

# Nemlineáris anyagtulajdonságok modellezése a numerikus térszámításban

Unger Tamás István  
Automatizálási Tanszék  
Széchenyi István Egyetem  
Elektromágneses Terek Laboratórium  
Győr, Magyarország  
ungert@maxwell.sze.hu

Prof. Dr. habil. Kuczmann Miklós  
Automatizálási Tanszék  
Széchenyi István Egyetem  
tanszékvezető, egyetemi tanár  
Győr, Magyarország  
kuczmann@maxwell.sze.hu

**Kivonat**—A cikk az alacsonyfrekvenciás elektromágneses térszimuláció témakörében íródott, legfontosabb célkitűzése a nemlineáris anyagtulajdonságok modellezési lehetőségének felvázolása. Bemutatásra kerül a mágneses térerősség és a mágneses indukció között definiált skaláris hiszterézis mérésének elve, valamint a mérési eredményekből felépíthető nemlineáris, analitikus modell paramétereinek identifikációja, továbbá a modellből származtatható permeabilitásfüggvény és jelentősége is. Prezentálásra kerül a direkt modell illesztésének lehetősége egydimenziós és kétdimenziós végeleemes szimulációhoz, mely kapcsán felvázolásra kerül az illesztéshez szükséges iterációs séma, továbbá a térszimulációhoz használt parciális differenciálegyenletek, azok gyenge alakjai, implementációjuk végelelem-módszer segítségével, végül kiértékelésre kerülnek a szimulációs eredmények.

**Kulcsszavak**—ferromágneses hiszterézis, végelelem-módszer, elektromágneses terek, nemlinearitás, szimulációs módszerek

## I. BEVEZETÉS

A számítástechnika rohamos fejlődésének és az iparban elterjedt szimulációs szoftverek térnyerésének köszönhetően napjainkban már alapvető feladat és elvárás a kutatási és fejlesztési területen a különböző anyagparaméterek jellemzőinek szimulációja, modellezése és az adott feladathoz optimalizálása. A villamos gépek, motorok és transzformátorok tervezése során különösen fontos az adott feladathoz illeszkedő (például kis veszteségű) vasanyag kiválasztása.

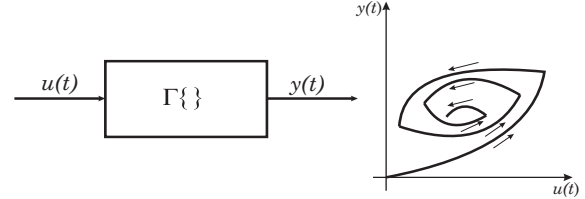
Az elektromágneses szempontból értelmezett anyagparaméterek optimalizálását numerikus térszámítással, így végelelem-módszerrel is hatékonyan lehet segíteni. A cikkben felvázolásra kerülő modell-illesztési módszer rendkívül rugalmas, mert a kereskedelmi forgalomban kapható szimulációs szoftverekkel ellentétben bonyolultabb összefüggések megvalósítására is lehetőséget nyújt.

## II. A SKALÁRIS HISZTERÉZIS ÉS MÉRÉSE

Skaláris hiszterézissel bír az 1. ábrán látható általános, egy bemenetű, egy kimenetű rendszer, melynek  $\Gamma\{\}$  operátora az

$$y(t) = \Gamma\{u(t)\} \quad (1)$$

alakban felírható [1], nemlineáris, többértékű, memóriával rendelkező gerjesztés-válasz kapcsolatot definiálja [2].



1. ábra. Egy általános hiszterézises rendszer

Ilyen típusú jelátalakítók a ferromágneses anyagok, amennyiben gerjesztésnek  $\vec{H}(t)$  mágneses térerősség, válaszjelnek  $\vec{M}(t)$  mágnesezettség, vagy  $\vec{B}(t)$  mágneses indukció kerül megválasztásra [3]:

$$\vec{B}(t) = \mu_0 \left( \vec{H}(t) + \mathcal{H}\{\vec{H}(t)\} \right) = \mathcal{B}\{\vec{H}(t)\}. \quad (2)$$

Skaláris kapcsolat definiálható a térintenzitás és a gerjesztettség mennyiség között, amennyiben a vizsgált anyagon belül vektoraik párhuzamosak. Skalárkarakterisztika felvételére kiválóan alkalmas a toroid transzformátor [7], mely elrendezés esetén a mágneses térerősség

$$H(t) = \frac{N_p I(t)}{2R_k \pi} \quad (3)$$

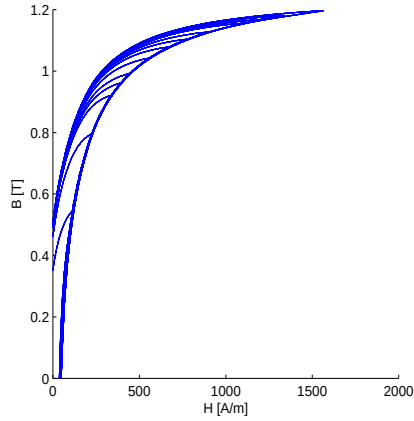
formula alapján a primer oldali menetszám, a gerjesztőáram és a közepes sugár ismeretében számít-

ható, továbbá a mágneses indukció

$$B(t) = B_0 + \frac{1}{N_{sz}A} \int_0^t u_i(\tau) d\tau \quad (4)$$

összefüggéssel, az indukált feszültség idő szerinti integrálásával számítható [1].

A mérés LabVIEW [4] számítógépes mérőrendszer segítségével történt, mely rendszerrel egy áramgenerátor a primer oldali árama került vezérlésre, továbbá a szekunder oldali indukált feszültség került mérésre és feldolgozásra. A mérés során a modell identifikációjához szükséges koncentrikus skalárgörbék kerültek felvételre, mely görbéket a gerjesztőáram amplitúdójának fokozatos növelésével lehet meghatározni [5]. A mérési eredmények a 2. ábrán láthatók.



2. ábra. A mért koncentrikus görbék

### III. A MODELL IDENTIFIKÁCIÓJA

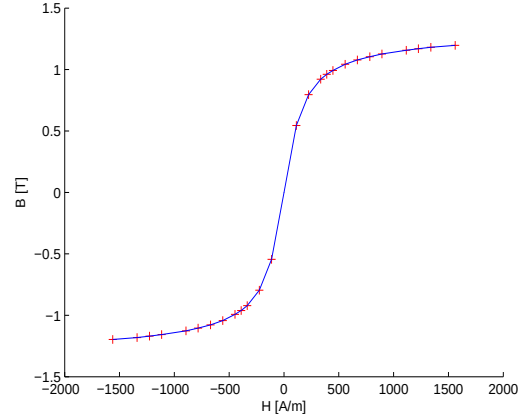
A szimulációhoz illesztett nemlineáris, egyértékű karakterisztikát az  $i$  darab mért koncentrikus  $B(H)$ -függvények ( $\arg \max_H B_n(H)$ ,  $\max_H B_n(H)$ ), valamint ( $\arg \min_H B_n(H)$ ,  $\min_H B_n(H)$ ) pontjai határozzák meg ( $n = 1, 2, \dots, i$ ). Ezen pontokra analitikus formában leírható, paraméterezett inverz tangens-görbe illeszthető. A

$$B(H, t) = \frac{2B_s}{\pi} \arctg \left( \frac{H(t)}{H_0} \right) \quad (5)$$

alakban felírható direkt modell formulájában  $B_s$  paraméter a telítési indukcióérték, valamint  $H_0$  a karakterisztika meredekségét befolyásolja.

A modell paramétereinek identifikációja a Matlab [6] *Curve Fitting Toolbox* moduljának segítségével történt meg. A vizsgált anyag paraméterei:  $B_s = 1,25805 \text{ T}$ ,  $H_0 = 146,47722 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ . A mért

karakterisztikák pontjai, valamint az illesztett görbe a 3. ábrán látható.



3. ábra. A mért pontok és az illesztett modell

A permeabilitásfüggvény a karakterisztikát leíró összefüggés  $H$ -szerinti parciális deriválásával fejezhető ki:

$$\mu(H) = \frac{\partial B}{\partial H} = \frac{2B_s}{\pi H_0} \frac{1}{1 + \left( \frac{H}{H_0} \right)^2}. \quad (6)$$

A függvény maximuma  $H = 0 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ -nél  $\mu_{max} = 1,3009 \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ , minimuma  $H \in [-2000 \frac{\text{A}}{\text{m}}, 2000 \frac{\text{A}}{\text{m}}]$  esetben  $\mu_{min} = 0.0054 \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ . Az intervallum kikötése azért szükséges, mert a formula határértéke  $H \rightarrow \pm\infty$  esetén 0.

### IV. A MODELL ILLESZTÉSE A SZIMULÁCIÓHOZ

A szimuláció során alkalmazott potenciálformalizmustól függően a megoldás adódhat  $H$ , illetve  $B$  formájában is, így direkt karakterisztika alkalmazását feltételezve kétféle eset kezelése szükséges. A mágneses térerősség és a mágneses indukció is felírható egy lineáris, illetve egy nemlineáris, úgynevezett reziduális komponens összegeként [2]:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_{opt} \vec{H} + \vec{R}, \\ \vec{H} &= \nu_{opt} \vec{B} + \vec{I}. \end{aligned} \quad (7)$$

A reziduál értéke mindkét esetben iteratív úton, konvergens sorozatos közelítés segítségével kerül meghatározásra. Amennyiben a formalizmus a mágneses térerősségre kerül felírásra, úgy az  $n$ -edik lépésben a következőket kell végrehajtani:

- 0) while  $\|\vec{R}^{(n-1)} - \vec{R}^{(n-2)}\| > \varepsilon$ :
- 1)  $\vec{H}^{(n)}$  meghatározása a Maxwell-egyenletek

alapján:

$$\vec{H}^{(n)} = \mathcal{M}\{\vec{R}^{(n-1)}\}; \quad (8)$$

2) Direkt modell alkalmazása:

$$\vec{B}^{(n)} = \mathcal{B}\{\vec{H}^{(n)}\}; \quad (9)$$

3)

$$\vec{R}^{(n)} = \vec{B}^{(n)} - \mu_{opt} \vec{H}^{(n)}. \quad (10)$$

Vektorpotenciálra ( $\vec{A}$ ) épülő formalizmus esetén ( $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ) [9] az iteráció a következőképp alakul:

0) while  $\|\vec{I}^{(n-1)} - \vec{I}^{(n-2)}\| > \varepsilon$ :

1)  $\vec{B}^{(n)}$  meghatározása a Maxwell-egyenletek alapján:

$$\vec{A}^{(n)} = \mathcal{M}\{\vec{I}^{(n-1)}\} \rightarrow \vec{B}^{(n)} = \nabla \times \vec{A}^{(n)}; \quad (11)$$

2)  $\vec{H}^{(n)}$  approximálása:

$$\vec{H}^{(n)} = \nu_{opt} \vec{B}^{(n)} + \vec{I}^{(n-1)}; \quad (12)$$

3) Direkt modell alkalmazása:

$$\vec{I}^{(n)} = \vec{H}^{(n)} - \nu_{opt} \mathcal{B}\{\vec{H}^{(n)}\}. \quad (13)$$

A permeabilitásfüggvény jelentősége, hogy az iteráció konvergenciáját  $\mu_{opt}$  és  $\nu_{opt}$  paraméterek helyes megválasztásán keresztül biztosítja [2]:

$$\mu_{opt} = \frac{\mu_{max} + \mu_{min}}{2}, \quad \nu_{opt} = \frac{2 \frac{1}{\mu_{min}} \frac{1}{\mu_{max}}}{\frac{1}{\mu_{min}} + \frac{1}{\mu_{max}}}. \quad (14)$$

## V. VÉGESELEM-MÓDSZER

A végeelem-módszer numerikus technika parciális differenciálegyenletek közelítő megoldására. A módszer alkalmazása során a differenciálegyenlet  $\vec{W}$  súlyozófüggvénnyel megszorozott, a vizsgált tartományra integrált gyenge alakja [9] kerül megoldásra az egydimenziós esetben szakaszokra, kétdimenziós esetben például háromszögekre diszkrétizált problématarományon. A módszer az eredeti differenciálegyenletet általánosan a

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{u}}} = \underline{\underline{\mathbf{b}}} \quad (15)$$

alakban felírható lineáris algebrai egyenletrendszerre képezhető le, ahol  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$  az együtthatómátrix,  $\underline{\underline{\mathbf{u}}}$  az ismeretleneket,  $\underline{\underline{\mathbf{b}}}$  pedig a gerjesztést és a peremfeltételeket tartalmazó oszlopvektor.

A *Galjorkin-módszer* értelmében a súlyozófüggvény és az elemeken értelmezett formafüggvények megegyeznek [8]. A cikkben bemutatott szimulációk Matlab-script formájában, csomóponti végeselemek használatával kerültek implementálásra.

## VI. NEMLINEARITÁS EGYDIMENZIÓS SZIMULÁCIÓBAN

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A munka a *TÁMOP-4.2.2.A-11/1/KONV-2012-0012: Hibrid és elektromos járművek fejlesztését megalapozó kutatások* projekt keretében, a Magyar Állam és az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

### HIVATKOZÁSOK

- [1] Fodor Gy. *Jelek, rendszerek és hálózatok*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1998.
- [2] Kuczmann M. *A hiszterézis karakterisztikával jellemzett rendszerek és a numerikus térszámítás kapcsolata*. Habilitációs disszertáció, Győr, 2010.
- [3] Della Torre E. *Magnetic Hysteresis*. IEEE Press, New York, 1999.
- [4] <http://hungary.ni.com/labview>. *Utolsó látogatás: 2014. április 26.*
- [5] Bertotti G. *Hysteresis in Magnetism*. Academic Press, 1998.
- [6] <http://www.mathworks.com/>. *Utolsó látogatás: 2014. április 26.*
- [7] Pólik Z., Kuczmann M. *Measuring and control the hysteresis loop by using analog and digital integrators*. Journal of Optoelectronics and Advanced Materials, 2008.
- [8] Amália Iványi. *Hysteresis Models In Electromagnetic Computation*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1997.
- [9] Kuczmann M. Iványi A. *The Finite Element Method In Magnetism*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 2008.
- [10] Bastos J.P.A., Sadowski N. *Electromagnetic Modeling By Finite Element Methods*. Marcel Dekker, New York, 2003.