

Szabó Zsanett

Hogyan építsünk számelméletet?

Kutatásunk korábbi részében több mint 1200 kérdőívet és még annál is több dolgozatot töltöttünk ki különböző iskolatípusok különböző évfolyamos diákjaival. Ezekben a legalapvetőbb számelméleti fogalmak ismeretét próbáltuk feltérképezni a diákok körében. (Csányi Petra - Pozsonyi Enikő - Szabó Zsanett, 2014), (Csányi Petra - Fábíán Kata - Pozsonyi Enikő - Szabó Zsanett, 2014) A kérdőívek kiértékelése és a dolgozatok kijavítása után megállapítottuk, hogy a tanulók korosztálytól függetlenül nem emlékeznek a számelméleti alapfogalmakra, és nem tudják megoldani az azokkal kapcsolatos legegyszerűbb feladatokat sem.

Most nézzünk meg hármat a dolgozatok feladatai közül: a számelmélet alaptételével, a legnagyobb közös osztóval és a legkisebb közös többszörőssel kapcsolatosakat.

	saját bevallás	dolgozatok eredményei
Bontsd fel prímek szorzatára a következő számot: 420	78%	72%
Mennyi 1320 és 504 legnagyobb közös osztója?	91%	46%
Mennyi a 8 és a 12 legkisebb közös többszörőse?	97%	54%
Mindhárom feladat jó: 30%		

3. dia

A 3. dián az első oszlopban látható százalékok azt jelentik, hogy a diákok hány százaléka tudna ilyen jellegű feladatokat megoldani a saját bevallásuk, vagyis a kérdőívek eredményei alapján. A második oszlopban pedig azt láthatjuk, hogy a diákok hány százaléka oldotta meg ténylegesen jól ezeket a feladatokat a dolgozatokban. Látható, hogy jelentős különbség van a diákok vélt és valós tudása között. Azzal, hogy csak a tanulók 72%-a tud felbontani egy számot prímek szorzatára, azzal még elégedettek is lehetnénk, hiszen előfordulhat, hogy a felbontás során elszámolnak valamit. A legnagyobb közös osztóval és a legkisebb közös többszörőssel kapcsolatos feladatok esetén viszont igazán megdöbbentő a vélt és valós tudás közötti különbség. A tanulók 46, illetve 54 százaléka tudta megoldani ezeket a feladatokat.

Nézzük meg, hogy mit is kérdeztünk ezekben a feladatokban. A harmadik feladatnál a 8 és a 12 legkisebb közös többszörőjét kellett kiszámolniuk a tanulóknak. Igen a 8-ét és a 12-ét, amit próbálkozással is gyorsan megkaphatnának, hiszen $8|12 \cdot 2$. Mindhárom feladatot csupán a tanulók 30%-a oldotta meg hibátlanul.

Arra voltunk kíváncsiak, hogy mi lehet a rossz eredmények oka. A válasz keresése közben megnéztük a matematika tankönyveket, hiszen az áll a tanulók és a tanárok rendelkezésére is. Az 5. dián látható 10 tankönyvben vizsgáltuk meg a számelmélet alaptételével, a legnagyobb közös osztóval és a legkisebb közös többszörösrel foglalkozó oldalakat.



5. dia

Ezek között a tankönyvek között egy olyan van, amiben helyesen van kimondva a számelmélet alaptétele, és egy olyan, amiben helyesen szerepel a legnagyobb közös osztó meghatározásának módszere. Ez két különböző könyvet jelent. Nézzük meg, hogy mik azok a hibák, amik a tankönyvekben szerepelnek.

A számelmélet témakörben fontos fogalom a prímszám. A tankönyvekben ezt úgy definiálják, hogy „Azok a számok, amiknek pontosan két osztójuk van.” Ezzel nincs is baj, ha nem beszélünk negatív osztókról. A tankönyvek többsége az oszthatóságot természetes számokra definiálja, így ez nem okoz gondot. Viszont kérdéses, hogy ilyen esetben az $a|b - c$ oszthatósági tulajdonságnál miért nem írnak semmilyen feltételt b és c értékére. A $b - c$ mindig pozitív?

A számelmélet alaptétele a tankönyvek szerint: „Bármely összetett szám felbontható prímszámok szorzatára és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.” Ez igaz. De ez nem a számelmélet alaptétele. Ezek alapján mi lehet a prímszámok prímtényezősz felbontása? És mi a helyzet az 1-gyel?

Mivel magyarázhatjuk, hogy a tankönyvekben így szerepel ez a tétel, milyen érveket lehet emellett felhozni? (Erről tanárokat és tankönyvszerzőket kérdeztünk meg.) Az egyik érv az, hogy a tanulók így is értik, így is tudják, hogy mi a prímszámok prímtényezősz felbontása, vagy ha mégsem, akkor a tanár úgyis hozzámondja, kiegészíti a tételt. Egy másik érv az volt, hogy a diákok nem tudják megjegyezni, hogy kivéve az 1. Az összetett számot lehet, hogy jobban meg tudják jegyezni, de a felsőbb évfolyamokon – az érettségi összefoglalótól eltekintve – nem kerül elő többször az összetett szám fogalma.

Egy harmadik, az előzőeknél jobban átgondolt érv az, hogy középiskolában nem létezik egytényezősz szorzat, hiszen az összezavarná a tanulókat. Az érv hallatán felmerült bennünk a kérdés, hogy mi a helyzet a a^1 , az $1!$, illetve a p^a esetével, amikor a számok prímtényezősz felbontását írjuk fel általánosan és nem teszünk semmilyen megkötést a értékére? Erre azt a választ kaptuk, hogy ez a permanencia-elv miatt van így, és az a^1 , illetve az $1!$ külön kerülnek definiálásra. Ezek után már csak az a kérdés, hogy a számelmélet alaptételénél miért nem alkalmazzuk a permanencia-elvet?

Térjünk át a legnagyobb közös osztó meghatározásának módszerére. A tankönyvekben a 8. dián látható megfogalmazás szerepel:

Prímszám:
Azokat a számokat, amiknek pontosan két osztója van prímszámoknak nevezzük.

Számelmélet alaptétele:
Bármely összetett szám felbontható prímszámok szorzatára, és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Legnagyobb közös osztó:
A legnagyobb közös osztó a prímtényezős felbontásból előállítható, ha a közös prímtényezőket az előforduló legkisebb hatványon összeszorozzuk.

Negatív osztók?

Prímszámok? Az 1?

(10, 33)=?
(7, 21)=?

8. dia

Vagyis vennünk kell a két szám prímtényezős felbontását, majd a prímfelbontásban szereplő közös prímtényezőket az előforduló legkisebb hatványon és ezeket kell összeszoroznunk. Ezek alapján hogyan számolhatnánk ki a 10 és 33 legnagyobb közös osztóját? Vegyük a prímtényezős felbontásokat: $10 = 2 \cdot 5$ és $33 = 3 \cdot 11$. A prímtényezős felbontás elkészítése a közös prímtényezőket kellene vennünk, de azok nincsenek, ezért a 10-nek és a 33-nak nincs legnagyobb közös osztója. Nézzük, hogy mi a helyzet a 7 és a 21 legnagyobb közös osztójával. A 21 prímtényezős felbontása $3 \cdot 7$, a 7 prím, így annak a tankönyvi tétel szerint nincs prímtényezős felbontása, Tehát a tankönyvi legnagyobb közös osztó meghatározási módszer szerint a 7-nek és a 21-nek sincs legnagyobb közös osztója.

Nézzük meg, hogy ha a tankönyvekben szereplő számelmélet alaptételét használjuk, akkor hogyan lehetne helyesen leírni a legnagyobb közös osztó meghatározásának módszerét. Ez a 9. dián látható.

1. Ha $a = 1$, akkor $(a, b) = 1$.
2. Ha $b = 1$, akkor $(a, b) = 1$.
3. Ha a prím és $a|b$, akkor $(a, b) = a$.
4. Ha a prím és $a \nmid b$, akkor $(a, b) = 1$.
5. Ha b prím és $b|a$, akkor $(a, b) = b$.
6. Ha b prím és $b \nmid a$, akkor $(a, b) = 1$.
7. Ha a és b is összetett szám, akkor vegyük a két szám prímtényezős felbontását:
 - a) - ha nincs közös prímtényezőjük, akkor $(a, b) = 1$.
 - b) - ha van legalább egy közös prímtényezőjük, akkor a közös prímtényezőket az előforduló legkisebb hatványon összeszorozzuk.

9. dia

Külön kellene tárgyalni azt az esetet, amikor az $a = 1$ és azt, amikor $b = 1$, mivel az 1-nek nincs prímtényező felbontása. Külön eset lenne az, amikor az a prím. Ilyenből kettő van, az egyik, amikor $a|b$, a másik pedig, amikor $a \nmid b$. Lehetne a b is prím, ami újabb két esetet jelent, mert lehet, hogy $b|a$ és lehet, hogy $b \nmid a$. Miután ezt a hat esetet megtárgyaltuk, rátérhetünk a hetedikre, amikor a és b is összetett szám, így meg tudjuk tenni a tankönyvek által leírt meghatározási módszer első lépését, és vehetjük a két szám prímtényező felbontását. Viszont ennek az esetnek két része van. Az egyik az, amikor nincs közös tényező, a másik pedig az, amikor van. A tankönyvekben leírt meghatározási módszer csupán a 7. eset b) részével foglalkozik.

Legkisebb közös többszörösénél hasonlóan kellene eljárunk az esetek felírásakor. Ha a tanulók a számelmélet alaptételénél nem tudnák megjegyezni azt, hogy kivéve az 1, akkor ezeket az eseteket meg tudják jegyezni?

Megkérdeztünk néhány tankönyvszerzőt arról, hogy mit gondolnak erről a kérdéskörrel. Közülük négyen (dr. Csátár Katalin, Fried Katalin, dr. Gerőcs László és Orosz Gyula) engedélyt is adtak arra, hogy ismertessük a véleményüket.

Dr. Gerőcs László tanár úr azt mondta, hogy pályafutása során nem érzékelte, hogy ez problémát okozna a tanulóknak. Feladatok kapcsán ugyanis előjönnek ezek a kérdések, és akkor tisztázásra kerülnek ezek a kérdések, hozzámondják a tanárok, hogy mi a helyzet ezekkel az esetekkel. Azt is hozzátette még, hogy a szorzás egy kétváltozós művelet és a diákokat összezavarná az egytényezős szorzat, épp úgy, mint az egytagú összeg. Azzal a szófordulattal is élt, hogy „*gyerekeket tanítunk, nem matematikát*”, ezért nem szabad túlzottan a precizításra törekedni.

Dr. Csátár Katalin tanárnő azt mondta, hogy egyszerűbb, ha így mondjuk ki a tételt. Ő nem szokott meghatározási módszert mondani a legnagyobb közös osztónál, hanem példákon keresztül szokta megtanítani diákjainak, hogy hogyan kell legnagyobb közös osztót számolni. Azzal is érvelt, hogy az egytényezős szorzat nem létezik a középiskolások számára. Amikor rákérdeztünk a korábban már említett a^1 és $1!$ esetére, akkor a permanencia-elvvel magyarázta ezeket és azt mondta, hogy ezek külön kerülnek definiálásra. Azt a kérdést még nem beszéltük meg a tanárnővel, hogy a számelmélet alaptételénél miért nem alkalmazhatjuk a permanencia-elvet.

Orosz Gyula tanár úrral több részletben beszélgettünk. Első beszélgetésünk, mikor megkérdeztük, hogy miért így mondják ki a tankönyvek a számelmélet alaptételét, akkor az kérdezte, hogy ez miért baj, majd gondolkodási időt kért. Második beszélgetésünk alkalmával azt mondta, hogy az egytényezős szorzat miatt van ez így, hiszen a tanulók számára egytényezős szorzat nem létezik. Megkértük arra is, hogy adjon módszert a legnagyobb közös osztó meghatározására, ekkor ismét időt kért. Harmadik beszélgetésünk alkalmával azt mondta, hogy igazunk van, és valóban jobb lenne, ha a tankönyvekben precízebben szerepelne a számelmélet alaptétele.

Fried Katalin tanárnő 7-8. osztályban csak elmondaná a számelmélet alaptételét és a legnagyobb közös osztóval kapcsolatos tudnivalókat és csak 9. osztályban mondaná ki a tételt és a meghatározási módszert, de akkor pontosan.

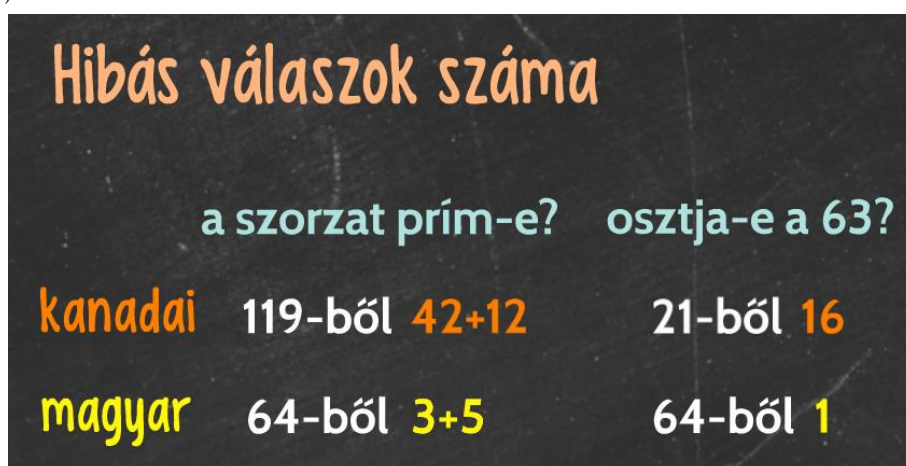
A tankönyvszerzőkkel való beszélgetések végkifejlete az volt, hogy meg kell találni az egyensúlyt az érthetőség és a matematikai precizitás között. Vásárhelyi Éva tanárnő és Vancsó Ödön tanár úr szavaival élve „*engedményeket kell tennünk a matematikai szabatosság rovására a tanulók fejlettségi szintjétől függően az érthetőség javára*”. A tankönyvszerzők végül egyetértettek abban, hogy jobb lenne, ha a tankönyvekben a számelmélet alaptételét kiegészítenénk azzal, hogy „*a prímszámok prímtényező felbontása önmaga*”. Fried Katalin és Orosz Gyula azonban azt is hozzátették, hogy a tankönyvek módosítása nagyon hosszú folyamat, ami több évig is eltarthat.

Most utazzunk el egy kicsit Kanadába, legalább gondolatban. Ott is végeztek egy számelmélettel kapcsolatos kutatást (Rina Zazkis - Peter Liljedahl, 2004), amiben végzős matematika tanár szakos hallgatóknak kellett megoldaniuk a 13. dián látható két feladatot.



13. dia

A kérdések nagyon egyszerűnek tűnnek, de nézzük az eredményeket. A 14. dián a hibás megoldások számát láthatjuk.



14. dia

A 119 megkérdezett végzős matematika tanár szakos kanadai hallgatóból 42-en válaszolták azt, hogy a szorzat prím. Ennek gyakori magyarázata volt, hogy $\text{prím} \cdot \text{prím} = \text{prím}$. Volt olyan hallgató is, aki kiszámolta, hogy mennyi $151 \cdot 157$, majd összeadta a kapott szám számjegyeit. Így 19-et kapott. Az általa ismert oszthatósági szabályok szerint megállapította, hogy a 19 nem osztható 2-vel, 3-mal és 5-tel sem, ezért prím, így a szorzás elvégzésével kapott szám is prím. A 42 hallgató mellett volt 12 olyan hallgató is, akik bár azt mondták, hogy a szorzat nem prím, de rosszul indokoltak. Voltak olyanok, akik összeszorozták a két számot, majd elkezdtek osztókat keresni. Ha nem voltak eléggé kitartóak, akkor a 42 hallgató közé kerültek, akik szerint a szorzat prím, viszont ha kitartóan próbálgatták az osztókat, akkor megtalálták a 151-et, így a 12 hallgató közé kerülhettek.

Ezek az eredmények igazán megdöbbentőek voltak számunkra, ezért 64 magyarországi elsőéves matematika szakos hallgatóval is megoldattuk ezeket a feladatokat. Közülük 3 hallgató mondta azt, hogy a szorzat prím, ők a $\text{prím} \cdot \text{prím} = \text{prím}$ indoklást alkalmazták. A megkérdezettek között 5

olyan hallgató volt, akik szerint a szorzat ugyan nem prím, de a kanadaiakhoz hasonlóan rosszul indokoltak.

A második feladat esetében a 21 megkérdezett kanadai hallgató közül 16-an válaszoltak rosszul a kérdésre. A jó megoldók pedig úgy indokoltak, hogy kiszámolták a szorzatot és elosztották 63-mal. Keveseknek jutott eszébe, hogy a 63-at írják fel prímek szorzataként, és úgy oldják meg a feladatot. A 64 magyarországi hallgató között 1 olyan volt, aki rossz választ adott erre a kérdésre.

Összességében elmondhatjuk, hogy nálunk ebben a kérdésben jobb a helyzet, mint Kanadában, de amikor egy mély szakadékban vagyunk, akkor már nem igazán számít, hogy milyen magas a fal, ha sehogy sem tudunk kimászni.

Irodalomjegyzék

- Ábrahám Gábor - dr. Kosztolányiné Nagy Erzsébet - Tóth Julianna. (2009). *Matematika 9*. Maxim Könyvkiadó.
- Ambrus Gabriella - Frenkel Andor - Kaposiné Pataky Krisztina - Mezei József - Papp Péter - dr. Szabadi László - Szász Antónia - Székely Péter - Szokol Ágnes - Tóth Attila - dr. Vancsó Ödön. (2003). *Matematika 9*. Ráció Könyvek.
- Ambrus Gabriella - Frenkel Andor - Mezei József - Nagyné Szokol Ágnes - Papp Péter - Pataky Krisztina - dr. Szabadi László - Szász Antónia - Székely Péter - Tóth Attila - dr. Vancsó Ödön. (2009). *Matematika 9*. Műszaki Kiadó.
- Czapáry Endre - Gyapjas Ferenc. (2001). *Matematika 9*. Nemzeti Tankönyvkiadó.
- Csányi Petra - Fábián Kata - Pozsonyi Enikő - Szabó Zsanett. (2014). *A számelmélet tanításának hatékonysága általános- és középiskolában*. Forrás: <http://www.cs.elte.hu/~csaba/tdk/tdk1szov.pdf>
- Csányi Petra - Pozsonyi Enikő - Szabó Zsanett. (2014). *Számelmélet tegnap és holnap*. Forrás: <http://www.cs.elte.hu/~csaba/tdk/tdk2szov.pdf>
- dr. Hajnal Imre. (1994). *Matematikai fogalmak, tételek*. Mozaik Oktatási Stúdió.
- Hajdu Sándor - Czeglédy István - Hajdu Sándor Zoltán - Kovács András - Róka Sándor. (2008). *Matematika 9*. Műszaki Könyvkiadó.
- Hajnal Imre - Számadó László - Békési Szilvia. (2001). *Matematika 9*. Nemzeti Tankönyvkiadó.
- Juhász István - Orosz Gyula - Paróczay József - Szászné-dr. Simon Judit. (2009). *Matematika 9*. Nemzeti Tankönyvkiadó.
- Kosztolányi József - Kovács István - Pintér Klára - Urbán János - Vincze István. (2005). *Sokszínű matematika 9*. Mozaik.
- László, F. K.-d.-S. (2009). *Matematika 9*. Nemzeti Kiadó.
- Mária, G. A.-H. (2005). *Készüljünk az érettségire matematikából*. Műszaki Könyvkiadó.
- Rina Zazkis - Peter Liljedahl. (2004). Understanding Primes: The Role of Representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 35, No. 3. 164-186.