}(B) \quad . \quad (4.23)$$

Az $X \rightarrow Y + Z$ bomlásra felírható

$$\mathbf{p}^{(X)}(B) = \mathbf{p}^{(Y)}(B) + \mathbf{p}^{(Z)}(B) \quad (4.24)$$

impulzusmegmaradásnak az időszerű komponensekre vonatkozó egyenlete átalakítható:

$$E^{(Z)} = E^{(X)} - p_t^{(Y)}(B) \quad . \quad (4.25)$$

Fontos megjegyezni, hogy bármely részecske esetén $p_t = \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{p}$, ahol $\mathbf{e}_t$ a t koordinátához tartozó bázisvektor, melynek hossz négyzete $\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t = g_{tt}$ nagyságú. A g_{tt} komponens előjelének változásait áttekinthetően a 4.2 ábra jeleníti meg.

Ha Y részecske kijut az ergorégióból, akkor olyan térrészbe kerül, ahol $g_{tt} < 0$, tehát $\mathbf{e}_t$ időszerű. Így $p_t^{(Y)}$ arányos Y egy $\mathbf{e}_t$ irányban haladó megfigyelő által mért energiájával, tehát $p_t^{(Y)}$ pozitív. A (4.25) egyenletről leolvasható, hogy ebben az esetben $E^{(Z)} < E^{(X)}$, azaz a kijutó Z részecske kevesebb energiát hordoz, mint az eredetileg belőtt X részecske. Ha azonban Y belezuhan a fekete lyukba, akkor olyan térrészben marad, ahol g_{tt} pozitív, azaz $\mathbf{e}_t$ térszerű, és ennek megfelelően $p_t^{(Y)}$ is egy térszerű komponens, melynek előjele tetszőleges. Amennyiben $p_t^{(Y)}$ negatív, az $E^{(Z)} > E^{(X)}$

egyenlőtlenség áll fenn, tehát nagyobb energia távozott az ergorégióból, mint amennyi kezdetben belekerült.

A kérdésre, hogy mi a többletenergia forrása, úgy kaphatunk választ, hogy megvizsgáljuk, milyen változásokat idéz elő a fekete lyukban a Penrose-folyamat. Miután az Y részecske behullott a fekete lyukba, annak kezdeti M tömege és $J = Ma$ impulzusmomentuma az

$$M \rightarrow M + p_t^{(Y)}, \quad J \rightarrow J - p_\varphi^{(Y)} \quad (4.26)$$

értékekre változott. Negatív $p_t^{(Y)}$ esetén látható, hogy a fekete lyuk tömege csökken. Annak belátásához, hogy az impulzusmomentum is csökken, tekintsünk az ergorégióban egy rögzített r és θ helyzetű megfigyelőt. Ahogy a 4.1. alfejezetben láttuk, az ilyen megfigyelőnek a fekete lyuk forgásával együtt kell mozognia. Így a négyessebessége $u^a = u^t(1, 0, 0, \omega)$, ahol $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ a szögsebessége a végtelenből nézve. Ez a megfigyelő Y részecske energiájának mérésekor az

$$E^{(Y)} = \mathbf{p}^{(Y)} \cdot \mathbf{u} = u^t \left(p_t^{(Y)} + p_\varphi^{(Y)} \omega \right) = u^t \left(p_t^{(Y)} - L\omega \right)$$

értéket kapná, ahol felhasználtuk, hogy az impulzusmomentum forgástengely irányú komponense $L = -p_\varphi^{(Y)}$. Hogy a fenti energia pozitív legyen, az

$$L < \frac{p_t^{(Y)}}{\omega}$$

feltételnek teljesülnie kell. Mivel $p_t^{(Y)}$ negatív, és ω az ergorégióban pozitív, így L negatív lesz. A fekete lyukba hulló részecske tehát negatív impulzusmomentummal rendelkezik, amely csökkenteni fogja a fekete lyuk összimpulzusmomentumát.

5. fejezet

A Kerr-téridő maximális kiterjesztése

5.1. Kruskal-koordináták

Az egyszerűség kedvéért vegyük a Kerr-téridő egy kétdimenziós szeletét. Rögzítsük a $\theta = 0$ feltételt, ami éppen a forgástengelyt adja. Ekkor a metrika az alábbi alakra egyszerűsödik ([10] forrás 5.3.9. fejezete):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2} \right) dt^2 + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr^2 = \quad (5.1)$$

$$- \frac{\Delta}{r^2 + a^2} \left(dt - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr \right) \left(dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr \right) . \quad (5.2)$$

Ugyanezt írhatjuk a

$$ds^2 = -f du dv \quad (5.3)$$

formában is, ahol $u = t - r^*$ és $v = t + r^*$, valamint

$$r^* = \int \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr = r + \frac{Mr_+}{\sqrt{M^2 - a^2}} \ln \left| \frac{r}{r_+} - 1 \right| - \frac{Mr_-}{\sqrt{M^2 - a^2}} \ln \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right| , \quad (5.4)$$

és $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ a külső és belső eseményhorizontokat jelöli. Látható, hogy az (5.3) összefüggésben szereplő f függvény

$$f = \frac{\Delta}{r^2 + a^2} = \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^2 + a^2} . \quad (5.5)$$

A metrika koordinátaszingularitása a horizontokon eltüntethető a Kruskal-koordináták bevezetésével. Ehhez először tekintsük a metrikát az $r = r_+$ horizont közelében. Az f függvényt ekkor közelíthetjük az

$$f \approx 2\kappa_+ (r - r_+) \quad (5.6)$$

formulával, ahol $\kappa_+ = \frac{1}{2} \frac{df(r)}{dr} \Big|_{r=r_+}$. Most fejezzük ki az f függvényt u és v koordinátákkal is. Mivel

$$r^* = \int \frac{dr}{f} \approx \frac{1}{2\kappa_+} \ln |\kappa_+ (r - r_+)| , \quad (5.7)$$

ezért írhatjuk, hogy

$$f = \pm 2 e^{2\kappa_+ r^*} = \pm 2 e^{\kappa_+(v-u)} , \quad (5.8)$$

ahol a felső előjel az $r > r_+$, és az alsó az $r < r_+$ tartományban érvényes. A Kruskal-koordinátákat a következőképpen definiáljuk:

$$U_+ = \mp e^{-\kappa_+ u}, \quad V_+ = e^{\kappa_+ v} . \quad (5.9)$$

Ezeket alkalmazva az ívelemnégyszet az $r = r_+$ körül a $ds^2 \approx -2\kappa_+^{-2} dU_+ dV_+$ formulával közelíthető. A metrika tehát a külső horizonton regulárisává válik, azonban a belső horizonton szinguláris marad. Ennek kiküszöbölésére hasonlóképpen kell eljárunk, mint a külső horizont esetében. Az $r = r_-$ közelében $f \approx -2\kappa_- (r - r_-)$, ahol $\kappa_- = \frac{1}{2} \left| \frac{df(r)}{dr} \right|_{r=r_-}$. Ezekből következik, hogy $f \approx \mp 2 e^{-2\kappa_- r^*} = \mp 2 e^{\kappa_-(u-v)}$ tehát az új koordináták:

$$U_- = \mp e^{\kappa_- u}, \quad V_- = -e^{-\kappa_- v} , \quad (5.10)$$

és az ívelemnégyszet a $ds^2 \approx -2\kappa_-^{-2} dU_- dV_-$ alakot ölti.

5.2. A Kerr-téridő Penrose-diagrammja

A megfelelő koordináta transzformációval elérhető, hogy a végtelen mennyiségek korlátozva váljanak, ezzel létrehozva a teljes téridő szerkezetének egy szemléletes reprezentációját, az úgynevezett Penrose-diagrammot. Az ehhez szükséges számításokat a [11] forrásban fellelhető Schwarzschild-téridőre vonatkozó számítások analógiájára végeztem el.

Vezessük be a Kruskal-koordinátákból képzett

$$\begin{aligned} \tilde{U}_+ &= \arctan U_+ , & \tilde{V}_+ &= \arctan V_+ , \\ \tilde{U}_- &= \arctan U_- , & \tilde{V}_- &= \arctan V_- \end{aligned} \quad (5.11)$$

koordinátákat. Erre azért van szükség, mert az arkusz tangens függvény a teljes $\mathbb{R}$ halmazt képezi le a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumra, azaz értelmezési tartománya nem, de értékkészlete már korlátos. A Penrose-diagrammot a $T_{\pm} = (\tilde{V}_{\pm} + \tilde{U}_{\pm})/2$ és $R_{\pm} = (\tilde{V}_{\pm} - \tilde{U}_{\pm})/2$ koordinátarendszerekben ábrázoljuk, és az értelmezési tartományt kiterjesztjük a határokra is, azaz $T_{\pm}, R_{\pm} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Szem előtt kell tartani azonban,

hogy a $+$ és $-$ indexek kettő különböző koordinátarendszerhez tartoznak. Ha egyszerre szeretnénk a kettőt ábrázolni, akkor ismernünk kell az egymáshoz viszonyított helyzetüket. Ehhez megkeressük a $-$ indexű rendszer origóját, azaz hogy milyen u és v koordináták esetén lesz $T_- = R_- = 0$, majd azt, hogy ugyanezen u és v koordináták milyen T_+ és R_+ koordinátához tartoznak. Először tekintjük a

$$T_- = \frac{1}{2} [\arctan(-e^{-\kappa_-} v) + \arctan(\mp e^{\kappa_-} u)] = 0 \quad (5.12)$$

egyenletet, melyet átrendezve a

$$e^{-\kappa_-} v = \mp e^{\kappa_-} u \quad (5.13)$$

relációhoz jutunk. Mivel az exponenciális kifejezések nem vehetnek fel negatív értékeket, ezért a fenti egyenlőség mindkét előjel esetén csak a

$$v \rightarrow \infty \quad \text{és} \quad u \rightarrow -\infty \quad (5.14)$$

határesetben teljesül. Sőt, ekkor R_- is nullává válik:

$$R_- = \frac{1}{2} [\arctan(-e^{-\kappa_-} v) - \arctan(\mp e^{\kappa_-} u)] \rightarrow 0. \quad (5.15)$$

Ugyanebben a határesetben a $+$ indexű koordináták:

$$\begin{aligned} T_+ &= \frac{1}{2} [\arctan(e^{\kappa_+} v) + \arctan(e^{-\kappa_+} u)] \rightarrow \frac{\pi}{2}, \\ R_+ &= \frac{1}{2} [\arctan(e^{\kappa_+} v) - \arctan(e^{-\kappa_+} u)] \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5.16)$$

ahol az U_+ koordináta (5.9) definíciójában az alsó előjelet használtuk, amely a két horizont közötti tartományban érvényes, ahol mindkét koordinátarendszer értelmezve van. Látható tehát, hogy a T_- és T_+ függőleges tengelyek egybeesnek, de az R_- vízszintes tengely pozitív irányban el van csúsztatva az R_+ tengelyhez képest $\pi/2$ -vel.

Az $r =$ állandó felületeket a külső eseményhorizonton kívül, azaz az $r > r_+$ tartományban az

$$U_+ V_+ = -|\kappa_+ (r - r_+)| \quad (5.17)$$

összefüggés vizsgálatával kapjuk meg. Az egyenlet bal oldalát írjuk fel az új koordinátákban is:

$$\begin{aligned} \tan \tilde{U}_+ \tan \tilde{V}_+ &= \tan(T_+ - R_+) \tan(T_+ + R_+) = \\ &= \frac{\cos 2R_+ - \cos 2T_+}{\cos 2R_+ + \cos 2T_+} = -|\kappa_+ (r - r_+)|. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ezt átalakítva a

$$T_+ = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{1 + |\kappa_+ (r - r_+)|}{1 - |\kappa_+ (r - r_+)|} \cos 2R_+ \right) \quad (5.19)$$

összefüggést nyerjük, amely segítségével az $r =$ állandó felületek könnyen ábrázolhatók.

Tekintsük először az $r \rightarrow \infty$ esetet. Ekkor

$$\frac{\cos 2R_+ - \cos 2T_+}{\cos 2R_+ + \cos 2T_+} \rightarrow -\infty , \quad (5.20)$$

ami úgy teljesülhet, ha a nevező nulla, azaz $\cos 2T_+ = -\cos 2R_+ = \cos(\pi - 2R_+)$, melynek megoldásai:

$$T_+ = \pm R_+ + (2n + 1) \frac{\pi}{2} , \quad (5.21)$$

ahol n egy egész szám. A megfelelő értelmezési tartományon belül ezek -1 és $+1$ meredekségű szakaszokat adnak. Az 5.1 ábrán fekete vonallal vannak jelölve.

A külső horizont ábrázolásához az (5.19) egyenletben végezzük el a $r = r_+$ helyettesítést:

$$T_+ = \pm R_+ + n\pi , \quad (5.22)$$

amely $n = 0$ esetén az ábrán kék vonallal jelölt, origón átmenő, ± 1 meredekségű szakaszokat adja. Az eddig tárgyalt szakaszok által határolt négyzet (I. régió) a Kerr fekete lyukon kívül található, aszimptotikusan sík téridő.

A belső horizonthoz az T_+ és R_+ koordinátákról át kell térni a T_- és R_- koordinátákra. Emlékezzünk tehát, hogy a következő összefüggések egy, az előzőhöz képest függőlegesen, $+\pi/2$ -vel eltoltt koordináta-rendszerben érvényesek. Mivel $U_- V_- = |\kappa_- (r - r_-)|$, és ennek megfelelően

$$T_- = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{1 - |\kappa_- (r - r_-)|}{1 + |\kappa_- (r - r_-)|} \cos 2R_- \right) , \quad (5.23)$$

így az $r = r_-$ feltétel mellett a megoldások a külső horizonthoz hasonlóan

$$T_- = \pm R_- + n\pi . \quad (5.24)$$

melyek az ábrán a piros szakaszok.

Az $r = 0$ szingularitást az $U_- V_- = -1$ feltétel határozza meg. Ebből következik, hogy

$$\frac{\cos 2R_- - \cos 2T_-}{\cos 2R_- + \cos 2T_-} = -1 , \quad (5.25)$$

melyre a megoldások

$$R_- = \pm \frac{\pi}{4} , \quad (5.26)$$

azaz függőleges szakaszok a vízszintes tengely $\frac{\pi}{4}$ abszolút értékénél, mind a pozitív, mind a negatív oldalon. A diagrammon fekete szaggatott vonallal vannak ábrázolva.

A Kerr-téridő elméletben kiterjeszthető negatív r koordinátákra is. Amennyiben $r \rightarrow -\infty$, $U_- V_- = -|\kappa_- (r - r_-)| \rightarrow -\infty$, tehát az $r \rightarrow +\infty$ eset (5.21) megoldásához hasonló

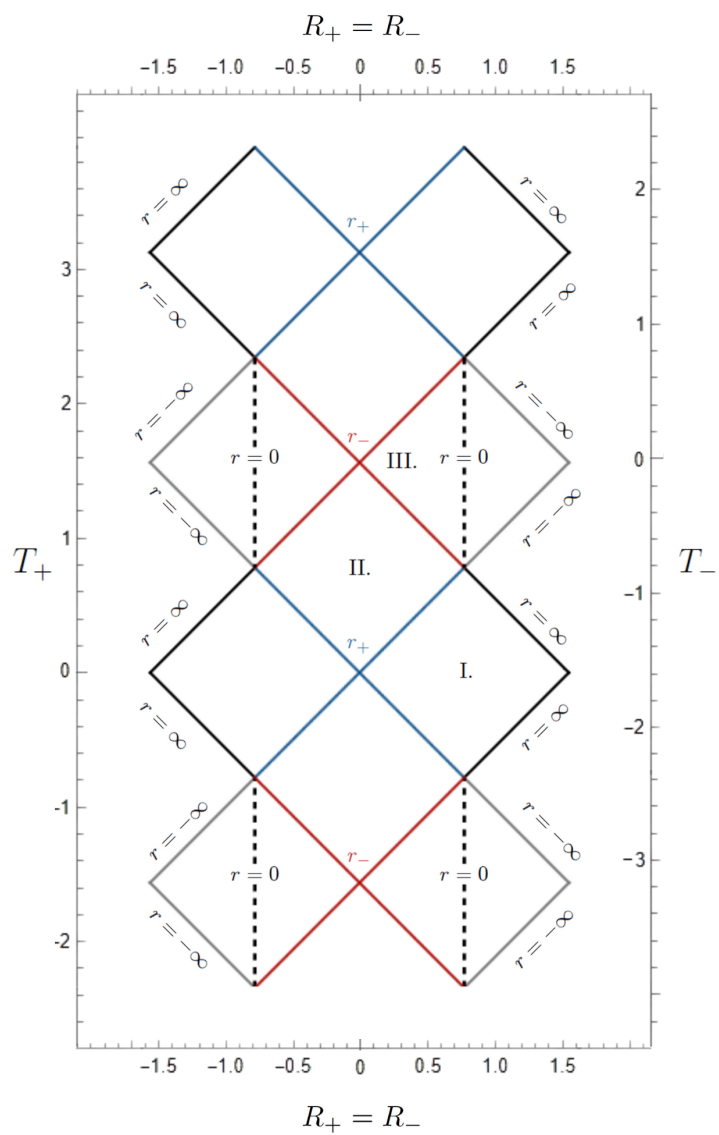
$$T_- = \pm R_- + (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

megoldásokat kapunk, amelyeket az ábra szürke szakaszokként jelenít meg.

Schwarzschild fekete lyuk esetében, ha egy megfigyelő átlépi a horizontot, akkor elkerülhetetlen, hogy a szingularitásba essen ([10] forrás 5.3.9. fejezete). A Kerr fekete lyuk szingularitása azonban a Schwarzschildéval ellentétben nem térszerű, hanem idő-szerű, tehát a szingularitás elkerülhető. Ha a megfigyelő a II. tartományban tartózkodik, azaz a külső horizontot átlépte, de a belsőt még nem, akkor a mozgása szükségszerűen a csökkenő r irányába kell hogy mutasson, ugyanis r idő-szerű. Azonban a belső horizonton belül az r ismét térszerű lesz, így a megfigyelő mind az r csökkenésének és növekedésének irányában is mozoghat. A megfigyelő választhat egy, a szingularitást elkerülő pályát, és újból átlépheti a belső horizontot, amely valójában nem az eredeti horizont, hanem annak egy másolata. Mivel az r idő-szerű, ezért a megfigyelő szükségszerűen a külső horizont felé sodródik. A téridő ezen horizonton túli kiterjesztéséhez újabb Kruskal-koordináták (U_+, V_+) , és azokból képezhető (T_+, R_+) koordináták bevezetésére van szükség. Amint a megfigyelő ezt átlépte egy olyan aszimptotikusan sík téridőben fogja találni magát, amely másolata az előzőnek. Itt dönthet úgy is, hogy újból a fekete lyuk felé veszi az irányt, és megismétli előző manőverét, melynek eredménye, hogy egy még újabb univerzumba jut. A maximálisan kiterjesztett Kerr-téridő tehát fekete lyukakkal, mint kapukkal összekötött univerzumok végtelen láncolata.

A téridő matematikailag kiterjeszthető a szingularitáson túlra is, ugyanis az $r = 0$ Kruskal-koordinátákban $U_- V_- = -1$, tehát nem szinguláris. A szingularitáson túli régió aszimptotikusan sík, ahol az r koordináta negatív értékeket vesz fel. Itt nincsenek horizontok, tehát a szingularitás egy csupasz szingularitás.

Fontos megjegyezni, hogy az előző bekezdésekben leírtaknál feltettük, hogy a téridő tökéletesen tengelyszimmetrikus és stacionárius. A Kerr fekete lyuk belső szerkezete azonban érzékeny a perturbációkra, kisebb változások is jelentős mértékben megváltoztathatják azt. Éppen ezért a fekete lyuk alagutak és szingularitáson túli tartományok a valóságban nem valószínű, hogy előfordulnak.



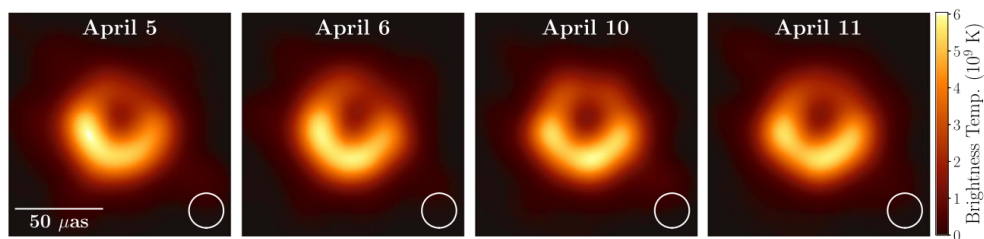
5.1. ábra. A Kerr-téríidő Penrose-diagrammja.

6. fejezet

Event Horizon Teleszkóp

Az Event Horizon Teleszkóp (Eseményhorizont Teleszkóp, röviden EHT) egy nemzetközi tudományos összefogás, mely az egész Földet behálózó rádióteleszkóp-rendszerrel elkészítette az emberiség első feketelyuk-felvételeit. A képek a Virgo-halmazban található M87 galaxis közepén elhelyezkedő szupermasszív fekete lyukról készültek [12].

Az EHT egy nagyon hosszú bázisvonalú interferometriai (Very Long Baseline Interferometry, vagy röviden VLBI) megfigyelés, amely a Föld különböző pontjain lévő rádióteleszkópok mérései adatait együttesen használja fel. A teleszkóprendszer névleges szögfelbontása $\frac{\lambda}{L}$, ahol λ a megfigyelt hullámhossz és L a maximális bázisvonal hossza, azaz a mérésben részt vevő teleszkópok legnagyobb távolsága. Mivel ezzel a módszerrel az L a Föld átmérőjének nagyságrendjébe esik, ezért igen nagy felbontás érhető el. Mondhatjuk tehát, hogy olyan, mintha a méréseket egy földméretű virtuális mérőszközzel végezték volna. Az egyes teleszkópok egyidejűleg rögzítik a vizsgált objektum felől érkező jeleket, és az így kapott adatokat később összesítik. A jelsorozatok időbeli szinkronicitása rendkívül fontos, ehhez referenciaként a hidrogénmézer frekvenciáját használták fel.



6.1. ábra. Az Event Horizon Teleszkóp felvételei az M87* fekete lyukról [13].

Az M87 óriási elliptikus galaxis központjában helyet foglaló szupermasszív fekete lyuk képe 2017 áprilisában készült négy napi mérés eredményeként. Az EHT teleszkópjai éjszakánként 7-25 darab 3-7 másodperc hosszú felvételt rögzítettek $\lambda = 1,3 \text{ mm}$ hullámhosszon. A mérési adatok kiértékelésével kapott képek egy hozzávetőlegesen 40 ívmikroszekundum átmérőjű, aszimmetrikus gyűrűt ábrázolnak egy sötét árnyékkal a közepén.

6.1. Az M87* feketelyuk-felvételei

6.1.1. A fekete lyuk természete

A kérdésre, hogy milyen objektum rejtőzik a központi árnyékban választ ad annak mérete és alakja [15]. Amennyiben egy forgó fekete lyuk foglalna helyet a gyűrű közepontjában, az árnyék alakját kétféle tényező határozná meg legmarkánsabban. Az első a forgó égitestek lapultságát okozó deformáció, a második pedig a 4.1. fejezetben tárgyalt effektus, melynek során a fekete lyuk forgása magával ragadja a téridőt a környezetében. Az utóbbi a forgástengelyre merőleges irányokban összenyomja az árnyékot, így éppen ellenkező hatást vált ki, mint az első. Kerr fekete lyukak esetén ez a két jelenség éppen kioltja egymást, tehát az árnyék jó közelítéssel kör alakú, ami összhangban van az EHT felvételeivel. A képek tehát alátámasztották a feltételezést, miszerint az M87* egy Kerr fekete lyuk.

6.1.2. Legbelső stabil körpálya

Az EHT felvételein látható fényes gyűrű a fekete lyukat körülvevő akkréciós korong sugárzását ábrázolja. A fekete lyuk a központi sötét árnyékban helyezkedik el, de nem tölti ki azt teljesen, ugyanis az eseményhorizont beljebb található, mint a sötét folt határa. Az árnyékot a legbelső stabil körpálya határolja, az a körvonal, amelynél beljebb haladva oly mértékű a gravitációs vonzás, hogy az anyag szükségszerűen belehullik a fekete lyukba. A legbelső stabil körpálya sugarának meghatározásához meg kell vizsgálnunk az egyenlítői sík geodetikus pályáit ([2] forrás 13.10–13.14. fejezetei).

A Kerr-téridő stacionárius és tengelyszimmetrikus, ezért a p_t és p_φ impulzuskomponensek megmaradó mennyiségek. Továbbá az egyenlítői síkon a tükrözésekre való szimmetria miatt azon részecskék, melyek kezdetben az egyenlítői síkon voltak, azaz $p^\theta = 0$, végig a síkon maradnak. Az egyenlítői síkot a $\theta = \frac{\pi}{2}$ rögzítésével kapjuk, így a

(3.84) metrika a

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{4Ma}{r} dt d\varphi + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) d\varphi^2 \quad (6.1)$$

alakra egyszerűsödik. Felhasználva a p_t és p_φ megmaradását egy egységnyi tömegű részecskén a

$$\begin{aligned} p_t &= g_{tt}\dot{t} + g_{t\varphi}\dot{\varphi} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} - \frac{2Ma}{r} \dot{\varphi} = -k, \\ p_\varphi &= g_{\varphi t}\dot{t} + g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi} = -\frac{2Ma}{r} \dot{t} + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) \dot{\varphi} = h \end{aligned} \quad (6.2)$$

egyenletrendszert nyerjük, ahol k és h mozgásállandók. A fenti egyenletek a nyugalmi tömeg nélküli fotonra is érvényesek, ugyanis a megfelelő affin paraméterezéssel fennáll a $p^a = \dot{x}^a$ egyenlőség. A k és h állandók fizikai jelentéssel bírnak, k a részecske energiájával, h pedig a forgástengely irányú impulzusmomentummal arányos. Fejezzük ki az egyenletrendszerből a deriváltakat:

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{1}{\Delta} \left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) k - \frac{2Ma}{r} h \right], \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{2Ma}{r} k + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) h \right]. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Az r koordináta első deriváltját megkaphatjuk felhasználva, hogy a négyesimpulzus hosszénegyzete állandó:

$$g^{ab}p_ap_b = g^{tt}p_t^2 + 2g^{t\varphi}p_tp_\varphi + g^{\varphi\varphi}p_\varphi^2 + g^{rr}p_r^2 = -\varepsilon^2, \quad (6.4)$$

ahol tömeges részecske esetén $\varepsilon^2 = 1$ és foton esetén $\varepsilon^2 = 0$. Mivel $p_r = g_{rr}\dot{r}$ és $g^{rr} = 1/g_{rr}$, a fenti egyenlet átírható az

$$\dot{r}^2 = g^{rr} \left(-\varepsilon^2 - g^{tt}k^2 + 2g^{t\varphi}kh - g^{\varphi\varphi}h^2 \right) \quad (6.5)$$

formára. Az inverz metrika $g^{tt} = -\frac{1}{\Delta} \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \right)$, $g^{t\varphi} = -\frac{2Ma}{\Delta r}$, $g^{rr} = \frac{\Delta}{r^2}$ és $g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{\Delta} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)$ komponenseinek behelyettesítése után az

$$\dot{r}^2 = k^2 - \varepsilon^2 + \frac{2\varepsilon^2 M}{r} + \frac{a^2(k^2 - \varepsilon^2) - h^2}{r^2} + \frac{2M(h - ak)^2}{r^3} \quad (6.6)$$

összefüggést kapjuk.

Nyugalmi tömeggel rendelkező részecske esetén a (6.3) egyenletek az időszerű geodetikus egyenletek, és a (6.6) egyenlet, az $\varepsilon^2 = 1$ helyettesítést követően, a részecske energiát kifejező egyenlet:

$$\dot{r}^2 = k^2 - 1 + \frac{2M}{r} + \frac{a^2(k^2 - 1) - h^2}{r^2} + \frac{2M(h - ak)^2}{r^3}. \quad (6.7)$$

A fenti összefüggést átrendezve:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r, h, k) = \frac{1}{2}(k^2 - 1) , \quad (6.8)$$

ahol a V_{eff} jelölésű effektív potenciál:

$$V_{eff}(r, h, k) = -\frac{M}{r} - \frac{a^2(k^2 - 1) - h^2}{2r^2} - \frac{M(h - ak)^2}{r^3} . \quad (6.9)$$

Egy r_c sugarú körpályán történő mozgás feltétele, hogy $\dot{r} = 0$, valamint a $\frac{dV_{eff}}{dr}$ derivált a körpálya mentén nulla legyen. Ezen feltételekből felírható

$$V_{eff}(r, h, k) = \frac{1}{2}(k^2 - 1) , \quad \frac{dV_{eff}}{dr}|_{r=r_c} = 0 \quad (6.10)$$

egyenletekből h és k meghatározható. A (6.10) első egyenletébe helyettesítsük be V_{eff} definícióját, és vezessük be az $u = \frac{1}{r}$ változót:

$$-Mu - \frac{1}{2}[a^2(k^2 - 1) - h^2]u^2 - M(h - ak)^2u^3 = \frac{1}{2}(k^2 - 1) , \quad (6.11)$$

és az így kapott egyenletet deriváljuk u szerint:

$$-M - [a^2(k^2 - 1) - h^2]u - 3M(h - ak)^2u^2 = 0 . \quad (6.12)$$

Az utolsó lépésnél felhasználtuk, hogy $\frac{dV_{eff}}{dr} = \frac{dV_{eff}}{du} \frac{du}{dr} = 0$, tehát $\frac{dV_{eff}}{du} = 0$. A számolást tovább egyszerűsíti, ha elvégezzük az $x = h - ak$ helyettesítést. Ekkor a fenti két egyenlet a

$$\begin{aligned} -Mu + \frac{1}{2}(x^2 + 2akx + a^2)u^2 - Mx^2u^3 &= \frac{1}{2}(k^2 - 1) , \\ -M + (x^2 + 2akx + a^2)u - 3Mx^2u^2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

alakra hozható. Kivonva a (6.13) első egyenletének kétszeresét a második egyenlet u -szorosából a

$$k^2 = 1 - Mu + Mx^2u^3 \quad (6.14)$$

összefüggéshez jutunk. Eliminálva k -t a (6.13) második egyenletével és a (6.14) egyenlettel az

$$\begin{aligned} &u^2 [(3Mu - 1)^2 - 4a^2Mu^3] x^4 \\ &- 2u [(3Mu - 1)(a^2u - M) - 2ua^2(Mu - 1)] x^2 + (a^2u - M)^2 = 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

összefüggést kapjuk, amely egy másodfokú egyenlet x^2 -re. Alkalmazva a megoldóképletet, a megoldásokra az

$$x^2 = \frac{(a\sqrt{u} \pm \sqrt{M})^2}{u(1 - 3Mu \mp 2a\sqrt{Mu^3})} \quad (6.16)$$

formulát találjuk. Ezt beírva a (6.14)-be, k -ra az alábbi összefüggést kapjuk:

$$k = -\frac{1 - 2Mu \mp a\sqrt{Mu^3}}{\sqrt{1 - 3Mu \mp 2a\sqrt{Mu^3}}} . \quad (6.17)$$

Ennek ismeretében, a $h = x + ak$ egyenlőség felhasználásával h értékeire a

$$h = \pm \frac{\sqrt{M} \left(1 + a^2 u^2 \pm 2a\sqrt{Mu^3} \right)}{\sqrt{u \left(1 - 3Mu \mp 2a\sqrt{Mu^3} \right)}} \quad (6.18)$$

formulát nyerjük.

A (6.10) összefüggések szükséges feltételei annak, hogy a részecske körmozgást végezzen, ám a pálya stabilitását nem biztosítják. Az egyes pályák stabilitásának vizsgálatához az effektív potenciál második deriváltjának előjelét kell megvizsgálni. Ha $\frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} < 0$, akkor a $V_{eff}(r)$ függvény az adott helyen konkáv görbületű, a pálya instabil. Ha azonban $\frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} > 0$, akkor $V_{eff}(r)$ konvex, tehát a pálya potenciálgödörben fut, így az stabil. Azt a pályát, amelyre $\frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} = 0$, marginálisan stabilnak nevezzük. A legbelső stabil körpályát tehát a $\frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} = 0$ feltétel adja meg, hiszen ennél beljebb haladva az összes körpálya instabil. Ezek szerint a pálya mentén, azaz $r = r_c$ -re, a

$$\frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} = \frac{d^2 V_{eff}}{du^2} \left(\frac{du}{dr} \right)^2 + \frac{dV_{eff}}{du} \frac{d^2 u}{dr^2} = u^3 \left(\frac{d^2 V_{eff}}{du^2} + 2 \frac{dV_{eff}}{du} \right) = 0 \quad (6.19)$$

összefüggés teljesül. Mivel $\frac{dV_{eff}}{du} = 0$, így az előző feltétellel egyenértékű, ha $\frac{d^2 V_{eff}}{du^2} = 0$ teljesülését követeljük meg. Ennek megfelelően a (6.13) egyenlet u szerinti deriválása után ugyancsak nullával lesz egyenlő:

$$x^2 + 2akx + a^2 - 6Mx^2u = 0 . \quad (6.20)$$

Ebből fejezzük ki u -t, majd a számlálóban végezzük el az $x = h - ak$ helyettesítéseket:

$$u = \frac{x^2 + 2akx + a^2}{6Mx^2} = \frac{h^2 - a^2(k^2 - 1)}{6Mx^2} . \quad (6.21)$$

A x , k és h változók helyére írjuk be a (6.16), (6.17) és (6.18) formulákat:

$$1 - 3a^2u^2 - 6uM \mp 8a\sqrt{Mu^3} = 0 . \quad (6.22)$$

Ha $u = \frac{1}{r}$ felhasználásával visszatérünk az r változóra, akkor az

$$r^2 - 6Mr - 3a^2 \mp 8a\sqrt{Mr} = 0 \quad (6.23)$$

egyenlethez jutunk, amely megoldása adja a legbelső stabil körpálya sugarát. Az $a = 0$ Schwarzschild határesetben $r = 6M$. Az extrémális Kerr fekete lyukhoz ($a = M$) tartozó megoldások a fekete lyuk forgásával ellentétes irányú körmozgás esetén $r = 9M$, és a forgással megegyező irányú körmozgás esetén $r = M$.

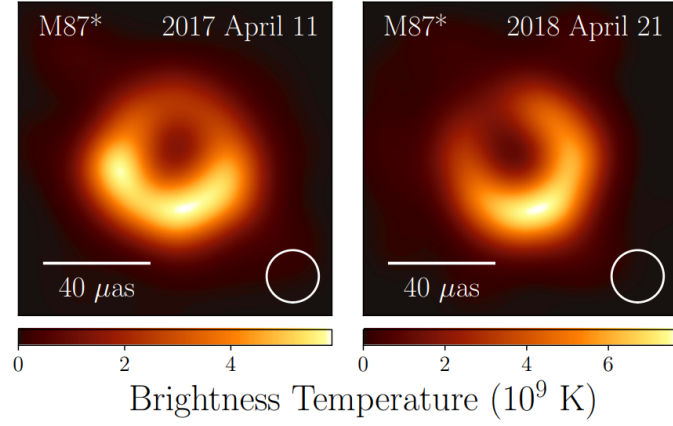
Egy Kerr fekete lyuk két paraméterének, M tömegének és a forgási paraméterének meghatározásához a legbelső stabil körpálya sugarának ismerete nem elegendő, szükséges egy második, ettől független mérés. Az M87* felvételeit összehasonlították magnetohidrodinamikai szimulációkkal, így a tömegére az $M = 6,5 \cdot 10^9 M_\odot$ eredményt kapták [15].

6.1.3. A gyűrű aszimmetriája

Az M87* akkréciós korongja jól látható aszimmetriát mutat, az északi oldala fényesebb, mint a déli. Ez a jelenség a Doppler-effektussal magyarázható [14]. A látótengelyhez képest dőlt síkú korong forog, így a sugárzást kibocsátó anyag egy része közeledik, míg a másik része távolodik a Földtől. A felénk érkező sugárzás Doppler-eltolódást szenved, a közeledés esetén növekszik, távolodás esetén csökken annak intenzitása.

Az aszimmetria fontos információ hordoz a fekete lyuk forgási irányával kapcsolatban, azonban egyedül nem elegendő annak megállapítására. Az M87* nagyenergiájú rádiójet-ek forrása, melynek iránya a kép jobb szélé felé mutat, kissé feljebb a vízszintestől, és a látótengelytől 17° -kal eltérve. A rádiójet-eket alkotó sugárzást a forgó gyűrű bocsátja ki, melynek forgástengelye a jet irányával egybeesik. Az aszimmetria jellegéből megállapítható, hogy a gyűrű impulzuszórási-vektora a Földdel ellentétes irányba mutat, tehát a Fölről nézve a forgás iránya az óramutató járásával megegyezik. Mivel az akkréciós korong a fekete lyukkal együtt forog, így a fekete lyuk forgási iránya is ez lesz.

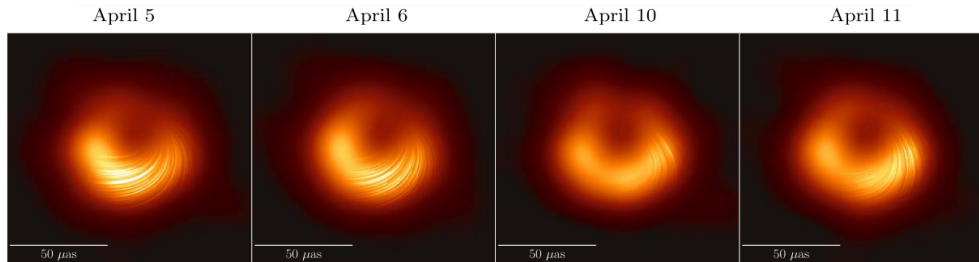
Az Event Horizon Teleszkóp 2018 áprilisában újabb feketelyuk-felvételt készített az M87*-ról [16]. A két felvétel között eltelt egy évben a fekete lyuk mérete változatlan maradt, azonban a gyűrű fényesebb része nagyjából 30° -kal elmozdult. Nagyobb hullámhosszakon végzett mérések megmutatták, hogy az M87* felől érkező jet-ek oszcilláló mozgást végeznek, mely magyarázatot ad a változásra. A jet-ek oszcillációját okozhatja az anyag turbulens, rendezetlen áramlása az akkréciós korongban, vagy a forrásuk precessiója.



6.2. ábra. Az EHT 2017-ben és 2018-ban készült felvételei az M87*-ról [16].

6.1.4. Polarizáció

Az M87*-et körülvevő mágneses mező tanulmányozása céljából a 2017-es megfigyelési adatokat a polarizáció szempontjából is kiértékelte az Event Horizon Teleszkóp csapata [17]. A szupermasszív fekete lyuk körüli gyűrű egy része jelentős lineárisan polarizált-ságot mutat, itt a polarizáció fokának maximuma hozzávetőlegesen 15%. A 6.3 ábra a polarizáció irányát és erősségét szemlélteti. A vektormezők analógiájára, egyfajta „polarizációs erővonalakat” ábrázoltak a már korábban elkészült, csupán az intenzitást megjelenítő felvételekre (6.1 ábra). A vonalak érintője megadja az adott pontban a polarizációs sík irányát, a hosszuk a fény intenzitásának négyzetével arányos, áttetszőségük pedig azzal fordítottan arányos.



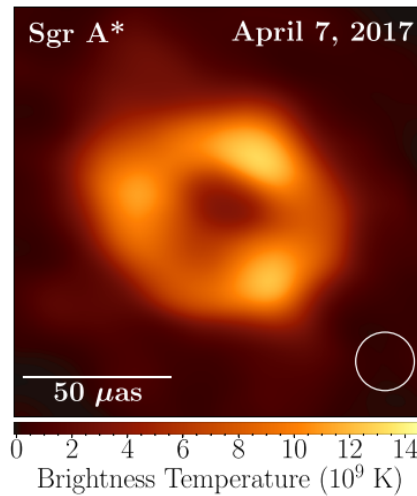
6.3. ábra. Az M87* lineáris polarizációjának szemléltetése [17].

A mágneses térben az akkréciós korong nagy sebességű, töltött részecskéi görbült pályákra kényszerülnek, melynek hatására szinkrotronsugárzást bocsátanak ki. A szinkrotronsugárzás általában lineárisan poláros, tehát a polarizáció tanulmányozásá-

val információt nyerhetünk a fekete lyukat környező mágneses mező struktúrájáról. A 6.3 ábrán a polarizációs vonalak iránya azimutális (φ irányú) mintázatot mutat. Szimulációk megmutatták, hogy ilyen polarizációt poloidális (θ irányú) mágneses mező tud létrehozni [18].

6.2. A Sagittarius A* felvételei

Az M87* mellett 2017 áprilisában az Event Horizon Teleszkópnak sikerült képet készíteni a saját galaxisunk, a Tejútrendszer szívében elhelyezkedő szupermasszív fekete lyukról, a Sagittarius A*-ról is [19]. A galaxisunk közepén lévő csillagok mozgásának vizsgálatával már korábban feltételezték, hogy a galaxiscentrumban egy fekete lyuk foglal helyet, melyre direkt bizonyítékot ad az EHT felvétele. A képen, az M87*-hez hasonlóan, az akkréciós korong gyűrűje látható, melynek belső átmérője körülbelül 50 ívmikroszekundum nagyságú. A központi árnyékban helyet foglaló, közelítőleg négy-millió naptömegű Sagittarius A* is a Kerr-féle fekete lyukak osztályába sorolható.

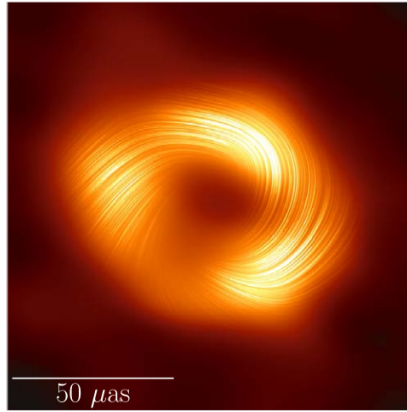


6.4. ábra. Felvétel a Sagittarius A* fekete lyukról [20].

A felvételek elkészítésénél különös kihívást jelentett, hogy a környezetében lévő anyag áramlásának periódusideje jóval kisebb, mint az M87* esetében. Az áramlás sebessége közel azonos a két fekete lyuk körül, azonban az M87* tömege több mint 1500-szorosa a Sagittarius A* tömegének, így a mérete és a körülötte futó körpályák hossza is sokkal nagyobb. Az M87* körüli legbelső stabil körpályán a fekete lyuk forgásával megegyező irányban áramló anyag periódusideje 5 nap (ha az a forgási paraméter maximális)

és 1 hónap (ha $a = 0$) között mozog. Ugyanez a Sagittarius A* esetében mindössze 4–30 perc. Ezek szerint az akkréciós korong alakja és struktúrája igen gyorsan változik, akár egy éjszaka alatt is jelentős mértékben átformálódhat. További nehézséget jelent, hogy a Sagittarius A* felől nem érkeznek olyan jól megfigyelhető jet-ek, mint az M87* felől, így a fekete lyuk pontos inklinációjáról nincs információ.

A Sagittarius A* polarizációjára irányuló megfigyelések kiértékelését 2024 márciusában publikálta az EHT csapata [21]. A lineárisan polárosság dominánsabb, mint az M87* esetén, a polarizáció fokának maximuma a 40%-ot is eléri. Emellett cirkuláris polarizációt is detektáltak. Az akkréciós korong keleti és nyugati oldaláról ellentétes irányú cirkulárisan poláros sugárzás figyelhető meg. Az EHT által vizsgált két fekete lyuk mágneses terének struktúrája igen hasonló, mindkettő poloidális, amelyre a polarizáció azimutális iránya a bizonyíték.



6.5. ábra. A Sagittarius A* lineáris polarizációjának szemléltetése [21].

7. fejezet

Elektromágneses mező görbült téridőben

A fekete lyukak mágneses terének vizsgálata kiemelt fontosságú a környezetükben zajló folyamatok megértéséhez. A téma túlmutat az elméleti fizikán, ugyanis számos csillagászati kutatás is foglalkozik vele, például a korábban bemutatott Event Horizon Teleszkóp kollaboráció. Kulcsfontosságú tehát egy görbült téridőben érvényes, általánosan használható, a Minkowski-téridőben használt formulákkal konzisztens, elektromágnességet leíró formalizmus. Ennek széleskörű felhasználási lehetőségei között nem csak a szupermasszív fekete lyukak mágneses mezejének leírása szerepel, ugyanis akár a csillagok mágneses effektusainak jellemzésére is használható, mint például a napszél.

E fejezetben Sergei Komissarov által kidolgozott, $3 + 1$ felbontásban tárgyalt formalizmust tekintem át [22], és a cikkben lévő számolásokat reprodukálom, a könnyebb megértés céljából részletesebben kiírva.

7.1. A téridő $3 + 1$ felbontása

Az elektromágneses jelenségek tárgyalásánál célszerű megkülönböztetni az idő- és térdimenziókat. Ez a téridő fóliázásával érhető el, melynek során azt 3 dimenziós, térszerű hiperfelületek seregére bontjuk fel. Ekkor a g_{ab} metrika felírható a

$$g_{ab} = \gamma_{ab} - n_a n_b \quad (7.1)$$

alakban, ahol γ_{ab} a hiperfelületen értelmezett, úgynevezett indukált metrika, és n_a a felület egységnormálisa, azaz teljesül az $n_a n^a = -1$ reláció. Továbbá mivel n_a definíció szerint merőleges a hiperfelületre, ezért $\gamma_{ab} n^b = 0$. A $(\partial_t)^a$ időszerű vektor felbontható

egy a hiperfelületre merőleges és azzal párhuzamos komponensre:

$$(\partial_t)^a = Nn^a + N^a, \quad (7.2)$$

ahol N a lapse függvény és N^a a shift vektor. A Richard Arnowitt, Stanley Deser és Charles Misner által kidolgozott (ADM) formalizmusban, a fóliázáshoz adaptált koordinátákban ezen mennyiségek konkrét alakja [23]:

$$N = (-g^{tt})^{-1/2}, \quad \text{és} \quad N_\mu = g_{t\mu} = g_{\mu t}. \quad (7.3)$$

Felhasználva továbbá a $\gamma_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}$ relációt, a metrika felírható, mint

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -N^2 + N_\mu N^\mu & N_\mu \\ N_\mu & \gamma_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (7.4)$$

és az inverz metrika, mint

$$g^{ab} = \begin{pmatrix} -1/N^2 & N^\mu/N^2 \\ N^\mu/N^2 & \gamma^{\mu\nu} - (N^\mu N^\nu/N^2) \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

A metrikából az ívelemnégyzet leolvasható:

$$ds^2 = (-N^2 + N_\mu N^\mu) dt^2 + 2N_\mu dx^\mu dt + \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (7.6)$$

A metrika és inverzének

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -N^2 + N_\tau N^\tau & N_\nu \\ N_\mu & \gamma_{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/N^2 & N^\rho/N^2 \\ N^\nu/N^2 & \gamma^{\rho\nu} - (N^\rho N^\nu/N^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -N^\rho + N_\nu \gamma^{\rho\nu} \\ (-N_\mu + \gamma_{\mu\nu} N^\nu)/N^2 & \gamma_{\mu\nu} \gamma^{\rho\nu} + (N_\mu - \gamma_{\mu\nu} N^\nu) N^\rho/N^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.7)$$

szorzata akkor egységmátrix, ha az

$$N^\rho = N_\nu \gamma^{\rho\nu} \quad \text{és} \quad \gamma_{\mu\nu} \gamma^{\rho\nu} = \delta_\mu^\rho \quad (7.8)$$

feltételek teljesülnek. Látható, hogy $\gamma^{\mu\nu}$ a hiperfelületen indukált metrika inverze, amely így a térbeli indexek felhúzására használható.

A későbbi számolásokat megkönnyíti, ha megkeressük az összefüggést a metrika és az indukált metrika determinánsa között ([10] forrás 4.2.2. fejezete). A mátrixok invertálási szabályából következik, hogy az inverz metrika g^{tt} komponense megegyezik az eredeti mátrix, azaz a metrika, g_{tt} komponenséhez tartozó előjeles aldetermináns és

a metrika $\mathbf{g}$ determinánsának hányadosával. Ebben az esetben a g_{tt} -hez tartozó előjeles aldetemináns éppen az indukált metrika γ determinánsa. Írhatjuk tehát, hogy:

$$g^{tt} = -\frac{1}{N^2} = \frac{\gamma}{\mathbf{g}} , \quad (7.9)$$

amit célszerű a

$$\sqrt{-\mathbf{g}} = N\sqrt{\gamma} \quad (7.10)$$

alakra hozni.

7.2. Elektromágnesség közeg hiányában

A következőkben általános görbült téridőben, valamint vákuumban dolgozunk, még hozzá abban az értelemben, hogy a téridőben nincs közeg, a relatív permittivitás és permeabilitás az egységmátrix. Emellett elhanyagoljuk az elektromágneses mező gravitációs visszahatását, tehát gravitációs értelemben vett vákuumról is beszélhetünk. A Maxwell-egyenletek kovariáns alakja így

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0 , \quad (7.11)$$

$$\nabla_b F^{ab} = \mu_0 J^a , \quad (7.12)$$

ahol F^{ab} az antiszimmetrikus Faraday-tenzor, J^a a négyes-áramsűrűség, valamint μ_0 a vákuum permeabilitása [4]. Speciális esetben, Minkowski-téridőben, Descartes-koordinátákat használva:

$$F^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & B^z & -B^y \\ -E^y & -B^z & 0 & B^x \\ -E^z & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix} , \quad \text{és} \quad J^a = \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} , \quad (7.13)$$

ahol E^μ és B^μ az elektromos térerősség-, és mágneses indukcióvektor, ρ jelöli az elektromos töltéssűrűséget, valamint $\mathbf{j} = (j^x, j^y, j^z)$ az áramsűrűség-vektort.

A (7.11) homogén Maxwell-egyenletet felírhatjuk a Faraday-tenzor

$$\tilde{F}^{ab} = \frac{1}{2} \epsilon^{abcd} F_{cd} \quad (7.14)$$

duálisa segítségével is:

$$\nabla_b \tilde{F}^{ab} = 0 , \quad (7.15)$$

ahol $e^{abcd} = \epsilon^{abcd} / \sqrt{-\mathbf{g}}$ a Levi-Civita szimbólumból képzett tenzor. Ennek alsó indexes alakja az $e_{abcd} = \sqrt{-\mathbf{g}} \epsilon_{abcd}$ módon írható fel, ahol az $\epsilon_{0123} = +1$ előjelkonvenciót

használjuk. Három, tisztán térdimenzióban pedig analóg módon az $e_{\mu\nu\rho} = \sqrt{\gamma}\varepsilon_{\mu\nu\rho}$ és $e^{\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\mu\nu\rho}/\sqrt{\gamma}$ definíciók írhatók fel. A (7.15) egyenletben megjelenő négyes kovariáns divergencia kifejezhető parciális deriválással is:

$$\frac{1}{\sqrt{-\mathbf{g}}}\partial_b \left(\sqrt{-\mathbf{g}}\tilde{F}^{ab} \right) = 0 . \quad (7.16)$$

Tekintsük a (7.16) egyenlet időszerű komponensét ($a = t$), valamint alkalmazzuk a $\sqrt{-\mathbf{g}} = N\sqrt{\gamma}$ összefüggést:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_\mu \left(N\sqrt{\gamma}\tilde{F}^{t\mu} \right) = 0 , \quad (7.17)$$

ahol felhasználtuk, hogy $\tilde{F}^{tt} = 0$, ezért térhettünk át a b téridő indexről a μ térindexre. Defináljuk a B^μ mágneses indukcióvektort a

$$B^\mu \equiv N\tilde{F}^{t\mu} , \quad (7.18)$$

formulával, és ekkor a (7.17) egyenlet

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_\mu (\sqrt{\gamma}B^\mu) = \mathcal{D}_\mu B^\mu = 0 . \quad (7.19)$$

alakúvá válik, ahol $\mathcal{D}_\mu$ az indukált metrikával kompatibilis kovariáns deriválás. Vektori jelöléssel:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (7.20)$$

ami formálisan a klasszikus, mágneses monopólusok hiányát kifejező Maxwell-egyenlettel egyezik meg. Emlékezzünk rá azonban, hogy itt a divergencia a (7.19) formulával van értelmezve. A függelékben bemutatásra kerül, hogy ezt a definíciót használva Minkowski-téridőben, gömbi koordinátákban visszkapjuk a divergencia gömbi koordinátákban felírt szokásos képletét.

Tekintsük ezután a (7.16) egyenlet térszerű részét ($a = \mu$):

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_t \left(N\sqrt{\gamma}\tilde{F}^{t\mu} \right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_\nu \left(N\sqrt{\gamma}\tilde{F}^{\mu\nu} \right) = 0 . \quad (7.21)$$

A Levi-Civita tenzorok kontrakciójára vonatkozó $e^{\mu\nu\rho}e_{\rho\alpha\beta} = \varepsilon^{\mu\nu\rho}\varepsilon_{\rho\alpha\beta} = \delta_\alpha^\mu\delta_\beta^\nu - \delta_\alpha^\nu\delta_\beta^\mu$ tulajdonságot, valamint a Faraday-tenzor duálisának antiszimmetriájából következő

$$\frac{1}{2}(\delta_\alpha^\mu\delta_\beta^\nu - \delta_\alpha^\nu\delta_\beta^\mu)\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\tilde{F}^{\mu\nu} - \tilde{F}^{\nu\mu}) = \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (7.22)$$

összefüggést felhasználva írhatjuk a (7.21) egyenlet bal oldalának második tagjára, hogy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_\nu \left[\frac{1}{2}N\sqrt{\gamma}(\delta_\alpha^\mu\delta_\beta^\nu - \delta_\alpha^\nu\delta_\beta^\mu)\tilde{F}^{\alpha\beta} \right] &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_\nu \left[\frac{1}{2}N\sqrt{\gamma}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\varepsilon_{\rho\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} \right] \\ &= e^{\mu\nu\rho}\partial_\nu \left[\frac{1}{2}Ne_{\rho\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta} \right] . \end{aligned} \quad (7.23)$$

Ha bevezetjük az

$$E_\rho \equiv \frac{1}{2} N e_{\rho\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta} \quad (7.24)$$

formulával megadott elektromos térerősséget, akkor a (7.21) egyenlet átírható a klasszikus Maxwell-egyenlettel megegyező

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (7.25)$$

formára, ahol a rotációt a

$$(\nabla \times \mathbf{E})^\mu = e^{\mu\nu\rho} \partial_\nu E_\rho \quad (7.26)$$

formulával értelmezzük. Ehhez feltettük, hogy a metrika, így annak determinánsa is időfüggetlen, ezért a (7.21) első tagjában $\sqrt{\gamma}$ kivihető a ∂_t deriválás elé. Ez ugyan megszorítást jelent az általános esetre nézve, de a dolgozat fókuszában lévő Kerr-téridőre teljesül. Fontos megjegyezni, hogy a (7.26) formulában szereplő parciális deriválás helyettesíthető kovariáns deriválással is, ugyanis

$$e^{\mu\nu\rho} \partial_\nu E_\rho = e^{\mu\nu\rho} \mathcal{D}_\nu E_\rho + e^{\mu\nu\rho} {}^{(\gamma)}\Gamma_{\nu\rho}^i E_i = e^{\mu\nu\rho} \mathcal{D}_\nu E_\rho , \quad (7.27)$$

ahol ${}^{(\gamma)}\Gamma_{bc}^a$ az indukált metrikával kompatibilis konnexió. A függelékben a divergenciához hasonló módon a rotációt is felírjuk Minkowski-téridőben, gömbi koordinátákban. Két tetszőleges vektor, $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ vektori szorzatát a rotációval analóg módon definiáljuk:

$$\mathbf{V} \times \mathbf{W} = e^{\mu\nu\rho} V_\nu W_\rho .$$

Tekintsük most a (7.12) inhomogén Maxwell-egyenletet, amelyből a mennyiségek megfelelő definíciójával ugyancsak visszakaphatjuk a klasszikus fizikában megismert Maxwell-egyenletek alakját. Ez a homogén egyenlet kapcsán bemutatott levezetéshez hasonló módon történik, ezért kevésbé részletesen lesz tárgyalva. Az első lépés ebben az esetben is az egyenlet átírása a parciális deriválást tartalmazó alakjára:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_b (\sqrt{-g} F^{ab}) = \mu_0 J^a , \quad (7.28)$$

melynek idő-, valamint térszerű részei rendre

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_\mu \left(\frac{1}{\mu_0} N \sqrt{\gamma} F^{t\mu} \right) &= N J^t , \\ \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_t \left(\frac{1}{\mu_0} N \sqrt{\gamma} F^{\mu t} \right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \partial_\nu \left(\frac{1}{\mu_0} N \sqrt{\gamma} F^{\mu\nu} \right) &= N J^\mu . \end{aligned} \quad (7.29)$$

Definiáljuk a D^μ elektromos eltolást, a H_μ mágneses térerősséget, a ρ töltéssűrűséget, valamint az j^μ áramsűrűséget az alábbi módon:

$$\begin{aligned} D^\mu &\equiv \varepsilon_0 N F^{t\mu} = \frac{1}{\mu_0} N F^{t\mu} , \\ H_\mu &\equiv \frac{1}{2\mu_0} N e_{\mu\nu\rho} F^{\nu\rho} , \\ \rho &\equiv N J^t , \\ j^\mu &\equiv N J^\mu , \end{aligned} \quad (7.30)$$

ahol ε_0 a vákuum permittivitása. Mivel a fény terjedési sebessége egységnyi, így a $c = 1 = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ reláció átrendezésével a vákuum permittivitása és permeabilitása közötti kapcsolatra az $\varepsilon_0 = 1/\mu_0$ összefüggést nyerjük. A (7.29) egyenletek tehát felírhatóak a

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho , \\ -\partial_t \mathbf{D} + \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} \end{aligned} \quad (7.31)$$

alakban.

Vizsgáljuk meg az előzőekben definiált mennyiségeket Minkowski határesetben, Descartes-koordinátákban. Ekkor vissza kell hogy kapjuk a

$$E_\mu = F_{\mu t} , \quad B^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} \quad (7.32)$$

formulákat, ahol a Faraday-tenzor alsó indexes alakjában a tér-idő komponensek ellentétes előjelűek a (7.13) felső indexes alakhoz képest [4]:

$$F_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & B^z & -B^y \\ E^y & -B^z & 0 & B^x \\ E^z & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix} . \quad (7.33)$$

Az $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ metrikából leolvasható, hogy az indukált metrika $\gamma_{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$, a lapse függvény $N = 1$, a shift vektor $N^\mu = 0$, továbbá $\sqrt{-\mathbf{g}} = \sqrt{\gamma} = 1$, így $e_{abcd} = \varepsilon_{abcd}$ és $e_{\mu\nu\rho} = \varepsilon_{\mu\nu\rho}$. Tekintsük először az elektromos térerősséget:

$$E_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho} \tilde{F}^{\nu\rho} = \frac{1}{4} \varepsilon_{t\mu\nu\rho} \varepsilon^{\nu\rho ij} F_{ij} = -\frac{1}{2} (\delta_t^i \delta_\mu^j - \delta_t^j \delta_\mu^i) F_{ij} = -F_{t\mu} = F_{\mu t} , \quad (7.34)$$

ahol felhasználtuk az

$$\varepsilon^{abij} \varepsilon_{ijcd} = -2 (\delta_c^a \delta_d^b - \delta_c^b \delta_d^a) \quad (7.35)$$

azonosságot. A mágneses indukcióra pedig írhatjuk, hogy

$$B^\mu = \tilde{F}^{\mu t} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu t\nu\rho}F_{\nu\rho} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{t\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} . \quad (7.36)$$

A (7.30) definíciókból az is kiolvasható, hogy a J^a négyes-áramsűrűség a (7.13) képlettel megegyező alakúvá válik. Látható tehát, hogy az új definíciók visszaadják a mennyiségek Minkowski-téridőben érvényes, szokásos alakját.

7.3. Alternatív definíciók

Az előző fejezetben az elektromos eltolást és a mágneses térerősséget a Faraday-tenzor, az elektromos térerősséget és mágneses indukciót pedig annak duálisa segítségével definiáltuk. A (7.14) reláció felhasználásával az előbb említett mennyiségeket felírhatjuk alternatív módon is. A mágneses indukcióvektor átalakításával a

$$\begin{aligned} B^\mu &= N\tilde{F}^{\mu t} = \frac{1}{2}Ne^{\mu t\nu\rho}F_{\nu\rho} = \frac{1}{2N\sqrt{\gamma}}N\varepsilon^{\mu t\nu\rho}F_{\nu\rho} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\varepsilon^{t\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} = \frac{1}{2}e^{\mu\nu\rho}F_{\nu\rho} \end{aligned} \quad (7.37)$$

definíciót nyerjük. Az elektromos térerősséghez a (7.14) összefüggés inverzére van szükség:

$$F_{ab} = -\frac{1}{2}e_{abcd}\tilde{F}^{cd} . \quad (7.38)$$

A fenti egyenlettel megadott kapcsolatot ellenőrizzük oly módon, hogy a (7.14) képletben a Faraday-tenzor helyére írjuk be a (7.38) összefüggést:

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{ab} &= -\frac{1}{4}e^{abcd}e_{cdij}\tilde{F}^{ij} = \frac{1}{2}(\delta_i^a\delta_j^b - \delta_i^b\delta_j^a)\tilde{F}^{ij} \\ &= \frac{1}{2}(\tilde{F}^{ab} - \tilde{F}^{ba}) = \tilde{F}^{ab} , \end{aligned} \quad (7.39)$$

ahol felhasználtuk a (7.35) azonosságot. Mivel a behelyettesítés azonosságra vezet, a (7.38) képlet helyes. Ennek segítségével tehát az elektromos térerősség:

$$E_\mu = \frac{1}{2}Ne_{\mu\nu\rho}\tilde{F}^{\nu\rho} = \frac{1}{2}N\sqrt{\gamma}\varepsilon_{t\mu\nu\rho}\tilde{F}^{\nu\rho} = \frac{1}{2}e_{t\mu\nu\rho}\tilde{F}^{\nu\rho} = -F_{t\mu} = F_{\mu t} . \quad (7.40)$$

Az elektromos eltolás definíciójának átalakításánál a (7.38) reláció felső indexes $F^{ab} = -\frac{1}{2}e^{abcd}\tilde{F}_{cd}$ alakját alkalmazva hasonlóan járunk el, mint a mágneses indukció esetében:

$$D^\mu = \varepsilon_0 N F^{t\mu} = -\frac{\varepsilon_0}{2}Ne^{t\mu\nu\rho}\tilde{F}_{\nu\rho} = -\frac{\varepsilon_0}{2N\sqrt{\gamma}}N\varepsilon^{t\mu\nu\rho}\tilde{F}_{\nu\rho} = \frac{\varepsilon_0}{2}e^{\mu\nu\rho}\tilde{F}_{\nu\rho} . \quad (7.41)$$

Végül a mágneses térerősségre bevezetett formulát is átalakítjuk a (7.14) összefüggésből nyert $\tilde{F}_{ab} = \frac{1}{2}e_{abcd}F^{cd}$ egyenlőség segítségével:

$$H_\mu = \frac{1}{2\mu_0} N e_{\mu\nu\rho} F^{\nu\rho} = \frac{1}{2\mu_0} N \sqrt{\gamma} \varepsilon_{t\mu\nu\rho} F^{\nu\rho} = \frac{1}{2\mu_0} e_{t\mu\nu\rho} F^{\nu\rho} = \frac{1}{\mu_0} \tilde{F}_{t\mu} . \quad (7.42)$$

Így a négy, elektromágneses teret jellemző mennyiséget tehát kifejeztük mind a Faraday-tenzor, mind annak duálisa segítségével.

7.4. Elektromágneses mező Kerr-téridőben

Idáig az elektromágneses teret jellemző mennyiségeket általános görbült téridőben tárgyaltuk, egyetlen megszorításunk csupán az volt, hogy a metrika stacionárius, azaz $\partial_t g_{ab} = 0$. Most tekintsük át, hogy ezen mennyiségek milyen konkrét alakban írhatóak fel Kerr-téridőben, Boyer–Lindquist koordinátákban. A (3.84) ívelemnégyzetből egyszerűen leolvashatjuk, hogy a shift vektor:

$$N_\mu = \left(0, 0, -\frac{2Mr}{\rho^2} a \sin^2 \theta \right) , \quad (7.43)$$

valamint az indukált metrika:

$$\gamma_{\mu\nu} = \text{diag} \left(\frac{\rho^2}{\Delta}, \rho^2, \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr}{\rho^2} a^2 \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta \right) , \quad (7.44)$$

melynek inverze:

$$\gamma^{\mu\nu} = \text{diag} \left(\frac{\Delta}{\rho^2}, \frac{1}{\rho^2}, \frac{1}{\left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr}{\rho^2} a^2 \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta} \right) . \quad (7.45)$$

A lapse függvényt a metrika g_{tt} komponenséből tudjuk meghatározni, ugyanis

$$N^2 - N_\mu N^\mu = 1 - \frac{2Mr}{\rho^2} . \quad (7.46)$$

Számítsuk ki először a shift vektor négyzetét:

$$N_\mu N^\mu = \gamma^{\mu\nu} N_\mu N_\nu = \frac{4M^2 a^2 r^2 \sin^2 \theta}{\rho^4 (a^2 + r^2) + 2M a^2 r \sin^2 \theta \rho^2} , \quad (7.47)$$

majd helyettesítsük be a (7.46) egyenletbe:

$$N^2 = 1 - \frac{2Mr}{\rho^2} + \frac{4M^2 a^2 r^2 \sin^2 \theta}{\rho^4 (a^2 + r^2) + 2M a^2 r \sin^2 \theta \rho^2} , \quad (7.48)$$

amelyből algebrai átalakítások után azt kapjuk, hogy

$$N = \sqrt{1 - \frac{2Mr(a^2 + r^2)}{\rho^2(a^2 + r^2) + 2Ma^2r \sin^2 \theta}} . \quad (7.49)$$

Az indukált metrika determinánsának gyöke

$$\sqrt{\gamma} = \sqrt{\frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{\Delta} [\rho^2(a^2 + r^2) + 2Ma^2r \sin^2 \theta]} . \quad (7.50)$$

Ezzel meghatároztuk a metrika ADM felbontásában szereplő mennyiségeket.

A fenti összefüggéseket behelyettesítve a Faraday-tenzorral kifejezett (7.37), (7.40) és (7.30) definíciókba megkapjuk az elektromágneses teret jellemző mennyiségek alakját Kerr-tér-időben:

$$B^\mu = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} \left(\frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{\Delta} [\rho^2(a^2 + r^2) + 2Ma^2r \sin^2 \theta] \right)^{-1/2} \quad (7.51)$$

$$E_\mu = F_{\mu t} , \quad (7.52)$$

$$D^\mu = \varepsilon_0 N F^{t\mu} = \varepsilon_0 F^{t\mu} \sqrt{1 - \frac{2Mr(a^2 + r^2)}{\rho^2(a^2 + r^2) + 2Ma^2r \sin^2 \theta}} , \quad (7.53)$$

$$\begin{aligned} H_\mu &= \frac{1}{2\mu_0} N \sqrt{\gamma} \varepsilon_{\mu\nu\rho} F^{\nu\rho} \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \varepsilon_{\mu\nu\rho} F^{\nu\rho} \sqrt{\frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{\Delta} [(\rho^2 - 2Mr)(a^2 + r^2) + 2Ma^2r \sin^2 \theta]} , \end{aligned} \quad (7.54)$$

$$\rho = N J^t = J^t \sqrt{1 - \frac{2Mr(a^2 + r^2)}{\rho^2(a^2 + r^2) + 2Ma^2r \sin^2 \theta}} , \quad (7.55)$$

$$j^\mu = N J^\mu = J^\mu \sqrt{1 - \frac{2Mr(a^2 + r^2)}{\rho^2(a^2 + r^2) + 2Ma^2r \sin^2 \theta}} . \quad (7.56)$$

A fenti összefüggéseket invertálva a Faraday-tenzor és négyesáram vektor megadhatók a $3 + 1$ felbontásban bevezetett elektromágneses mennyiségekkel.

8. fejezet

Összefoglalás és kitekintés

Dolgozatom első felének (2.–5. fejezet) központjában a Kerr-téridő áll. A vákuumbeli Einstein-egyenlet Kerr megoldása már a 60-as években is ismert volt, és azóta rengeteg kutatás foglalkozott vele. Mára a téma kiforrottnak tekinthető, így a dolgozat ezen szakaszában szakirodalomra támaszkodtam, azokat értelmezve feldolgoztam egy áttekinthető struktúra szerint. Az egyes lépésekhez igyekeztem kellő részletességgel magyarázatokat adni, hogy az általános relativitáselméletben kevésbé jártas olvasó számára is érthető legyen. Bizonyos, szakirodalomban nem fellelhető számításokat önállóan végeztem, például a Penrose-diagramm ábrázolásához szükséges számításokat egy Schwarzschild-téridőre vonatkozó levezetésre támaszkodva. A megértést segítő [2.1](#), [4.1](#), [4.2](#) és [5.1](#) ábrákat Wolfram Mathematica szoftverrel készítettem.

A 6. fejezet az Event Horizon Teleszkóp feketelyuk-felvételeit mutatja be. Az EHT kutatásai is bizonyítják, hogy a Kerr fekete lyuk a csillagászatban is jól használható modell. A fejezetben elsősorban arra koncentrálok, hogy a képekről milyen fizikai következtetések vonhatók le, többek között a fekete lyukak méretére, tömegére, forgási irányára vonatkozóan. A polarizációt ábrázoló felvételek azt is elárulják, hogy a fekete lyukakat milyen mágneses mező veszi körül, ami rávilágít egy görbült téridőben érvényes elektromágneses formalizmus fontosságára.

A 7. fejezetben Sergei Komissarov elektromágneses formalizmusát tekintem át a [\[22\]](#) forrásban megjelölt cikkekre támaszkodva, melyben a számításokat önállóan reprodukáltam. Emellett elvégeztem a Kerr-téridő ADM felbontását Boyer–Lindquist koordinátákban, és felírtam az elektromágneses térmennyiségeket és forrásaikat ebben a formalizmusban. Ezek azonban csupán az első lépései a jelenleg is aktív kutatásnak. Jövőbeli terveim között szerepel a gravitációs spin Hall effektus vizsgálata, emellett érdemes lehet megvizsgálni az elektromágneses mennyiségeket plazma állapotú közeg jelenlétében, és felírni a szuszceptibilitások alakját.

9. fejezet

Függelék

9.1. Divergencia és rotáció

A 7. fejezetben tárgyalt elektromágneses formalizmusban a divergenciát a (7.19), és a rotációt a (7.26) formulával értelmeztük. A következőkben az kerül bemutatásra, hogy Minkowski-téridőben, gömbi koordinátákban egy tetszőleges $\mathbf{A}$ vektor esetén hogyan kapjuk vissza a szokásos

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A^r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A^\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A^\varphi}{\partial \varphi}, \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta A^\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A^\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A^r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A^\varphi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A^\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A^r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}\tag{9.1}$$

formulákat [24].

A gömbi koordinátákkal felírt Minkowski-téridő metrikája:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.\tag{9.2}$$

A helyvektor az éppen használt $\{x^\mu\} = (r, \theta, \varphi)$ gömbi, illetve az $\{\mathbf{e}_\mu\}$ ortonormált bázishoz ($g(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu) = \delta_{\mu\nu}$) tartozó $\{\tilde{x}^\mu\}$ koordinátákban

$$\mathbf{r} = x^\mu \mathbf{u}_\mu = \tilde{x}^\mu \mathbf{e}_\mu,\tag{9.3}$$

ahol $\mathbf{e}_\mu = \alpha_\mu \mathbf{u}_\mu$ (μ -ben nincs összegzés), tehát a két bázis párhuzamos. Az $\{\mathbf{u}_\mu\}$ bázisban megadott (9.2) metrika térbeli részéből így $\alpha_\mu = (g_{\mu\mu})^{-1/2}$. Mivel a bázisok közötti

transzformáció mátrixa $M = \text{diag}\left(\left\{(g_{\mu\mu})^{-1/2}\right\}\right)$, a két koordinátahalmaz közötti transzformációs mátrix $(M^T)^{-1} = \text{diag}\left(\left\{(g_{\mu\mu})^{1/2}\right\}\right)$. A koordinátaderiváltak között pedig

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} &= \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = M^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (g_{\mu\mu})^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) .\end{aligned}\quad (9.4)$$

Tekintsünk egy tetszőleges $\mathbf{A}$ vektort amely az $\{\mathbf{e}_\mu\}$ ortonormált bázisban $\mathbf{A} = \tilde{A}^\mu \mathbf{e}_\mu = A^r \mathbf{e}_r + A^\theta \mathbf{e}_\theta + A^\varphi \mathbf{e}_\varphi$, és az $\{\mathbf{u}_\mu\}$ koordinátabázisban (9.4) mintájára:

$$\begin{aligned}A^\mu &= M^\mu{}_\nu \tilde{A}^\nu = (g_{\mu\mu})^{-1/2} \tilde{A}^\mu \\ &= \left(A^r, \frac{1}{r} A^\theta, \frac{1}{r \sin \theta} A^\varphi \right)\end{aligned}\quad (9.5)$$

Az $\mathbf{A}$ vektor kovariáns divergenciáját az $\{\mathbf{u}_\mu\}$ bázisban számoljuk, mivel a Christoffel-szimbólumok ebben a rendszerben ismertek [4]:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mu A^\mu &= \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} + {}^{(\gamma)}\Gamma_{i\mu}^\mu A^i = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} + {}^{(\gamma)}\Gamma_{r\theta}^\theta A^r + {}^{(\gamma)}\Gamma_{r\varphi}^\varphi A^r + {}^{(\gamma)}\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi \frac{A^\theta}{r} \\ &= \partial_r A^r + \frac{2}{r} A^r + \partial_\theta \left(\frac{A^\theta}{r} \right) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{A^\theta}{r} + \partial_\varphi \left(\frac{1}{r \sin \theta} A^\varphi \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A^r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A^\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A^\varphi}{\partial \varphi} .\end{aligned}\quad (9.6)$$

A rotáció számolásához szükség van az A vektor alsó indexes alakjára

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = g_{\mu\nu} (g_{\nu\nu})^{-1/2} \tilde{A}^\nu = (g_{\nu\nu})^{1/2} \tilde{A}^\nu = (A^r, r A^\theta, r \sin \theta A^\varphi) , \quad (9.7)$$

illetve annak transzformációjára

$$\begin{aligned}A_\mu &= \left[(M^T)^{-1} \right]^\nu{}_\mu \tilde{A}_\nu = (g_{\mu\mu})^{1/2} \tilde{A}_\mu \\ &= (A_r, r A_\theta, r \sin \theta A_\varphi) .\end{aligned}\quad (9.8)$$

A két alak összehasonlításából látható, hogy a vektor komponenseinek alsó és felső

indexes alakjai megegyeznek. Ezek után használjuk a (7.26) képletet:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho \mathbf{u}_\mu \\
&= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\left(\frac{\partial (r \sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r \sin \theta A_\varphi)}{\partial r} \right) r \mathbf{e}_\theta \right] \\
&\quad + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \right] \\
&= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta A^\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A^\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A^r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A^\varphi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta \\
&\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A^\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A^r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi . \tag{9.9}
\end{aligned}$$

Látható tehát, hogy így módon mind a divergencia mind a rotáció esetén visszakaptuk a (9.1) képleteket.

9.2. Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Gergely Árpád Lászlónak a szakmai útmutatását, észrevételeit és javaslatait, valamint a rendszeres konzultációk során nyújtott segítségét.

Irodalomjegyzék

- [1] R. P. Kerr, *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*, Phys. Rev. Lett., 11, 237 (1963).
- [2] M. Hobson, G. Efstathiou, A. Lasenby, *General Relativity An Introduction for Physicists*, Cambridge University Press (2006).
- [3] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press, pp. 273–289 (1983).
- [4] L. Á. Gergely, *Relativitáselmélet, I. rész, A relativisztikus fizika alapjai*, egyetemi jegyzet (2023).
- [5] B. Carter, *Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom*, Phys. Rev. Lett., 26, 331 (1971).
- [6] D. C. Robinson, *Uniqueness of the Kerr Black Hole*, Phys. Rev. Lett., 34, 905 (1975).
- [7] R. H. Boyer, R. W. Lindquist, *Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric*, J. Math. Phys. 8, 265 (1967).
- [8] D. L. Wiltshire, M. Visser, S. M. Scott, *The Kerr spacetime: Rotating black holes in general relativity*, Cambridge University Press (2009).
- [9] J. Overduin, M. Coplan, K. Wilcomb, R. C. Henry, *Curvature Invariants for Charged and Rotating Black Holes*, Universe, 6 (2020).
- [10] E. Poisson, *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge University Press (2004).
- [11] L. Á. Gergely, *Relativitáselmélet, III. rész, Fekete lyukak*, egyetemi jegyzet (2023).

-
- [12] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole*, The Astrophysical Journal Letters, 875, L1 (2019).
 - [13] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole*, The Astrophysical Journal Letters, 875, L4 (2019).
 - [14] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope Results. V. Physical Origin of the Asymmetric Ring*, The Astrophysical Journal Letters, 875, L5 (2019).
 - [15] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope Results. VI. The Shadow and Mass of the Central Black Hole*, The Astrophysical Journal Letters, 875, L6 (2019).
 - [16] The Event Horizon Telescope Collaboration, *The persistent shadow of the supermassive black hole of M87*, Astronomy & Astrophysics, 681, A79 (2024).
 - [17] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope Results. VII. Polarization of the Ring*, The Astrophysical Journal Letters, 910, L12 (2021).
 - [18] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope Results. VIII. Magnetic Field Structure near The Event Horizon*, The Astrophysical Journal Letters, 910, L13 (2021).
 - [19] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way*, The Astrophysical Journal Letters, 930, L12 (2022).
 - [20] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. III. Imaging of the Galactic Center Supermassive Black Hole*, The Astrophysical Journal Letters, 930, L14 (2022).
 - [21] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. VII. Polarization of the Ring*, The Astrophysical Journal Letters, 964, L25 (2024).
 - [22] S. S. Komissarov, *Electrodynamics of black hole magnetospheres*, Mon. Not. R. Astron. Soc. 350, 427–448 (2004).

-
- [23] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, *The Dynamics of General Relativity*, Gravitation: an introduction to current research, p. 227 (1962).
- [24] I. Gyémánt, Zs. Varga, *Matematikai módszerek a fizikában*, JATEPress (2010).