

Fekete lyukak eseményhorizontja és a Carroll-geometria

Tudományos Diákköri Konferencia dolgozat

Készítette:
Kovács Ádám
Fizikus MSc hallgató

Témavezető:
Prof. Dr. Gergely Árpád László

Elméleti Fizika Tanszék
Természettudományi és Informatikai Kar
Szegedi Tudományegyetem



2024 Szeged

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	3
2. A Poincaré- és Carroll-szimmetriacsoportok	4
2.1. Lie-csoport	4
2.2. A Lorentz-csoport generátorai	5
2.3. A Poincaré-csoport	7
2.4. Carroll- és Galilei-csoportok, mint a Poincaré-csoport határesetei	7
3. Carroll-geometria	10
3.1. Energia-impulzus tenzor	12
3.1.1. Energia-impulzus tenzor kifejezése az Einstein-egyenletből	14
4. Horizontközeli metrika és a Carroll-geometria	15
4.1. Raychauduri és Damour egyenletek	16
4.2. Horizont közeli metrika és az ultrarelativisztikus határ kapcsolata	16
4.2.1. Horizont dinamika mint ultrarelativisztikus megmaradási törvény	17
5. Gravitációs felszíni töltések	19
5.1. Noether-tétele és általánosítása	19
5.1.1. Alacsonyabb fokú megmaradási törvények	19
5.2. Felszíni töltések kovariáns elméletekben	20
6. Horizonton megmaradó töltések	22
6.1. Az horizont közeli szimmetriák és a hozzá tartozó töltések	22
6.2. A horizont Killing-mezőkhöz tartozó ultrarelativisztikus töltései	23
6.3. Megmaradó töltések konkrét téridők esetén	25
6.3.1. Schwarzschild-téridő	25
6.3.2. Reissner–Nordström-téridő	27
7. Összegzés	30
8. Köszönetnyilvánítás	31

1. Bevezető

A Minkowski téridőben két, egymáshoz képest egyenletes sebességgel mozgó inerciális megfigyelő téridő-koordinátái között a Lorentz-csoport transzformációi teremtenek kapcsolatot. Ez a csoport a téridő-transzlációkkal együtt a Poincaré csoportot alkotja. A Poincaré-csoport egyik határeset a Galilei-csoport, melyet a fénysebesség végtelen határesetében kapunk. A Poincaré csoport másik határeset, az ultrarelativisztikus határeset, melyet formálisan a fénysebességet nullához közelítő határeseteként kapunk, Carroll-csoportként ismert [1]. Míg a Galilei-csoport transzformációiban az idő abszolút, a Carroll-csoport transzformációiban a tér abszolút, vagyis a Carroll-boost csak az időt transzformálja. A fénykúpok függőleges egyenesekké válnak, így a fényszerű pályák párhuzamosak, a téridő akauzális.

A Carroll-csoport bevezethető görbült téridők esetére is, olyankor, ha a metrika dinamikai egyenlete kovariáns a Carroll-diffeomorfizmusra, azaz olyan transzformációkra, amelyek során a térkoordináták csak egymásba transzformálódnak [2]

$$t' = t'(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}'(t, \mathbf{x}) \quad (1.1)$$

Az ultrarelativisztikus határesetben a metrika 3 egymástól független változóra bontható, ezek a skalársűrűség, a konnekszió és a metrika térbeli része, melyek a Carroll-geometriát jellemzik, amely degenerált. A degenerált jelleg miatt a Carroll-geometriában az energia-impulzus tenzor, mint a hatás metrika szerinti variációja nem vezethető be [3]. Helyette a hatás 3 változó szerinti variációjával definiálhatunk ún. Carroll-momentumokat, amik segítségével megmaradó mennyiségek, Carroll-töltések definiálhatóak [4].

Általánosan az általános relativitáselméletben leírt téridőkre nem vezethető be megmaradó Noether-áram és -töltés azok mértékszabadsága miatt [5]. Megmutatható azonban, hogy asszimptotikusan sík téridők esetén a Noether-tétel általánosított alakja [6] alkalmazható, ami megmaradó áramokhoz és töltésekhez vezet.

Az asszimptotikusan sík téridők dinamikája leírható ultrarelativisztikus megmaradási egyenletekkel. Null hiperfelületeken a metrika degenerált, így azok is Carroll-geometriával rendelkeznek [7]. A fekete lyukak eseményhorizontja is null hiperfelület, tehát azokat is Carroll-áramok és töltések jellemzik [4].

Tudományos Diákköri Konferencia dolgozatomban vizsgálom az általános relativitáselméletben ismert fekete lyukak horizont közeli metrikáját és annak a leírását ultrarelativisztikus paraméterezéssel. Reprodukálom a téridőn értelmezhető általánosított Noether-töltéseket és Carroll-töltéseket a szakirodalomban nem található részletességgel, valamint vizsgálom azok kapcsolatát egyszerűbb egzakt Einstein-megoldások esetén. A kutatás célja a formalizmus általánosítása a legegyszerűbb skalár-tenzor elméletekre is.

2. A Poincaré- és Carroll-szimmetriacsoportok

2.1. Lie-csoport

Mind a Lorentz- és a Poincaré-csoportok a Lie-csoportok közé tartoznak. A Lie-csoportok olyan csoportok (G) , amelyek elemei (g) folytonos és differenciálható függvényei θ^a valós paramétereknek $(a = 1, \dots, N)$ valamint az önmagával vett csoport szorzat leképezés önmagába visz vissza [8].

$$G \times G \rightarrow G \quad (2.1)$$

Egy általános eleme a csoportnak írható $g(\theta)$ formában és az általánosság elvesztése nélkül választhatjuk θ^a koordinátákat úgy, hogy az egységelem e a $\theta^a = 0$ koordinátához tartozzon [9]:

$$g(0) = e. \quad (2.2)$$

Egy R lineáris reprezentáció a csoportban egy operátor ami a g elemekhez egy lineáris operátort $D_R(g)$ rendel:

$$g \mapsto D_R(g). \quad (2.3)$$

A teret amelyiken a D_R operátor hat az R reprezentáció bázissterének nevezzük. Ha a bázis egy véges n dimenziós vektortér, a csoport elemei $n \times n$ dimenziós mátrixokkal írhatóak le, $(D_R(g))^i_j$, ahol $i, j = 1, \dots, n$. A reprezentáció dimenziója a bázistér n dimenziója alapján van definiálva. A bázistér elemein $(\phi^1, \dots, \phi^n)$ így a Lie-csoport elemeivel a következőképp írható le egy vektortéren értelmezett transzformáció:

$$\phi^i \rightarrow (D_R(g))^i_j \phi^j. \quad (2.4)$$

A 2.4 egyenlet segítségével fizikai jelentést tudunk csatolni a csoport elemeihez: egy specifikus reprezentációt választva a korábban csak absztrakt matematikai objektumként létező g interpretálható egy transzformációként bizonyos tereken, például véve az $SO(3)$ csoportot és hozzá bázistérként a térbeli vektorok terét egy $g \in SO(3)$ elem értelmezhető úgy, mint a 3 dimenziós térben vett forgatás.

Két reprezentáció R és R' ekvivalensek, ha létezik egy olyan g -től független S mátrix, ahol a két reprezentáció lineáris operátora között

$$D_R(g) = S^{-1} D_{R'}(g) S \quad (2.5)$$

összefüggés áll fent. Amikor áttaszformáljuk a reprezentációt egy másikban, általánosságban a $D_R(g)$ mátrix alakja és akár a dimenziója is megváltozhat. Viszont a Lie-csoportnak egy fontos tulajdonsága a reprezentáció függetlenség.

A D_R operátort elég simának feltételezve az egységelem infinitezimális környezetében az operátor lineáris rendben a következőképp fejthető sorba [10]:

$$D_R(\theta) \approx 1 + i\theta_a T_R^a, \quad (2.6)$$

ahol

$$T_R^a \equiv -i \left. \frac{\partial D_R}{\partial \theta_a} \right|_{\theta=0}.$$

A T_R^a mátrixot nevezzük az R reprezentáció generátorának. Meg lehet mutatni [9], hogy a megfelelő parametrizálással az egységelemtől távol a csoport $g(\theta)$ elemei mindig kifejezhetők a generátor segítségével:

$$D_R(g(\theta)) = e^{i\theta_a T_R^a}. \quad (2.7)$$

Az összes ilyen X mátrixot, amelyek e^{itX} alakban a G csoportban található minden valós t esetére a Lie-csoport Lie algebrájának nevezzük

2.2. A Lorentz-csoport generátorai

A Lorentz-csoport írja le a tér-, és az idő-koordináták transzformációját két egymáshoz képest egyenletes sebességgel mozgó megfigyelő között. A csoport elemeit Λ lineáris transzformációval írhatjuk le és a következő összefüggéssel definiáljuk [11]

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \quad (2.8)$$

vagy mátrix formában $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$, ahol $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ a Minkovski metrika.

Infinitezimálisan transzformálva Λ mátrixok felbonthatjuk

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu \quad (2.9)$$

összegre, ahol

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \quad (2.10)$$

egy antiszimmetrikus 4×4 -es mátrix 6 független elemmel, tehát a Lorentz-csoportnak összesen 6 független paramétere van. Ezek meghatároznak transzformációkat, amik közül 3 időinvariáns, ezek a forgatási csoportot hozzák létre (x, y) , (x, z) és (y, z) síkban való forgatással, 3 pedig a (t, x) , (t, y) , és (t, z) síkokat transzformálva létrehozza a Lorentz-boostokat.

A generátorok meghatározásához írjuk fel először a transzformáció mátrixokat. A forgatás mátrixok a következők [11]:

$$R(\alpha_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_x & -\sin \alpha_x \\ 0 & 0 & \sin \alpha_x & \cos \alpha_x \end{pmatrix}, \quad R(\alpha_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_y & 0 & \sin \alpha_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$R(\alpha_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_z & -\sin \alpha_z & 0 \\ 0 & \sin \alpha_z & \cos \alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Az ehhez tartozó generátorok

$$J_x = i \left. \frac{\partial R(\alpha_x)}{\partial \alpha_x} \right|_{\alpha_x=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

$$J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A Lorentz-boostok megadhatók a Lorentz-faktor ($\beta = \frac{u}{c}$ és $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$) és a rapiditás ($\gamma = \cosh \eta$) segítségével is:

$$\begin{aligned}
 L(\beta_x) &= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_x \gamma & 0 & 0 \\ -\beta_x \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & L(\eta_x) &= \begin{pmatrix} \cosh \eta_x & -\sinh \eta_x & 0 & 0 \\ -\sinh \eta_x & \cosh \eta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 L(\beta_y) &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\beta_y \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_y \gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & L(\eta_y) &= \begin{pmatrix} \cosh \eta_y & 0 & -\sinh \eta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sinh \eta_y & 0 & \cosh \eta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 L(\beta_z) &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta_z \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta_z \gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, & L(\eta_z) &= \begin{pmatrix} \cosh \eta_z & 0 & 0 & -\sinh \eta_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \eta_z & 0 & 0 & \cosh \eta_z \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

A Lorentz-boostok generátorai:

$$\begin{aligned}
 K_x &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & K_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 K_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

A generátorok kommutátorait vizsgálva

$$\begin{aligned}
 [K_i, K_j] &= -i\varepsilon_{ijk}J_k \\
 [J_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk}K_k \\
 [J_i, J_k] &= i\varepsilon_{ijk}J_k
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

azt tapasztaljuk, hogy a Lorentz-boostok Lie-algebrája nem zárul önmagába, tehát 2 különböző irányú Lorentz-boost nem egy Lorentz-boostot eredményez, hanem egy boost és egy forgatás együttesét.

Láthattuk, hogy a Lorentz-csoportnak 6 paramétere van, a hat független elemét egy-egykorán a korábban definiált $\omega_{\mu\nu}$ mátrix-szal jelölhetjük, a generátorokat pedig együttesen $M_{\mu\nu}$ -vel [9]. Így egy általános tagját a Lorentz-csoportnak leírhatjuk

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}}, \tag{2.16}$$

alakban, ahol $M^{\mu\nu}$ felírható a következő alakban is:

$$(M^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma = i(\eta^{\mu\rho}\delta_\sigma^\nu - \eta^{\nu\rho}\delta_\sigma^\mu) \quad (2.17)$$

A forgatás és a Lorentz-boost mátrixok kifejezhetők $M_{\mu\nu}$ segítségével

$$M_{ij} = \varepsilon_{ijk}J^k, \quad M_{0i} = K_i \quad (2.18)$$

az α_i forgásszög és β_i Lorentz-faktor pedig $\omega_{\mu\nu}$ segítségével

$$\omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\alpha^k, \quad \omega_{0i} = \beta_i$$

2.3. A Poincaré-csoport

A Lorentz-csoport invariáns a forgatás és az időbeli boost transzformációkra. Ennek a csoportnak egy olyan általánosítását keressük, ahol az elemek invariánsak egy eltolás transzformációra is. Az eltolás transzformációt általános formában

$$e^{-iP^\mu a_\mu} \quad (2.19)$$

alakban írhatjuk fel, ahol P^μ a transzformációs mátrix generátora, a_μ pedig a transláció paramétere, $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu$. A translációk és a Lorentz-transzformációk közösen egy másik csoportot Poincaré-csoportot alkotják.

A Lorentz-csoportnak 6 paramétere van, az eltolás transzformáció pedig 3 térbeli eltolást és 1 időbeli eltolást foglal magába, tehát a Poincaré-csoport $3 + 1$ dimenzióban összesen 10 paramétert tartalmaz.

Az eltolások felcserélhetősége miatt megkapjuk

$$[P_i, P_j] = 0 \quad (2.20)$$

összefüggést. Hogy megtaláljuk a kommutációs relációt P^μ és $M^{\rho\sigma}$ között először a forgatás és az eltolás közötti kommutációt tekintjük:

$$[J_i, P_j] = i\varepsilon_{ijk}P_k, \quad (2.21)$$

$$[J_i, P_0] = 0, \quad (2.22)$$

ami azt fejezi ki, hogy a térbeli eltolás vektorként, az időbeli eltolás pedig skalárként viselkedik forgatás hatására. Ennek a kovariáns általánosítása és (2.17) segítségével a többi kommutációs reláció is meghatározható:

$$[K_i, P_j] = i\delta_{ij}P_0, \quad [K_i, P_0] = iP_i \quad (2.23)$$

2.4. Carroll- és Galilei-csoportok, mint a Poincaré-csoport határ-esetei

A Poincaré csoport egy ismert degenerált változata a Galilei csoport, ahol a fénysebességet a végtelenhez tartatjuk. Ennek matematikai leírásához a szakirodalom alapján vizsgáljuk a Minkovski téridő egy (x_0, x_i) pontjának Poincaré-csoportbeli transzformációját, ahol R térbeli forgatás, β_i Lorentz boost és a_0 időbeli- és a_i térbeli eltolás után a megfigyelt koordináták (x'_0, x'_i) alakúra változnak [1]:

$$\begin{aligned} x'_0 &= \gamma(x_0 + \beta_i \cdot Rx_i) + a_0 \\ x'_i &= Rx_i + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}(\beta_j \cdot Rx_j)\beta_i + \gamma\beta_i x_0 + a_i \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ebben a rendszerben definiálhatjuk az időt (t) a megfigyelő sebességét (v_i) és az időbeli eltolást (b) a fénysebesség (c) segítségével:

$$t = \frac{1}{c}x_0, \quad v_i = c\beta_i, \quad b = \frac{1}{c}a_0 \quad (2.25)$$

Így a rendszer Galilei határt véve, vagyis $c \rightarrow \infty$ esetben a következőre egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} t' &= t + b \\ x'_i &= Rx_i + v_i t + a_i. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ezzel szemben Levy-Leblond bevezetett egy másik határesetet [1], ha az időt (s) és az időbeli eltolást (f) a következőképp definiáljuk:

$$s = Cx_0, \quad f = Ca_0, \quad (2.27)$$

ahol C egy sebesség dimenziójú új konstans. (Megjegyzés: a v_i sebességet (2.25-hez hasonlóan ($v_i = C\beta_i$)) definiáljuk az új sebesség segítségével.)

Ha $C \rightarrow \infty$ határt vesszük, a transzformáció a következő módon egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} s' &= s + v_i Rx_i + f \\ x'_i &= Rx_i + a_i \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ezt a degenerációját a Poincaré-csoportnak Carroll-csoportnak hívjuk, és egyenértékű azzal a transzformációval, mintha a fénysebességet 0-hoz közelítenénk, ezért „hiperrelativisztikus” téridőnek is nevezhető.

Megemlítendő, hogy (2.28) esetében s Carrolli időkoordináta valójában nem idő dimenziójú, hanem $[s] = L^2T^{-1}$.

A két határérték a Poincaré-csoport generátorainak a kommutációs relációját a következő módon változtatja meg [1]:

$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$	$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$	$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$
$[J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k$	$[J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k$	$[J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k$
$[K_i, K_j] = 0$	$[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k$	$[K_i, K_j] = 0$
$[J_i, P_j] = i\varepsilon_{ijk}P_k$	$[J_i, P_j] = i\varepsilon_{ijk}P_k$	$[J_i, P_j] = i\varepsilon_{ijk}P_k$
$[K_i, P_j] = i\delta_{ij}P_0$	$[K_i, P_j] = i\delta_{ij}P_0$	$[K_i, P_j] = 0$
$[J_i, P_0] = 0$	$[J_i, P_0] = 0$	$[J_i, P_0] = 0$
$[K_i, P_0] = 0$	$[K_i, P_0] = iP_i$	$[K_i, P_0] = iP_i$
$[P_i, P_j] = 0$	$[P_i, P_j] = 0$	$[P_i, P_j] = 0$
$[P_i, P_0] = 0$	$[P_i, P_0] = 0$	$[P_i, P_0] = 0$
Carroll	Poincaré	Galilei

A Carroll-téridő nevét Lewis Carroll-ról az *Alice Tükörszág* [12] szerzőjéről kapta a nevét egy abban szereplő mozgásleírás után.

A t mennyiség a Galilei-csoportban a Newton által leírt abszolút időt jelenti [13]:

Az abszolút, igaz és matematikai idő, önmagában és saját természetéből adódóan, minden külső dologra való hivatkozás nélkül, egyenletesen folyik, és más néven időtartamnak nevezik...

míg s a Carroll-i [12] „idő”, a Vörös Királynő szavaival élve:

- A mi országunkban - mondta Alice még mindig lihegve -, ha az ember ilyen sokáig ilyen gyorsan szalad, mint mi az előbb, akkor rendszerint egy másik helyre jut.
- Lassú egy ország lehet - mondta a Királynő. - Minálunk, ha teljes erődből rohansz, az épp csak arra elég, hogy egy helyben maradj. Ha máshová akarsz jutni, legalább kétszer olyan gyorsan kell futnod!

3. Carroll-geometria

A Carrol-csoport először sík téridőben lett bevezetve, mint a Poincaré-csoport ultrarelativisztikus határesetére ($c \rightarrow 0$). A Poincaré-csoport másik határesetéhez, a Galilei-csoportéhoz képest ahol az idő az abszolút, itt a tér abszolút, vagyis a „Carroll-boost” csak az időt transzformálja.

A Carroll csoport ezen tulajdonságát figyelembevéve bevezethető a Carroll-geometria nem sík téridők esetére is [2] [3]. Az így létrejövő rendszerekben a transzformációk a következő alakban írhatóak le

$$t' = t'(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}'(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

ahol látható, hogy a térkoordináták transzformációja nem függ az időkoordinátáktól. Ezeket a rendszereket Carroll-diffeomorfizmusnak nevezzük. Mivel ebben a határesetben a fénykúp függőleges egyenessé degenerálódik, a t időkoordináták is null koordináták lesznek, tehát (3.1) meghatározással ekvivalens definíciója a Carroll-geometriának [4]

$$v' = v'(v, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}'(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

transzformáció is.

Vizsgálatunk során ez a megállapítás azért lesz hasznos, ugyanis a továbbiakban a Carroll-geometriában kapott eredményeket horizontközeli metrikával hasonlítjuk össze, amely dinamikai leírását null koordináták használata leegyszerűsíti.

Emiatt a továbbiakban egy D -dimenziós teret vizsgálunk, amelynek a koordinátái $x^a = (v, x^\mu)$, amiben v null koordináta, míg x^μ a térkoordinátákat jelöli.

Az általános téridőket egyértelműen leírhatjuk a Randers–Papapetrou parametrizációval a következő alakban [14][15]:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} -c^2\alpha^2 & c^2\alpha b_\mu \\ c^2\alpha b_\nu & \Omega_{\mu\nu} - c^2b_\mu b_\nu \end{pmatrix}_{\{dv, dx^\mu\}} \quad (3.3)$$

ami egy $N + 1$ felbontása a téridőnek, ahol a 10 független varaméter 3 geometriai mezőre lett felosztva: $\alpha(v, x^\mu)$ skalársűrűségre, $b_\mu(v, x^\mu)$ konnexióra, és $\Omega_{\mu\nu}(v, x^\mu)$ a térbeli metrikába. A skalársűrűségből és a konnexióból leszakítottunk egy c skálafaktort.

Azért alkalmas ez a parametrizáció az ultrarelativisztikus határ vizsgálatára, ugyanis, ha vesszük ezt a $c \rightarrow 0$ határt, a metrika

$$a_{ij, c \rightarrow 0} = \Omega_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.4)$$

alakra degenerálódik, ahol az ívelemnégyszet már egyáltalán nem függ az időtől, csak a térkoordinátáktól, tehát a különböző térkoordinátákban különböző pontok között nem lesz kauzális kapcsolat. Ezen a határeseten a téridő transzformációi (3.2) alakban írhatóak, tehát Carroll-geometriát ír le.

Az α , b_μ , és $\Omega_{\mu\nu}$ függvények kovariánsan transzformálódnak Carroll-diffeomorfizmus alatt a következő módon [3]:

$$\Omega'_{\mu\nu} = \Omega_{\tau\lambda} J^{-1\tau}_\mu J^{-1\lambda}_\nu, \quad b'_\mu = \left(b_\tau + \frac{\alpha}{J} j_\tau \right) J^{-1\tau}_\mu, \quad \alpha' = \frac{\alpha}{J}, \quad (3.5)$$

ahol $J^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$, $j_\mu = \frac{\partial v'}{\partial x^\mu}$, és $J = \frac{\partial v'}{\partial v}$.

A (3.2) koordináta transzformáció esetén a deriváltak

$$\partial'_v = \frac{1}{J} \partial_v, \quad \partial'_\mu = J^{-1\nu}{}_\mu \left(\partial_\nu + \frac{j_\nu}{J} \partial_t \right), \quad (3.6)$$

módon transzformálódnak, ami alapján a térbeli derivált nem tenzorként transzformálódik Carroll-geometriában. Emiatt új deriváltakat kell bevezetnünk, amelyek kovariánsan transzformálódnak Carroll-geometriában is, ezek pedig

$$\partial_v \rightarrow \frac{1}{\alpha} \partial_v, \quad \nabla_\mu \rightarrow \hat{\nabla}_\mu \quad (3.7)$$

ahol ∇_μ a térbeli kovariáns deriváltat jelöli nem Carroll esetben. A térbeli kovariáns derivált

$$\hat{\nabla}_\mu v^\nu = \hat{\partial}_\mu v^\nu + \hat{\gamma}_{\mu\tau}^\nu v^\tau \quad (3.8)$$

skalárokra

$$\hat{\partial}_\mu = \partial_\mu + \frac{b_\mu}{\alpha} \partial_v, \quad (3.9)$$

alakban, Carroll-tenzorokra pedig

$$\hat{\gamma}_{\nu\tau}^\mu = \frac{1}{2} \Omega^{\mu\lambda} \left(\hat{\partial}_\nu \Omega_{\lambda\tau} + \hat{\partial}_\tau \Omega_{\lambda\nu} + \hat{\partial}_\lambda \Omega_{\tau\nu} \right) \quad (3.10)$$

alakban, Christoffel-szimbólumon keresztül hat.

A részecskemozgások leírása során folyadékmodell leírást alkalmazva a következő dinamikai mennyiségek írhatóak fel:

$$\begin{aligned} \varphi_\mu &= u^\nu \nabla_\nu u_\mu, \\ \beta &= \hat{\nabla}_\mu v^\mu, \\ \xi_{\mu\nu} &= \hat{\nabla}_{(\mu} v_{\nu)} + \frac{1}{c^2} v_{(\mu} \varphi_{\nu)} - \frac{1}{d} \beta \Omega_{\mu\nu}, \\ \omega_{\mu\nu} &= \hat{\nabla}_{[\mu} v_{\nu]} + \frac{1}{c^2} u_{[\mu} \varphi_{\nu]}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

ahol φ_μ az gyorsulás, β a tágulás, $\xi_{\mu\nu}$ a nyírás, és $\omega_{\mu\nu}$ az örvényesség. Ezeknek a mennyiségeknek a Carroll-geometriában ($c \rightarrow 0$) nem eltűnő komponensei kifejezhetőek α -val, b_μ -vel és $\Omega_{\mu\nu}$ -vel

$$\begin{aligned} \varphi_\mu^C &= \alpha^{-1} (\partial_v b_\mu + \partial_\mu \alpha), \\ \beta^C &= \alpha^{-1} \partial_v \ln \sqrt{\Omega}, \\ \xi_{\mu\nu}^C &= \alpha^{-1} \left(\frac{1}{2} \partial_v \Omega_{\mu\nu} - \frac{\Omega_{\mu\nu}}{d} \partial_v \ln \sqrt{\Omega} \right), \\ \omega_{\mu\nu}^C &= \partial_{[\mu} b_{\nu]} + \alpha^{-1} (b_{[\mu} \partial_{\nu]} \alpha + b_{[\mu} \partial_v b_{\nu]}), \end{aligned} \quad (3.12)$$

ahol d a térszerű dimenziók száma.

Megjegyzés: A szimmetrizációra és antiszimmetrizációra a következő konvenciót használtam:

$$A_{(ij)} = \frac{1}{2} (A_{ij} + A_{ji}), \quad A_{[ij]} = \frac{1}{2} (A_{ij} - A_{ji}). \quad (3.13)$$

3.1. Energia-impulzus tenzor

Az általános relativitáselméletben az energia-impulzus tenzor a következő módon definiálható [5]:

$$T^{ij} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{ij}}, \quad (3.14)$$

ahol $S = S[g_{ij}, \Phi]$ a rendszer hatásfunkcionálja, ami a metrikától és a rendszer egyéb mezőitől függ.

Kovariáns rendszerekben megmaradási egyenlethez juthatunk, ha megvizsgáljuk a hatás variációját egy infinitezimális koordináta transzformáció ($x^i \rightarrow x^i + \chi^i$) esetén:

$$\delta_\chi S = \int d^{d+1}x \left(\frac{\delta S}{\delta g_{ij}} \delta_\chi g_{ij} + \frac{\delta S}{\delta \Phi} \delta_\chi \Phi \right). \quad (3.15)$$

Feltételezzük, hogy a Φ mezők variációja eltűnik a hiperfelületen ($\frac{\delta S}{\delta \Phi} = 0$), valamint δ_χ a χ mező szerinti Lie-derivált:

$$\delta_\chi g_{ij} = \chi^k D_k g_{ij} + 2g_{k(i} \nabla_{j)} \chi^k = D_j \chi_i + D_i \chi_j = 0. \quad (3.16)$$

A (3.15), (3.14) és (3.16) egyenletek felhasználásával

$$\delta_\chi S = - \int d^{d+1}x \sqrt{-g} T^{ij} D_i \chi_j = \int d^{d+1}x \sqrt{-g} D_i T^{ij} \chi_j + \underbrace{\int d^{d+1}x \sqrt{-g} D_i (T^{ij} \chi_j)}_{=0} \quad (3.17)$$

összefüggést kapjuk a hatás variációjára. Kovariáns rendszerben $\delta_\chi S = 0$ minden χ -re. Ebből következik, hogy

$$D_i T^{ij} = 0. \quad (3.18)$$

Azonban Carroll-geometria esetén ($c \rightarrow 0$ határesetben) az energia-impulzus tenzor nem definiálható ilyen alakban, ugyanis ahhoz szükség lenne egy reguláris metrikára, (3.3) metrika azonban szinguláris $c \rightarrow 0$ esetben.

Emiatt a Carroll-momentumot, az energia-impulzus tenzor ultrarelativisztikus határesetét 3 részben definiáljuk:

$$\mathcal{O} = \frac{1}{\alpha \sqrt{\Omega}} \frac{\delta S}{\delta \alpha}, \quad \mathcal{B}^\mu = \frac{1}{\alpha \sqrt{\Omega}} \frac{\delta S}{\delta b_\mu}, \quad \mathcal{A}^{\mu\nu} = \frac{1}{\alpha \sqrt{\Omega}} \frac{\delta S}{\delta \Omega_{\mu\nu}} \quad (3.19)$$

Ebben az esetben $\alpha \sqrt{\Omega}$ a Carroll megfelelője a $\sqrt{-g}$ -nek, és a három variáció a 3 metrikát helyettesítő mező szerint van véve.

Carroll-geometriában a hatás invariáns

$$\chi = f(v, x^\mu) \partial_v + Y^\nu(x^\mu) \partial_\nu \quad (3.20)$$

vektormező esetén, vagyis

$$\delta_\chi S = 0 \quad (3.21)$$

ahol $f = f(v, x^\mu)$ tetszőleges függvény és $Y^\nu(x^\mu)$ tetszőleges vektormező. Y^ν csak a térkoordináták függvénye, tehát χ a (3.2) transzformáció infinitezimális változata. A hatás ilyen variációját a következőképp írhatjuk le:

$$\delta_\chi S = \int d^{d+1}x \left(\frac{\delta S}{\delta \alpha} \delta_\chi \alpha + \frac{\delta S}{\delta b_\mu} \delta_\chi b_\mu + \frac{\delta S}{\delta \Omega_{\mu\nu}} \delta_\chi \Omega_{\mu\nu} + \frac{\delta S}{\delta \Phi} \delta_\chi \Phi \right) \quad (3.22)$$

ahol Φ a rendszerben jelen lévő többi mezőt írja le. Itt is feltesszük, hogy $\frac{\delta S}{\delta \Phi} = 0$.

A megmaradási egyenletek meghatározásához ki kell számolnunk $\delta_\chi \alpha$, $\delta_\chi b_\mu$ és $\delta_\chi \Omega_{\mu\nu}$ Lie-deriváltakat. Ehhez (3.5) traszformáció infinitezimális esetét kell vizsgálnunk. Ha $x'^\mu \rightarrow x^\mu - \chi^\mu$

$$\delta_\chi \alpha = \chi(\alpha) + \alpha \partial_\nu \chi^\nu, \quad (3.23)$$

$$\delta_\chi b_\mu = \chi(b_\mu) - \alpha \partial_\mu \chi^\nu + b_\nu \partial_\mu \chi^\nu, \quad (3.24)$$

$$\delta_\chi \Omega_{\mu\nu} = \chi(\Omega_{\mu\nu}) + \partial_\mu \chi^\tau \Omega_{\tau\nu} + \partial_\nu \chi^\tau \Omega_{\mu\tau}, \quad (3.25)$$

ahol $\chi(f) \equiv \chi^\nu \partial_\nu f + \chi^\mu \partial_\mu f$.

Ahhoz, hogy kovariáns megmaradási egyenleteket kapjunk a benne szereplő mennyiségeknek is megmaradónak kell lennie, emiatt vizsgáljuk a Carroll-momentumok

$$\mathcal{O}' = J\mathcal{O} - \mathcal{B}^\mu J_\mu, \quad \mathcal{B}^{\mu'} = J_\nu^\mu \mathcal{B}^\nu, \quad \mathcal{A}^{\mu\nu'} = J_\tau^\mu J_\lambda^\nu \mathcal{A}^{\tau\lambda} \quad (3.26)$$

és a vektormező

$$\chi^{\nu'} = J\chi^\nu + j_\mu \chi^\mu, \quad \chi^{\mu'} = J_\tau^\mu \chi^\tau \quad (3.27)$$

transzformációját (3.2) szerint. Mint látható, $\mathcal{O}$ és χ^ν nem transzformálódik kovariánsan, ezért bevezetjük $\mathcal{E} = \alpha\mathcal{O} + b_\mu \mathcal{B}^\mu$ és $X = \alpha\chi^\nu - b_\mu \chi^\mu$ skalárokat, amik kovariánsak Carroll-geometriában.

(3.23)-(3.25) egyenleteket újraírva X és χ^μ függvényében a Lie-deriváltak

$$\delta_\chi \alpha = \partial_t X + \alpha \varphi_\mu \chi^\mu, \quad (3.28)$$

$$\delta_\chi b_\mu = -\hat{\partial}_\mu X + \varphi_\mu X - \omega_{\mu\nu} \chi^\nu + \frac{b_\mu}{\alpha} (\partial_t X + \alpha \varphi_\nu \chi^\nu), \quad (3.29)$$

$$\delta_\chi \Omega_{\mu\nu} = \hat{\nabla}_\mu \chi_\nu + \hat{\nabla}_\nu \chi_\mu + \frac{X}{\alpha} \partial_t \Omega_{\mu\nu} \quad (3.30)$$

alakot veszik fel. X bevezetésével a hatás variációja két részre bomlott fel ($\delta_\chi S = \delta_X S + \delta_{\chi^\mu} S$), tehát

$$\delta_X S = \int d^{d+1} x \alpha \sqrt{\Omega} \left(\mathcal{O} \partial_t X - \mathcal{B}^\mu \hat{\partial}_\mu X + \mathcal{B}^\mu \varphi_\mu X + \mathcal{B}^\mu \frac{b_\mu}{\alpha} \partial_t X + \mathcal{A}^{\mu\nu} \frac{X}{\alpha} \partial_t \Omega_{\mu\nu} \right) \quad (3.31)$$

$$\delta_{\chi^\mu} S = \int d^{d+1} x \alpha \sqrt{\Omega} \left(\mathcal{O} \alpha \varphi_\nu \chi^\nu - 2\mathcal{B}^\mu \omega_{\mu\nu} \chi^\nu + \mathcal{B}^\mu b_\mu \varphi_\nu \chi^\nu + 2\mathcal{A}^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\mu \chi_\nu \right) \quad (3.32)$$

Ezekre külön-külön teljesülnie kell a variáció megmaradásának

$$\left(\frac{1}{\alpha} \partial_t + \beta \right) \mathcal{E} - \left(\hat{\nabla}_\mu + 2\varphi_\mu \right) \mathcal{B}^\mu - \mathcal{A}^{\mu\nu} \frac{1}{\alpha} \partial_t \Omega_{\mu\nu} = 0 \quad (3.33)$$

$$2 \left(\hat{\nabla}_\mu + \varphi_\mu \right) \mathcal{A}^\mu_\nu + 2\mathcal{B}^\mu \omega_{\mu\nu} - \mathcal{E} \varphi_\nu = 0 \quad (3.34)$$

amik a Carroll-geometriára előálló kovariáns megmaradási egyenletek. (3.33) úgy transzformálódik, mint egy skálár, míg (3.34) térszerű vektorként transzformálódik, és mindkettő független c virtuális fénysebességtől.

Tehát hogy (3.33) és (3.34) egyenleteket megkapjuk, $\mathcal{E}$ skálárt, $\mathcal{B}^\mu$ térbeli vektort és $\mathcal{A}^{\mu\nu}$ térbeli szimmetrikus tenzort vezetjük be, mint ultrarelativisztikus megfelelőit az energia-impulzus tenzornak, másnéven Carroll-momentumokat. $\mathcal{E}$ tekinthető energiasűrűségnek, $\mathcal{B}^\mu$ hőáramlásnak $\mathcal{A}^{\mu\nu}$ pedig a feszültségtenzornak, ami felbontható nyom nélküli és nyommal rendelkező részekre

$$\mathcal{A}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\mathcal{P} \Omega^{\mu\nu} - \Xi^{\mu\nu}), \quad (3.35)$$

ahol $\mathcal{P}$ a nyomás, $\Xi^{\mu\nu}$ pedig a disszipációs tenzor.

3.1.1. Energia-impulzus tenzor kifejezése az Einstein-egyenletből

A hatásfunkcionál variációja (3.14) mellett az energia-impulzus tenzor kifejezhető a metrika segítségével az Einstein-egyenleten keresztül is:

$$8\pi T_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R \quad (3.36)$$

ahol R_{ab} a Ricci-tenzor, R pedig a görbületi skalár. A (3.3) metrikát használva megmutatható, hogy az energia impulzus tenzor ultrarelativisztikushoz közeli esetben (c -ben vezető rendben) kifejezhető a Carroll-momentumok segítségével a következő módon [4]:

$$\begin{aligned} 8\pi T^{vv} &= c^{-3}\alpha^{-2}\mathcal{E} + \mathcal{O}(c^{-1}), \\ 8\pi T^{v\mu} &= c^{-1}\alpha^{-1}(\mathcal{B}^\mu - 2b_\nu\mathcal{A}^{\mu\nu}) + \mathcal{O}(c) \\ 8\pi T^{\mu\nu} &= -2c^{-1}\mathcal{A}^{\mu\nu} + \mathcal{O}(c), \end{aligned} \quad (3.37)$$

azért elegendő a c -ben vezető rendet megadnunk, ugyanis későbbiekben $c \rightarrow 0$ esetet vizsgáljuk, ahol a többi rend elhanyagolhatónak tekinthető a vezető rend mellett.

4. Horizontközeli metrika és a Carroll-geometria

A fejezet során definiálunk egy általános horizont közeli metrikát, megmaradási egyenleteket írunk fel a téridőre és azonosítjuk az így kapott egyenleteket a korábbiakban felírt (3.33) és (3.34) megmaradási egyenletekkel.

Az előző fejezetben vizsgált D -dimenziós térhez hasonló teret vizsgálunk ebben a fejezetben, aminek a koordinátái $x^a = (x^\alpha, x^A)$, ahol $x^\alpha = (v, \rho)$, amiben v null koordináta, míg ρ a radiális koordináta. Ebben az esetben konstans v és ρ pontok $D-2$ dimenziós gömböket hoznak létre $(S_{v,\rho})$, amelyek x^A ($A = 3, \dots, D$) szögkoordinátákkal vannak parametrizálva, amiket a továbbiakban $\mathbf{x}$ -el jelölünk.

Stacionárius téridők esetén a horizonthoz közeli, azon kívül eső része a téridőnek mindig parameterezhető olyan módon, hogy a horizont-közeli metrika

$$ds^2 = -2\kappa\rho dv^2 + 2d\rho dv + 2\theta_A \rho dv dx^A + (\omega_{AB} + \lambda_{AB}\rho) dx^A dx^B + \mathcal{O}(\rho^2) \quad (4.1)$$

alakban legyen felírható [16]. Az ilyen parameterezést null Gauss koordinátarendszernek nevezik, ekkor a horizont ($\mathcal{H}$) $\rho = 0$ helyen található. A κ , Ω_{AB} , λ_{AB} , és θ_A változók a $\mathbf{x}$ szögkoordinátáktól és v nullkoordinátától függenek csak, ρ radiális koordinátától nem. Emellett megemlítendő, hogy a $c = 1$ és $G = 1$ parameterezést használtuk a fénysebességre és a gravitációs állandóra.

$\mathcal{H}$ horizontra 2 geometriát definiálhatunk: külső és belső geometriát. A belső geometria azt írja le, hogy a horizont felszínén milyenek a térnek a tulajdonságai. Mivel ez egy felületet jellemez, így a téridőhöz képest kevesebb dimenzióval kell rendelkeznie. A $\mathcal{H}$ horizontra

$$ds_{\mathcal{H}}^2 = 0 \cdot dv^2 + 0 \cdot dv dx^A + \Omega_{AB} dx^A dx^B \quad (4.2)$$

alakban definiálhadjuk a belső geometriát ami alapján látható, hogy a horizont teljes mértékben leírható Ω_{AB} térbeli metrika segítségével. Tehát a belső geometriája a horizontnak egy $D - 2$ dimenziós felületet határoz meg.

A külső geometriája egy objektumnak ezzel ellentétben pedig azt határozza meg, hogy a teljes téridőhöz viszonyítva hogyan írhatóak le a felület tulajdonságai. Ezt követően a (4.1) metrikát felbontjuk olyan módon, hogy a null hiperfelületek tanulmányozhatóak legyenek rajta

$$g_{ab} = q_{ab} + L_a N_b + N_b L_a, \quad (4.3)$$

ahol

$$\vec{L} = L^a \partial_a = \partial_v - \rho \theta^A \partial_A + \kappa \rho \partial_\rho \quad \text{és} \quad N = N_a dx^a = dv \quad (4.4)$$

null vektor és null forma és teljesítik $N(L) = 1$ összefüggést. $\vec{L}$ és N segítségével a $\mathcal{H}$ külső geometriájának a görbülete megadható [4]. $\vec{L}$ vektor egybeesik a horizont normájával $\mathcal{H}$ -ban, és emellett érintője is a horizontnak. N formából $\vec{N} = g^{-1}(N)$ vektor hozható létre amely viszont merőleges lesz a horizontra. Ez a két vektor közösen definiálják q_{ab} -t, ami egy $\vec{L}$ -re és $\vec{N}$ -re merőleges projekciója a téridőnek. A külső geometriája egy horizontnak ilyen projektált metrikán értelmezhető és $(\Sigma^{AB}, \omega_A, \tilde{\kappa})$ hármassal jellemezhető, ahol Σ^{AB} deformáció tenzor, ω_A forgási mező, $\tilde{\kappa}$ pedig a felszíni gravitáció. Ezek a következőként vannak definiálva

$$\Sigma_{AB} = \frac{1}{2} q_A^a q_B^b \mathcal{L}_{\vec{L}} q_{AB}, \quad \omega_A = q_A^a (N_b \mathcal{D}_a L^b), \quad L^b \mathcal{D}_b L^a = \tilde{\kappa} L^a \quad (4.5)$$

ahol $\mathcal{D}_a$ a g_{ab} metrikához tartozó kovariáns derivált. Így (4.1) metrika esetén $\mathcal{H}$ horizonton

$$\Sigma_{AB} = \frac{1}{2} \partial_v \Omega_{AB}, \quad \omega_A = -\frac{1}{2} \theta_A, \quad \tilde{\kappa} = \kappa \quad (4.6)$$

alakot öltik. A deformáció tenzor felbontható nyommal rendelkező és nyom nélküli részre, ezek a skaláris tágulás (Θ) és a nyírás (σ_{AB})

$$\Theta = \Omega^{AB} \Sigma_{AB} = \frac{1}{2} \Omega^{AB} \partial_v \Omega_{AB} = \partial_v \ln \sqrt{\Omega} \quad (4.7)$$

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2} \partial_v \Omega_{AB} - \frac{\Theta}{D-2} \Omega_{AB} \quad (4.8)$$

A skaláris tágulás Θ a $\mathcal{H}$ horizont felszínelemének a térbeli változását méri, tehát definíció alapján statikus horizont esetén $\Theta = 0$

4.1. Raychauduri és Damour egyenletek

A külső és belső geometriák definiálása után bevezető az Einstein egyenletek 2 megmaradási törvénye, a null Raychaudhuri egyenletet [17]

$$L^a L^b R_{ab} = 0 \quad (4.9)$$

amely az egymáshoz közeli részecskék mozgását írja le görbült téridőben, és a Damour egyenletet [18]

$$q_A^a L^b R_{ab} = 0 \quad (4.10)$$

amely egy Navier-Stokes jellegű mozgásegyenletet fogalmaz meg hiperfelületek esetén. (4.9) és (4.10) alapján feltételezhetjük egy harmadik tenzor megmaradási egyenlet létezését is, ha a Ricci tenzort q_A^a metrikával kontrahálnánk kétszer, azonban $q_A^a q_B^b R_{ab}$ a Ricci-tenzor horizontra vett projekcióját írja le, ami triviálisan 0 az adott esetben, emiatt nem vezet extra megmaradási egyenlethez. Ezek a horizont közeli metrikát (4.1) használva

$$\partial_v \Theta - \kappa \Theta + \frac{\Theta^2}{D-2} + \sigma_{AB} \sigma^{AB} = 0 \quad (4.11)$$

és

$$(\partial_v + \Theta) \theta_A + 2 \nabla_A \left(\kappa + \frac{D-3}{D-2} \Theta \right) - 2 \nabla_B \sigma_A^B = 0 \quad (4.12)$$

ahol ∇_A a Ω_{AB} metrikához tartozó kovariáns derivált.

4.2. Horizont közeli metrika és az ultrarelativisztikus határ kapcsolata

Egyik sajátossága a null hiperfelületeknek, hogy rendelkeznek egy degenerált belső metrikával (Ω), amelyben létezik egy vektormező, amely nem vezet ki ebből a felületből:

$$\Omega(., \vec{u}). \quad (4.13)$$

A $\mathcal{H}$ horizont esetén ez a belső metrika és a hozzá tartozó vektormező [4]

$$\Omega = \Omega_{AB}(v, \mathbf{x}) dx^A dx^B \quad \text{és} \quad \vec{u} = f(v, \mathbf{x}) \partial_v \quad (4.14)$$

minden $\mathcal{H}$ -n értelmezett f függvényre. Több korábbi eredmény alapján [19] [20] [21] ezekhez a hiperfelületekhez kapcsolható Carroll-geometria. Ez azt jelenti, hogy minden null hiperfelület értelmezhető ultrarelativisztikus téridőként.

A fejezetben azt mutatjuk be, hogy az előző alfejezetben jellemzett horizont-közel metrika (4.1) $\rho \rightarrow 0$ határértéke értelmezhető ultrarelativisztikus határesetként, ahol $\sqrt{\rho}$ egyeztethető össze a (3.3) parametrizációban használt c virtuális fénysebességgel (ez a paraméter nem egyezik a fizikai fénysebességgel, ami 1-nek lett paraméterezve 4.1 metrikában).

A (4.1) metrika konstans ρ hiperfelületeit (Σ_ρ) vizsgálva azon felületek geometriája a következő metrikával írható le

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} -2\rho\kappa & \rho\theta_A \\ \rho\theta_B & \Omega_{AB} + \rho\lambda_{AB} \end{pmatrix}_{\{dv, dx^A\}}. \quad (4.15)$$

Ez a D dimenziós tér egy $D - 1$ dimenziós felülete. Ha a $\mathcal{H}$ horizonthoz egyre közelebbi hiperfelületeket választunk, akkor $\rho \rightarrow 0$ határesetben azt hapjuk, hogy a hiperfelület a horizonton

$$a_{ij, \rho \rightarrow 0} = \Omega_{AB} dx^A dx^B \quad (4.16)$$

alakra degenerálódik. Összehasonlítva (4.15) és (3.3) metrikát a következő azonosítás tehető

$$c^2 = \rho, \quad \alpha = \sqrt{2\kappa}, \quad b_A = \frac{\theta_A}{\sqrt{2\kappa}}. \quad (4.17)$$

Tehát a horizont közeli metrikában a radiális koordináta értelmezhető a virtuális fénysebesség négyzetének Σ_ρ hiperfelületen. A $\rho = 0$ koordinátában található horizont emiatt jellemezhető egy ultrarelativisztikus téridőként a Carroll-geometria segítségével.

Tehát (4.15) és (3.3) egymással való azonosításából következne, hogy $\lambda_{AB} = -b_A b_B$ így 4.17 hozzárendelés miatt $\lambda_{AB} = -\frac{\theta_A \theta_B}{2\kappa}$ megkötés lépne fel a horizontközel téridő alakjára. Ez a megkötés azonban nem korlátozza az eredmények érvényességét, ugyanis λ_{AB} nem jelenik meg vezető rendben az általunk vizsgált egyenletekben, így nem kell λ_{AB} , θ_A és κ kapcsolatát vizsgálnunk az analízis során.

(4.17) alapján kifejezhetjük (3.12) dinamikai mennyiségeket a (4.1) metrika esetében

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \frac{1}{2\kappa} \left(\partial_A \kappa + \partial_v \theta_A - \frac{\theta_A}{2\kappa} \partial_v \kappa \right), \\ \beta &= \frac{\Theta}{\sqrt{2\kappa}}, \\ \xi_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} \sigma_{AB}, \\ \omega_{AB} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_A \theta_B}{\sqrt{2\kappa}} + \frac{2\theta_A \partial_B \kappa + \theta_A \partial_v \theta_B}{(2\kappa)^{\frac{3}{2}}} \right) - (A \leftrightarrow B) \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.2.1. Horizont dinamika mint ultrarelativisztikus megmaradási törvény

Ezt követően vizsgáljunk egy Σ_ρ hiperfelületet $\rho = 0$ -hoz közel. Ekkor a Σ_ρ felületre merőleges, normált vektort

$$n = \frac{d\rho}{\sqrt{2\kappa\rho}} \quad (4.19)$$

alakban írhatjuk fel. Ennek felhasználásával definiálhatjuk az energia-impulzus tenzort Σ_ρ felületet leíró (4.15) metrika esetén:

$$T_{ab} = \frac{1}{8\pi} (K a_{ab} - K_{ab}), \quad (4.20)$$

ahol $K_b^a = a_b^c \mathcal{D}_c n^a$ a külső görbülete Σ_ρ -nak, $K = K_a^a$ az ebből képzett skalár. Mivel a Σ_ρ hiperfelületre membrán-felületként is hivatkoznak, az erre vetített energia-impulzus tenzort membrán-energia impulzus tenzornak nevezi a szakirodalom [4][22]. Az (4.1) egyenletet felhasználva kiszámíthatjuk a membrán energia-impulzus tenzort a horizont közelében

$$\begin{aligned} 8\pi T^{vv} &= \frac{\Theta}{2\sqrt{2}(\rho\kappa)^{\frac{3}{2}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right) \\ 8\pi T^{vA} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}\rho\kappa^{\frac{3}{2}}}\left(\partial^A\kappa - \theta_B\partial_v\Omega^{AB} + \theta^A(\kappa + \Theta)\right) + \mathcal{O}(\sqrt{\rho}) \\ 8\pi T^{AB} &= -\frac{1}{\sqrt{2\rho\kappa}}\left(\omega^{AB}\left(\kappa + \Theta - \frac{\partial_v\kappa}{2\kappa}\right) - \frac{1}{2}\partial_v\Omega^{AB}\right) + \mathcal{O}(\sqrt{\rho}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Összehasonlítva (4.21)-ot és (3.37)-t a Carroll-momentumok kifejezhetők a horizont közeli metrikát (4.1) leíró paraméterek segítségével:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{\sqrt{2\kappa}}\Theta, \\ \mathcal{P} &= -\frac{1}{\sqrt{2\kappa}}\left(\kappa + \frac{D-3}{D-2}\Theta - \frac{\partial_v\kappa}{2\kappa}\right), \\ \Xi_{AB} &= -\frac{1}{\sqrt{2\kappa}}\sigma_{AB}, \\ B_A &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial_A\kappa}{\kappa} + \frac{\theta^B}{2\kappa}\partial_v\Omega_{AB} + \frac{\theta_a}{2\kappa^2}\partial_v\kappa\right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ezen összefüggések segítségével hosszas algebrai számolásokkal megmutatható, hogy (3.33) skaláris egyenlet megegyezik (4.11) Raychaudhuri-egyenlettel, míg (3.34) térvektorokra felírt megmaradási egyenlet (4.12) Damour-egyenlettel azonosítható. Így két különböző irányból is eljutottunk arra a következtetésre, hogy a fekete lyuk dinamikája leírható ultrarelativisztikus megmaradási egyenletekkel, ha a horizont közeli radiális koordinátát a virtuális fénysebesség négyzetével azonosítjuk.

5. Gravitációs felszíni töltések

Ebben a fejezetben a kanonikus felszíni töltések koncepcióját fogjuk körüljárni a gravitáció általánosan kovariáns elméletében [5]. Olyan egyenleteket keresünk megmaradó mennyiségek leírására, amelyek alakja koordináta rendszer függetlenül változatlan marad.

Ehhez Noether-tételét fogjuk vizsgálni, és megmutatjuk hogy segítségével nem tudunk megmaradó töltéseket definiálni olyan elméletekben, amik megengedik a mértékszabadságot. Emiatt bevezetjük a Noether-tétel egy általánosabb alakját [6], egy alacsonyabb szintű megmaradási törvényt, amely már felhasználható lesz az általános relativitáselméletben. A megmaradási törvény használatával felírunk egy egzakt egyenletet megmaradó töltés kifejezésére.

5.1. Noether-tétele és általánosítása

Emmy Noether 1916-ban bizonyította a két Noether-tételt, amik közül az első kimondja, hogy ha egy fizikai rendszerben valamilyen folytonos differenciálható szimmetria érvényesül, akkor ahhoz megmaradási törvény, illetve megmaradó mennyiség (Noether-töltés) tartozik [23].

Formálisan kimondva, ha veszünk egy fizikai rendszert, amely leírható egy $\mathcal{L}$ Lagrange sűrűséggel egy téridő sokaságon definiálva, amin globális szimmetriák érvényesek, akkor létezik bijekció $\mathcal{L}$ globálisan folytonos szimmetriái, és egy megmaradó vektormező között. Ezt a vektormezőt Noether-áramnak nevezzük és J^μ -vel jelöljük.

A Lagrange sűrűség két globális szimmetriája megegyezik egymással, ha csak egy mértéktranszformációban különböznek egymástól. Ugyanígy, azt mondjuk, hogy két töltés J_1^a és J_2^a ekvivalensek ha csak egy triviális árammal különböznek egymástól:

$$J_1^a = J_2^a + \partial_b k^{[ab]}, \quad (5.1)$$

ahol $k^{[ab]}$ antiszimmetrikus $(n-2)$ dimenziós mátrix. Ekkor látható, hogy $\partial_a J_1^a = \partial_a J_2^a$, tehát mindkét áram megmarad az adott rendszerben.

Most vegyünk egy tisztán mértékinvariáns rendszert, ahol nincsenek nem-triviális globális szimmetriák. Noether első tétele alapján csak triviális megmaradó áramok léteznek a rendszerben. Általáns kovariáns elméletekben minden $x^a \rightarrow x^a + \xi^a$ transzformáció mértéktranszformáció, tehát a természetes szimmetriák (izometriák) triviális áramokkal társulnak. Ilyen triviális áram a $J^a = 0$ áram is. Ekkor, ha definiálunk egy töltést (Q) úgy, hogy integráljuk a Noether-áramot egy adott Σ Cauchy-felületre, akkor kiolvasható, hogy

$$Q = \int_{\Sigma} J^a (d^{n-1}x)_a = \int_{\Sigma} \partial_b k^{[ab]} (d^{n-1}x)_a = \int_{\partial\Sigma} k^{[ab]} (d^{n-2}x)_{ab}, \quad (5.2)$$

ahol kihasználtuk (5.1) mértéktranszformációt $J_2^a = 0$ áram esetén. Mivel $k^{[ab]}$ megválasztásában nincs semmilyen megkötés a Q töltés teljesen tetszőleges értéket vehet fel. Tehát a megmaradó töltés nem definiálható egyértelműen.

5.1.1. Alacsonyabb fokú megmaradási törvények

Megoldást találhatunk erre a problémára, ha jobban megvizsgáljuk (5.2)-ben kapott tetszőleges Noether-töltést: $Q = \int_{\partial\Sigma} k^{[ab]} (d^{n-2}x)_{ab} = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{k}$, ahol $\mathbf{k}$ egy $(n-2)$ forma. Láthatjuk, hogy Q leegyszerűsödött $\mathbf{k}$ $\partial\Sigma$ felületen átmenő fluxusára, tehát csak az $(n-2)$ forma $\partial\Sigma$ közeli viselkedésétől függ.

Abban az esetben, ha tudunk definiálni egy olyan $(n-2)$ formát $(\mathbf{k} = k^{[ab]} (d^{n-2}x)_{ab})$ hogy

$$d\mathbf{k} = \partial_\nu k^{[ab]} (d^{n-1}x)_a = 0 \quad (5.3)$$

legyen, akkor definiálható egy integrális töltés

$$Q = \int_S \mathbf{k} \quad (5.4)$$

bármely $\mathcal{S}$ felületen, amely megmaradó mennyiség lesz a felület változása esetén, ha szingularitás érintése nélkül változtatjuk azt. Tehát ilyen $(n-2)$ formák keresésével találhatunk leírást a megmaradó töltésekre mértéktérelméletben.

A Noether-tétel ezen általánosított formáját Barnich, Brandt és Henneaux írta le [6]: Ha veszünk egy fizikai rendszer, amely leírható egy $\mathcal{L}$ Lagrange sűrűséggel egy téridő sokaságon definiálva, amin globális szimmetriák érvényesek, akkor létezik bijekció $\lambda(x^\mu)$ mezőszimmetriákkal rendelkező mértékparaméterek, és $\mathbf{k}$ $(n-2)$ formák között.

A mezőszimmetrika azt jelenti, hogy minden sokaságon értelmezett Φ^i mező variációjának el kell tűnnie egy hiperfelületen ($\delta_\lambda \Phi^i \approx 0$). Két mértékparaméter megegyezik egymással, ha a hiperfelületen megegyeznek.

Az $(n-2)$ formának pedig zártnak kell lennie a hiperfelületen ($d\mathbf{k} \approx 0$). Két $(n-2)$ forma ekvivalens, ha csak $d\mathbf{l}$ -el térnek el egymástól a burkon, ahol $\mathbf{l}$ egy $(n-3)$ forma.

Bár az $\mathbf{k}$ továbbra sem lesz egyértelmű, a belőle létrehozott $Q = \int_{\partial\Sigma} k^{[ab]} (d^{n-2}x)_{ab}$ megmaradó töltés már egyértelmű lesz, ugyanis különböző $\mathbf{k}$ -k csak a hiperfelületen triviális $(n-2)$ formákban és $(n-3)$ formákban különbözhetnek, és ezek a járulékok 0-k lesznek az integrálás után Stokes tétele miatt, tehát nem befolyásolják a megmaradó töltést.

5.2. Felszíni töltések kovariáns elméletekben

Ez az általánosított Noether-tétel megmaradó töltései lineáris elméletekre, például a Maxwell-egyenletek egyértelműen megadhatóak, azonban a nem lineáris elméletekre, mint például az általános relativitáselmélet a tétel alkalmazása komplikáltabb [5]. A mértéktranszformációk nem változtatják meg a metrikát, ha az izometriák generátorai a Killing vektorok $\delta_\xi g_{ab} = \mathcal{L}_\xi g_{ab} \approx 0$. Azonban általános téridőkhöz nem rendelhetők Killing vektorok, ugyanis g_{ab} metrikához nem mindig rendelhető izometria. (például [24]). Tehát az általánosított Noether-tétel nem alkalmazható általánosan az általános relativitáselméletben.

Azonban létezik két olyan csoportja az Einstein-egyenlet megoldásainak, amire alkalmazható a tétel: az egzakt izometriával rendelkező megoldások családja, és az asszimptotikus izometriával rendelkező megoldások családja.

Vizsgáljuk egy $\bar{g}_{ab}$ megoldását az Einstein-egyenletnek, amit nevezzünk háttér megoldásnak. Perturbáljuk a megoldást egy infinitezimális hozzáadott h_{ab} járulékkal, így a téridőt

$$g_{ab} = \bar{g}_{ab} + h_{ab} \quad (5.5)$$

módon írhatjuk le. Megmutatható, hogy a megoldás Lagrange-sűrűsége $\bar{g}_{ab}$ metrikának h_{ab} -ban lineáris környezetében mértékinvariáns $\delta_\xi h_{ab} = \mathcal{L}_\xi \bar{g}_{ab}$ transzformációra [5]. Tehát ha a háttér rendelkezik Killing-szimmetriával ($\mathcal{L}_\xi \bar{g}_{ab} = 0$), akkor az definiálja a szimmetriákat a perturbált esetre is, tehát $\delta_\xi h_{ab} = 0$, így létezik megmaradó $(n-2)$ forma $\mathbf{k}_\xi(h; \bar{g})$ és az általánosított Noether-tétel értelmében ahhoz rendelhető megmaradó töltés.

A szimmetriák meghatározásához be kell vezetnünk egy határérték feltételt az asszimptotikus régióban, ahol a linearizált elmélet alkalmazható a referencia $\bar{g}_{ab}$ metrikára, ami Killing-metrikával rendelkezik [5]. Ezek az izometriák csak asszimptotikusan definiáltak, tehát asszimptotikus szimmetriáknak nevezzük őket. Elegendő a szimmetriának asszimptotikusan léteznie, ugyanis asszimptotikusan így definiálható lesz a megmaradó töltés, a felületet változtatva szingularitás érintése nélkül pedig ugyanazt a megmaradó töltést kell kapnunk azokon a részen a téridőnek, ahol a Killing-vektorok már nem definiálhatóak.

Vegyük a metrikák azon csoportját, amelyek teljesítik a határfeltételeket (G). Ezek közül kiválasztjuk a háttér metrikát: $\bar{g}_{ab} \in G$. Eddig olyan módszereket vizsgáltunk, ahol az elmélet linearizálva közvetlenül alkalmazható, tehát az asszimptotikus töltések csak $\bar{g}_{ab}$ -tól függenek, és a perturbáció $h_{ab} = g_{ab} - \bar{g}_{ab}$ alakban írhatóak le, ekkor a töltés $\oint_S k_\xi [g - \bar{g}; \bar{g}]$ alakú lesz. Viszont előfordulhat, hogy a töltés nem lineárisan függ g_{ab} metrikától. Ekkor a töltést úgy definiálhatjuk, hogy linearizáljuk az elméletet g_{ab} környezetében δg_{ab} variáció bevezetésével. Ekkor a töltés

$$Q_\xi [g; \bar{g}] = \int_{\bar{g}}^g \oint_S k_\xi [dg'; g'] \quad (5.6)$$

alakban írható le, ahol integrálunk az $\mathcal{S}$ felületre, valamint G -n egy olyan útra, ami összeköti $\bar{g}_{ab}$ referencia metrikát a vizsgált g_{ab} metrikával. A töltés megmaradó, amíg ξ^μ asszimptotikus szimmetria, vagyis $d\mathbf{k}_\xi [\delta g, g] \approx 0$ minden $g_{ab} \in G$ esetén és az összes variáció érintőirányú G -re.

A teljes G -n való útintegrálás előtt vizsgáljuk csak a felületi integrálját a töltésnek. Ez tekinthető a teljes töltés lokális variációjának G -n g és $g_{ab} + \delta g_{ab}$ között. Ez a variáció a következő módon írható fel [25]

$$\delta Q_\xi [g, \delta g] = \oint_S \mathbf{k}_\xi [g, \delta g], \quad (5.7)$$

amiből meghatározható maga a töltés is. δ azt jelöli, hogy a Q_ξ töltés (5.6) egyenletben nem integrálható általánosságban. Integrálható esetben Q_ξ reprezentálja a ξ infinitezimális transzformációhoz tartozó generátort.

A töltést definiáló $(n-2)$ forma egzakt alakja megadható további hosszas elméleti megfontolások után [5] a következő formában:

$$\mathbf{k}_\xi [g, \delta g] = \frac{\sqrt{-g}}{8\pi G} (d^{n-2}x)_{ab} \left(\xi^a \nabla_c \delta g^{bc} - \xi^a \nabla^b \delta g + \xi_c \nabla^b \delta g^{ac} + \frac{1}{2} \delta g \nabla^b \xi^a - \delta g^{cb} \nabla_c \xi^a \right) \quad (5.8)$$

Ennek a segítségével a megmaradó töltés variációja már egyszerűen meghatározható, és már csak az útintegrálást kell elvégezni hogy megkapjuk a megmaradó töltést.

and $k[g, h]$ is a one-form w.r.t. the field configuration space but a $(D-2)$ -form w.r.t. the spacetime. It is defined as follows

6. Horizonton megmaradó töltések

Ebben a fejezetben visszatérünk a horizont közeli metrikához (4.1), és az ahhoz tartozó szimmetriákat leíró vektormezők megadása után a horizonton megmaradó töltést fogjuk vizsgálni több konkrét térídő esetén.

6.1. Az horizont közeli szimmetriák és a hozzá tartozó töltések

A (4.1) metrika esetén a határfeltételek a következő alakúak lesznek [4]

$$g_{\rho\rho} = 0, \quad g_{v\rho} = 1, \quad g_{\rho A} = 0, \quad (6.1)$$

és

$$\begin{aligned} g_{vv} &= -2\rho\kappa + \mathcal{O}(\rho^2), \\ g_{vA} &= \rho\theta_A + \mathcal{O}(\rho^2), \\ g_{AB} &= \Omega_{AB} + \rho\lambda_{AB} + \mathcal{O}(\rho^2) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Megmutatható [26], hogy egy megfelelően sima tetszőleges $f(v, \mathbf{x})$ függvénnyel és $Y^A(\mathbf{x})$ szögkoordinátákon értelmezett vektormezővel $\chi = \chi^a \partial_a$ vektormező komponensei felírhatóak:

$$\begin{aligned} \chi^v &= f(v, \mathbf{x}), \\ \chi^\rho &= -\partial_v f \rho + \frac{1}{2} \theta^A \partial_A f \rho^2 + \mathcal{O}(\rho^3) \\ \chi^A &= Y^A(\mathbf{x}) + \Omega^{AB} \partial_B f \rho + \frac{1}{2} \lambda^{AB} \partial_B f \rho^2 + \mathcal{O}(\rho^3), \end{aligned} \quad (6.3)$$

alakban. χ megadja a (4.1) metrika szimmetriáit, emiatt ezeket asszimptotikus Killing-vektoroknak nevezzük attól függetlenül, hogy a metrikát csak a horizon közelében definiáltuk, és nem a végtelenben.

Fontos tulajdonsága ezen Killing vektoroknak, hogy a $\mathcal{H}$ horizonra vetítve ($\rho = 0$)

$$\chi = f(v, \mathbf{x}) \partial_v + Y^A(\mathbf{x}) \partial_A \quad (6.4)$$

alakra egyszerűsödnek. Mivel f és Y^A függvényeket teljesen általánosan definiáltuk, ez az infinitezimális verziója a Carroll-diffeomorfizmusnak.

Ezek a vektormezők megtartják a horizontközeli metrikát, és rendelkeznek hozzá felületi töltések. Ez a töltés egy mező variációja a töltésnek. A horizontközeli metrika adott hiperfelületein a geometriát g metrikával és annak $h \equiv \delta g$ variációjával leírva ez a töltés

$$\delta \mathcal{Q}_\chi[g, h] = \oint_{S_{v,\rho}} \mathbf{k}_\chi[g, h], \quad (6.5)$$

alakban írható le, ahol χ egy asszimptotikus Killing-vektor, $\mathbf{k}_\chi[g, h]$ pedig egy $(D-2)$ -forma. A $(D-2)$ formát (5.8) alakban definiálva, (4.1) metrika esetén (6.5) egyenlet alakot veszi fel:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{Q}_{(f, Y^A)}[g, \delta g] &= \frac{1}{16\pi} \oint_{S^{D-2}} d^{D-2}x \left(2f\kappa\delta\sqrt{\Omega} + 2\partial_v f \delta\sqrt{\Omega} - 2f\sqrt{\Omega}\delta\theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} f\sqrt{\Omega} \partial_v \Omega_{AB} \delta\Omega^{AB} - Y^A \delta(\theta_A \sqrt{\Omega}) \right) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Látható, hogy a töltés nem integrálható teljes általánosságban $2f\sqrt{\Omega}\delta\Theta$, $2f\kappa\delta\sqrt{\Omega}$ és $\frac{1}{2}f\sqrt{\Omega}\partial_v\Omega_{AB}\delta\Omega^{AB}$ tagok miatt.

Amikor a felszíni töltés nem integrálható, akkor is lehet azt reprezentálni asszimptotikus Killing-algebrán keresztül a módosított Dirac-zárójelekkel [27]. Ehhez $\delta\mathcal{Q}_\chi$ -t felbontjuk egy integrálható (Q^{int}) és egy nem integrálható (Ξ_χ) részre [4]:

$$\delta\mathcal{Q}_\chi[g, \delta g] = \delta \left(Q_\chi^{\text{int}}[g] \right) + \Xi_\chi[g, \delta g], \quad (6.7)$$

ahol

$$Q_\chi^{\text{int}}[g] = \frac{1}{16\pi} \oint_{S^{D-2}} d^{D-2}x \sqrt{\Omega} \left(2f\kappa + 2\partial_v f - \frac{2}{D-2} f\Theta - Y^A \theta_A \right), \quad (6.8)$$

és

$$\Xi_\chi[g, \delta g] = -\frac{1}{8\pi} \oint_{S^{D-2}} d^{D-2}x \sqrt{\Omega} f \left(\delta\kappa + \frac{D-3}{D-2} \delta\theta - \frac{1}{2} \sigma_{AB} \delta\Omega^{AB} \right). \quad (6.9)$$

Ezt követően definiáljuk a módosított Dirac zárójelet:

$$\left\{ Q_\chi^{\text{int}}[g], Q_\eta^{\text{int}}[g] \right\}^* \equiv \delta_\eta Q_\chi^{\text{int}}[g] + \Xi_\eta[g, \mathcal{L}_\chi g] \quad (6.10)$$

Megjegyzés: A felbontás nem egyértelmű, $N_\chi[g]$ bevezetésével mindig választhatunk másik töltést [27]

$$\tilde{Q}_\chi^{\text{int}} = Q_\chi^{\text{int}} - N_\chi, \quad \tilde{\Xi}_\chi = \Xi_\chi + \delta N_\chi \quad (6.11)$$

formában, amire érvényes a felbontás.

Ez a módosított zárójel definiálja az asszimptotikus Killing algebra reprezentációját: ha van két asszimptotikus Killing mezőnk ((f_1, Y_1^A) és (f_2, Y_2^A)) akkor megmutatható, hogy

$$\left\{ Q_{(f_1, Y_1^A)}^{\text{int}}[g], Q_{(f_2, Y_2^A)}^{\text{int}}[g] \right\}^* = Q_{(f_{12}, Y_{12}^A)}^{\text{int}}, \quad (6.12)$$

ahol $f_{12} = f_1\partial_v f_2 - f_2\partial_v f_1 + Y_1^A \partial_A f_2 - Y_2^A \partial_A f_1$ és $Y_{12}^A = Y_1^B \partial_B Y_2^A - Y_2^B \partial_B Y_1^A$

Még az össztöltés megmaradó mennyiség, annak a komponenseire ez már nem lesz érvényes. Ha (f_2, Y_2^A) Killing-mezőt $(1, 0)$ -nak választjuk, (6.10) és (6.12) egyenletek

$$\delta_{(1,0)} Q_\chi^{\text{int}}[g] + Q_{\partial_v f, 0}^{\text{int}}[g] = -\Xi_{1,0}[g, \mathcal{L}_\chi g] \quad (6.13)$$

alakot vesznek fel, ahol $\delta_{(1,0)}$ egy (6.3) mezőkre vett időderiváltként hat, tehát

$$\frac{d}{dv} Q_\chi^{\text{int}}[g] = -\Xi_{(1,0)}[g, \mathcal{L}_\chi g] \quad (6.14)$$

vagyis $\mathcal{Q}^{\text{int}}$ nem megmaradó mennyiség, és ebben szerepet játszik a nem integrálható része a töltésnek.

6.2. A horizont Killing-mezőkhöz tartozó ultrarelativisztikus töltései

Újra tekintve a (4.20) membrán energia-impulzus tenzort az Einstein-egyenletek alapján egy konstans ρ hiperfelületen annak a divergenciája eltűnik:

$$\bar{\nabla}_j T^{ji} = 0. \quad (6.15)$$

Emiatt felírható megmaradó áram minden vektormezőre Σ_ρ felületen, amelyik megtartja a metrika alakját

$$\mathcal{L}_\xi a_{ij} = 0 \quad (6.16)$$

ami ekvivalens

$$\bar{\nabla}_{(i} \xi_{j)} = 0 \quad (6.17)$$

Killing-egyenlettel, ahol $\bar{\nabla}_i$ az a_{ij} metrikán értelmezett kovariáns deriválás. Ekkor a megmaradó áramot $J^i = \xi_j T^{ji}$ alakban írhatjuk le, ugyanis könnyen belátható a megmaradása:

$$\bar{\nabla}_i J^i = \xi_j \underbrace{\bar{\nabla}_i T^{ji}}_{=0} + T^{ji} \bar{\nabla}_i \xi_j = -T^{ji} \bar{\nabla}_j \xi_i \stackrel{i \leftrightarrow j}{=} -T^{ji} \bar{\nabla}_i \xi_j \rightarrow \bar{\nabla}_i J^i = 0 \quad (6.18)$$

ahol kihasználtuk az energia-impulzus tenzor szimmetriáját. Ezzel felírhatunk egy megmaradó töltést kis ρ -kra v koordináta függvényében:

$$\mathcal{Q}_\xi^\rho = \oint_{S_{v,\rho}} d^{D-2} x \sqrt{q} l_i J^i, \quad (6.19)$$

ahol

$$q_{AB} = \Omega_{AB} + \rho \lambda_{AB} + \mathcal{O}(\rho^2), \quad l = \sqrt{2\kappa} \rho dv \quad (6.20)$$

ahol q_{AB} a térbeli része a konstans ρ hiperfelületnek $(S_{v,\rho})$, l pedig az időszerű normálisa $S_{a,\rho}$ -nak.

Az általános ξ Killing-vektort felbontva $\xi = f(v, x^A) \partial_v + Y^A(v, x^A) \partial_A$ alakba 6.17 Killing-egyenletet ki tudjuk fejteni $\rho \rightarrow 0$ esetben

$$\begin{aligned} \partial_v Y^A &= 0, \\ f \partial_v \kappa + Y^A \partial_A \kappa + 2\kappa \partial_v f &= 0, \\ f \partial_v \Omega_{AB} + \nabla_A Y_B + \nabla_B Y_A &= 0. \end{aligned} \quad (6.21)$$

egyenletekkel. Amit észrevehetünk az első egyenletből, hogy Y^A része a Killing-vektornak független v koordinátától, amit Carroll-geometriában (3.20) alapvetőnek vettünk. Így ezt a feltételezést utólagosan igaznak találtuk.

Emellett (6.19) töltésnek is vehető horizont közeli határértéke a következő alakban:

$$\mathcal{Q}_\xi^\rho \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \mathcal{C}_\xi = \frac{1}{16\pi} \oint_{S^{D-2}} d^{D-2} x \sqrt{\Omega} \left(-2f\Theta - Y^A \left(\theta_A + \frac{\partial_A \kappa}{\kappa} \right) \right). \quad (6.22)$$

Ez a töltés megmaradó abban az esetben, ha a Raychaudhuri és a Damour egyenletek érvényesek, valamint (f, Y^A) kielégíti (6.21) Killing-egyenletek Carroll esetét. (6.21) egyenletek utolsó tagjából

$$f\Theta = -\nabla_A Y^A \quad (6.23)$$

következik, amivel a töltés alakja tovább egyszerűsödik

$$\mathcal{C}_\xi = \frac{-1}{16\pi} \oint_{S^{D-2}} d^{D-2} x \sqrt{\Omega} Y^A \left(\theta_A + \frac{\partial_A \kappa}{\kappa} \right). \quad (6.24)$$

Mivel ebben az összefüggésben Ω_{AB} , κ és θ_A általánosan függenek v és x^A koordinátáktól, a töltés megmaradása nem triviális. Emiatt a horizonton indukált Carroll-geometriának az izometriája felületen megmaradó töltésekkel azonosítható.

Tehát jelenleg két töltést definiáltunk a téridők hiperfelületeire. Az egyiket a mezők variációjából kapjuk asszimptotikus Killing-vektorok esetén (6.6), míg a másikat pedig a nem-horizonton definiált töltések horizonton vett határértékéből (6.22). A (6.6)-hoz tartozó asszimptotikus Killing-mezőről (6.3) állítottuk korábban, hogy horizontra vetített alakja Carroll-geometriát ír le. Ha vizsgáljuk (6.3) vezető rendjét kiértékelve $\rho = 0$ -ban az az infinitezimális verzióját írja le a Carroll-diffeomorfizmusnak. Tehát az asszimptotikus (6.3) Killing-mezők tekinthetők a horizontok halmazának egy kiterjesztésének. Tehát a (6.1), (6.2) határfeltételeken értelmezett asszimptotikus szimmetriacsoportok izomorfak a Carroll-diffeomorfizmusra $\mathcal{H}$ -ban.

Az asszimptotikus Killing-vektorokhoz kapcsolódó töltések kiértékelésekor azt kell megfontolnunk, hogy ezeknek az asszimptotikus Killing-vektoroknak milyen részhalmazának a horizontra vett projekciója izometria a Carroll-geometriára. Ez abban az esetben lesz igaz, ha az asszimptotikus Killing-vektorokban $f(v, \mathbf{x})$ és $Y^A(\mathbf{x})$ függvények kielégítik (6.21) egyenleteket. Ha ezt megteszik, akkor megmutatható, hogy a töltések között

$$\mathcal{C}_{(f,Y^A)} = Q_{(f,Y^A)}^{\text{int}} - \frac{1}{8\pi} \oint_{S^{D-2}} d^{D-2}x \sqrt{\Omega} f \left(\Theta + \kappa - \frac{\partial_v \kappa}{2\kappa} \right) \quad (6.25)$$

összefüggés áll fenn. Mivel $\mathcal{C}_{(f,Y^A)}$ töltés megmaradó, Q^{int} viszont a másik megmaradó töltés integrálható része, és korábban megmutattuk (6.14), hogy az nem minden esetben megmaradó mennyiség. Azonban

$$\Theta + \kappa - \frac{\partial_v \kappa}{2\kappa} = 0 \quad (6.26)$$

esetben $\mathcal{C}_{(f,Y^A)} = Q^{\text{int}}$ összefüggés áll fenn, így ebben az esetben $\mathcal{Q}_\chi$ megmaradó töltés egyértelműen teljesen integrálható lesz.

Ez az összefüggés azonban csak az adott felbontás esetén érvényes, (6.11) mérték-transzformáció megváltoztathatja az eredményeket.

6.3. Megmaradó töltések konkrét téridők esetén

Miután megvizsgáltuk a horizont közeli szimmetriákhoz tartozó töltéseket, illetve a Carroll-szimmetriák által leírt töltéseket általános horizont közeli téridőben, vizsgáljuk meg, hogy ezek milyen alakot vesznek fel speciális esetekben.

6.3.1. Schwarzschild-téridő

Először vizsgáljuk az Einstein egyenletek vákuummegoldását, a Schwarzschild-téridőt advanszált Eddington Finkelstein koordinátákban:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega_2^2 \quad (6.27)$$

ahol $r_s = 2M$ a Schwarzschild-sugarat jelöli (M a tömegparaméter). Ebben az esetben bevezetve ρ horizont közeli koordinátát

$$r = r_s + \rho, \quad \rho \ll r_s \quad (6.28)$$

a metrika

$$ds^2 = - \frac{\rho}{r_s} \left(1 + \frac{\rho}{r_s} \right)^{-1} dv^2 + 2dv d\rho + (r_s + \rho)^2 d\Omega_2^2 \quad (6.29)$$

alakot veszi fel. Ez lineáris rendben

$$ds^2 = -\frac{\rho}{r_s} dv^2 + 2dv d\rho + (r_s^2 + 2r_s \rho) d\Omega^2 \quad (6.30)$$

formában írható. Így az általános horizontközeli téridőt leíró változók Schwarzschild esetben

$$\kappa = \frac{1}{2r_s}, \quad \theta_A = 0, \quad \Omega_{AB} = \begin{pmatrix} r_s^2 & 0 \\ 0 & r_s^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad \lambda_{AB} = \begin{pmatrix} 2r_s & 0 \\ 0 & 2r_s \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

lesznek. A számolásokhoz a térbeli metrikának a determinánsának a variációjára is szükségünk van. A determináns

$$\sqrt{\Omega} = \sqrt{\det\{\Omega_{AB}\}} = r_s^2 \sin \theta \quad (6.32)$$

alakú. A variációhoz tudnunk kell, hogy miszerint variáljuk a téridőt. Schwarzschild megoldásban egyedül a tömeg paraméterezi a metrikát, ami segítségével definiáltjuk a Schwarzschild-sugarat, tehát a tömeg variációja ekvivalens a Schwarzschild-sugár variációjával, így $\sqrt{\Omega}$ variációja:

$$\delta\sqrt{\Omega} = \frac{\partial\sqrt{\Omega}}{\partial r_s} \delta r_s = 2r_s \delta r_s \sin \theta. \quad (6.33)$$

Mivel a Schwarzschild-megoldás egy statikus megoldás, a skaláris tágulás várható módon eltűnik. További számolások alapján ez a nyírásra is igaz lesz:

$$\Theta = 0, \quad \sigma_{AB} = 0 \quad (6.34)$$

Valamint a Killing-vektorok a horizont közeli Schwarzschild-téridőben:

$$\chi = -\partial_v + \partial_A \rightarrow f = -1, \quad Y^A = 1 \quad (6.35)$$

Így a 6.6 töltés:

$$\begin{aligned} \oint \mathcal{Q}_{(f,Y^A)} [g, \delta g] &= \frac{1}{16\pi G} \oint_{S^2} d^2x 2f\kappa \delta\sqrt{\Omega} \\ &= \frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta 2\delta r_s \sin \theta = \frac{\delta r_s}{2} \end{aligned} \quad (6.36)$$

értéket veszi fel. Tehát a töltés triviálisan integrálható, és egy egyszerű útintegrálással a Minkowski-metrika ($r_s = 0$) és a keresett metrika között, megkapjuk, hogy a megmaradó mennyiség értékét:

$$\mathcal{Q} = \frac{r_s}{2} = M, \quad (6.37)$$

ami a tömeg megmaradását írja le.

Most vizsgáljuk a töltés 6.7 felbontás utáni részeit

$$\begin{aligned} Q_\chi^{\text{int}} [g] &= \frac{1}{16\pi G} \oint_{S^2} d^2x \sqrt{\Omega} 2f\kappa \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta r_s \sin \theta = \frac{r_s}{4G} \end{aligned} \quad (6.38)$$

és

$$\begin{aligned}\Xi_\chi[g, \delta g] &= -\frac{1}{8\pi G} \oint_{S^2} d^2x \sqrt{\Omega} f \delta\kappa \\ &= -\frac{1}{8\pi G} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta r_s^2 \sin\theta \left(-\frac{\delta r_s}{2r_s^2} \right) = \frac{\delta r_s}{4G}\end{aligned}\quad (6.39)$$

ami egy útintegrálás után

$$\Xi_\chi^{\text{int}} = \frac{r_s}{4G} \quad (6.40)$$

alakot veszi fel. Azt vehetjük észre, hogy a két felbontott rész összege valóban visszaadja a megmaradó töltést, viszont a várakozással ellentétben a nem integrálhatónak hitt rész mégis integrálható volt. Ez annak a következménye, hogy a felosztást általánosabb téridő esetén tettük meg, ahol a téridő egyes paramétereit a lehető legnagyobb általánosságban vizsgáltuk. A Schwarzschild-téridő gömbszimmetriája és statikussága viszont erős megszorításokat jelent a téridőre.

A 6.24 töltést kiszámolva Schwarzschild-téridő esetén azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{C}_\chi = 0 \quad (6.41)$$

triviális, ugyanis az integrál komponensei a gömbszimmetria miatt eltűnnek. A 6.25 összefüggést kiszámolva viszont az az egyik töltés eltűnése esetében is érvényes marad.

6.3.2. Reissner–Nordström-téridő

Vákuummegoldást követően vizsgáljuk az elektrovákuum rendszert, a Reissner–Nordström-téridőt:

$$ds^2 = -f(r)^2 dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2, \quad f(r)^2 = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2} \quad (6.42)$$

ahol Schwarzschild-téridőhöz hasonló módon $f(r) = 0$ feltétel horizonthoz vezet

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - e^2} \quad (6.43)$$

radiális koordinátákban, amik segítségével $f(r)^2$ felbontható

$$f(r)^2 = \frac{1}{r^2} (r - r_+) (r - r_-) \quad (6.44)$$

szorzatra. Vizsgáljuk a külső horizonton (r_+) a horizont közeli esetet:

$$r = r_+ + \rho \quad \rightarrow \quad f(r)^2 = \frac{\rho}{(r_+ + \rho)^2} (r_+ - r_- + \rho) \quad (6.45)$$

Ennek a lineáris közelítése:

$$f(r)^2 = \rho (r_+ - r_- + \rho) \frac{1}{r_+^2} \left(1 - 2\frac{\rho}{r_+} + \mathcal{O}(\rho^2) \right) \approx \frac{\rho}{r_+^2} (r_+ - r_-) \quad (6.46)$$

Tehát az ívelemnégyszet

$$ds^2 = -\rho \frac{r_+ - r_-}{r_+^2} dv^2 + 2dvdr + (r_+^2 + 2r_+\rho) d\Omega^2 \quad (6.47)$$

alakot veszi fel. Így az általános horizontközeli téridőt leíró változók Schwarzschild esethez hasonló módon a következőképp írhatóak:

$$\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}, \quad \theta_A = 0, \quad \Omega_{AB} = \begin{pmatrix} r_+^2 & 0 \\ 0 & r_+^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad \lambda_{AB} = \begin{pmatrix} 2r_+ & 0 \\ 0 & 2r_+ \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (6.48)$$

A térbeli metrikának a determinánsa

$$\sqrt{\Omega} = \sqrt{\det\{\Omega_{AB}\}} = r_+^2 \sin \theta \quad (6.49)$$

alakú. Schwarzschild-téridőhöz képest itt az e töltésparaméter is paraméterezi a metrikát, ami M tömegparaméterrel együtt definiálja r_+ külső horizontot. Ennek a külső horizontnak a variációjával számolhatunk az egyenletek egyszerűsége érdekében, majd végül a megmaradó töltés variációjába visszahelyettesíthetjük a tömeget és a töltést. Tehát $\sqrt{\Omega}$ variációja:

$$\delta\sqrt{\Omega} = \frac{\partial\sqrt{\Omega}}{\partial r_+} \delta r_+ = 2r_+ \delta r_+ \sin \theta \quad (6.50)$$

A Reissner–Nordström-megoldás szintén egy statikus megoldás, így

$$\Theta = 0, \quad \sigma_{AB} = 0, \quad (6.51)$$

a Killing-vektorai pedig

$$\chi = -\partial_v + \partial_A \rightarrow f = -1, \quad Y^A = 1 \quad (6.52)$$

alakúak.

Így a 6.6 töltés:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{Q}_{(f,Y^A)}[g, \delta g] &= \frac{1}{16\pi G} \oint_{S^2} d^2x 2f\kappa \delta\sqrt{\Omega} \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta 2 \frac{r_+ - r_-}{r_+} \delta r_+ \sin \theta \\ &= \frac{1}{2G} \frac{r_+ - r_-}{r_+} \delta r_+ \end{aligned} \quad (6.53)$$

Tehát a töltés triviálisan integrálható. Az útintegráláshoz viszont r_- jelenléte miatt egyszerűbb visszaváltani M és e paraméterekre, hogy ne kelljen foglalkoznunk az r_- és r_+ közötti összefüggésekkel. Ehhez a δr_+ variációt kell kifejeznünk δM és δe variációkkal:

$$\delta r_+ = \delta M + \frac{M\delta M - e\delta e}{\sqrt{M^2 - e^2}}. \quad (6.54)$$

Így a megmaradó töltés

$$\mathcal{Q} = \frac{\sqrt{M^2 - e^2}}{G} \quad (6.55)$$

lesz, ami a tömeg és a töltés megmaradását írja le részlegesen.

Most vizsgáljuk a töltés 6.7 felbontás utáni részeit

$$\begin{aligned} Q_\chi^{\text{int}}[g] &= \frac{1}{16\pi G} \oint_{S^2} d^2x \sqrt{\Omega} 2f\kappa \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta 2 \frac{r_+ - r_-}{2r_+^2} r_+^2 \sin \theta = \frac{r_+ - r_-}{4G} = \frac{\sqrt{M^2 - e^2}}{2G} \end{aligned} \quad (6.56)$$

és

$$\begin{aligned}
\Xi_\chi[g, \delta g] &= -\frac{1}{8\pi G} \oint_{S^2} d^2x \sqrt{\Omega} f \delta \kappa \\
&= -\frac{1}{8\pi G} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta r_+^2 \sin \theta \left(-\frac{r_+ \delta r_+ + r_+ \delta r_- + r_- \delta r_+}{2r_+^3} \right) \\
&= \frac{1}{4G} \frac{r_+ \delta r_+ + r_+ \delta r_- + r_- \delta r_+}{r_+}
\end{aligned} \tag{6.57}$$

ami egy útintegrálás után

$$\Xi_\chi^{\text{int}} = \frac{\sqrt{M^2 - e^2}}{2G} \tag{6.58}$$

alakú. A Schwarzschild-téridőhöz hasonló eredményt kapunk, itt is integrálható lesz a nem integrálhatónak hitt rész. Azt vehetjük észre, hogy a két felbontott rész összege valóban visszaadja a megmaradó töltést, viszont a várakozással ellentétben a nem integrálhatónak hitt rész mégis integrálható volt. Ez annak a következménye, hogy a felosztást általánosabb téridő esetén tettük meg, ahol a téridő egyes paramétereit a lehető legnagyobb általánosságban vizsgáltuk. A Schwarzschild-téridő gömbszimmetriája és statikussága viszont erős megszorításokat jelent a téridőre.

A 6.24 töltést kiszámolva Reissner–Nordström-téridő esetén is

$$\mathcal{C}_\chi = 0 \tag{6.59}$$

triviális töltést kapunk, ugyanis a gömbszimmetria miatt Schwarzschild-téridőhöz hasonló módon itt is eltűnnek az integrál komponensei. A 6.25 összefüggést kiszámolva szintén hasonló eredményeket kapunk.

7. Összegzés

Dolgozatomban Poincaré-csoport ultrarelativisztikus határesetével, a Carroll-csoporttal [1] foglalkoztam. Görbült téridőkön is definiálható geometria a Carroll-csoporttal egyező tulajdonságokkal, a Carroll-geometria. A Carroll-geometriával rendelkező téridők metrikája ultrarelativisztikus határesetben szinguláris, ami miatt az energia-impulzus tenzor ott nem definiálható, ezért Ciambelli [3] alapján helyette új mennyiségeket, a Carroll-momentumokat vezettem be. A Carroll-momentumok segítségével a szakirodalom alapján [3] [4] 2 kovariáns megmaradási egyenletet írtam fel, skalárookra, illetve térszerű vektorokra vonatkoztatva. Ezt követően az ultrarelativisztikus határesethez közeli esetekben kapcsolatba hoztam az energia-impulzus tenzort a Carroll-momentumokkal.

Az ezt követő fejezetben stacionárius téridők általános horizontközeli paraméterezésével foglalkoztam. A horizont külső és belső geometriájának definiálása után a metrikát összehasonlítottam az előző fejezetben vizsgált ultrarelativisztikus határesettel, és Donnay [4] eredményét reprodukáltam, miszerint a két eset azonosítható egymással, ha a horizonttól való radiális távolságot virtuális fénysebességgént értelmezzük. Ez azért hasznos, ugyanis így a feketelyukak horizontját vizsgálhatjuk úgy, mint egy ultrarelativisztikus téridőt.

Az ultrarelativisztikus és a horizontközeli téridők kapcsolatának felírása után azt akartam megtudni, hogy milyen megmaradó töltések tartoznak a horizonthoz. Ehhez a kanonikus felszíni töltések általános koncepcióját vizsgáltam, és Compère jegyzetei alapján [5] leírtam egy asszipmtotikus Killing-vektorok segítségével mezővariációból kapható megmaradó töltéshez vezető utat. Ehhez a Noether-tétel általánosítását is felhasználtam.

Megmaradó töltések írhatóak fel a horizonton, ha azokat először a horizonthoz közel, de nem magán a horizonton definiáljuk, és ezt követően vesszük ennek a töltésnek a határértékét. Ezt felírtam stacionárius horizontközeli metrika esetére. A két különböző módon definiált töltés között összefüggés írható fel [4], amely információt ad nekünk a mezővariációból kapott töltés integrálhatóságáról.

Ezt követően egy egzakt téridőben, a Schwarzschild téridő esetén vizsgáltam a megmaradó töltéseket, és ezen esetben az egyik megmaradó töltés az energia megmaradását írta le, míg a másik a gömbszimmetria és a téridők statikussága miatt nullának bizonyult. Ettől függetlenül viszont a töltések között fennálló összefüggés így is megmaradt.

A téma mélységét, terjedelmét és a szakirodalmi háttér nagyságát figyelembe véve nem törekedhettem teljes, kimerítő tárgyalásra. A kiválasztott tárgy túlmutat jelen dolgozat keretein, azonban teret nyit további kutatások számára.

A kutatómunkám egy következő fázisában szeretném megvizsgálni a két megmaradó töltést és kapcsolatukat egyéb egzakt téridők esetén is. További vizsgálható irány a területen, hogy módosított gravitációelméletben milyen formában módosulnak a megmaradó töltések, és a közöttük fennálló kapcsolat.

8. Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Prof. Dr. Gergely Árpád Lászlónak, hogy elméleti és gyakorlati információkkal segítette munkámat. Tanácsai és észrevételei hasznos gondolatokkal gazdagították tudásomat és dolgozatomat.

Hivatkozások

- [1] J. M. Lévy-Leblond. Une nouvelle limite non-relativiste du groupe de Poincaré. *Annales de l'institut Henri Poincaré. Section A, Physique Théorique*, 3(1):1–12, 1965.
- [2] L. Ciambelli, C. Marteau, A. C. Petkou, P. M. Petropoulos, and K. Siampos. Covariant galilean versus carrollian hydrodynamics from relativistic fluids. *Classical and Quantum Gravity*, 35(16):165001, July 2018.
- [3] C. Marteau L. Ciambelli. Carrollian conservation laws and ricci-flat gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 36(8):085004, April 2019.
- [4] L. Donnay and C. Marteau. Carrollian physics at the black hole horizon. *Classical and Quantum Gravity*, 36(16):165002, July 2019.
- [5] G. Compère and A. Fiorucci. Advanced lectures on general relativity, 2019.
- [6] G. Barnich, F. Brandt, and M. Henneaux. Local brst cohomology in gauge theories. *Physics Reports*, 338(5):439–569, November 2000.
- [7] C. Marteau P. M. Petropoulos L. Ciambelli, R. Leigh. Carroll structures, null geometry, and conformal isometries. *Physical Review D*, 100(4), August 2019.
- [8] B. C. Hall. An elementary introduction to groups and representations, 2000.
- [9] M. Maggiore. *A Modern introduction to quantum field theory*. Oxford Master Series in Physics. 2005.
- [10] J.J. Sakurai. *Advanced Quantum Mechanics*. Always learning. Pearson Education, Incorporated, 1967.
- [11] V. Faraoni. *Special Relativity*. Undergraduate Lecture Notes in Physics. Springer International Publishing, 2013.
- [12] L. Carroll and J. Tenniel. *Through the Looking Glass: And what Alice Found There*. Altemus' illustrated young people's library. Henry Altemus Company, 1897.
- [13] I. Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Early English books online. Jussu Societas Regiæ ac typis Josephi Streater, prostant venales apud Sam. Smith, 1687.
- [14] G. Randers. On an asymmetrical metric in the four-space of general relativity. *Phys. Rev.*, 59:195–199, Jan 1941.
- [15] A. Papapetrou. Champs gravitationnels stationnaires a symetrie axiale. *Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor.*, 4:83–105, 1966.
- [16] V. E. Moncrief and J. Isenberg. Symmetries of cosmological cauchy horizons. *Communications in Mathematical Physics*, 89:387–413, 1983.
- [17] A. Raychaudhuri. Relativistic cosmology. i. *Phys. Rev.*, 98:1123–1126, May 1955.
- [18] T. Damour. Surface effects in black hole physics. 1982.

- [19] R. F. Penna. Near-horizon carroll symmetry and black hole love numbers, 2019.
- [20] C. Duval, G. W. Gibbons, and P. A. Horvathy. Conformal carroll groups and bms symmetry. *Classical and Quantum Gravity*, 31(9):092001, April 2014.
- [21] J. Hartong. Gauging the carroll algebra and ultra-relativistic gravity. *Journal of High Energy Physics*, 2015(8), August 2015.
- [22] R. H. Price and K. S. Thorne. Membrane viewpoint on black holes: Properties and evolution of the stretched horizon. *Phys. Rev. D*, 33:915–941, Feb 1986.
- [23] E. Noether. Invariante variationsprobleme. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1918:235–257, 1918.
- [24] W. B. Bonnor, A. H. Sulaiman, and N. Tomimura. Szekere’s space-times have no Killing vectors. *General Relativity and Gravitation*, 8(8):549–559, August 1977.
- [25] G. Barnich and F. Brandt. Covariant theory of asymptotic symmetries, conservation laws and central charges. *Nuclear Physics B*, 633(1–2):3–82, June 2002.
- [26] L. Donnay, G. Giribet, H. A. González, and M. Pino. Extended symmetries at the black hole horizon. *Journal of High Energy Physics*, 2016(9), September 2016.
- [27] G. Barnich and C. Troessaert. Bms charge algebra. *Journal of High Energy Physics*, 2011(12), December 2011.