

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet, Algebra és Számelmélet Tanszék

TDK DOLGOZAT

**Irányított gráfok halmazain értelmezett
hatványfüggvények injektivitásáról**

Készítette:

Nemes Bernadett

Matematikus Msc hallgató

2. évfolyam

Témavezető:

Dr. Gyeñizse Gergő

egyetemi adjunktus

Szeged

2024

Kivonat

A dolgozatban irányított gráfok izomorfia osztályainak halmazain értelmezett $e_X : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ alakú leképezések injektivitását vizsgáljuk rögzített $\mathbb{X}$ irányított gráfok esetén. Abban a speciális esetben, amikor $\mathbb{X}$ az n csúcsú teljes irányított gráf ($\mathbb{K}_n$), amely a hurokéleket is tartalmazza, mutatunk egy hatékony algoritmust, amely képes bármely véges irányított gráfról eldönteni, hogy izomorf-e $\mathbb{A}^{\mathbb{K}_n}$ -nel valamely $\mathbb{A}$ irányított gráfra. Az algoritmus megléte egyúttal bizonyítja az e_{K_n} leképezés injektivitását véges irányított gráfokat tartalmazó értelmezési tartományra.

Amennyiben a fenti leképezést végtelen $\mathbb{A}$ gráfokra is kiterjesztjük, az e_{K_n} $n \geq 2$ esetén már nem injektív, és ez két egyszerű végtelen irányított gráffal igazolható. A dolgozat második részében e két példát felhasználva megmutatjuk, hogy ha $\mathbb{X}$ a $\mathbb{K}_1$ -től különböző véges irányított gráf, akkor e_X nem injektív.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés, fogalmak, jelölések	1
2. A teljes gráfok véges injektivitása	4
3. A teljes injektivitásról	9
Irodalomjegyzék	16
Saját eredmények	17
Szakdolgozat eltérés	18

1. fejezet

Bevezetés, fogalmak, jelölések

A dolgozat során gráf alatt minden esetben olyan irányított gráfot értünk, amely hurok-éleket tartalmazhat, de párhuzamos éleket nem. A gráfhatványozás fogalmát a következő definíció értelmében, irányított gráfokra használjuk.

1.1. definíció (Gráf hatványa). *Legyen $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ két gráf. Az $\mathbb{A}^{\mathbb{B}}$ struktúrán azt a gráfot értjük, amelynek alaphalmaza A^B , azaz az összes $B \rightarrow A$ leképezés halmaza, érelációját pedig a következő módon definiáljuk: az $f_1, f_2 \in A^B$ elemekre $f_1 \rightarrow f_2$ $\mathbb{A}^{\mathbb{B}}$ -ben pontosan akkor, ha tetszőleges $b_1, b_2 \in B$ elemekre $b_1 \rightarrow b_2$ esetén $f_1(b_1) \rightarrow f_2(b_2)$ az $\mathbb{A}$ gráfban.*

Ez a definíció némelyik, a gráfelmélet területén használt hatványfogalomtól ugyan jelentősen eltér, viszont a gráfok önmagukkal vett direkt szorzatai az 1.1. definíció által meghatározott hatványozás speciális esetei.

Véges relációs struktúrákkal, és így véges irányított gráfok direkt szorzatával foglalkozik Lovász László [6] és [7] cikke. Előbbiben igazolja a következő tételt:

1.2. tétel (Lovász László, [6]). *Ha $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ véges relációs struktúrák, és $\mathbb{A}^n \cong \mathbb{B}^n$, akkor $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$.*

Amennyiben a tételben szereplő relációs struktúráknak egyetlen kétváltozós relációjuk van, akkor azok irányított gráfok. A gráfhatványozás szempontjából ez az eredmény azért jelentős, mert bizonyítja, hogy ha $\mathbb{X}$ az n pontú antilánc, akkor véges $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ irányított gráfok esetén $\mathbb{A}^{\mathbb{X}} \cong \mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ -ből következik $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$.

1.3. megjegyzés. A fenti tétel bizonyítása nem algoritmikus. Naív módon ugyan algoritmikussá tehető az által, hogy a szóba jöhető összes véges gráfnak kiszámoljuk az n -edik hatványát, majd azokat összehasonlítjuk, viszont ez az algoritmus már nem lenne polinom idejű.

A [7] cikk, bár nem gráfhatványozással foglalkozik, a gráfhatványozás általunk vizsgált tulajdonságához nagyon hasonló tulajdonságot vizsgál véges relációs struktúrák direkt

szorzatára vonatkozóan. Egészen pontosan azt, hogy ha $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ és $\mathbb{C}$ véges relációs struktúrák, akkor mely $\mathbb{C}$ -k esetén következik $\mathbb{A} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{B} \times \mathbb{C}$ -ből $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$. A korábbi [6] cikk eredménye, hogy ha a $\mathbb{C}$ relációja nem irreflexív, akkor $\mathbb{A} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{B} \times \mathbb{C}$ -ből valóban következik $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$. A [7] cikk pedig teljesen karakterizálja azon $\mathbb{C}$ véges relációs struktúrákat, melyekre létezik $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, hogy $\mathbb{A} \not\cong \mathbb{B}$, de $\mathbb{A} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{B} \times \mathbb{C}$. Ez a karakterizáció véges irányított gráfok esetén a következő tételt jelenti:

1.4. tétel (Lovász László, [7]). *A $\mathbb{C}$ véges irányított gráfhoz pontosan akkor létezik egymással nem izomorf $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ véges irányított gráf, melyekre $\mathbb{A} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{B} \times \mathbb{C}$, ha létezik olyan $\mathbb{C}_\varphi$ homomorf képe $\mathbb{C}$ -nek, melyre*

$$\mathbb{C}_\varphi \subseteq \mathbb{C}_{p_1} + \dots + \mathbb{C}_{p_r},$$

ahol $1 < p_1 < \dots < p_r$ prímszámok, és minden $p_i \in \{p_1, \dots, p_r\}$ esetén $\mathbb{C}_{p_i}$ a p_i csúcsú irányított kör.

Míg Lovász László a közös $\mathbb{C}$ tényezőre adott feltételeket, a direkt szorzat kancellativitását véges gráfok és irányított gráfok esetén más szempontból is vizsgálták. Például Richard H. Hammack [4] cikke az $\mathbb{A}$ gráfra ad olyan feltételeket, melyekből tetszőleges $\mathbb{B}$ és $\mathbb{C}$ gráfok esetén az $\mathbb{A} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{B} \times \mathbb{C}$ feltételből következik $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$. A szerző egy évvel későbbi [5] cikke pedig irányított gráfok esetén vizsgálja szintén az $\mathbb{A}$ szükséges tulajdonságait.

A gráfhatványozáshoz hasonló fogalom a rendezett halmazok hatványozása, amelyet G. Birkhoff vezetett be 1937-es cikkében [2].

1.5. definíció (Rendezett halmazok hatványa). *Legyen $\mathbb{P}$ és $\mathbb{Q}$ két rendezett halmaz. A $\mathbb{Q}^{\mathbb{P}}$ struktúrán azt a rendezett halmazt értjük, amelynek alaphalmaza a $P \rightarrow Q$ monoton leképezések halmaza, és tetszőleges $f_1, f_2: P \rightarrow Q$ monoton leképezésre $f_1 \leq f_2$ pontosan akkor, ha minden $p \in P$ esetén $f_1(p) \leq f_2(p)$ a $\mathbb{Q}$ -ban.*

Ez a definíció a $\mathbb{P}$ és $\mathbb{Q}$ rendezett halmazokra, mint irányított gráfokra, a 1.1. definícióval kapható $\mathbb{Q}^{\mathbb{P}}$ gráf hurokélekkel rendelkező csúcsai ($\mathbb{Q}^{\mathbb{P}}$ reflexív része) által feszített részgráfját adja.

A rendezett halmazok hatványozására vonatkozóan szintén sok eredmény született. Lovász László [6] cikkéből következik, hogy ha a kitevő az n pontú antilánc, és $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ véges rendezett halmazok, akkor emellett a hatványfogalom mellett is következik $\mathbb{A}^n \cong \mathbb{B}^n$ -ből $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$. Duffus és Wille [3] véges összefüggő rendezett halmazok önmagukra vett hatványát vizsgálta, Bergman, McKenzie, Nagy [1] pedig azt az esetet, amikor a kitevőben lévő rendezett halmaz lineárisan rendezett. McKenzie 2000-ben [8, 9] igazolta Birkhoff sejtését, miszerint tetszőleges $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{P}$ véges rendezett halmazokra $\mathbb{A}^{\mathbb{P}} \cong \mathbb{B}^{\mathbb{P}}$ -ből következik $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$.

Jelen dolgozat fő kérdése, hogy a gráfhatványozás 1.1. definíciójának értelmében melyek azok az $\mathbb{X}$ véges irányított gráfok, amelyekre az $\mathbb{X}$ rögzítése után $\mathbb{A}^{\mathbb{X}} \cong \mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ -ből következik $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$, abban az esetben, ha $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ is véges irányított gráfok, illetve akkor, ha a végesség nem kikötés.

A 2. fejezetben megmutatjuk, hogy ha $\mathbb{X}$ az n csúcsú teljes irányított gráf, amely a hurokéleket is tartalmazza, és $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ is véges, akkor $\mathbb{A}^{\mathbb{X}} \cong \mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ -ből következik $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$.

A 3. fejezetben pedig elhagyjuk az $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ végességére vonatkozó feltételt, és belátjuk, hogy ha $\mathbb{X}$ nem a $\mathbb{K}_1$, akkor $\mathbb{A}^{\mathbb{X}} \cong \mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ -ből már nem következik $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$.

A $\mathbb{G}$ gráf $g_1 \in G$ csúcsának ki-halmaza $\{g_2 \in G: g_1 \rightarrow g_2\}$, melyet $Ki(g_1)$ -gyel jelölünk. Hasonlóan definiáljuk a g_1 csúcs be-halmazát: $Be(g_1) = \{g_2 \in G: g_2 \rightarrow g_1\}$.

Teljes irányított gráfon azt a $\mathbb{G} = (G, \rightarrow)$ gráfot értjük, amelyre $\rightarrow = G^2$, tehát a gráf tartalmazza az összes irányított élt, beleértve a hurokéleket is. Az n csúcsú teljes irányított gráfot a továbbiakban $\mathbb{K}_n$ -nel jelöljük. Speciálisan $\mathbb{K}_1$ az 1 pontú, egyetlen hurokelt tartalmazó gráfot jelöli.

A $\mathbb{G}$ gráf csúcshalmazán definiáljuk a $\leq_{nb}$ relációt a következő módon: Tetszőleges $g_1, g_2 \in G$ elemekre $g_1 \leq_{nb} g_2$, ha $Ki(g_1) \subseteq Ki(g_2)$ és $Be(g_1) \subseteq Be(g_2)$. Ez a $\leq_{nb}$ reláció előrendezés a G halmazon.

1.6. definíció (Csúcsok evivalenciája). A $g_1, g_2 \in G$ csúcsokat ekvivalenseknek nevezzük a $\mathbb{G}$ gráfban, ha $g_1 \leq_{nb} g_2$ és $g_2 \leq_{nb} g_1$ is fennáll.

1.7. *jelölés.* Ezt az ekvivalenciarelációt a továbbiakban $\sim_{nb}$ jelöli, valamint a $g \in G$ csúcs $\sim_{nb}$ szerinti osztályát a továbbiakban $[g]$ -vel jelöljük.

1.8. *jelölés.* Legyen $a \in A$. Az $\mathbb{A}^{\mathbb{B}}$ gráfban a konstans a leképezést $\underline{a}$ -sal jelöljük.

1.9. állítás. Tetszőleges $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, és $\mathbb{C}$ gráfok esetén teljesül az $(\mathbb{A}^{\mathbb{B}})^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{A}^{\mathbb{B} \times \mathbb{C}}$ azonosság.

Az 1.9. állítás bizonyítása megtalálható Lovász László [6] cikkében.

Az $\mathbb{A}$ gráf önmagával vett direkt szorzatát a szokásos módon definiáljuk, az $\mathbb{A}^k$ gráf alaphalmaza A^k , és az $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}), (a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_k}) \in A^k$ elemekre $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}) \rightarrow (a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_k})$ az $\mathbb{A}^k$ -ban pontosan akkor, ha minden $l \in \{1, \dots, k\}$ esetén $a_{i_l} \rightarrow a_{j_l}$ az $\mathbb{A}$ -ban.

1.10. *megjegyzés.* A direkt szorzat definíciójából látható, hogy az $\mathbb{A}^k$ gráf megegyezik az $\mathbb{A}$ gráf azon $\mathbb{B}$ kitevős hatványával, ahol $\mathbb{B}$ a k elemű antilánc.

Legyen $\mathbb{X}$ egy rögzített véges gráf. Definiáljuk az e_X leképezést gráfok izomorfia osztályainak egy halmazán a következő módon: $e_X: \mathbb{A} \mapsto \mathbb{A}^{\mathbb{X}}$.

Az e_X leképezést *végesen injektívnek* nevezzük, ha tetszőleges véges $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ gráfokra $\mathbb{A} \not\cong \mathbb{B}$ esetén $\mathbb{A}^{\mathbb{X}} \not\cong \mathbb{B}^{\mathbb{X}}$. Amennyiben ez a feltétel nem csak véges, de tetszőleges $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ gráfra teljesül, akkor az e_X leképezést *teljesen injektívnek* nevezzük.

2. fejezet

A teljes gráfok véges injektivitása

2.1. tétel. Legyen $\mathbb{X}$ az n pontú teljes irányított gráf. Ekkor e_X végesen injektív, és $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ -ből $\mathbb{A}$ hatékonyan visszafejthető.

„Hatékonyan visszafejthetõn” itt azt értjük, hogy létezik polinom idejű algoritmus, ami $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ -ből előállítja $\mathbb{A}$ -t.

2.2. lemma. Legyen $a \in A$ egy tetszőleges elem, és $f \in A^{K_n}$ olyan leképezés, melyre $f^{-1}(a) \neq \emptyset$. Ekkor $Ki(f) \subseteq Ki(\underline{a})$, és $Be(f) \subseteq Be(\underline{a})$, valamint $[f] \leq_{nb} [\underline{a}]$.

Bizonyítás. Legyen $g \in Ki(f)$ egy tetszőleges leképezés. Ekkor $\mathbb{A}^{\mathbb{K}_n}$ -ben $f \rightarrow g$, ezért f értékkészletének tetszőleges eleméből, így az a -ból is, vezet $\mathbb{A}$ -ban irányított él a g értékkészletének minden elemébe. A gráfhatványozás definíciója miatt ekkor $\underline{a} \rightarrow g$ az $\mathbb{A}^{\mathbb{K}_n}$ gráfban, tehát $g \in Ki(\underline{a})$. A be-halmaz esete hasonlóan igazolható.

Végül $Ki(f) \subseteq Ki(\underline{a})$ és $Be(f) \subseteq Be(\underline{a})$ fennállása miatt $[f] \leq_{nb} [\underline{a}]$. $\square$

2.3. lemma. Ha egy $f \in A^{K_n}$ leképezésre $f^{-1}(K_n) = \{a_1, \dots, a_k\}$, ahol $a_1, \dots, a_k \in A$, akkor $Ki(f) = \bigcap_{i=1}^k Ki(\underline{a_i})$, és $Be(f) = \bigcap_{i=1}^k Be(\underline{a_i})$.

Bizonyítás. Legyen $f \in A^{K_n}$ egy leképezés, melyre $f^{-1}(K_n) = \{a_1, \dots, a_k\}$, ahol $a_1, \dots, a_k \in A$. A $Ki(f) \subseteq \bigcap_{i=1}^k Ki(\underline{a_i})$ irányú tartalmazás az előző lemma következménye. A másik irány igazolásához tegyük fel, hogy $g \in \bigcap_{i=1}^k Ki(\underline{a_i})$. Ekkor tetszőleges $i \in \{1, \dots, k\}$ indexre $g \in Ki(\underline{a_i})$, így g értékkészletének minden elemébe megy él a_i -ből az $\mathbb{A}$ gráfban, tetszőleges $i \in \{1, \dots, k\}$ esetén. Tehát f értékkészletének minden eleméből megy él a g értékkészletének minden elemébe, ezért $f \rightarrow g$ az $\mathbb{A}^{\mathbb{K}_n}$ -ben, és így $g \in Ki(f)$. A be-halmazok egyenlősége hasonlóan bizonyítható. $\square$

A 2.1. tétel bizonyításához mutatunk egy algoritmust, amely tetszőleges $\mathbb{B}$ véges gráfról eldönti, hogy $\mathbb{B}$ izomorf-e $\mathbb{A}^{\mathbb{K}_n}$ -nel valamely $\mathbb{A}$ -ra, továbbá, ha igen, akkor $\mathbb{B}$ -ből kiválaszt pontokat úgy, hogy $\mathbb{B}$ -nek a kiválasztott pontok által feszített részgráfja izomorf $\mathbb{A}$ -val.

Az algoritmus:

Input: $\mathbb{B}$ véges gráf.

Output: Amennyiben létezik, $\mathbb{A}$ véges gráf, melyre $\mathbb{A}^{\mathbb{K}_n} \cong \mathbb{B}$, ellenkező esetben „nincs ilyen $\mathbb{A}$ ”.

1. Ha $|B| = m^n$ valamely $m \in \mathbb{N}$ számra, akkor a $\mathbb{B}$ csúcsait osztályozzuk az $\sim_{nb}$ reláció szerint, majd meghatározzuk a $\leq_{nb}$ relációt az osztályok halmazán. Ellenkező esetben nem létezik megfelelő $\mathbb{A}$ gráf.
2. Innentől kezdve B elemeit folyamatosan megcímkézzük. A címkék $(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$ alakú formális sorozatok, ahol minden i_j index 1 és m közötti. Az egyik, $\leq_{nb}$ -re nézve maximális osztályból kiválasztunk egy tetszőleges pontot, és megcímkézzük a konstans $\underline{a_1}$ -gyel.
3. Ha maradt még címkézetlen csúcs $\mathbb{B}$ -ben, akkor ezek közül választunk egy olyat, amelynél a $\leq_{nb}$ reláció szerint szigorúan nagyobb osztályban már nincs címkézetlen csúcs. Címkézzük meg ezt a pontot $\underline{a_{t+1}}$ -gyel, ahol t a korábbi lépésekben már kiosztott $\underline{a_i}$ alakú, konstans leképezést jelölő címkék száma.

Ezután kiosztjuk azokat az eddig kiosztatlan címkéket, amelyek mindegyik komponense az $\{a_1, \dots, a_{t+1}\}$ halmazból kerül ki. Ezen címkék kiosztása a következő módon, egyesével történik:

- a) Jelölje az éppen kiosztandó címkét $(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$, ahol minden i_j indexre $a_{i_j} \in \{a_1, \dots, a_{t+1}\}$.
- b) Meghatározzuk azon pontok ekvivalenciaosztályát $\mathbb{B}$ -ben, amelyek ki-halmaza $\bigcap_{j=1}^n Ki(\underline{a_{i_j}})$ és be-halmaza $\bigcap_{j=1}^n Be(\underline{a_{i_j}})$. Ha ilyen osztály nem létezik, vagy benne már minden csúcs címkézett, akkor nem létezik megfelelő $\mathbb{A}$ gráf.
- c) Ha az előző lépésben meghatározott osztály létezik, és van benne még címkézetlen csúcs, akkor ezek közül egyet megcímkézzük az $(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$ sorozattal.

Ha minden ilyen címkét sikerült kiosztani, akkor ismételjük meg a 3. lépést.

4. Ha $\mathbb{B}$ -ben már nincs címkézetlen csúcs, akkor az összes lehetséges címke kiosztásra került. Az $\underline{a_1}, \dots, \underline{a_m}$ címkéjű csúcsok által kifeszített $\mathbb{A}$ részgráf lesz az output.

Bizonyítás. (A 2.1. tétel és az algoritmus helyességének bizonyítása) Tegyük fel, hogy a $\mathbb{B}$ gráfra az algoritmus lefutott, és a kapott $\mathbb{A}$ részgráf csúcsai az $\underline{a_1}, \dots, \underline{a_m}$ konstans címkéjű csúcsok. Megmutatjuk, hogy ekkor $\mathbb{A}^{\mathbb{K}_n}$ izomorf $\mathbb{B}$ -vel.

Rögzítsük a $\mathbb{K}_n$ gráf csúcsainak egy sorrendjét: $x_1, \dots, x_n$. Ekkor tetszőleges $f: K_n \rightarrow A$ leképezést egyértelműen meghatároz az $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ vektor. Tekintsük az $\mathbb{A}^{\mathbb{K}_n}$ és

$\mathbb{B}$ között azt a leképezést, amely az $f = (\underline{a}_{i_1}, \dots, \underline{a}_{i_n}) \in A^{K_n}$ leképezéshez hozzárendeli $\mathbb{B}$ azon csúcsát, amelyet az algoritmus az $(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$ formális sorozattal címkézett meg.

Ez a hozzárendelés nyilvánvalóan bijekció, hiszen A^{K_n} -ben mind az m^n olyan leképezés szerepel, amely a K_n -ből az $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m\}$ halmazba képez, valamint B -ben, mivel az algoritmus lefutott, az $a_1, \dots, a_m$ elemekből képezhető összes n hosszú címke kiosztásra került, ráadásul úgy, hogy minden csúcs pontosan egy címkét kapott.

Ez a hozzárendelés valóban izomorfizmus az $\mathbb{A}^{\mathbb{K}_n}$ és a $\mathbb{B}$ gráf között. Ennek bizonyításához legyen $f_1, f_2 \in A^{K_n}$. Tegyük fel, hogy $f_1 \rightarrow f_2$ az $\mathbb{A}^{\mathbb{K}_n}$ -ben. Ekkor tetszőleges $i, j \in \{1, \dots, m\}$ indexekre, ha $\underline{a}_i \in f_1(K_n)$, $\underline{a}_j \in f_2(K_n)$, akkor $\underline{a}_i \rightarrow \underline{a}_j$ $\mathbb{A}$ -ban, tehát $\mathbb{B}$ -ben is. Ezért az f_1 -hez rendelt $\mathbb{B}$ -beli csúcs $\bigcap_{\underline{a}_i \in f_1(K_n)} Ki(\underline{a}_i)$ ki-halmaza tartalmazza $\underline{a}_j$ -t minden $\underline{a}_j \in f_2(K_n)$ esetén. Ez azt is jelenti, hogy az f_1 képe benne van $\bigcap_{\underline{a}_j \in f_2(K_n)} Be(\underline{a}_j)$ -ben, és mivel az f_2 képe éppen olyan csúcs, amelynek be-halmaza $\bigcap_{\underline{a}_j \in f_2(K_n)} Be(\underline{a}_j)$, az f_1 képéből vezet él az f_2 képébe a $\mathbb{B}$ gráfban.

Most tegyük fel, hogy f_1 és f_2 olyanok, hogy $f_1 \not\rightarrow f_2$. Ekkor létezik olyan $\underline{a}_{i_0} \in f_1(K_n)$ és $\underline{a}_{j_0} \in f_2(K_n)$, hogy $\underline{a}_{i_0} \not\rightarrow \underline{a}_{j_0}$ az $\mathbb{A}$ -ban, így $\mathbb{B}$ -ben sem. Vagyis az f_1 képének $\bigcap_{\underline{a}_i \in f_1(K_n)} Ki(\underline{a}_i)$ ki-halmaza nem tartalmazza $\underline{a}_{j_0}$ -t, így f_1 képe nincs benne $Be(\underline{a}_{j_0})$ -ben, tehát nincs benne $\bigcap_{\underline{a}_j \in f_2(K_n)} Be(\underline{a}_j)$ -ben sem. Mivel ez utóbbi az f_2 képének be-halmaza, így kapjuk, hogy f_1 képéből nem vezet él f_2 képébe a $\mathbb{B}$ gráfban.

Tehát az algoritmus által meghatározott $\mathbb{A}$ gráfra $\mathbb{A}^{\mathbb{K}_n} \cong \mathbb{B}$ valóban teljesül.

Tegyük fel, hogy $\mathbb{B} \cong \mathbb{C}^{\mathbb{K}_n}$ valamely $\mathbb{C}$ gráfra, ahol $|C| = m$. Ekkor $|C^{K_n}| = m^n$, tehát $|B| = m^n$ valóban n -edik hatvány.

A $\mathbb{K}_n$ gráf csúcsainak egy sorrendje továbbra is legyen $x_1, \dots, x_n$. Jelölje a $\mathbb{C}^{\mathbb{K}_n}$ gráf konstans leképezéseit $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_m$. Megmutatjuk, hogy ekkor az algoritmus egyik lépésben sem akad el, továbbá a kapott $\mathbb{A}$ gráf izomorf $\mathbb{C}$ -vel. Utóbbiból pedig azonnal következik az e_{K_n} leképezés véges injektivitása, hiszen ha $\mathbb{B} \cong \mathbb{C}_1^{\mathbb{K}_n}$ és $\mathbb{B} \cong \mathbb{C}_2^{\mathbb{K}_n}$, akkor a kapott $\mathbb{A}$ gráf izomorf $\mathbb{C}_1$ -gyel és $\mathbb{C}_2$ -vel is, tehát $\mathbb{C}_1 \cong \mathbb{C}_2$.

Legyen az ι leképezés egy izomorfizmus $\mathbb{B}$ -ből $\mathbb{C}^{\mathbb{K}_n}$ -be. Az ι megőrzi az $\sim_{nb}$ osztályozást, azaz, ha $b_1 \sim_{nb} b_2$ a $\mathbb{B}$ -ben, akkor $b_1\iota \sim_{nb} b_2\iota$ a $\mathbb{C}^{\mathbb{K}_n}$ -ben. Hasonlóan a $\leq_{nb}$ relációt is megőrzi. Emiatt tetszőleges $\mathbb{B}$ -beli, $\leq_{nb}$ -re nézve maximális osztály képe szintén maximális osztály a $\leq_{nb}$ relációra a $\mathbb{C}^{\mathbb{K}_n}$ -ben.

A 2.2. lemma miatt $\mathbb{C}^{\mathbb{K}_n}$ tetszőleges, $\leq_{nb}$ relációra nézve maximális osztályában van konstans leképezés. Ezért $\mathbb{B}$ -ben bármelyik M maximális osztályból választja az algoritmus az $\underline{a}_1$ címkéjű pontot, $\mathbb{C}^{\mathbb{K}_n}$ $M\iota$ osztályában lesz egy $\underline{c}_{i_1}$ konstans leképezés, ahol i_1 az $1, \dots, m$ indexek valamelyike. Legyen $\varphi : B \rightarrow C^{K_n}$ egy olyan leképezés, amelyet a $\mathbb{B}$ címkézésével párhuzamosan, pontonként, injektív módon definiálunk. Legyen $\varphi(\underline{a}_1) := \underline{c}_{i_1}$. Érdemes megjegyezni, hogy $\underline{c}_{i_1} \sim_{nb} \underline{a}_1\iota$ a $\mathbb{C}^{\mathbb{K}_n}$ -ben.

A következő állítás pontosan megadja a $\mathbb{C}^{\mathbb{K}_n} \sim_{nb}$ szerinti osztályaira az egyes osztályokban lévő konstans leképezések számát.

Legyen L egy osztálya B -nek az $\sim_{nb}$ relációra nézve. Ekkor azon B -beli elemek halmazát, amelyek az L -ben vagy a $\leq_{nb}$ relációra nézve L -nél nagyobb osztályban vannak, jelölje $L \uparrow$. Könnyen látható, hogy $(L \uparrow)_\iota = (L)_\iota \uparrow$ a $\mathbb{C}^{\mathbb{K}_n}$ -ben.

Állítás. *Ha L a B egy osztálya az $\sim_{nb}$ relációra nézve, akkor $|L \uparrow| = |(L \uparrow)_\iota|$ n -edik hatvány, és $(L \uparrow)_\iota$ -ban pontosan $\sqrt[n]{|(L \uparrow)_\iota|}$ különböző konstans leképezés található.*

Valóban, hiszen a 2.2. lemma miatt, ha $f \in (L)_\iota \uparrow$, akkor minden $c \in f(K_n)$ esetén $\underline{c} \in (L)_\iota \uparrow$. Másrészt a 2.3. lemma adja, hogy ha a $g \in C^{K_n}$ leképezés értékkészletében megjelenő minden elemre a hozzátartozó konstans leképezés $(L)_\iota \uparrow$ -ban van, akkor g ki-halmazának része az L_ι -beli elemek ki-halmaz, hasonlóan be-halmazának része az L_ι -beli elemek be-halmaz, ezért g az L_ι -ban, vagy ennél nagyobb osztályban van, tehát $g \in (L)_\iota \uparrow$. Emiatt $|L \uparrow| = |(L \uparrow)_\iota| = |(L)_\iota \uparrow|$ n -edik hatvány, és $(L \uparrow)_\iota$ -ban pontosan $\sqrt[n]{|(L \uparrow)_\iota|}$ különböző konstans leképezés van.

Az $\underline{a}_2$ címke kiosztásakor az előbbi állítás következtében bármely olyan osztály ι melletti képében, amelyben van még címkézetlen csúcs, és az ilyen osztályok között maximális, lesz még konstans leképezés, amely különbözik a $\underline{c}_{i_1}$ -től. Miután az algoritmus választott egy ilyen osztályt, és megcímkézt benne egy csúcsot $\underline{a}_2$ -vel, az osztály ι melletti képében szereplő valamely $\underline{c}_{i_2} \neq \underline{c}_{i_1}$, konstans leképezésre legyen $\varphi(\underline{a}_2) := \underline{c}_{i_2}$. Szintén megjegyzendő, hogy $\underline{c}_{i_2} \sim_{nb} \underline{a}_2$ a $\mathbb{C}^{\mathbb{K}_n}$ -ben.

Ezután kiosztásra kerülnek azok a címkék, n hosszú formális sorozatok, amelyek csak az a_1 és a_2 elemekből épülnek fel, és nem a konstans sorozatok. A $Ki(\underline{a}_1) \cap Ki(\underline{a}_2)$ és $Be(\underline{a}_1) \cap Be(\underline{a}_2)$ halmazok könnyen meghatározhatók. Mivel ι izomorfizmus, rögtön következik, hogy azon elemek halmaza $\mathbb{B}$ -ben, amelyek ki- és be-halmazai rendre $Ki(\underline{a}_1) \cap Ki(\underline{a}_2)$ és $Be(\underline{a}_1) \cap Be(\underline{a}_2)$, nem üres. Ha üres lenne, akkor az ι miatt $\mathbb{C}^{\mathbb{K}_n}$ -ben nem lehetne olyan csúcs, amelynek ki-halmazai $Ki(\underline{a}_1)_\iota \cap Ki(\underline{a}_2)_\iota = Ki(\underline{c}_{i_1}) \cap Ki(\underline{c}_{i_2})$, valamint be-halmazai $Ki(\underline{a}_1)_\iota \cap Ki(\underline{a}_2)_\iota = Be(\underline{c}_{i_1}) \cap Be(\underline{c}_{i_2})$. Viszont $\mathbb{C}^{\mathbb{K}_n}$ -ben a 2.3. lemma szerint ilyen ki- és be-halmazzal rendelkező csúcsok léteznek, mégpedig a csak c_{i_1} és c_{i_2} értékeket felvevő összes nem konstans leképezés ilyen.

Tehát a keresett ekvivalenciaosztály valóban létezik a $\mathbb{B}$ -ben, és még címkézetlen csúcsainak száma legalább annyi, mint ahány $K_n \rightarrow \{c_{i_1}, c_{i_2}\}$ nem konstans leképezés van $\mathbb{C}^{\mathbb{K}_n}$ -ben. Ebben az osztályban az algoritmus egyesével osztja ki a korábban még nem kiosztott címkéket. Az éppen megcímkézett csúcsnak közben rögtön definiáljuk a φ melletti képét: ha a csúcs az $(a_{j_1}, \dots, a_{j_n})$ címkét kapta, ahol $j_1, \dots, j_n \in \{1, 2\}$, akkor $\varphi((a_{j_1}, \dots, a_{j_n}))$ legyen az a C^{K_n} -beli leképezés, amely minden $l \in \{1, \dots, n\}$ esetén, x_l -hez a c_{i_1} -et rendeli, ha $a_{j_l} = a_1$, és c_{i_2} -t rendeli, ha $a_{j_l} = a_2$. Ezután φ továbbra is injektív marad. A φ leképezés fenti módon történő definiálhatósága mutatja, hogy az összes

ilyen, csak a_1 és a_2 elemekből álló nem konstans címke kiosztható. Miután az összes ilyen címke kiosztásra került, a $\mathbb{B}$ -ben 2^n címkézett csúcs lesz.

Ezután, ha van még címkézetlen csúcs, akkor az $\underline{a_3}$ címke lesz a következő, amit az algoritmus kioszt. Az algoritmus a 3. pontjának elegettevő osztályok közül bármelyiket is választja, a korábbi állítás miatt biztosan lesz az adott osztály ι melletti képében egy konstans leképezés, amely különbözik a $\underline{c_{i_1}}$ -től és $\underline{c_{i_2}}$ -től. Miután az $\underline{a_3}$ címke kiosztásra került, legyen $\varphi(\underline{a_3}) := \underline{c_{i_3}}$, ahol $\underline{c_{i_3}}$ a címke kiosztásakor tekintett osztály ι melletti képének egyik, a $\underline{c_{i_1}}$ -től és $\underline{c_{i_2}}$ -től különböző konstans leképezése. Az algoritmus ezután minden olyan címkét kioszt, amely az a_1, a_2, a_3 elemekből épül fel, és korábban még nem lett kiosztva. Egy-egy címke kiosztásához a keresett csúcs be- és ki-halmaza ismét könnyen megállapítható, és ilyen ki- és be-halmazzal rendelkező csúcs létezését az ι izomorfizmus a korábbiakhoz hasonlóan garantálni fogja a $\mathbb{B}$ gráfban, hiszen a keresett osztály az, amelynek ι melletti képében benne vannak azok a $K_n \rightarrow \{c_{i_1}, c_{i_2}, c_{i_3}\}$ leképezések, amelyek a φ hozzárendelésben eddig még nem szerepeltek. Jelölje ismét az éppen kiosztandó címkét $(a_{j_1}, \dots, a_{j_n})$, ahol $j_1, \dots, j_n \in \{1, 2, 3\}$. Ekkor a címkét kapó csúcs φ melletti képe, a $\varphi((a_{j_1}, \dots, a_{j_n}))$, az a C^{K_n} -beli leképezés lesz, amelyre $x_l \mapsto c_{i_1}$, ha $a_{j_l} = a_1$, $x_l \mapsto c_{i_2}$, ha $a_{j_l} = a_2$, és $x_l \mapsto c_{i_3}$, ha $a_{j_l} = a_3$. Ily módon definiálva a φ továbbra is injektív. Így az összes $(a_{j_1}, \dots, a_{j_n})$, $j_1, \dots, j_n \in \{1, 2, 3\}$ alakú címke kiosztható a $\mathbb{B}$ -ben, és ezzel már 3^n címkézett csúcs van a gráfban.

A többi konstans címke, és közvetlenül utánuk az algoritmus 3. pontjában leírt címkék mindegyike a fentiekhez hasonlóan kiosztható. Az algoritmus végeztével a φ leképezés is bijektívvé válik, ahol tetszőleges $\underline{a_j}$ konstans címkéjű csúcsra $\varphi(\underline{a_j}) = \underline{c_{i_j}}$ bijekció a $\mathbb{B}$ konstans címkéjű csúcsai, és a $\mathbb{C}^{\mathbb{K}_n}$ konstans leképezései között. Ez a φ viszont nem csak bijekció a konstans címkéjű csúcsok és a konstans leképezések között, de izomorfizmus is az általuk feszített részgráfok között, mivel ha $\underline{a_j} \rightarrow \underline{a_l}$ a $\mathbb{B}$ -ben, akkor $\underline{a_{j\iota}} \rightarrow \underline{a_{l\iota}}$ $\mathbb{C}^{\mathbb{K}_n}$ -ben, és így $\underline{a_{j\iota}} \sim_{nb} \underline{c_{i_j}}$ valamint $\underline{a_{l\iota}} \sim_{nb} \underline{c_{i_l}}$ miatt $\underline{c_{i_j}} \rightarrow \underline{c_{i_l}}$. Hasonlóan, ha $\underline{a_j} \not\rightarrow \underline{a_l}$, akkor $\underline{a_{j\iota}} \not\rightarrow \underline{a_{l\iota}}$ $\mathbb{C}^{\mathbb{K}_n}$ -ben, és így $\underline{c_{i_j}} \not\rightarrow \underline{c_{i_l}}$.

Tehát az $\mathbb{A}$ gráf izomorf a $\mathbb{C}^{\mathbb{K}_n}$ konstans leképezései által feszített részgráfiájával, ami nyilvánvalóan izomorf a $\mathbb{C}$ gráffal. Ezért $\mathbb{A} \cong \mathbb{C}$. Tehát az algoritmus lefut, és az eredmény izomorfia erejéig egyértelműen meghatározott.

A fenti algoritmus futási idő szempontjából is hatékony, vagyis a futási ideje a $\mathbb{B}$ csúcsszámának polinomfüggvényével becsülhető. $\square$

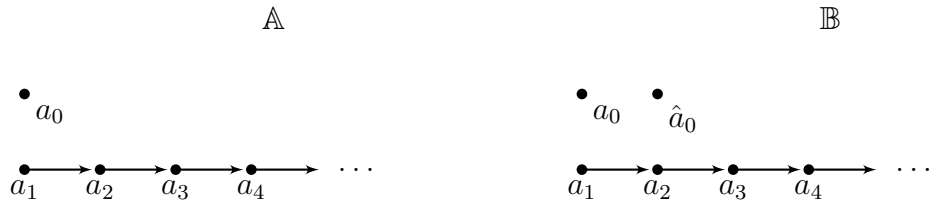
2.4. megjegyzés. Ha a kitevőben szereplő $\mathbb{X}$ nem véges, hanem végtelen teljes gráf, akkor a hatványalap már nem fejthető vissza egyértelműen. Például legyen $\mathbb{A}$ a 2 pontú üres gráf, $\mathbb{B}$ pedig a 3 pontú üres gráf. Ekkor $\mathbb{A}^{\mathbb{X}} \cong \mathbb{B}^{\mathbb{X}}$, hiszen mindkét gráf a $2^{|X|} = 3^{|X|}$ csúcsú üres gráf lesz, de $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ nyilvánvalóan nem izomorfak.

3. fejezet

A teljes injektivitásról

Korábban láttuk, hogy ha az $\mathbb{X}$ kitevő például a $\mathbb{K}_n$, és az alap véges, akkor a gráfhatvány ismeretében a hatványalap – izomorfia erejéig – egyértelműen meghatározható. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy ha az alap végtelen gráf is lehet, akkor tetszőleges $\mathbb{X}$ véges kitevő esetén, amely nem a $\mathbb{K}_1$, megadható két, egymással nem izomorf végtelen gráf, amelyek $\mathbb{X}$ -edik hatványai izomorfak.

E két nem izomorf gráf megadásakor fontos szerepet játszik a következő, a fejezet során végig $\mathbb{A}$ -val illetve $\mathbb{B}$ -vel jelölt végtelen gráf:



1. ábra. $\mathbb{A}$ fejezet során használt $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ gráfok.

A következő állítás példát ad olyan $\mathbb{X}$ véges irányított gráfokra, amelyekre az 1. ábra gráfjai közvetlenül igazolják, hogy e_X nem teljesen injektív.

3.1. állítás. *Ha az $\mathbb{X}$ véges irányított gráfra teljesül a következő feltételek valamelyike, akkor $\mathbb{A}^{\mathbb{X}} \cong \mathbb{B}^{\mathbb{X}}$, ahol $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ az 1. ábrán látható gráfok.*

1. $\mathbb{X}$ -nek létezik olyan x csúcsa, melyre $Ki(x) = Be(x) = \emptyset$.

2. Az $\mathbb{X}$ legalább két pontú, és

a) ha pontosan egy olyan x_1 csúcs van $\mathbb{X}$ -ben, melyre $Ki(x_1) = \emptyset$, akkor létezik x_2 , tőle különböző csúcs $\mathbb{X}$ -ben, melyre $Be(x_1) \cap Be(x_2) \neq \emptyset$, és

b) ha pontosan egy olyan x_3 csúcs van $\mathbb{X}$ -ben, melyre $Be(x_3) = \emptyset$, akkor létezik x_4 , tőle különböző csúcs $\mathbb{X}$ -ben, melyre $Ki(x_3) \cap Ki(x_4) \neq \emptyset$.

3.2. *megjegyzés.* Az állítás 2. pontja rengeteg esetet magába foglal, többek között azokat a gráfokat is, amelyekre a következő feltétel teljesül:

Az $\mathbb{X}$ legalább két pontú, és ha létezik x_1 csúcsa, melyre $Ki(x_1) = \emptyset$, akkor létezik x_2 , $x_2 \neq x_1$, melyre $Ki(x_2) = \emptyset$, és ha létezik x_3 csúcsa, melyre $Be(x_3) = \emptyset$, akkor létezik x_4 , $x_4 \neq x_3$, melyre $Be(x_4) = \emptyset$.

Az $\mathbb{A}$ gráfra, ahogy az az ábra jelöléseiből is látszik, érdemes úgy tekinteni, mint a $\mathbb{B}$ feszített részgráfjára. Ez a szemléletmód azért is hasznos, mert ekkor $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ is feszített részgráf $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ -ben.

A 3.5. lemmában elégséges feltételt fogunk adni arra, hogy az $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ és $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ gráfok között létezzen izomorfizmus.

3.3. lemma. *Legyenek $f_1, f_2: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C}$ leképezések az $\mathbb{X}$ és $\mathbb{C}$ irányított gráfok között. Ha tetszőleges $x \in X$ esetén $f_1(x) \sim_{nb} f_2(x)$ a $\mathbb{C}$ -ben, akkor $f_1 \sim_{nb} f_2$ a $\mathbb{C}^{\mathbb{X}}$ -ben.*

Bizonyítás. A $\mathbb{C}^{\mathbb{X}}$ gráfban $f_1 \sim_{nb} f_2$ pontosan akkor, ha $Ki(f_1) = Ki(f_2)$ és $Be(f_1) = Be(f_2)$. Legyen $g_1 \in Ki(f_1)$. Legyen $x_1, x_2 \in X$ olyan csúcsok, hogy $x_1 \rightarrow x_2$ az $\mathbb{X}$ -ben. Ekkor $f_1(x_1) \rightarrow g_1(x_2)$ a $\mathbb{C}$ -ben. Mivel $f_1(x) \sim_{nb} f_2(x)$ minden $x \in X$ elemre a $\mathbb{C}$ -ben, tehát $Ki(f_1(x_1)) = Ki(f_2(x_1))$ a $\mathbb{C}$ -ben, kapjuk, hogy $f_2(x_1) \rightarrow g_1(x_2)$ is fennáll. Mivel x_1, x_2 tetszőleges $\mathbb{X}$ -beli csúcsok voltak, ekkor $f_2 \rightarrow g_1$ a $\mathbb{C}^{\mathbb{X}}$ -ben, tehát $g_1 \in Ki(f_2)$. Ha $g_2 \in Ki(f_2)$, akkor hasonló módon igazolható, hogy $g_2 \in Ki(f_1)$, tehát $Ki(f_1) = Ki(f_2)$. A $Be(f_1) = Be(f_2)$ egyenlőség szintén hasonló gondolatmenettel igazolható. Ezért, ha $f_1(x) \sim_{nb} f_2(x)$ a $\mathbb{C}$ gráfban tetszőleges $x \in X$ -re, akkor $f_1 \sim_{nb} f_2$ a $\mathbb{C}^{\mathbb{X}}$ -ben. $\square$

3.4. következmény. *Ha $\tilde{f} \in \mathbb{B}^{\mathbb{X}}$, melyre $\tilde{f}^{-1}(\hat{a}_0) \neq \emptyset$, akkor létezik olyan $f \in \mathbb{B}^{\mathbb{X}}$, melyre $f^{-1}(\hat{a}_0) = \emptyset$ (azaz $f \in \mathbb{A}^{\mathbb{X}}$), és $f \sim_{nb} \tilde{f}$ a $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ -ben. Például a következő f leképezés ilyen:*

$$f(x) = \begin{cases} a_0, & \text{ha } \tilde{f}(x) = \hat{a}_0, \\ \tilde{f}(x), & \text{különben.} \end{cases}$$

Tehát, ha az $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ gráfhoz hozzávesszük a $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ azon csúcsait, amelyek az $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ -ben még nem szerepelnek, egészen pontosan azokat az $\tilde{f} \in \mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ leképezéseket, melyekre $\tilde{f}^{-1}(\hat{a}_0) \neq \emptyset$, az új csúcsok minden esetben az $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ gráf csúcsainak valamely, már létező ekvivalenciaosztályát bővítik.

3.5. lemma. *A 3.1 állításban szereplő $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ gráfok esetén, ha tetszőleges $f \in \mathbb{A}^{\mathbb{X}}$, $f^{-1}(a_0) \neq \emptyset$ leképezésre az f ekvivalenciaosztálya $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ -ben megszámlálhatóan végtelen sok elemet tartalmaz, akkor $\mathbb{A}^{\mathbb{X}} \cong \mathbb{B}^{\mathbb{X}}$.*

Bizonyítás. Mivel $\mathbb{X}$ véges, $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ pedig megszámlálhatóan végtelen számosságú, $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ és $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ is megszámlálhatóan végtelen számosságú.

Tegyük fel, hogy $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ minden ekvivalenciaosztálya, amely tartalmaz olyan $f \in A^X$ leképezést, melyre $f^{-1}(a_0) \neq \emptyset$, megszámlálhatóan végtelen számosságú. A $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ gráf $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ részgráfjához vegyük hozzá a $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ még hiányzó csúcsait és éleit. A 3.4. következmény miatt minden ilyen csúcs az $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ valamely, már meglévő ekvivalenciaosztályát bővíti. Ráadásul olyan osztályt, amely megszámlálhatóan végtelen számosságú. Mivel ilyen $B^X \setminus A^X$ -beli leképezésből megszámlálhatóan végtelen sok van, az új csúcsok hozzávétele $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ -hez a meglévő ekvivalenciaosztályok számosságán nem változtat. Továbbá új osztály sem keletkezik. Emiatt minden $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ -beli ekvivalenciaosztály reprezentálható egy olyan elemével, amely egyben $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ -beli is. Legyen $g \in A^X$. Ekkor $[g]$ az $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ -ben és a $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ -ben azonos számosságú. Valóban, ha g osztályában volt olyan leképezés, amelynek értékkészletében az a_0 is szerepel, akkor $[g]$ az $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ -ben megszámlálhatóan végtelen számosságú, és így $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ -ben is. Ha ilyen leképezés nem volt a g osztályában, akkor nincs olyan $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ -beli csúcs, amely $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ -ben még nem szerepel, és a g -vel ekvivalens lenne, tehát $[g]$ elemei a $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ gráf esetén is kizárólag az $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ -ben g -vel ekvivalens csúcsok. Ezért $[g]$ elemszáma ekkor is megegyezik az $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ és a $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ gráf esetén. Legyen φ egy olyan $A^X \rightarrow B^X$ leképezés, amely tetszőleges $g \in A^X$ esetén g $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ -beli és $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ -beli osztálya között bijektív. Ilyen leképezés definiálható, hiszen beláttuk, hogy tetszőleges $g \in A^X$ elemre $[g]$ elemszáma $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ -ben és $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ -ben megegyezik.

Ez a φ leképezés egyben izomorfizmus is. Tegyük fel, hogy $f_1 \rightarrow f_2$ az $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ -ben. Ekkor $\varphi(f_1) \sim_{nb} f_1$ és $\varphi(f_2) \sim_{nb} f_2$ a $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ -ben. Mivel $f_1 \rightarrow f_2$ az $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ -ben, így $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ -ben is, tehát $\varphi(f_1) \rightarrow \varphi(f_2)$ a $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ -ben. Hasonlóan, ha $f_1 \not\rightarrow f_2$ az $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ -ben, akkor $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ -ben is, így $\varphi(f_1) \not\rightarrow \varphi(f_2)$ a $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ -ben. $\square$

Bizonyítás. (A 3.1. állítás bizonyítása) A 3.5. lemma értelmében elegendő megmutatni, hogy az állításban leírt $\mathbb{X}$ gráfok esetén $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ -ben minden a_0 -t is értékül felvevő leképezés osztálya végtelen számosságú.

1. Tegyük fel, hogy $\mathbb{X}$ -ben van olyan x_1 csúcs, melyre $Ki(x_1) = Be(x_1) = \emptyset$. Legyen $f \in A^X$ olyan leképezés, melyre $f^{-1}(a_0) \neq \emptyset$. Vegyük minden $i \in \mathbb{N}$ esetén a következő leképezést A^X -ben:

$$f_i(x) = \begin{cases} a_i, & \text{ha } x = x_1, \\ f(x), & \text{különben.} \end{cases}$$

Mivel $Ki(x_1) = Be(x_1) = \emptyset$, az f szomszédsága $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ -ben nem függ $f(x_1)$ -től, ahogyan f_i szomszédsága sem függ $f_i(x_1)$ -től. Továbbá minden más $x \in X$ esetén ezek a leképezések pontonként megegyeznek, így $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ -beli ki-szomszédságuk és be-szomszédságuk is megegyezik, tehát f és f_i , $i \in \mathbb{N}$ ekvivalensek $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ -ben.

2. Tegyük fel, hogy $\mathbb{X}$ legalább két csúcsú, és nem 1. esetbeli gráf, azaz minden csúcának be-szomszédsága vagy ki-szomszédsága nem üres.

Legyen $f \in A^X$ olyan leképezés, melyre $f^{-1}(a_0) \neq \emptyset$. Ekkor három eset lehetséges:

- (i) Ha létezik $x_0 \in X$, melyre $f(x_0) = a_0$, és $Ki(x_0)$ valamint $Be(x_0)$ sem üres halmaz, akkor mivel a_0 izolált csúcs $\mathbb{A}$ -ban, $Ki(f) = Be(f) = \emptyset$. Ekkor legyen $i \in \mathbb{N}$ esetén f_i a következő leképezés:

$$f_i(x) = \begin{cases} a_0, & \text{ha } x = x_0, \\ a_i, & \text{különben.} \end{cases}$$

Az f_i , $i \in \mathbb{N}$ leképezések ekvivalensek f -fel, mivel $f_i(x_0) = a_0$ miatt $Ki(f_i) = Be(f_i) = \emptyset$.

- (ii) Tegyük fel, hogy f nem (i) esetbeli leképezés, de létezik $x_0 \in X$, melyre $f(x_0) = a_0$, és $Ki(x_0) = \emptyset$, valamint $Be(x_0) \neq \emptyset$. Ekkor, ha létezik $x_2 \neq x_0$, melyre $Ki(x_2) = \emptyset$, $Be(x_2) \neq \emptyset$, végtelen sok f -fel ekvivalens elem lesz $\mathbb{A}^X$ -ben, mert $Ki(f)$ nem függ $f(x_0)$ -tól és $f(x_2)$ -től, tehát $f(x_2)$ változtatása a kiszomszedságra nincs hatással. Ugyanakkor $f(x_0) = a_0$ miatt $Be(f) = \emptyset$, így $f(x_2)$ változtatása a be-szomszedságot sem tudja növelni. Tehát a következő f_i , $i \in \mathbb{N}$ leképezések f -fel ekvivalensek lesznek:

$$f_i(x) = \begin{cases} a_i, & \text{ha } x = x_2, \\ f(x), & \text{különben.} \end{cases}$$

Ha ilyen x_0 -tól különböző, szintén üres ki-halmazú csúcs nincs az $\mathbb{X}$ -ben, de létezik $x_2 \neq x_0$, melyre $Be(x_0) \cap Be(x_2) \neq \emptyset$, akkor az

$$f_i(x) = \begin{cases} a_i, & \text{ha } x = x_0, \\ f(x), & \text{különben} \end{cases}$$

leképezések, azt az i -t leszámítva, melyre $f(x_2) = a_i$ fennáll, azonos ekvivalenciaosztályban lesznek f -fel.

- (iii) Ha sem az (i), sem a (ii) esetbeli x helyeken nem vesz fel a_0 értéket az f függvény, akkor csak olyan $x_0 \in X$ helyen veheti fel, melyre $Ki(x_0) \neq \emptyset$, de $Be(x_0) = \emptyset$. Ekkor ismét két eset lehetséges. Ha létezik x_0 -tól különböző x_2 csúcs, melynek be-halmazza szintén üres, a (ii) esethez hasonlóan az

$$f_i(x) = \begin{cases} a_i, & \text{ha } x = x_2, \\ f(x), & \text{különben} \end{cases}$$

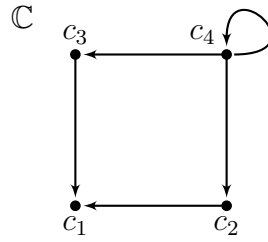
$i \in \mathbb{N}$ leképezések ekvivalensek f -fel. Ha ilyen csúcs nincs, akkor létezik $x_2 \neq x_0$, melyre $Ki(x_0) \cap Ki(x_2) \neq \emptyset$. Ekkor szintén a (ii) esethez hasonlóan az

$$f_i(x) = \begin{cases} a_i, & \text{ha } x = x_0, \\ f(x), & \text{különben} \end{cases}$$

leképezések, azt az i -t leszámítva, melyre $f(x_2) = a_i$ fennáll, azonos ekvivalenciaosztályban lesznek f -fel.

Ezzel megmutattuk, hogy a 3.1. állításban leírt gráfokra az a_0 -t is értékül felvevő leképezések $\sim_{nb}$ szerinti ekvivalenciaosztályai $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ -ben végtelen sok elemet tartalmaznak, így a 3.5. lemma miatt $\mathbb{A}^{\mathbb{X}} \cong \mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ valóban fennáll. $\square$

3.6. *megjegyzés.* A 3.1. állítás második pontjában az a) rész be-halmazok metszetére vonatkozó feltétele nem elhanyagolható. Például a 2. ábrán szereplő $\mathbb{C}$ gráfnak pontosan egy üres ki-halmazú csúcsa van (a c_1), és $Be(c_1) \cap Be(c_i) = \emptyset$ minden $i \in \{2,3,4\}$ esetén.



2. ábra.

Megmutatható, hogy erre a $\mathbb{C}$ kitevőre és a fenti $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ gráfokra $\mathbb{A}^{\mathbb{C}} \not\cong \mathbb{B}^{\mathbb{C}}$.

Legyen $\mathbb{G}$ egy irányított gráf, és definiáljuk rajta a következő halmazokat:

$$G_1 = \{g \in G : (\exists h \in G)(h \rightarrow g)\},$$

$$G_2 = \{g \in G : (\exists h_1, h_2 \in G)(h_1 \rightarrow h_2 \rightarrow g)\},$$

$$G_3 = \{g \in G : (\exists h_1, h_2, h_3 \in G)(h_1 \rightarrow h_2 \rightarrow h_3 \rightarrow g)\},$$

azaz G_i -ben a $\mathbb{G}$ gráf azon csúcsai szerepelnek, amelyekbe vezet i hosszú irányított séta valamely $\mathbb{G}$ -beli csúcsból. Továbbá legyen

$$H_1 = \{h \in G : (\exists g \in G_2 \setminus G_3)(h \rightarrow g)\},$$

azaz H_1 elemei olyan csúcsok, amelyeknek létezik ki-szomszédja, amibe a $\mathbb{G}$ gráfban vezet 2 hosszú irányított séta, de 3 hosszú már nem.

Megmutatjuk, hogy a $\mathbb{G} = \mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ választással $|H_1 \setminus G_1| = 2$, de $\mathbb{G} = \mathbb{B}^{\mathbb{C}}$ esetén $|H_1 \setminus G_1| = 3$. Ha $\mathbb{A}^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{B}^{\mathbb{C}}$ fennállna, akkor a halmaz elemszáma szükségképpen egyezne a két gráfra.

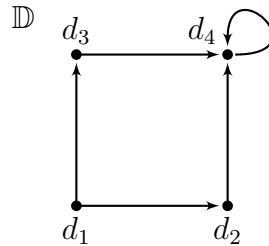
Először belátjuk, hogy az $\mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ és a $\mathbb{B}^{\mathbb{C}}$ esetén is a $G_2 \setminus G_3$ halmaznak egyetlen eleme van, a konstans $\underline{a_3}$. Legyen $\mathbb{G} = \mathbb{A}^{\mathbb{C}}$. A $g \in A^{\mathbb{C}}$ leképezést jelölje a $(g(c_1), g(c_2), g(c_3), g(c_4))$ vektor. Tegyük fel, hogy $g \in G_2 \setminus G_3$. Ekkor $Be(g) \neq \emptyset$, így $g(c_2) = g(c_3) = g(c_4)$, és

$g(c_1), g(c_2) \notin \{a_0, a_1\}$. Tegyük fel, hogy $g = (a_i, a_j, a_j, a_j)$, ahol $a_i, a_j \notin \{a_0, a_1\}$ és $a_i \neq a_j$. Ekkor $Be(g)$ elemei $(\star, a_{i-1}, a_{i-1}, a_{j-1})$ alakúak, ahol $\star \in A$ tetszőleges, és $a_{i-1} \neq a_{j-1}$. Utóbbi miatt azonban tetszőleges $Be(g)$ -beli elem be-halmaza üres, tehát nem létezik 2 hosszú irányított séta a g csúcsba. Ezért g kizárólag konstans leképezés lehet. Az $\underline{a_0}$ és $\underline{a_1}$ csúcsok be-halmaza üres, az $\underline{a_2}$ be-halmazában pedig minden csúcs 4. (c_4 -hez tartozó) koordinátája a_1 , így azok be-halmaza üres, tehát ezek a konstans leképezések nincsenek G_2 -ben. Az $\underline{a_i}$, $i \geq 4$ esetén pedig G_3 -ban is benne van, hiszen az $\underline{a_1} \rightarrow \underline{a_2} \rightarrow \underline{a_3} \rightarrow \dots \rightarrow \underline{a_i}$ már legalább 3 hosszú irányított séta. Az $\underline{a_3}$ csúcsához létezik 2 hosszú irányított séta: $\underline{a_1} \rightarrow \underline{a_2} \rightarrow \underline{a_3}$. Indirekt tegyük fel, hogy 3 hosszú irányított séta is létezik hozzá. Ekkor $Be(\underline{a_3})$ -ban van egy csúcs, amihez létezik 2 hosszú irányított séta. Láttuk, hogy ez csak úgy lehetséges, ha ez a csúcs konstans leképezés. Viszont $Be(\underline{a_3})$ -ban $\underline{a_2}$ az egyetlen konstans leképezés, de ez nem G_2 -beli. Tehát $\{\underline{a_3}\} = G_2 \setminus G_3$.

A $\mathbb{G} = \mathbb{B}^{\mathbb{C}}$ esetén ugyanez a gondolatmenet érvényes, feltéve, hogy ha valamiről feltettük, hogy nem lehet egyenlő a_0 -val, akkor most azt is fel kell tenni, hogy $\hat{a}_0$ -pal sem lehet egyenlő.

Ezután már könnyen látható, hogy $Be(\underline{a_3})$ -ban az $\mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ esetén csak $f_0 = (a_0, a_2, a_2, a_2)$ és $f_1 = (a_1, a_2, a_2, a_2)$ az üres be-halmazzal rendelkező csúcs, tehát $|H_1 \setminus G_1| = 2$, míg $\mathbb{B}^{\mathbb{C}}$ -ben $H_1 \setminus G_1 = \{f_0, f_1, (\hat{a}_0, a_2, a_2, a_2)\}$ három elemű halmaz.

Hasonlóan a b) rész ki-halmazok metszetére vonatkozó feltétele sem hagyható el, például a 3. ábra $\mathbb{D}$ gráfja esetén $\mathbb{A}^{\mathbb{D}} \not\cong \mathbb{B}^{\mathbb{D}}$.



3. ábra.

Legyen

$$\tilde{G}_1 = \{g \in G : (\exists h \in G)(g \rightarrow h)\},$$

$$\tilde{G}_2 = \{g \in G : (\exists h_1, h_2 \in G)(g \rightarrow h_1 \rightarrow h_2)\}.$$

A $\mathbb{G} = \mathbb{A}^{\mathbb{D}}$ gráfra a $H = \{g \in G \setminus \tilde{G}_1 : (\exists h \in \tilde{G}_2 \setminus G_1)(h \rightarrow g)\}$ halmaz elemszáma 1, míg $\mathbb{G} = \mathbb{B}^{\mathbb{D}}$ esetén 2, így $\mathbb{A}^{\mathbb{D}} \not\cong \mathbb{B}^{\mathbb{D}}$. Valóban, $\mathbb{G} = \mathbb{A}^{\mathbb{D}}$ -re, ha $h = (h(d_1), h(d_2), h(d_3), h(d_4)) \in \tilde{G}_2 \setminus G_1$, akkor $h_2(\star, a_i, a_i, a_j)$ alakú, ahol $\star \in A$, a h_1 elem $(a_{i-1}, a_{j-1}, a_{j-1}, a_{j-1})$ alakú,

és így h szükségképpen $(a_{j-2}, a_{j-2}, a_{j-2}, a_{j-2})$ alakú, tehát konstans. A konstan leképezések között $\underline{a_1}$ az egyetlen, aminek be-halmaza üres, tehát a $\tilde{G}_2 \setminus G_1$ -ben csak az $\underline{a_1}$ szerepel. Ezért H elemei az $\underline{a_1}$ üres ki-halmazú ki-szomszédai, ilyenből pedig csak egy van, az (a_0, a_2, a_2, a_2) .

A $\mathbb{B}^{\mathbb{D}}$ esetén a bizonyítás hasonló, $\tilde{G}_2 \setminus G_1$ -ben szintén csak az $\underline{a_1}$ szerepel, így $H = \{(a_0, a_2, a_2, a_2), (\hat{a}_0, a_2, a_2, a_2)\}$.

Bár a 3.1 állítás esetei nem fednek le minden véges gráfot, a segítségével belátható a következő állítás.

3.7. állítás. *Tetszőleges $\mathbb{X}$ véges irányított gráfhoz, amely nem a $\mathbb{K}_1$, megadható olyan végtelen $\mathbb{C}_1$ és $\mathbb{C}_2$ nem izomorf irányított gráf, melyekre $\mathbb{C}_1^{\mathbb{X}} \cong \mathbb{C}_2^{\mathbb{X}}$.*

3.8. lemma. *Ha az $\mathbb{X}$ véges irányított gráf nem a $\mathbb{K}_1$, akkor $\mathbb{X}^2$ teljesíti a 3.1. állítás valamelyik feltételét.*

Bizonyítás. Ha $\mathbb{X}$ teljesíti a 3.1 állítás 1. feltételét, azaz létezik x_1 csúcsa, melyre $Ki(x_1) = Be(x_1) = \emptyset$, akkor (x_1, x_1) szintén üres ki- és be-halmazú csúcs az $\mathbb{X}^2$ -ben.

Ha $\mathbb{X}$ legalább két csúcsú, és benne van egy x_1 csúcs, melyre $Ki(x_1) = \emptyset$, akkor $\mathbb{X}^2$ -ben az (x_1, x_2) (x_1, x_1) , (x_2, x_1) csúcsok ki-halmaza is üres, ahol x_2 az $\mathbb{X}$ egy tetszőleges, x_1 -től különböző csúcsa. Valamint, ha van olyan x_3 csúcs $\mathbb{X}$ -ben, amelyre $Be(x_3) = \emptyset$, akkor (x_3, x_4) , (x_3, x_3) és (x_4, x_3) , ahol $x_4 \in X$ szintén egy, az x_3 -tól különböző csúcs $\mathbb{X}$ -ben, olyan csúcsok, melyek be-halmaza üres $\mathbb{X}^2$ -ben. Mivel $|X| \geq 2$, az (x_1, x_2) (x_1, x_1) , (x_2, x_1) csúcsok valóban mind különbözőek, így lesz legalább 2 csúcs, melyek ki-halmaza üres. Hasonlóan (x_3, x_4) , (x_3, x_3) és (x_4, x_3) is mind különbözőek, így van legalább 2 különböző csúcs $\mathbb{X}^2$ -ben, amelynek be-halmaza üres. Ezért az $\mathbb{X}^2$ teljesíti a 3.1. állítás 2. pontjának feltételét.

Ha pedig az $\mathbb{X}$ gráf legalább két pontú, és nincs üres be- vagy ki-halmazzal rendelkező csúcsa, akkor az $\mathbb{X}^2$ -nek sem lesz, így $\mathbb{X}^2$ szintén eleget tesz a 3.1. állítás 2. feltételének. $\square$

Bizonyítás. (A 3.7 állítás bizonyítása.) A 3.1. állítás és a 3.8. lemma alapján tetszőleges $\mathbb{X}$ gráfra, amely nem a $\mathbb{K}_1$, teljesül $\mathbb{A}^{\mathbb{X}} \cong \mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ vagy $\mathbb{A}^{\mathbb{X}^2} \cong \mathbb{B}^{\mathbb{X}^2}$.

Ha $\mathbb{A}^{\mathbb{X}} \cong \mathbb{B}^{\mathbb{X}}$, akkor az 1. ábra $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ gráfja igazolja, hogy e_X nem teljesen injektív.

Az $\mathbb{A}^{\mathbb{X}^2} \cong \mathbb{B}^{\mathbb{X}^2}$ izomorfíából a gráfhatványozás 1.9. azonosságát felhasználva kapjuk, hogy $(\mathbb{A}^{\mathbb{X}})^{\mathbb{X}} \cong (\mathbb{B}^{\mathbb{X}})^{\mathbb{X}}$. Így, ha $\mathbb{A}^{\mathbb{X}} \not\cong \mathbb{B}^{\mathbb{X}}$, akkor az $\mathbb{A}^{\mathbb{X}}$ és a $\mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ olyan nem izomorf gráfok, amelyek $\mathbb{X}$ -edik hatványa izomorf, tehát e_X ekkor sem teljesen injektív. $\square$

Irodalomjegyzék

- [1] C. Bergman, R. McKenzie, Zs. Nagy, *How to cancel a linearly ordered exponent*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 29. Universal Algebra, Esztergom (1977)
- [2] Garrett Birkhoff, *Extended arithmetic*, Duke Math. J. **3** (1937), 311-316.
- [3] D. Duffus, R. Wille, *A theorem on partially ordered sets of order-preserving mappings*, Proceedings of the American Mathematical Society **76** (1979), 14-16.
- [4] Richard H. Hammack, *On direct product cancellation of graphs*, Discrete Mathematics **309** (2009), 2538-2543.
- [5] Richard H. Hammack, Katherine E. Toman, *Cancellation of direct products of digraphs*, Discussiones Mathematicae Graph Theory **30** (2010), 575-590.
- [6] Lovász László, *Operations with structures*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae **18** (1967), 321-328.
- [7] Lovász László, *On the cancellation law among finite relational structures*, Periodica Mathematica Hungarica **1** (2) (1971), 145-156.
- [8] Ralph McKenzie, *Arithmetic of Finite Ordered Sets: Cancellation of Exponents, I.*, Order **16** (1999), 313-333.
- [9] Ralph McKenzie, *Arithmetic of Finite Ordered Sets: Cancellation of Exponents, II.*, Order **17** (2000), 309-332.

Saját eredmények

Megoldott kérdések:

1. A gráfhatványozás 1.1. definíciója értelmében, ha $\mathbb{X}$ az n csúcsú teljes irányított gráf, akkor tetszőleges $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ véges irányított gráfok esetén következik-e $\mathbb{A}^{\mathbb{X}} \cong \mathbb{B}^{\mathbb{X}}$ -ből $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$.
2. A gráfhatványozás injektivitásának vizsgálata abban az esetben, ha a kitevő véges irányított gráf, de a hatványalap végtelen irányított gráf is lehet.

Alkalmazott módszer:

1. A fenti 1. kérdés megválaszolásához egy algoritmus megadása, amely rögzített n esetén $\mathbb{A}^{\mathbb{K}_n}$ -ből izomorfia erejéig egyértelműen meghatározza az $\mathbb{A}$ gráfot. Az algoritmus az $\mathbb{A}^{\mathbb{K}_n}$ gráf csúcsai ki- és be-halmazának vizsgálatán alapszik.

Eredmények:

1. Ha a kitevő az n csúcsú teljes irányított gráf $(\mathbb{K}_n)$, akkor tetszőleges véges $\mathbb{A}$ és $\mathbb{B}$ irányított gráfok esetén $\mathbb{A}^{\mathbb{K}_n} \cong \mathbb{B}^{\mathbb{K}_n}$ -ből következik $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$.
2. Tetszőleges $\mathbb{X}$ véges irányított gráfhoz, amely nem a $\mathbb{K}_1$, megadható olyan végtelen $\mathbb{C}_1$ és $\mathbb{C}_2$ nem izomorf irányított gráf, melyekre $\mathbb{C}_1^{\mathbb{X}} \cong \mathbb{C}_2^{\mathbb{X}}$.
3. Az 1. eredményt bizonyító algoritmus.

Szakdolgozat eltérés

Matematikus mesterszakos diplomamunkám címe: A gráfhatványozás algebrai és kombinatorikai tulajdonságai.

A TDK dolgozatban szereplő, véges teljes gráfokra vonatkozó 2. rész eredménye (2.1. tétel) hivatkozás szintjén jelenik meg a diplomamunkában, $n = 2$ esetén. A végtelen gráfokra vonatkozó 3. rész eredménye egyáltalán nem jelenik meg benne.

A diplomamunkám legnagyobb részét egy cikkfeldolgozás teszi ki. A cikk egy algebrai tétel és annak bizonyítása. A bizonyítás eszközként használja a gráfhatványozást, valamint egy annál általánosabb, szintén irányított gráfokból irányított gráfokat definiáló fogalmat, az úgynevezett élformulát. A feldolgozott cikk: *Gyenizse G., Maróti M., Zádori L., Congruence permutability is prime, Proc. Amer. Math. Soc. 150 (6), (2022), 2733–2739.*

A diplomamunka bevezetője a gráfhatványozás ezen általánosításával, annak tulajdonságaival foglalkozik.

A második fejezet a gráfhatványozás injektivitásával foglalkozik, viszont kizárólag 2 csúcsú kitevők és véges hatványalapok esetén. A TDK dolgozat 2 csúcsú teljes gráfra vonatkozó eredménye (2.1. tétel, $n = 2$) itt jelenik meg, a TDK dolgozatra történő hivatkozás formájában.

Ugyanebben a fejezetben szerepel egy, a 2.1. tételhez hasonló állítás, amely a gráfhatványozás injektivitását mondja ki, két másik 2 csúcsú kitevőre. Az állítás bizonyítása szintén egy címkéző algoritmus, viszont ez a címkekiosztás menetében és a csúcsok osztályozásának módjában eltér a TDK dolgozatban lévő algoritmustól.