

OTDK-dolgozat

Györkös Rita

2011

**A tanulási hatás figyelembevétele költségelemzésnél
és termékszerkezet vizsgálatnál**

**The application of learning curve at cost calculation
and product mix analysis**

Kézirat lezárása: 2010. december 27.

Tartalmi kivonat

A tanulási hatás figyelembevétele költségelemzésnél és termékszerkezet vizsgálatnál

Mindennapi életünkben is tapasztaljuk, hogy minél többször végzünk el egy feladatot, annál rövidebb idő alatt tudjuk azt végrehajtani. Az alapfolyamat megtanulásával és begyakorlásával csökken a feladat elvégzéséhez szükséges fajlagos idő. Ezt a tanulási folyamatot egy degresszív függvény írja le, melynek gyakorlati jelentőségét az 1950-es évek óta kutatják.

Ha nagy az élő munka aránya a gépi munka arányával szemben, akkor figyelembe kell venni a tanulási hatást a költségszámításnál és kapacitástervezésnél. Különösen igaz ez a gyártás kezdeti szakaszában, amikor a tanulási hatás fokozottan érvényesül. TDK dolgozatomban a tanulási hatás figyelembevételének lehetőségét vizsgáltam költségelemzésnél és termékszerkezet optimalizálásánál.

Az Árbevétel-Költség-Fedezet-Nyereség- (ÁKFN) modell egy jól ismert menedzseri eszköz, mely a vállalat költség- és árbevétel függvényeit, és a közöttük lévő kapcsolatot határozza meg. E modell segítségével vizsgálható a költségek, termelt és eladott mennyiségek, valamint az eladási árak változásának hatása az eredményre. A hagyományos ÁKFN-elemzésnél lineáris költség- és árbevétel-függvényeket használnak.

A tanulási hatást figyelembe vevő költségfüggvény a fajlagos gyártási idő csökkenése és ezáltal a fajlagos gyártási költség csökkenése miatt degresszív. A változó költségek csökkenése révén csökken az összköltség, emiatt csökken a kritikus mennyiség és nő a nyereség. Ennek vizsgálatára elkészítettem egy nemlineáris ÁKFN modellt.

Termékszerkezet meghatározásnál a tanulási hatást figyelembe vevő erőforráskorlátok és célfüggvények nemlineáris optimalizálási problémához vezetnek, amely gyakorlati méretű feladatoknál csak nehezen oldható meg. TDK dolgozatomban készítettem egy eljárást, mely a tanulási hatást figyelembe vevő függvényeket linearizálja. A linearizált modell eredménye jól közelíti a nemlineáris feladat megoldását, és lehetővé teszi az érzékenységvizsgálati eredmények számítását és felhasználását.

KULCSSZAVAK: tanulási görbe, költségelemzés, termékszerkezet

Abstract

The application of learning curve at cost calculation and product mix analysis

It is a general experience that if a task is performed repeatedly the unit performance time is decreasing. By learning and practicing a task or a process the production time per unit decreases. This learning process can be described by a degressive learning curve function. The shape and application of this curve is subject of researches since the 1950-ies.

In production processes, where the rate of human-paced labor is much higher than machine-paced labor the learning effect is worth considering by costing and capacity planning. Unit operation time decrease is especially important in the initial phase of production when the effect of learning is substantial. In this study I examined the possibility of taking the learning effect into consideration in cost analysis and in product mix optimization.

Cost-volume-profit (CVP) analysis is a well-known managerial tool that attempts to specify a firm's cost and revenue functions, and the resulting profit. CVP models are used to examine the effects of quantity change on profit. Traditional CVP analysis applies linear cost and revenue functions.

When the learning effect is considered, the cost function becomes degressive in shape because the production time per unit decreases and the production cost per unit decreases as well. The decrease of variable cost causes the decrease of total cost, consequently, break-even quantity decreases and profit increases. To examine the effect of learning on profit, a non-linear CVP model is presented.

If learning effect is considered at product mix optimization, nonlinear resource limits and nonlinear objective functions must be applied. The resulting nonlinear optimization problem is difficult to solve in case of practical size problems. In this work an approximation procedure is presented which linearises the nonlinear functions. The result of this new linear model approximates properly the solution of the nonlinear problem and makes the application of sensitivity analysis results possible.

KEYWORDS: learning curve, cost analysis, product mix

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Történelmi előzmény	2
3. A tanulási görbe karakterisztikája.....	3
3.1. Fajlagos idő modell (Unit Time- vagy Marginal Time Model).....	3
3.2. Kumulált tanulási görbe	7
3.3. Aggregált átlagos fajlagos idő modell (Cumulative Average Hours Per Unit Model, vagy Average-Time model).....	8
3.4. A tanulási görbe gyakorlati alkalmazásának korlátai	13
4. Ár-Költség-Fedezet-Nyereség- (ÁKFN) struktúra	14
4.1. A tanulási görbe alkalmazása az ÁKFN-struktúrában.....	15
4.2. Tanulási görbe használata az időszaki ÁFKN-elemzés finomításához	16
4.3. Nemlineáris költségfüggvényű ÁKFN-struktúra szemléltetése.....	18
5. Termékösszetétel optimalizálás	21
5.1. A termékszerkezet optimalizálása lineáris termelésstervezési modell esetén	21
5.2. A termékszerkezet optimalizálása a tanulási hatás figyelembevételével.....	24
5.3. Nemlineáris erőforráskorlátok közelítése lineárisal	26
6. Néhány megjegyzés a dolgozatban bemutatott modellekkel kapcsolatban	34
6.1. Eltérés a McIntyre és a dolgozatban szereplő modellek között	34
6.2. A szumma közelítése integrállal a kumulált tanulási görbe leírásánál	35
7. Összefoglalás	38
8. Irodalomjegyzék	40

Táblázatjegyzék

1. táblázat A tanulási ráta és a gépi munka arányának kapcsolata.....	6
2. táblázat Alapadatok.....	18
3. táblázat ÁKFN-struktúra.....	19
4. táblázat Fedezeti ponthoz tartozó kritikus mennyiség és árbevétel	19
5. táblázat Kétváltozós lineáris termelésstervezési modell bemeneti adatai	22
6. táblázat A kumulált tanulási görbe szummájának és integrálos közelítésének összehasonlítása.....	37

Ábrajegyzék

1. ábra A tanulási görbe eltérő tanulási ráták esetén.....	5
2. ábra A tanulási görbe logaritmikus skálán eltérő tanulási ráták esetén	6
3. ábra Kumulált tanulási görbe 0,7-es, 0,8-as és 0,9-es tanulási ráta esetén	8
4. ábra Logaritmikus skálán ábrázolt tanulási görbe lineáris fajlagos idő görbével	10
5. ábra Logaritmus skálán ábrázolt tanulási görbe lineáris aggregált átlagos fajlagos idő görbével.....	11
6. ábra ÁKFN-struktúra ábrázolása	14
7. ábra ÁFKN-struktúra ($p = 0,25$ eFt/db)	18
8. ábra ÁFKN-struktúra kinagyított kezdeti résszel ($p = 0,25$ eFt/db)	19
9. ábra Kétváltozós lineáris termelésstervezési modell grafikus ábrázolása	23
10. ábra Kétváltozós nemlineáris termelésstervezési modell grafikus ábrázolása	26
11. ábra x_1 és x_2 alsó és felső becslése	27
12. ábra Nemlineáris erőforráskorlát becslése átlagos integrálközépével	29
13. ábra Nemlineáris erőforráskorlát lineáris alsó becslése	30
14. ábra Hagyományos lineáris modell és tanulási hatást figyelembe vevő linearizált modell összehasonlítása két termék esetén.....	33
15. ábra A kumulált tanulási görbe szummájának és integrálos közelítésének összehasonlítása.....	36

1. BEVEZETÉS

Mindennapi életünkben is tapasztaljuk, hogy minél többször végzünk el egy feladatot, annál rövidebb idő alatt készülünk el vele. Megtanuljuk a feladat elvégzéséhez szükséges alapfolyamatot, majd begyakoroljuk azt, esetleg kidolgozunk egy hatékonyabb eljárást, ami megkönnyíti a dolgunkat és megkíméli az időnket.

Ez a tanulási folyamat vállalati szinten is jelen van. Termelés gazdaságtani kérdéseknél, ahol magas az élő munka aránya, a tanulási hatás a fajlagos gyártási idő csökkenésén keresztül jelentkezik. Ez két dolgot jelent. Egyrészt a gyártott mennyiség növekedésével csökken a fajlagos gyártási költség. Másrészt közvetetten nő az egy időszakra jutó kapacitás, mert azonos idő alatt többet tudunk gyártani.

Az Árbevétel-Költség-Fedezet-Nyereség- (ÁKFN) struktúránál a tanulási hatás a proporcionális költségekben okoz változást, és ezen keresztül kihat a fedezetre, illetve a nyereségre is.

Ha a tanulási hatást figyelembe vesszük termékszerkezet optimalizálásánál, megfigyelhetjük, hogy adott gépóra (és megfelelő mennyiségű alapanyag) rendelkezésre állása esetén tervezetten többet tudunk gyártani, amit a termékek fajlagos gyártási idejének csökkenése okoz.

A dolgozatomban ezt a két témakört vizsgáltam meg részletesebben.

2. TÖRTÉNELMI ELŐZMÉNY

A tanulási görbe jelenséggel kapcsolatban először Wright publikált tudományos értékű megállapításokat 1936-os cikkében (Wright, 1936), de figyelmet igazán csak a Második Világháború idején kapott, amikor a kormányzati beszállítók a háborúban felhasználni kívánt hajók és repülőgépek megépítésével kapcsolatos idő- és költségzsúrgók elörelzéséhez kerestek módszereket. (Yelle, 1979).

A repülőgépek gyártásánál azt tapasztalták, hogy az egy repülőgép megépítéséhez szükséges emberi munkaórák száma állandó ütemben csökkent a gyártott mennyiség függvényében. Ez a folyamatos javulás annyira általános volt a repülőgépiparban, hogy a háború idején már természetszerű elvárássá vált a repülőgépek tömeggyártásánál, és a teljesítéseket is ennek alapján tervezték. (Hirschmann, 1964).

Noha a tanulási görbe jelenségét a repülőgépiparon kívül több iparágban is megállapították, mégsem volt olyan széles körben elfogadott, s helyette továbbra is azonos szintű teljesítményt és állandó költséget feltételező elörelzésekkel számoltak. (Hirschmann, 1964)

3. A TANULÁSI GÖRBE KARAKTERISZTIKÁJA

A jelentések szerint a légierő ohioi Wright-Patterson bázisának parancsnoka figyelt meg először tanulási mintákat gyártási műveleteknél 1925-ben. (Reguero, 1957) A következő évek során készült repülőgépek összeszerelésével foglalkozó tanulmányok jellegzetes mintát mutattak: a negyedik géphez szükséges közvetlen munka csak a 80%-a volt a második gép elkészítéséhez szükséges munkának; a nyolcadik géppel a negyedik gép elkészítési idejének 80%-a alatt lettek készen; a századik repülőgép elkészítéséhez szükséges idő pedig az ötvenedik gép elkészítési idejének csupán 80%-át tette ki, és így tovább. Ennélfogva a repülőgépek összeszerelésének tanulási rátáját 80%-osnak állapították meg a gyártott mennyiség duplájára emelése esetén (Hirschmann, 1964).

Számos matematikai modellt használtak, annak leírására, hogy a dolgozóknak kevesebb időre van szükségük egy komplex feladat elvégzéséhez, miután jártasságot és tapasztalatot szereztek a munkához kapcsolódó készségekben. Ezeket a modelleket tipikusan *tanulási görbe modellek*nek hívjuk, noha a pusztán tanuláson kívül sok más tényező is felelős lehet a megfigyelt idő- és költségcsökkenésért. A termelés növeléséhez kapcsolódó fajlagos termelési idő csökkenés kifejezhető az utolsó vagy Q -adik darab elkészítési idejének csökkenésével, vagy a Q -adik darab kumulált átlagos idejének a csökkenésével (McIntyre, 1977).

A tanulási görbét kétféle időmodell segítségével szokták definiálni. A *fajlagos idő (unit time) modell* esetében a Q -adik darab elkészítéséhez szükséges időt mérik, és ezt ábrázolják, illetve ezzel számolnak. Az *aggregált átlagos fajlagos idő (cumulative average hours per unit)* modellnél viszont a Q -adik darabig elkészített összes darab (Q -t is beleértve) elkészítéséhez szükséges összes időt elosztják Q -val (= átlagos fajlagos idő), és ezzel az idővel számolnak (Conway és Schultz, 1959).

3.1. Fajlagos idő modell (Unit Time- vagy Marginal Time Model)

Ebben az esetben a *tanulási görbe* a következő matematikai függvénnyel írható le (Yelle, 1979; Conway és Schultz, 1959; Koltai, 2006):

$$Y_Q = a \cdot Q^b \qquad b \leq 0 \qquad (1)$$

ahol:

Q – az elvégzett feladat mennyisége (például legyártott termékek száma, feldolgozott ügyiratok száma, kiszolgált vevők száma stb.),

Y_Q – a feladat Q -adik végrehajtásához szükséges idő,

a – a feladat első végrehajtásához szükséges idő, vagyis $a = Y_1$.

$b = \frac{\log L}{\log 2} = \frac{\ln L}{\ln 2}$ – tanulási index, a végrehajtott feladatok számának növekedésével

összefüggő időcsökkenést leíró paraméter,

L – tanulási ráta,

$(1-L)$ – javulási arány.

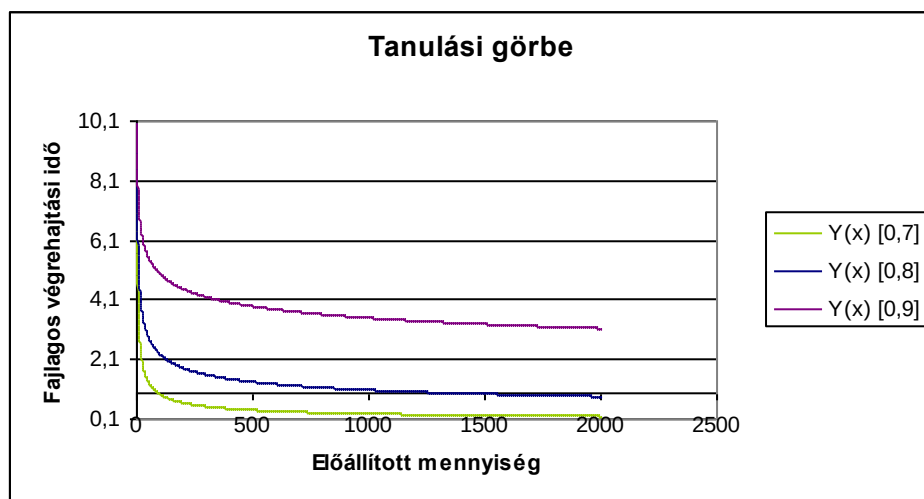
A gyakorlati életben inkább a tanulási ráta használata terjedt el, amely azt fejezi ki, hogy megduplázva a végrehajtott feladatok számát, hányad részére csökken a fajlagos végrehajtási idő. A tanulási ráta a következő összefüggés alapján számolható (Koltai, 2006):

$$L = \frac{Y_{2Q}}{Y_Q} = \frac{a \cdot [2Q]^b}{a \cdot [Q]^b} = 2^{-b} \quad (2)$$

A tanulási ráta segítségével a tanulási hatás 0 és 1 között mérhető, illetve szokás megadni százalékos formában is.

Az 1. ábrán három tanulási görbét látunk. A hozzájuk tartozó tanulási hatás rendre 70%, 80%, illetve 90%. Mindhárom esetben az első darab elkészítéséhez szükséges idő 10 időegység volt.

Megfigyelhető, hogy 70%-os tanulási ráta esetén a fajlagos időszükséglet nagyobb ütemben csökken, mint 90%-os tanulási ráta esetén, vagyis nagyobb mértékű a tanulás.



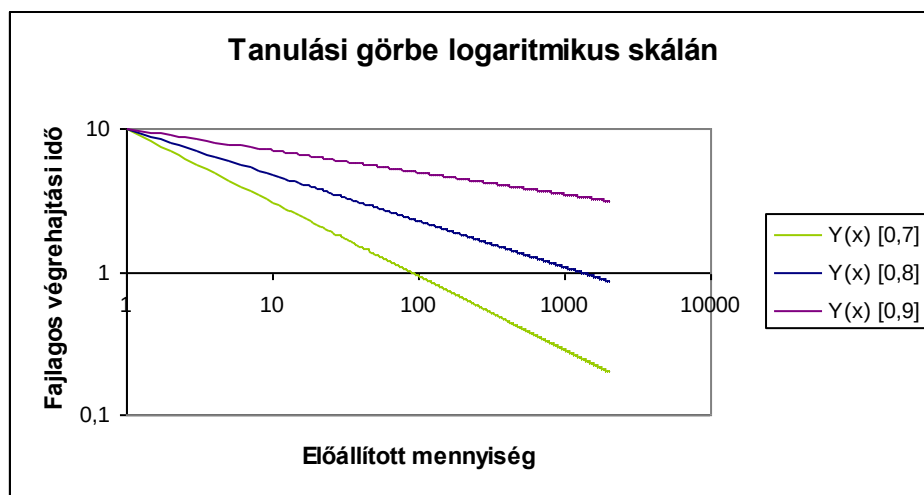
1. ábra A tanulási görbe eltérő tanulási ráták esetén
Forrás: saját

A tanulási ráta meghatározása a gyakorlatban kétféle módon történhet. Egyszerűbb esetben megméri, becslik vagy számolják egy feladat *első* és *z*-edik végrehajtási idejét, s az így kapott Y_1 és Y_z értékekből kiszámítják a , b , valamint L értékeit. Mivel azonban a két mérés alapján számított tanulási ráta pontatlan, a gyakorlatban több darab előállítási idejét méri, mely a következő adatsort adja: $[Q; Y_Q]$, $Q = 1, \dots, M$; ahol M a – nem feltétlenül egymást követő – munkadarabok összes száma (Koltai, 2006). A $[Q; Y_Q]$ pontokat logaritmusskálán ábrázolva, azok ideális esetben egy egyenes mentén helyezkednek el, ugyanis:

$$\ln \{Y\} = \ln \{a\} + b \cdot \ln \{Q\} \quad (3)$$

A mért adatokat logaritmus skálán ábrázolva és a pontokra lineáris regresszióval egy egyenest illesztve megkaphatjuk a és b becsült értékeit, a b segítségével pedig meghatározható a tanulási ráta (L) becsült értéke. (Koltai, 2006)

Míg lineáris koordináta-rendszerben az előállított mennyiség és a fajlagos végrehajtási idő kapcsolata egy görbét ad eredményül, mely gyors kezdeti csökkenés után később lassabban csökken (mint ahogy az az 1. ábrán is látható), addig mindez logaritmikus skálán ábrázolva egy negatív meredekségű egyenes (ld. 2. ábra), ami egy állandó csökkenési arányt fejez ki. Egy ilyen lineáris kapcsolatot könnyebb megrajzolni és előrejelzési célokra használni (Hirschmann, 1964).



2. ábra A tanulási görbe logaritmikus skálán eltérő tanulási ráták esetén
 Forrás: Yelle (1979) alapján saját

Noha a tanulási görbék igen eltérőek lehetnek a termékek különböző mértékű összetettsége miatt, a meredekségükben megfigyeltek emberi és gépi munka aránya szerinti jellegzetességeket. Ahol nagyobb az emberi munka aránya, ott a tanulási görbének is nagyobb a meredeksége, mivel a tanulás alapvetően emberekhez kötődő fogalom (Hirschmann, 1964). A repülőgépek különböző típusainál például, ahol az összes végrehajtandó munka háromnegyed része emberi munka (szerelés), a tanulási görbe rendre 80%-os volt a vizsgált esetekben.

A tanulási ráta és a gépi munka arányának kapcsolatát az 1. táblázat szemlélteti (Yelle, 1979):

1. táblázat A tanulási ráta és a gépi munka arányának kapcsolata

Gépi munka aránya (összes munka százalékában)	Tanulási ráta L	Fejlődési arány $1-L$
25%	80%	20%
50%	85%	15%
75%	90%	10%

Forrás: Yelle (1979) / Labor Learning vs. Machine Learning alfejezet

(A tanulási görbe meredeksége megadható *fejlődési (javulási) aránnyal* is, aminek értéke $1-L$.)

A tanulási görbe nem csak egy egyén teljesítményét írhatja le, hanem egy csoportét, szervezeti egységeket, illetve egy egész vállalatét is. A csoport sokszor nem is csak azokból az emberekből áll, akik közvetlenül, fizikailag előállítanak egy terméket, hanem azokból is, akik a háttérben a folyamatban rejtőző javítási lehetőségeket folyamatosan keresik, és munkájukkal segítik hatékonyabbá tenni az egyes műveleteket, vagy az egész folyamatot (Hirschmann, 1964). Emellett fontos azt is látni, hogy az egyéni vagy csoportos emberi tanuláson túl a technológiai fejlődés is egyfajta tanulás (Hirschmann, 1964).

A tanulási görbe logaritmikus skálán sem ad mindig folytonos egyenest. Lehetnek benne szakadások, törések, például aszerint, hogy:

- történtek-e a terméken (kisebb) változtatások,
- átköltöztették-e a részleget egy másik helyre,
- történt-e hosszabb idejű karbantartás miatti leállás,
- változott-e a csoportösszetétel.

Nem sokkal a művelet újrakezdése után, amikor az emberek megtanulták kezelni a változást, a tanulási görbe gyorsan csökken, mígnem eléri a régi meredekséget (Hirschmann, 1964).

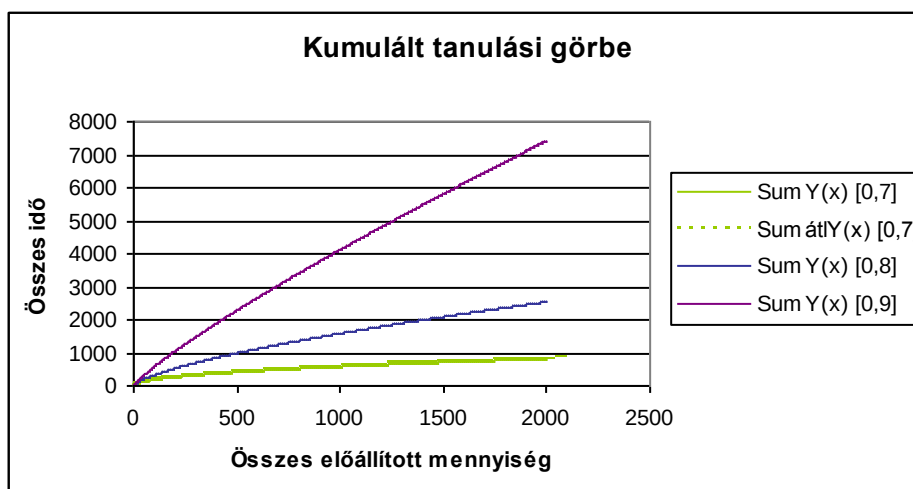
3.2. Kumulált tanulási görbe

A tanulási hatás következtében egy termék első száz darabjának az előállítása nyilvánvalóan nem ugyanakkora kapacitást köt le, mint a második száz darab elkészítése. Ezt a kapacitásszámításnál feltétlenül figyelembe kell venni. A tanulási hatást is figyelembevevő kapacitásigény meghatározását teszi lehetővé a *kumulált tanulási görbe*. Egy adott Q mennyiség legyártásához a tanulási hatást is figyelembe vevő összes idő a következő módon számítható:

$$T_{\text{összes}} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_Q = a \cdot 1^b + a \cdot 2^b + \dots + a \cdot Q^b = a \cdot \sum_{i=1}^Q i^b \quad (4)$$

Az összefüggésből látható, hogy a Q mennyiség legyártásához szükséges összes idő az első darab elkészítéséhez szükséges idő (a) és az első Q egész szám b -edik hatványának összege segítségével számolható. (Koltai, 2006)

A kumulált tanulási görbét 0,7-es, 0,8-as és 0,9-es tanulási ráta mellett a 3. ábra szemlélteti:



3. ábra Kumulált tanulási görbe 0,7-es, 0,8-as és 0,9-es tanulási ráta esetén
Forrás: saját

A kumulált tanulási görbénél nem számít, hogy a fajlagos idő modellt vagy az aggregált átlagos fajlagos idő modellt használjuk. Nem lényeges tehát, hogy az egyes darabok elkészítési idejét összegezzük, vagy az összes elkészítési idő egy egységre jutó idejét, azaz az átlagos időt vesszük alapul és ezzel számolva összegezzük az időket, mert a kettő ugyanazt az eredményt adja.

3.3. Aggregált átlagos fajlagos idő modell (Cumulative Average Hours Per Unit Model, vagy Average-Time model)

Az aggregált átlagos fajlagos idő modell (vagy átlagos-idő modell) azt feltételezi, hogy az aggregált átlagos fajlagos idő $1-L$ értékkel csökken minden egyes alkalommal, amikor a termelés megduplázódik. Másként megfogalmazva a kumulált átlagos fajlagos idő a termelés megkétszerezése előtti időnek L százaléka (McIntyre, 1977).

Az aggregált (vagy kumulált) átlagos idő a következőképpen határozható meg (Conway és Schultz, 1959):

$$\bar{Y}_Q = \frac{\sum_{i=1}^Q Y_i}{Q} \quad (5)$$

ahol:

$\bar{Y}_Q$ – az elsőtől a Q -adikig gyártott mennyiség átlagos fajlagos ideje.

Y_i – a feladat i -edik végrehajtásához szükséges idő.

Az (5) összefüggésbe behelyettesítve a fajlagos idő (1) egyenletét a következő összefüggést kapjuk (Conway és Schultz, 1959):

$$\bar{Y}_Q = \frac{a}{Q} \sum_{i=1}^Q i^b = \frac{Y_1}{Q} \sum_{i=1}^Q i^b \quad b \leq 0 \quad (6)$$

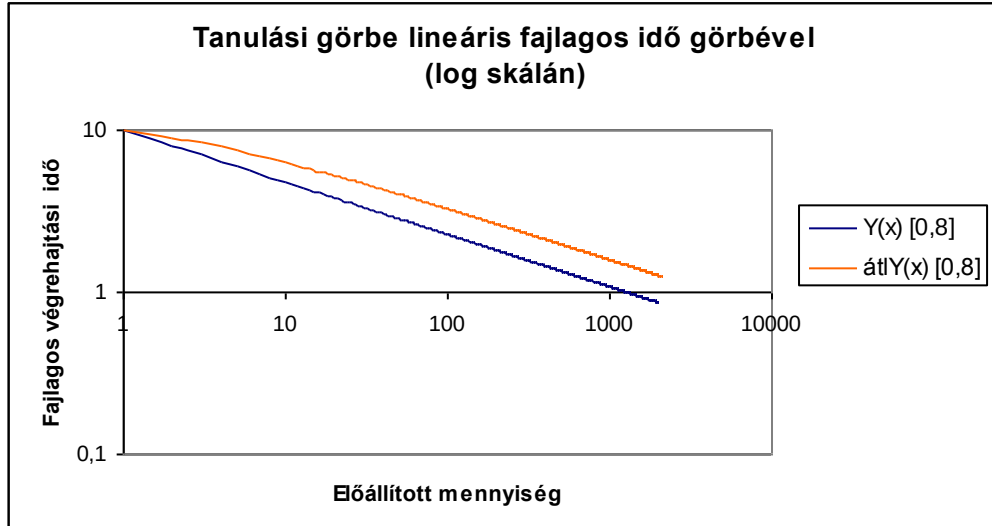
Mivel ez az összegzés Q nagy értékeinél nehezen számolható, kényelmesebb az összeget egy integrállal közelíteni (Conway és Schultz, 1959), tehát:

$$\bar{Y}_Q \approx \frac{Y_1}{Q(1+b)} \left[\left(1 + \frac{1}{2}\right)^{1+b} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1+b} \right] \quad (7)$$

Az aggregált átlagos logaritmikus skálán ábrázolt görbe aszimptotikusan párhuzamos a logaritmikus skálán ábrázolt fajlagos idő görbével, ezért nagy Q (>100) értékek esetén a következő egyszerű kapcsolat használható (Conway és Schultz, 1959):

$$\bar{Y}_Q \approx \frac{Y_1}{(1+b)} Q^b \quad (8)$$

A 4. ábra a fajlagos és aggregált átlagos görbéket mutatja logaritmikus skálán a 2. ábrához tartozó adatokkal 80%-os tanulási hatás mellett.



4. ábra Logaritmikus skálán ábrázolt tanulási görbe lineáris fajlagos idő görbével
 Forrás: Conway és Schultz (1959) alapján saját

Az ábrán jól látható, hogy az aggregált átlagos fajlagos időt ábrázoló görbe ($\text{át}Y(x)$ [0,8]) végig a fajlagos idő egyenese ($Y(x)$ [0,8]) fölött halad az átlagolás simító hatásának következtében.

Sokan gondolják úgy, hogy az aggregált átlagos fajlagos idő változására igaz a fajlagos időre feltételezett exponenciális csökkenés (Conway és Schultz, 1959), tehát:

$$\bar{Y}_Q = a \cdot Q^b = Y_1 \cdot Q^b \quad b \leq 0 \quad (9)$$

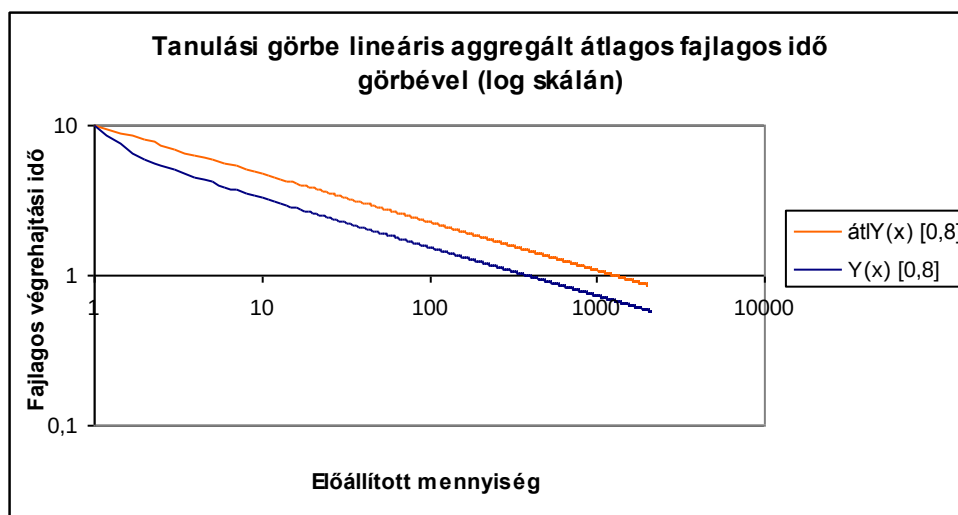
Ebben az esetben a fajlagos időt a következőképpen kapjuk meg (Conway és Schultz, 1959):

$$Y_Q = Q\bar{Y}_Q - (Q-1)\bar{Y}_{Q-1} = Y_1 [Q^{b+1} - (Q-1)^{b+1}] \quad (10)$$

Ez logaritmikus skálán nem egy lineáris kapcsolat, de aszimptotikusan párhuzamos a logaritmikus skálán ábrázolt aggregált átlagos fajlagos idő görbével. Nagy Q (>20) értékek esetén a következő egyszerű kapcsolat használható (Conway és Schultz, 1959):

$$Y_Q \sim \bar{Y}_Q(1+b) = Y_1 \cdot Q^b(1+b) \quad (11)$$

Az 5. ábra az aggregált átlagos fajlagos idő ($\bar{Y}(x)$ [0,8]) és a fajlagos idő ($Y(x)$ [0,8]) görbéket mutatja a 2. ábrához tartozó adatokkal 80%-os tanulási hatás mellett a (11) formulát használva. Megfigyelhető, hogy a fajlagos idő ebben az esetben is alacsonyabb, mint az aggregált átlagos fajlagos idő.



5. ábra Logaritmus skálán ábrázolt tanulási görbe lineáris aggregált átlagos fajlagos idő görbével
Forrás: Conway és Schultz (1959) alapján saját

Az aggregált átlagos fajlagos idő modell előbbi, (9)-es egyenletben látható alakja (amit a fajlagos idő modellnél is használunk) a következőképpen származtatható (McIntyre, 1977): minden alkalommal, amikor a kumulált termelés megkétszereződik, az átlagos fajlagos idő a megelőző átlagos fajlagos idő $L\%$ -ára csökken. Ez a folyamat egyszerűen leírható az alábbi egyenlettel, ahol m azt jelöli, hogy a termelés hányszor kétszereződött meg, tehát

$$\bar{Y} = a \cdot L^m \quad (12)$$

A kumulált termelés (Q) a következőképpen fejezhető ki:

$$Q = 2^m \quad (13)$$

A (13)-as egyenletet m -re megoldva és (12)-be behelyettesítve a következő összefüggést kapjuk:

$$\bar{Y} = a \cdot L^{\log Q / \log 2} \quad (14)$$

A (14)-es egyenlet mindkét oldalának a logaritmusát véve:

$$\log \bar{Y} = \log a + (\log Q / \log 2) \cdot \log L \quad (15)$$

b -t behelyettesítve $\log L / \log 2$ helyére, a következő egyenletet kapjuk:

$$\log \bar{Y} = \log a + b \cdot \log Q \quad (16)$$

Végül, a logaritmus függvény szigorú monotonitása miatt az egyenletet átalakítva a tanulási görbének a korábban ismertetett alakjához jutunk:

$$\bar{Y} = a \cdot Q^b = Y_1 \cdot Q^b \quad (17)$$

Az aggregált átlagos fajlagos idő modellben L kizárólag a $0,5 < L < 1$ tartományba eshet, ugyanis $L = 1$ esetén nincs tanulás, $L = 0,5$ esetén pedig az összes idő ugyanannyi marad, míg a termelés továbbra is kétszereződik, ami nyilvánvalóan képtelenség (McIntyre, 1977).

Mivel egyik modell támogatói sem tudják álláspontjukat logikai úton alátámasztani, és a tapasztalatok sem igazolják egyik alternatíva felsőbbrendűségét sem, így leginkább a számítási kényelem dönti el, hogy melyik modellt használják a gyakorlatban. Mivel a két görbe nagy gyártási mennyiségeknél párhuzamos, a különbség csak a termelés kezdő szakaszában fontos, ezért sok alkalmazásnál nem lényeges, hogy melyik görbe használatát választjuk (Conway és Schultz, 1959).

3.4. A tanulási görbe gyakorlati alkalmazásának korlátai

A tanulási görbe gyakorlati alkalmazásának természetesen vannak korlátai. Ezek közül a legjelentősebbek (Koltai, 2006):

- Nehéz megbecsülni az első darab elkészítésének idejét.
- Kérdés, hogy ami igaz egyetlen munkásnak egy gépnél tapasztalható tanulására, az milyen mértékben vetíthető ki egy egész szervezeti egységre, például egy szerelősorra.
- Régebben gyártott termék során felhalmozódott „tanulás” milyen mértékben vehető figyelembe később, ha közben mást is gyártottunk.

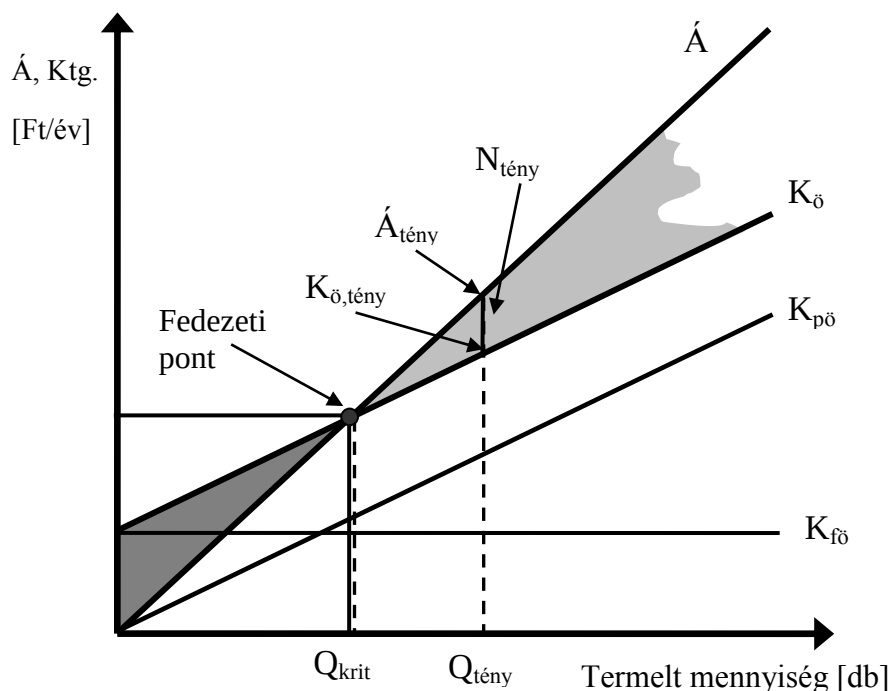
Mindezek ellenére az 1930-as években népszerűvé vált tanulási görbe újabban ismét előtérbe kerül. Ennek egyik oka, hogy a vevőorientált gyártó- és kiszolgálórendszereknél egyre gyakoribb a kis sorozatú gyártás. A tanulási görbe alakjából látható, hogy éppen a kezdeti szakaszban (új termék kis sorozatú gyártása) van jelentősége a tanulásnak. Továbbá, az egyre komplexebbé váló termékek és szolgáltatások előállításakor kétségtelen szerepe van a tanulási hatásnak. Összefoglalva tehát megállapíthatjuk, hogy ott, ahol az emberi és szervezeti tanulás hatása feltételezhető, a tanulási hatás figyelembevételével a rendelkezésre álló kapacitásról pontosabb kép kapható, mint annak elhanyagolásakor. (Koltai, 2006)

4. ÁR-KÖLTSÉG-FEDEZET-NYERESÉG- (ÁKFN) STRUKTÚRA

A költség-volumen-eredmény-elemzés egyik fő célkitűzése, hogy a termelt mennyiség megváltozásának az eredményre és a költségstruktúrára gyakorolt hatását kimutassa. (Kövesi (szerk.), 2007)

A vállalati eredményt az árbevétel ($\hat{A}$) és az összes költség ($K_{\hat{o}}$) különbsége adja. Ha az eredmény előjele pozitív, nyereségről (N), ha negatív, veszteségről beszélünk. Ezen elemzés során a költségeket a reagálás szerint szétbontjuk, így az árbevételből külön levonjuk az összes proporcionális költséget ($K_{p\hat{o}}$), azaz a termelt mennyiséggel arányosan változó költségeket, majd levonjuk az összes fix költséget ($K_{f\hat{o}}$), a vállalat kiépítettségére jellemző, a termeléstől függetlenül fellépő költségeket. Eredményül ugyanazt a nyereséget kapjuk, mint az összes költség levonása után, de most már meg tudjuk ítélni, hogy a vállalati eredmény hogyan függ a termelési mennyiség megváltozásától. Az így felépített gazdasági számítást nevezzük Árbevétel-Költség-Fedezet-Nyereség- (ÁKFN)-struktúrának, ahol a fedezet (F) az árbevétel és az összes proporcionális költség különbsége ($F = \hat{A} - K_{p\hat{o}}$). (Kövesi (szerk.), 2007)

Az ÁKFN-struktúrát grafikusán a 6. ábra szemlélteti.



6. ábra ÁKFN-struktúra ábrázolása
Forrás: Kövesi (szerk.) (2007)

A költségek ($K_{\delta} = K_{\delta\bar{o}} + K_{p\delta}$) egyenese a fix költségből indul, és a fajlagos proporcionális költség meredekségével nő. Az árbevétel az origóból indul, és a termék egységárának megfelelő meredekséggel nő. Ha nyereséget akarunk, akkor az árbevétel egyenesének meredekebben kell nőnie, mint a költségek egyenesének, azaz a terméket magasabb egységáron kell eladni, mint a fajlagos (egy termékre eső) proporcionális költség. Hogy legyen miből kifizetni a fix költségeket, a fedezetnek pozitívnak kell lennie. Az ábrán bejelölt fedezeti pontban az árbevétel éppen megegyezik a költségekkel, azaz a nyereség ott éppen nulla. A fedezeti pont előtt az árbevétel kisebb, mint az összes költség, tehát veszteséges a termelés, a fedezeti pont után azonban már nyereségről beszélhetünk. A fedezeti pontban a nyereség nulla, tehát a fedezettömeg éppen fedezi a fix költségeket. Innen ered a „fedezet” elnevezés: amíg el nem érjük a fedezeti pontot, addig a fedezet a fix költségeket fedezi, felette pedig már nyereséget képez. (Kövesi (szerk.), 2007)

A fedezeti ponthoz tartozó termelési volument *kritikus termelési volumennek* (Q_{krit}) nevezzük. Minden tevékenységnél fontos tudni, hogy az éppen aktuális „munkapont”, a ténylegesen termelt mennyiség ($Q_{tény}$) hol helyezkedik el a kritikus termelési volumenhez képest, milyen pozitív, vagy negatív távolságra fekszik a fedezeti ponttól.

A vállalat gazdasági sajátosságait jól mutatja az ÁKFN-struktúra, segítségével elemezhetjük a termékmennyiség változásának hatását a nyereségre. (Kövesi (szerk.), 2007) A hagyományos ÁKFN-elemzésnél *lineáris* költség- és árbevétel függvényeket alkalmaznak. A lineáris költségfüggvények használata többek között azt feltételezi, hogy a vállalat emberi erőforrása vagy egy homogén csoport, vagy állandó összetételű homogén alcsoportok összessége, és a teljes termelt mennyiség lineárisan változik a látszólag felcserélhető munkaegységek növekedésével vagy csökkenésével (McIntyre, 1977).

4.1. A tanulási görbe alkalmazása az ÁKFN-struktúrában

Amikor a gyártásban új termék vagy konstrukció jelenik meg, amely munkaigényes és összetett dolgozói készséget igényel, a tanulás fontos tényezővé válik, és a korábbi feltételezések, melyek igazak voltak a hagyományos, lineáris ÁKFN-modellnél, már nem fogadhatók el. Még bevezetett termékeknél sem igazolható a linearitás, ha magas a fluktuáció és az összetett munkafeladatokat meg kell tanulniuk az új dolgozóknak (McIntyre, 1977).

Az ÁKFN-elemzésnél a tanulási görbe modellek hasznosak lehetnek függetlenül attól, hogy egy vállalat *projekt-* vagy *időszakos* rendszerben működik. *Projektek* esetén, ahol meghatározott számú terméket gyártanak, a tanulási görbe segítségével javítani lehet a projekt profitjára, illetve a fedezeti ponthoz tartozó mennyiségre vonatkozó becsléseket. Olyan esetekben, ahol az eladás meghatározatlan hosszú időszakon keresztül folytatódik, az új termékek esetén a tanulási görbe használata pontosíthatja az időszaki nyereségre és fedezeti pontra vonatkozó becsléseket a tanulási folyamat alatt és után (McIntyre, 1977). Noha mindkettő irányvonal fontos, a dolgozatomban elsősorban az időszakos rendszerben végzett tevékenységek ÁKFN struktúrájának vizsgálatával foglalkozom.

4.2. Tanulási görbe használata az időszaki ÁKFN-elemzés finomításához

A továbbiakban változatlanul érvényesek az ÁKFN-elemzés szokásos feltevései, azzal a kiegészítéssel, hogy a költségfüggvényeket (az összes proporcionális költséget és ezáltal az összes költséget) *nemlineárisnak* tételezzük fel. A nemlinearitás oka a tanulási hatás. Egy olyan terméknél tehát, amelynél feltételezzük a korábban megismert $\bar{Y} = a \cdot Q^b$ tanulási görbét, az első időszakra vonatkozó nyereség-egyenlet a következőképpen írható fel:

$$N = \acute{A} - K_{p\ddot{o}} - K_{f\ddot{o}} = \acute{A} - K_{p,lin} - K_{p,nemlin} - K_{f\ddot{o}} \quad (18)$$

$$N = p \cdot Q - r \cdot Q - c \cdot \bar{Y} \cdot Q - K_{f\ddot{o}} \quad (19)$$

ahol:

N – a nyereség,

$\acute{A}$ – az árbevétel,

$K_{p\ddot{o}}$ – az összes proporcionális költség,

$K_{f\ddot{o}}$ – az összes fix költség,

$K_{p,lin}$ – az összes proporcionális költség *lineáris* függvénnyel leírható része (esetünkben például a közvetlen anyagköltség),

$K_{p,nemlin}$ – az összes proporcionális költség *nemlineáris* függvénnyel leírható része (esetünkben a munkaidővel kapcsolatos költségek). A tanulási hatás ezen a tagon keresztül érvényesül.

p – egységár,

r – fajlagos közvetlen anyagköltség,

c – munkaidő egységnyi költsége,

Q – elvégzett feladat mennyisége (pl. legyártott termékek száma),

$\bar{Y}$ – az elsőtől a Q -adikig gyártott összes termék esetén az átlagos fajlagos gyártási idő.

$\bar{Y}$ -t helyére a (9) összefüggést írva, a következő egyenlethez jutunk:

$$N = p \cdot Q - r \cdot Q - c \cdot a \cdot Q^{b+1} - K_{f\ddot{o}} \quad (20)$$

ahol:

a – a feladat első végrehajtásához szükséges idő,

$b = \frac{\log L}{\log 2} = \frac{\ln L}{\ln 2}$ – a tanulási index, vagy tanulási faktor, a végrehajtott feladatok

számának növekedésével összefüggő időcsökkenést leíró paraméter,

L – tanulási ráta.

A (20)-as egyenletben szereplő b tanulási index olyan tényező, amely az idő múlásával (termelési mennyiség növekedésével) állandó munkaerőt feltételezve csökkenti az átlagos termelési költséget. A (20)-as egyenletben a fajlagos átlagos gyártási idő állandó ütemben csökken, ami arra utal, hogy a munkánál alkalmazott emberi csoport együttesen, egy egységgént fejlődik, és halad a tanulási görbe mentén (McIntyre, 1977).

A következő fejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy a tanulási hatás hogyan hat a proporcionális költségre és ezzel az összes költségre, továbbá hogyan befolyásolja a fedezeti pontot és a nyereség mértékét. Elemezzük tehát a tanulási ráta változtatásának az ÁFKN-struktúrára gyakorolt hatását.

4.3. Nemlineáris költségfüggvényű ÁFKN-struktúra szemléltetése

Szemléltetésül tekintsünk egy vállalatot („A” vállalat), amely adott időszakban 400 db terméket gyárt ($Q = 400$ db) 0,25 eFt-os egységár mellett ($p = 0,25$ eFt/db).

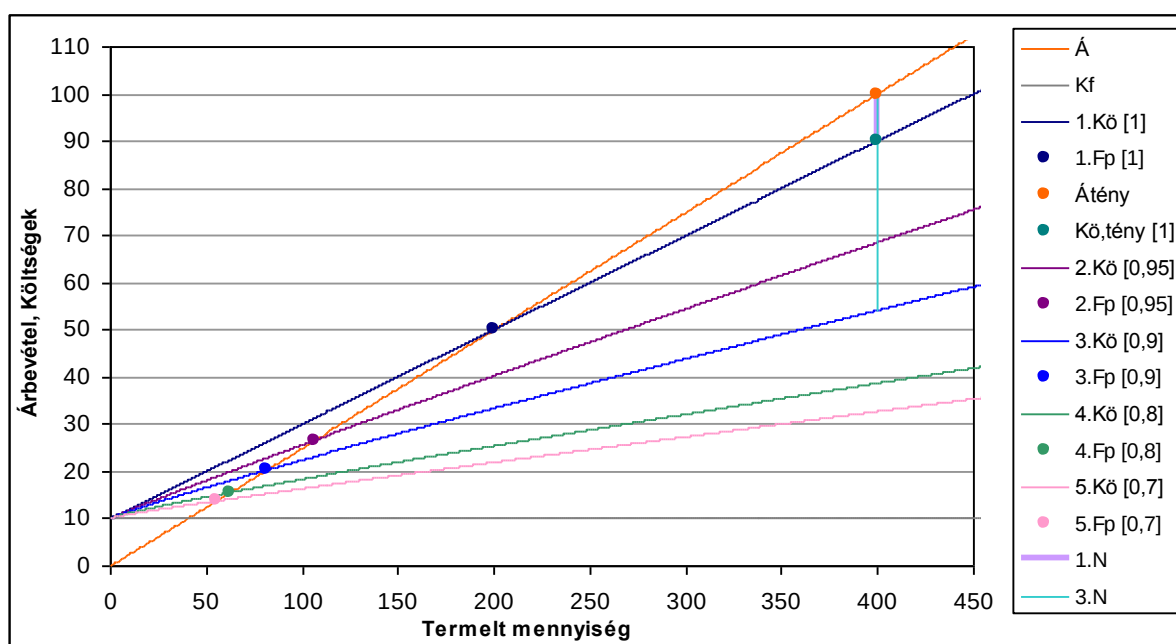
A 2. táblázat a korábbi jelöléseket felhasználva a 7. és 8. ábrához tartozó alapadatokat mutatja. Vizsgáljuk meg, hogy különböző tanulási hatásokat feltételezve hogyan változik a kritikus mennyiség és ezáltal a nyereség mértéke.

2. táblázat Alapadatok

		1	2	3	4	5
Q	[db]	400	400	400	400	400
p	[eFt]	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
$a \cdot c$	[eFt]	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15
r	[eFt]	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
L	[-]	1	0,95	0,9	0,8	0,7

Forrás: saját

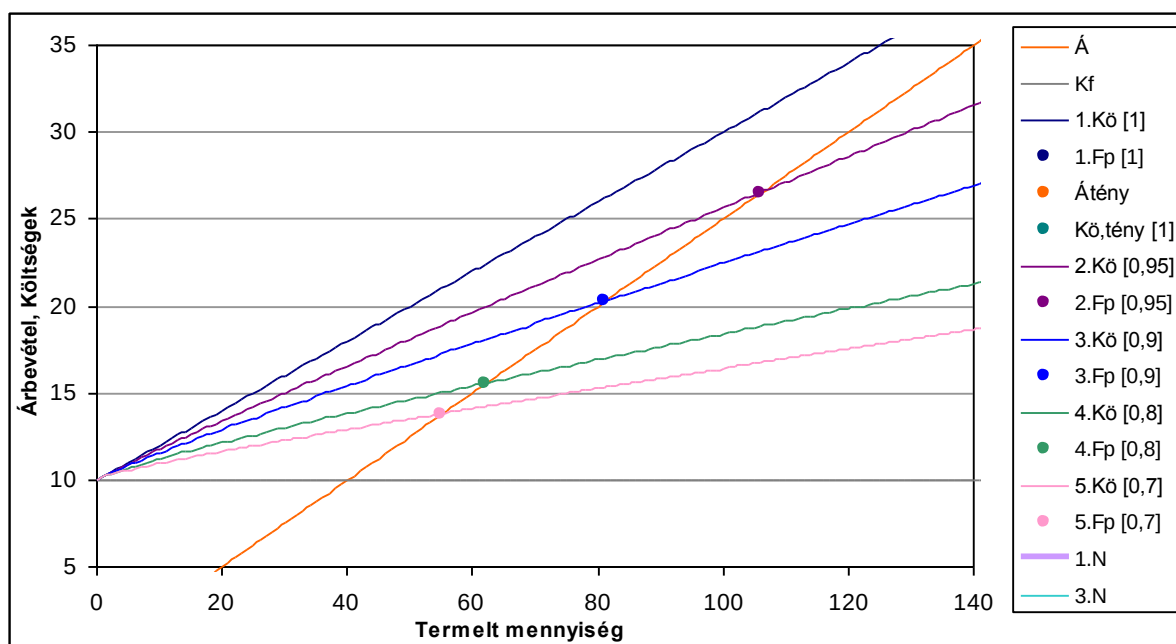
A 7. és 8. ábrákon jól látható, hogy ha van tanulási hatás, az összes költség (a proporcionális költség csökkenése miatt) jelentősen csökken. Minél kisebb a tanulási ráta értéke, vagyis minél nagyobb a tanulás mértéke, annál nagyobb mértékben csökken az összes költség.



7. ábra ÁFKN-struktúra ($p = 0,25$ eFt/db)

Forrás: saját

A kinagyított ábrán (8. ábra) az is jól látszik, hogy ha nincsen tanulás, vagyis $L = 1$, akkor a változó költség függvény linearitása miatt az összes költség függvény *lineáris* (ez felel meg a korábban ismertetett hagyományos modellnek), viszont ha $L < 1$, tehát van valamilyen mértékű tanulás, akkor a változó költség függvény, és így az összes költség függvény is *degresszív*.



8. ábra ÁFKN-struktúra kinagyított kezdeti résszel ($p = 0,25$ eFt/db)

Forrás: saját

3. táblázat ÁFKN-struktúra

		1	2	3	4	5
Á	[eFt]	100	100	100	100	100
$K_{pö}$	[eFt]	80	58,51	44,13	28,72	22,75
F	[eFt]	20	41,49	55,87	71,28	77,25
$K_{fö}$	[eFt]	10	10	10	10	10
N	[eFt]	10	31,49	45,87	61,28	67,25

Forrás: saját

4. táblázat Fedezeti ponthoz tartozó kritikus mennyiség és árbevétel

		1	2	3	4	5
Q_{krit}	[db]	200	106	81	62	55
$\bar{A}_{krit}$	[eFt]	50	26,5	20,25	15,5	13,75

Forrás: saját

A 8. ábrán is látszik és a 3. táblázat és 4. táblázatokból is kiolvasható, hogy a tanulási hatás miatti költségcsökkenés következtében jelentősen csökken a fedezeti ponthoz

tartozó kritikus mennyiség, és vele együtt az árbevétel kritikus szintje is, ezáltal többszörösére nő a nyereség. Fontos tehát figyelembe venni az ÁKFN elemzésnél a tanulási hatást, mert lényegesen befolyásolja az eredményt és az ÁKFN vizsgálatokra épülő vezetői döntéseket.

5. TERMÉKÖSSZETÉTEL OPTIMALIZÁLÁS

A termelékösszetétel optimalizálási modelleknél a tanulási hatás befolyásolja a gyártott mennyiség kapacitásigényét, valamint a gyártási költséget. Ezek figyelembevételének lehetőségét vizsgáljuk a következő fejezetben.

5.1. A termékszerkezet optimalizálása lineáris termeléstervezési modell esetén

Tekintsük az alábbi nagyon egyszerű termékösszetétel meghatározási feladatot, amelynél egyetlen időszakban kell eldönteni, hogy a gyártott két termékből mekkora mennyiség készüljön (Koltai, 2006). Célunk, hogy az összes leggyártott termék hozama, melyet a termékek fajlagos fedezetével mérünk, a lehető legnagyobb legyen. Az 1-es termék fajlagos fedezete 180 Ft/db, gyártott mennyisége $X_1 \geq 0$. A 2-es termék fajlagos fedezete 290 Ft/db, gyártott mennyisége $X_2 \geq 0$.

Az összes fajlagos fedezetet maximalizáló célfüggvény a következőképpen írható fel:

$$\text{Max}(180X_1 + 290X_2) \quad (21)$$

Mindkét termék gyártásához két erőforrásra van szükség. A termékek egy darabjának gyártásához szükséges erőforrásigényt gépóraban mérjük. Az erőforrásokra vonatkozó erőforráskorlát egyenletek a következők:

$$X_1 + X_2 \leq 1200 \quad (22)$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 1600 \quad (23)$$

További korlátot jelent az egyes termékekből kötelezően gyártandó minimális és eladható maximális mennyiség. Az 5. táblázat „Piaci korlátok” részének adatait felhasználva a következő további négy feltételt fogalmazhatjuk meg:

$$X_1 \geq 200 \quad (24)$$

$$X_1 \leq 2000 \quad (25)$$

$$X_2 \geq 100 \quad (26)$$

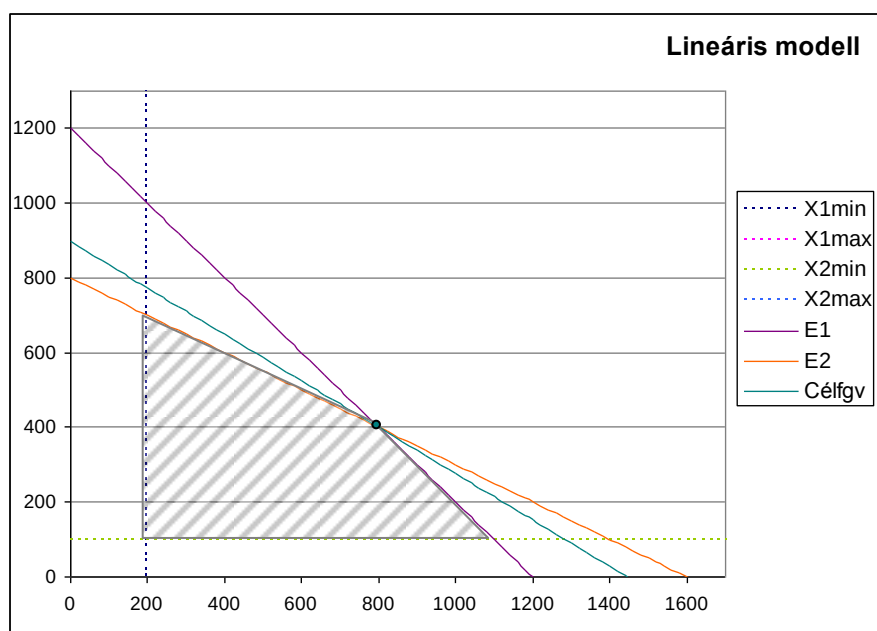
$$X_2 \leq 2000 \quad (27)$$

A fenti két változót és - a nemnegativitási feltételeket is figyelembe véve - hat feltételt tartalmazó termelésstervezési feladat *lineáris*, optimális megoldását az $X_1 = 800$ db/időszak és $X_2 = 400$ db/időszak értékek adják. A célfüggvény optimális értéke a következőképpen számolható: $180 \cdot 800 + 290 \cdot 400 = 260\,000$ Ft/időszak. Az alapadatokat az 5. táblázat foglalja össze. A feladat optimális megoldását pedig a 9. ábra szemlélteti.

5. táblázat **Kétváltozós lineáris termelésstervezési modell bemeneti adatai**

Termékadatok:	Termék1 (T1)	Termék2 (T2)	
Közvetlen anyagköltséggel csökkentett egységár (w) [Ft]	1180	1290	
Első db gyártási ideje (a) [gépóra]	2	3	
Munkaidő egységköltsége (c) [Ft]	500	333,33	
Termék-erőforrás mátrix (gó/1.db):	a_1 (gó/1.db)	a_2 (gó/1.db)	E_j (gó/időszak)
Erőforrás1 (E_1)	1	1	1200
Erőforrás2 (E_2)	1	2	1600
Piaci korlátok (db/időszak):	X_1 (db/időszak)	X_2 (db/időszak)	
Minimális mennyiség (x_{min})	200	100	
Maximális mennyiség (x_{max})	2000	2000	
Célfüggvényegyütthatók (Ft/1.db):			
Fajlagos fedezet (f) [Ft/első db]	180	290,01	

Forrás: saját



9. ábra Kétváltozós lineáris termelésstervezési modell grafikus ábrázolása

Forrás: saját

A bevonalkázott terület jelöli a feladat *megengedett*, minden korlátozó feltételt kielégítő *megoldásainak* halmazát. Ezen pontok közül kell kiválasztani azt (vagy azokat), amelyhez tartozó gyártandó mennyiségek maximalizálják a célfüggvényt.

A feladat a következőképpen írható fel általánosan:

$$\text{Max} \sum_{i=1}^n f_i \cdot x_i = \text{Max} \sum_{i=1}^n (p_i - r_i - a_i \cdot c_i) \cdot x_i = \text{Max} \sum_{i=1}^n (w_i - a_i \cdot c_i) \cdot x_i \quad (28)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x_i \leq E_j \quad (29)$$

ahol:

f_i – az i termék fajlagos fedezete, vagyis az ár és a proporcionális költség különbsége, ami lineáris esetben: $f_i = p_i - r_i - a_i \cdot c_i = w_i - a_i \cdot c_i$,

p_i – az i termék egységára,

r_i – az i termék közvetlen anyagköltsége,

w_i – az i termék közvetlen anyagköltséggel csökkentett egységára,

a – gyártási idő, ezen belül: a_i – az i termék gyártási ideje, valamint a_{ij} – az i termék gyártási ideje a j erőforráson,

c_i – az i termék egységnyi idejére eső (bér)költség,

x_i – az i termékből gyártott mennyiség, $x_i \geq 0$,

E_j – a j erőforrás kapacitása.

5.2. A termékszerkezet optimalizálása a tanulási hatás figyelembevételével

Ha a célfüggvényénél és az erőforráskorlátoknál figyelembe vesszük az időnek a mennyiségtől függő változását, vagyis a tanulási hatást, akkor a következő egyenletrendszerhez jutunk:

Célfüggvény:

$$\text{Max} \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i - \sum_{i=1}^n r_i x_i - \sum_{i=1}^n \left[c_i a_i \sum_{k=0}^{x_i} k^{b_i} \right] \right) \quad (30)$$

$$\text{Max} \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i - \sum_{i=1}^n \left[c_i a_i \sum_{k=0}^{x_i} k^{b_i} \right] \right) \quad (31)$$

Feltételek:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \sum_{k=0}^{x_i} k^{b_{ij}} \leq E_j \quad (32)$$

Ahol:

i - termékindex ($i = 1, \dots, n$)

j - erőforrások indexe ($j = 1, \dots, J$)

x_i - az i termékből gyártott mennyiség, $x_i \geq 0$

k - azt jelzi, hogy az i termékből hányadik gyártott darabról van szó ($k = 0, \dots, x_i$)

b_{ij} - az i termék tanulási rátája a j erőforráson

c_i - az i termék egységnyi idejére eső (bér)költség

a_i - az i termék első darabjának összes gyártási ideje

a_{ij} - az i termék első darabjának gyártási ideje a j erőforráson.

Nyilvánvaló, hogy $\sum_{j=1}^J a_{ij} = a_i$.

E_j - a j erőforrás kapacitása.

A kumulált tanulási görbe szummáját az egyszerűbb számíthatóság érdekében integrállal közelítjük:

$$\sum_{k=1}^{x_i} k^{b_i} \approx \int_0^{x_i} k^{b_i} dk = \left[\frac{1}{b_i + 1} k^{b_i + 1} \right]_0^{x_i} = \frac{1}{b_i + 1} [k^{b_i + 1}]_0^{x_i} = \frac{x_i^{b_i + 1}}{b_i + 1} \quad (33)$$

A (33) közelítő képletet beírva a (31) célfüggvénybe és a (32) kapacitásfeltételekbe a következő nemlineáris optimalizációs problémát kapjuk:

Célfüggvény:

$$\text{Max} \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i - \frac{1}{b_i + 1} \sum_{i=1}^n [c_i a_i x_i^{b_i + 1}] \right) \quad (34)$$

Feltételek:

$$\frac{1}{b_{ij} + 1} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i^{b_{ij} + 1} \leq E_j \quad (35)$$

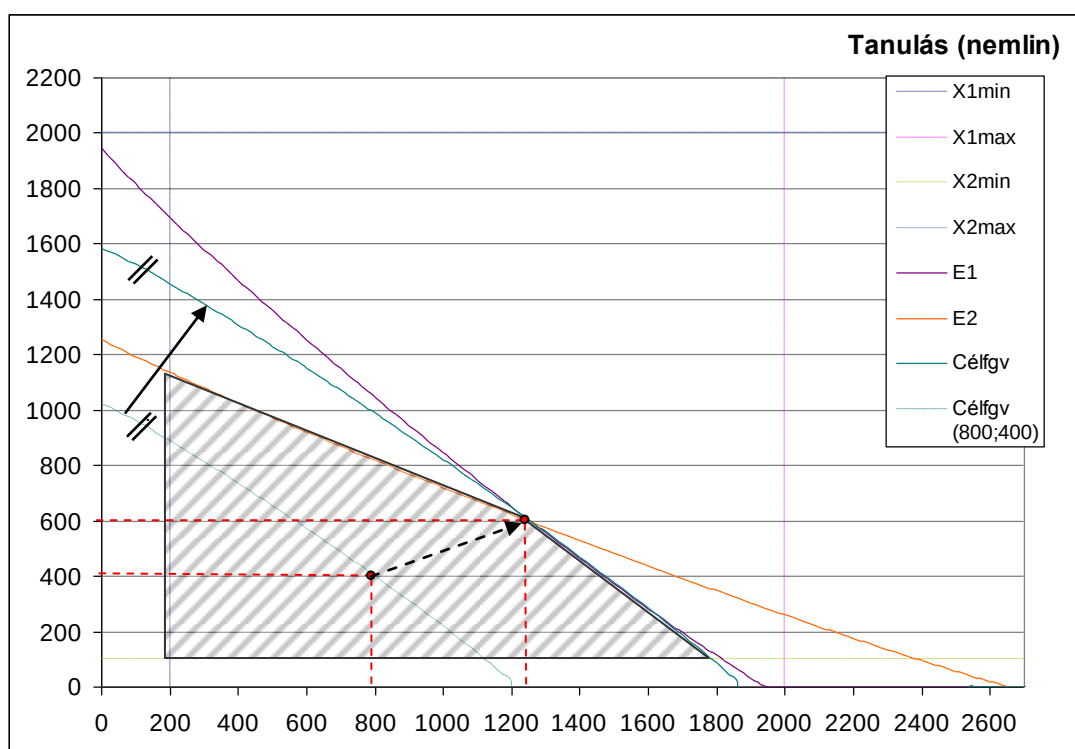
A (34) és (35) egyenletekből látható, hogy míg az árbevétel lineáris, addig a proporcionális költség munkaidővel, illetve bérköltségek összefüggő része és a kapacitásfelhasználás nemlineárisak. Vagyis a tanulási hatás figyelembevételével a feladat egy *nemlineáris* optimalizálási problémához vezet.

Az 5. táblázat adatait alapul véve, 95%-os tanulási ráta mellett a lineáris függvények grafikus ábrázolása a 10. ábra szerint módosul.

Az erőforráskorlátok képe az origótól nézve konvexszé válnak a tanulási hatás következtében. Ennek oka az, hogyha csak egyik vagy csak másik terméket gyártjuk, akkor a gyártott termék átlagos fajlagos gyártási ideje jóval alacsonyabb, mintha mindkettő termékből sokat, aránylag egyenlő mértékben gyártunk. Utóbbi esetben ugyanis a tanulási hatásból adódó fajlagos gyártási idő csökkenésének mértéke kisebb, vagyis az átlagos fajlagos gyártási idő magasabb lesz az egyes termékek esetében.

Ezzel szemben a két termékre eső fajlagos fedezet akkor a legkedvezőbb (legmagasabb), ha a két termék fajlagos gyártási költsége, átlagos fajlagos gyártási ideje együttesen a lehető legalacsonyabb, ezért a célfüggvény konkáv.

A 10. ábrán jól látható, hogy a tanulási hatás figyelembevételével megnőtt a megengedett megoldások halmaza (bevonalkázott terület), vagyis az egyes termékekből többet tudunk gyártani adott feltételek mellett a lineáris modellhez képest. Az optimális termékszerkezet (800;400)-ról körülbelül (1260;595)-re változott. Ez azonban csak grafikusan sejthető, az erőforráskorlátok elhelyezkedéséből a célfüggvény manuális eltolása révén becsülhető, ugyanis az *Excel Solver* ebben a nemlineáris esetben nem tud optimumot számolni, mert a függvények nem konvergálnak az optimális értékhez.



10. ábra Kétváltozós nemlineáris termelésstervezési modell grafikus ábrázolása

Forrás: saját

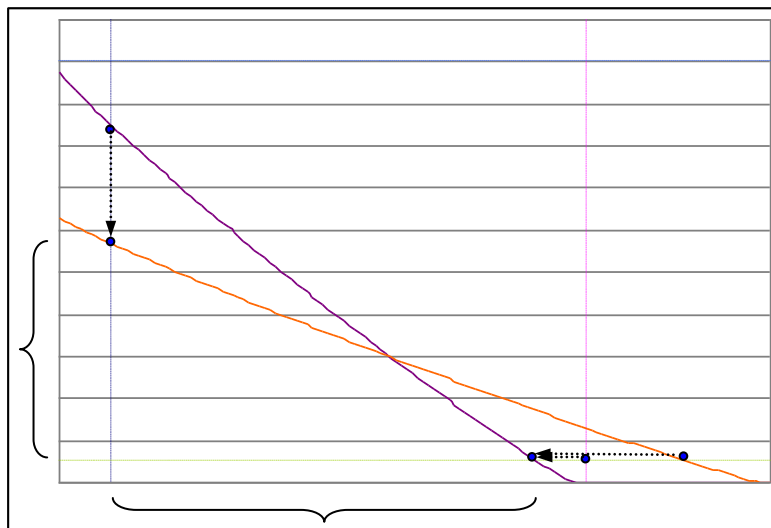
5.3. Nemlineáris erőforráskorlátok közelítése lineárisal

Mivel a fenti nemlineáris feladat nem oldható meg hagyományos optimalizálási módszerekkel, ugyanakkor sem az erőforráskorlátok sem a célfüggvény görbültsége nem jelentős mértékű, megoldást jelenthet ezen függvények lineáris közelítése. Ez egy új lineáris programozási feladat megfogalmazását jelenti.

A lineáris közelítéshez használjuk az átlagos fajlagos gyártási időket (a_i^{atl}).

Az eljárás menete a következő:

- Adjunk felső becslést x_i -re úgy, hogy a lehetséges felső korlátok közül (piaci- és erőforráskorlátok) a legkisebbet vesszük ($x_i^{\max}$), az alsó határt pedig vegyük nullának ($x_i^{\min} = 0$). (ld. 11. ábra)



11. ábra x_1 és x_2 alsó és felső becslése

Forrás: saját

- Az alsó és felső határ között keressük meg az átlagos integrálközeget ($x_{ij}(a_{\text{átl}})$), melynek értéke a következőképpen számolható ki:

$$x_{ij}(a_{\text{átl}}) = \frac{1}{x_i^{\max}} \cdot \int_0^{x_i^{\max}} k^{b_{ij}} dk \quad (36)$$

$$x_{ij}(a_{\text{átl}}) = \frac{1}{x_i^{\max}} \cdot \left[k^{b_{ij}+1} \right]_0^{x_i^{\max}} \quad (37)$$

$$x_{ij}(a_{\text{átl}}) = \frac{x_{i,\max}^{b_{ij}+1}}{x_i^{\max} \cdot (b_{ij} + 1)} \quad (38)$$

Az $x_{ij}(a_{\text{átl}})$ azt az értéket jelenti, amellyel a megfelelő a -t (első darab gyártási idejét) megszorozva megkapjuk az átlagos fajlagos gyártási időt ($a_{ij}^{\text{átl}}$). A megfelelő a a célfüggvény esetében az i termék első darabjának előállításához szükséges idő. Tehát az i termékből gyártott első munkadarabnak az egyes és kettes erőforráson együttesen eltöltött ideje. Az erőforráskorlátok esetében az i termékből gyártott első munkadarabnak a j erőforráson eltöltött ideje a_{ij} , tehát:

$$a_{ij}^{\text{átl}} = a_{ij} \cdot x_{ij}(a_{\text{átl}}) \quad (39)$$

Ennek következtében a célfüggvény és az erőforráskorlátok az alábbiak szerint módosulnak:

Célfüggvény:

$$\text{Max} \left(\sum_{i=1}^n \left(\left(w_i - \sum_{j=1}^J a_{ij} \cdot \frac{x_{i,\text{max}}^{b_{ij}+1}}{x_i^{\text{max}} \cdot (b_{ij} + 1)} \cdot c_i \right) \cdot x_i \right) \right) \quad (40)$$

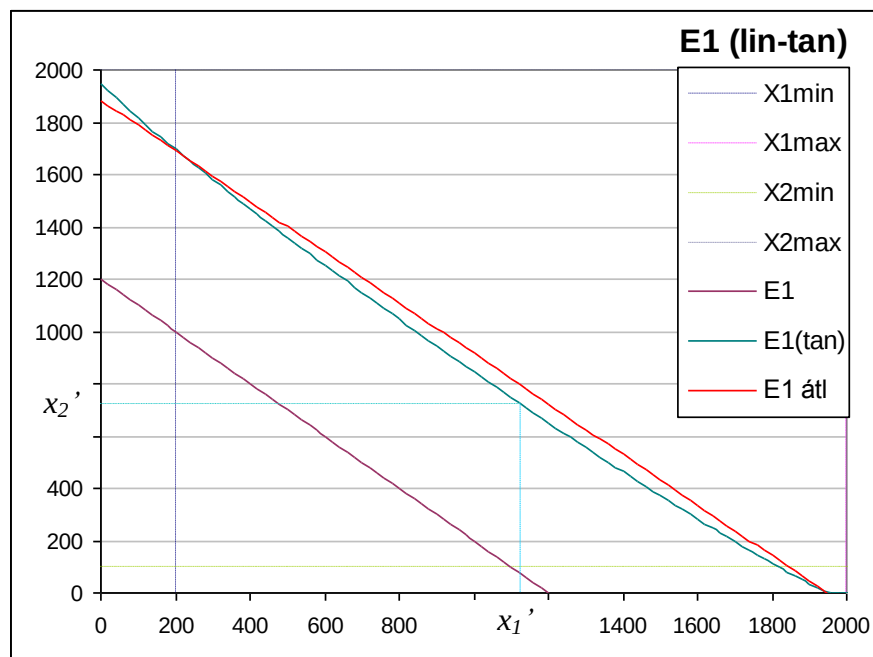
$$\text{Max} \left(\sum_{i=1}^n \left(\left(w_i - \sum_{j=1}^J a_{ij}^{\text{átl}} \cdot c_i \right) \cdot x_i \right) \right) \quad (41)$$

$$\text{Max} \left(\sum_{i=1}^n (f_i^{\text{átl}} \cdot x_i) \right) \quad (42)$$

Feltételek ($E_j^{\text{átl}}$):

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \frac{x_{i,\text{max}}^{b_{ij}+1}}{x_i^{\text{max}} \cdot (b_{ij} + 1)} \cdot x_i \leq E_j \quad (43)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}^{\text{átl}} \cdot x_i \leq E_j \quad (44)$$

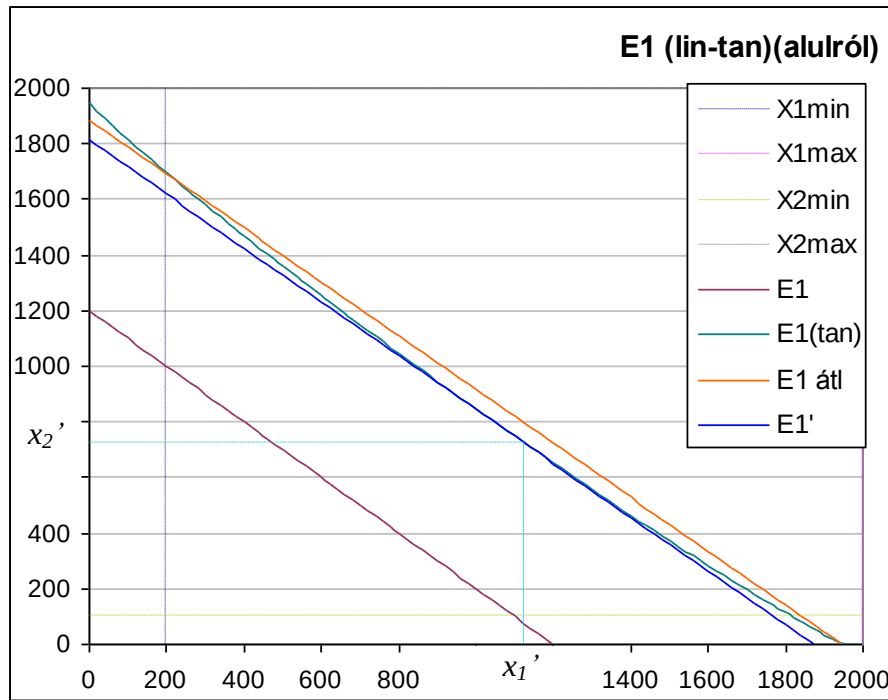


12. ábra Nemlineáris erőforráskorlát becslése átlagos integrálközépével

Forrás: saját

A 12. ábrán látható, hogy a tanulási hatást figyelembe vevő nemlineáris feladat átlagos fajlagos gyártási idővel való lineáris közelítése az erőforráskorlát nagy részén felső becslést ad a gyártható mennyiségekre vonatkozóan (a 12. ábrán az „ $E1\ átl$ ” egyenes majdnem végig az „ $E1(tan)$ ” görbe fölött halad). Ez azt jelenti, hogy ennyit biztosan nem tudunk gyártani adott tanulási ráta és meghatározott feltételek esetén.

Erre a problémára a következő megoldást javasoljuk: az „ $E1\ átl$ ” egyenest toljuk el az „ $E1\ átl$ ” egyenessel párhuzamosan lefelé úgy, hogy az „ $E1(tan)$ ” görbét alulról érintse, vagyis áthaladjon a görbe minimumpontján. Esetünkben tehát az (x_1', x_2') ponton kell áthaladnia az egyenesnek, amint azt a 13. ábra szemlélteti. A másik erőforráskorlát esetében is hasonlóan járunk el, majd az így keletkezett, minimálisan és maximálisan gyártandó mennyiségekre vonatkozó korlátokat is figyelembe vevő megoldástérben keressük meg a linearizált célfüggvény optimumát.



13. ábra Nemlineáris erőforráskorlát lineáris alsó becslése

Ez a megoldás több szempontból is jó. Egyrészt a feladat lineáris marad, ezért hagyományos módszerekkel megoldható. Másrészt figyelembe veszi a tanulási hatást, ugyanakkor alsó becslést ad, tehát az így kapott termékmennyiségek legyárthatóak.

Az eljárás matematikai leírása:

A tanulási hatást is figyelembe vevő j erőforráskorlát képlete két termékre ($E_j^{\tan}$):

$$a_{1j} \cdot \frac{x_1^{b_{1j}+1}}{b_{1j}+1} + a_{2j} \cdot \frac{x_2^{b_{2j}+1}}{b_{2j}+1} \leq E_j \quad (45)$$

$E_j^{\tan}$ x_2 -re rendezve:

$$x_2 = \left(\left(E_j - \frac{a_{1j} \cdot x_1^{b_{1j}+1}}{b_{1j}+1} \right) \cdot \frac{b_{2j}+1}{a_{2j}} \right)^{\frac{1}{b_{2j}+1}} \quad (46)$$

x_2 -re rendezett $E_j^{\tan}$ (a tanulási hatást figyelembe vevő nemlineáris j erőforráskorlát görbéjének) x_1 szerinti deriváltja:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{a_{1j}}{a_{2j}} \cdot x_1^{b_{1j}} \left(\frac{b_{2j}+1}{a_{2j}} \cdot \left(E_j - \frac{a_{1j} \cdot x_1^{b_{1j}+1}}{b_{1j}+1} \right) \right)^{\frac{1}{b_{2j}+1}-1} \quad (47)$$

x_2 -re rendezett $E_j^{\acute{a}tl}$ (vagyis a felső becslést adó erőforráskorlát egyenesének x_2 -re rendezett alakja):

$$x_2 = -\frac{a_{1j}^{\acute{a}tl}}{a_{2j}^{\acute{a}tl}} \cdot x_1 + \frac{E_j}{a_{2j}^{\acute{a}tl}} \quad (48)$$

Tegyük egyenlővé $E_j^{\tan}$ deriváltját és $E_j^{\acute{a}tl}$ meredekségét. Ebből az összefüggésből megkapjuk x_1' -t, az $E_j^{\tan}$ minimumához tartozó x_1 -es értéket.

$$-\frac{a_{1j}}{a_{2j}} \cdot x_1^{b_{1j}} \left(\frac{b_{2j}+1}{a_{2j}} \cdot \left(E_j - \frac{a_{1j} \cdot x_1^{b_{1j}+1}}{b_{1j}+1} \right) \right)^{\frac{1}{b_{2j}+1}-1} = -\frac{a_{1j}^{\acute{a}tl}}{a_{2j}^{\acute{a}tl}} \rightarrow x_1' \quad (49)$$

x_1' -t $E_j^{\tan}$ -ba behelyettesítve megkapjuk x_2' -t.

$$x_2' = \left(\left(E_j - \frac{a_{1j} \cdot (x_1')^{b_{1j}+1}}{b_{1j}+1} \right) \cdot \frac{b_{2j}+1}{a_{2j}} \right)^{\frac{1}{b_{2j}+1}} \quad (50)$$

x_1' és x_2' az $E_j^{\tan}$ minimumához tartozó koordináták, ahová a linearizált erőforráskorlátot ($E_j^{\acute{a}tl}$) el akarjuk tolni. x_1' -t és x_2' -t $E_j^{\acute{a}tl}$ -ba beírva megkapjuk E_j' -t, a

j erőforrásnak azt a maximális értékét, amely mellett az E_j^{atl} egyenes végig kisebb-egyenlő, mint az E_j^{tan} görbe.

$$E_j' = a_{1j}^{atl} \cdot x_1' + a_{2j}^{atl} \cdot x_2' \quad (51)$$

E_j^{atl} képletébe E_j helyére E_j' -t beírva megkapjuk az (x_1', x_2') érintőpontba eltolt $E_j^{atl'}$ egyenes képletét (ábrán EL'):

$$E_j' = a_{1j}^{atl} \cdot x_1 + a_{2j}^{atl} \cdot x_2 \quad (52)$$

A hagyományos lineáris modell és tanulási hatást figyelembe vevő linearizált modell összehasonlítását két termék esetén, az 5. táblázat adatait felhasználva, $L = 0,95$ -ös tanulási ráta mellett a 14. ábra szemlélteti.

Az ábrán jól látható a megnövekedett megoldástér, és leolvasható akár grafikusan is az optimális megoldás. Eredeti mintapéldánk, a tanulási hatást is figyelembe vevő, de linearizált feltételek és célfüggvény esetén a következőképpen írható fel:

Linearizált erőforráskorlátok:

$$E_1^{atl'}: \quad 0,617X_1 + 0,637X_2 \leq 1151,901 \quad (53)$$

$$E_2^{atl'}: \quad 0,617X_1 + 1,274X_2 \leq 1529,881 \quad (54)$$

Piaci korlátok:

$$200 \leq X_1 \leq 2000 \quad (55)$$

$$100 \leq X_2 \leq 2000 \quad (56)$$

Linearizált célfüggvény:

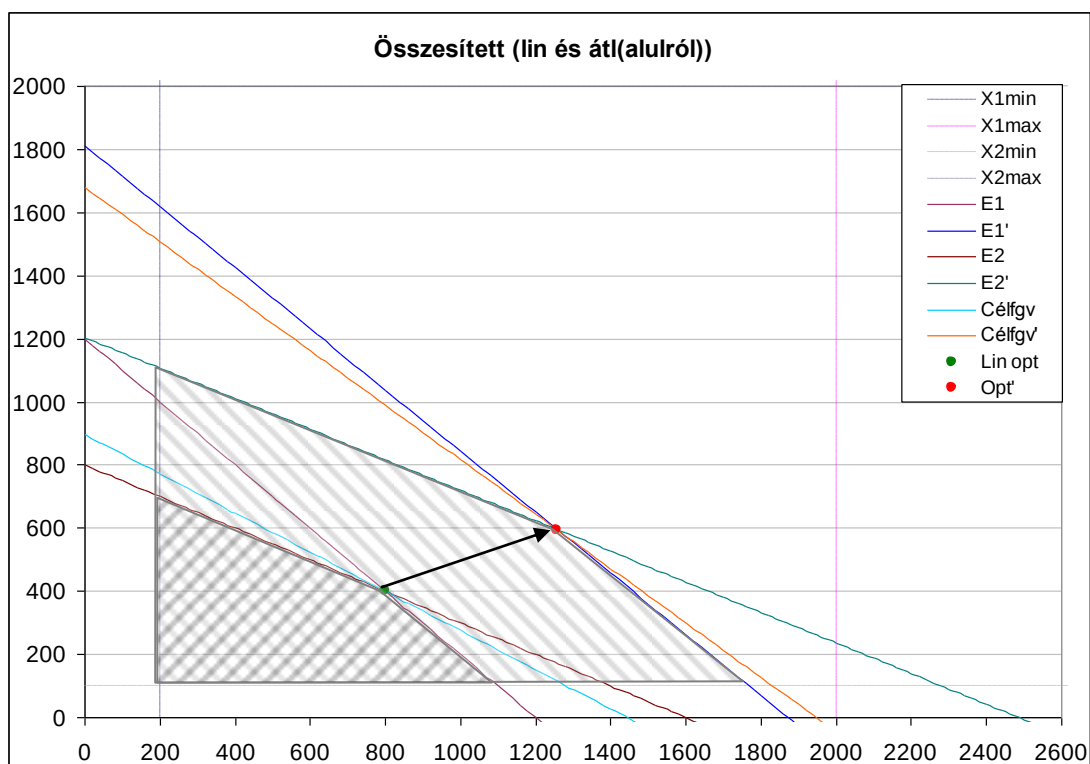
$$CF': \quad \text{Max}(563,47 X_1 + 653,19 X_2) \quad (57)$$

A feladat optimális megoldása a következő: $x_1 = 1255,28$ db, $x_2 = 593,55$ db.

A célfüggvény optimális értéke a következőképpen számolható:

$$563,47[\text{Ft/db}] \cdot 1255,28[\text{db}] + 653,19[\text{Ft/db}] \cdot 593,55[\text{db}] = 1\,095\,012 [\text{Ft/időszak}]$$

Ezen értékek a 14. ábrán is jól láthatóak.



14. ábra Hagyományos lineáris modell és tanulási hatást figyelembe vevő linearizált modell összehasonlítása két termék esetén

Forrás: saját

6. NÉHÁNY MEGJEGYZÉS A DOLGOZATBAN BEMUTATOTT MODELLEKKEL KAPCSOLATBAN

A tanulási hatás termelésmenedzsmentben időcsökkenéshez kapcsolódó fogalom, egy feladat elvégzéséhez szükséges idő csökkenését veszi figyelembe az elvégzett feladat mennyiség növekedésének függvényében. A tanulási hatás figyelembevétele miatt jelentkező költségcsökkenés tehát a fajlagos ráfordított munkaidő csökkenésén, ezáltal a fajlagos bérköltség csökkenésén keresztül ragadható meg. Vagyis a fenti modellek egyike sem foglalkozik minőséggel kapcsolatos kérdésekkel vagy selejtaránnyal, selejtarány csökkenéssel.

A bemutatott modellek több egyszerűsítést tartalmaznak: feltételezik, hogy a vizsgált időszak alatt az azonos termék minden darabját azonos áron értékesítik, valamint a termékhez szükséges alapanyagokat azonos áron szerzik be. Továbbá a modellek feltételezik azt is, hogy az azonos időegységre vetített bérköltség is változatlan marad a vizsgált időszakban. A modellek tehát nem számolnak proporcionális vagy növekmény jellegű árkedvezménnyel, illetve túlórával és az azzal járó többletköltséggel. A következőkben részletesen vizsgáljuk néhány közelítés hatását az eredményre.

6.1. Eltérés a McIntyre és a dolgozatban szereplő modellek között

E. V. McIntyre cikkében szereplő nemlineáris ÁKFN-modell (McIntyre, 1977) a következőképpen írható le:

$$N = \bar{A} - K_{p\ddot{o}} - K_{f\ddot{o}} = p \cdot Q - c \cdot \bar{Y} \cdot Q - K_{f\ddot{o}} \quad (58)$$

A dolgozatomban szereplő nemlineáris ÁKFN-modell ((18) és (19) összefüggések) a következő:

$$N = \bar{A} - K_{p\ddot{o}} - K_{f\ddot{o}} = \bar{A} - K_{p,lin} - K_{p,nemlin} - K_{f\ddot{o}} \quad (59)$$

$$N = p \cdot Q - r \cdot Q - c \cdot \bar{Y} \cdot Q - K_{f\ddot{o}} \quad (60)$$

Mint látható, E. V. McIntyre cikkével szemben, a dolgozatomban két részre bontottam az összes proporcionális költséget: egy *lineáris* és egy *nemlineáris* részre. A lineáris rész jelenti az idővel nem összefüggő proporcionális költségeket, például a közvetlen anyagköltséget. Noha elképzelhető, hogy a gyártás folyamán a fajlagos

közvetlen anyagköltség valamilyen mértékben csökken, pl. a tapasztalatszerzéssel járó „biztonsági ráhagyás” csökkenése miatt, de ezt a csökkenést a dolgozatomban elhanyagolhatónak veszem, emiatt a közvetlen anyagköltséget lineárisnak tekintem.

Az összes proporcionális költség nemlineáris részét a bérköltség adja. A tanulási hatás miatt a fajlagos gyártási idő a mennyiség növekedésével csökken, ezért a fajlagos bérköltség nemlineáris, degresszív függvény.

Az összes proporcionális költség a közvetlen anyagköltség és a bérköltség függvényének összegéből adódik, vagyis a bérköltséghez hasonlóan szintén degresszív.

Ez a megkülönböztetés azoknál a gyártási folyamatoknál különösen fontos és nagy jelentőségű, ahol az anyagköltség nem elhanyagolható a bérköltséghez képest.

6.2. A szumma közelítése integrállal a kumulált tanulási görbe leírásánál

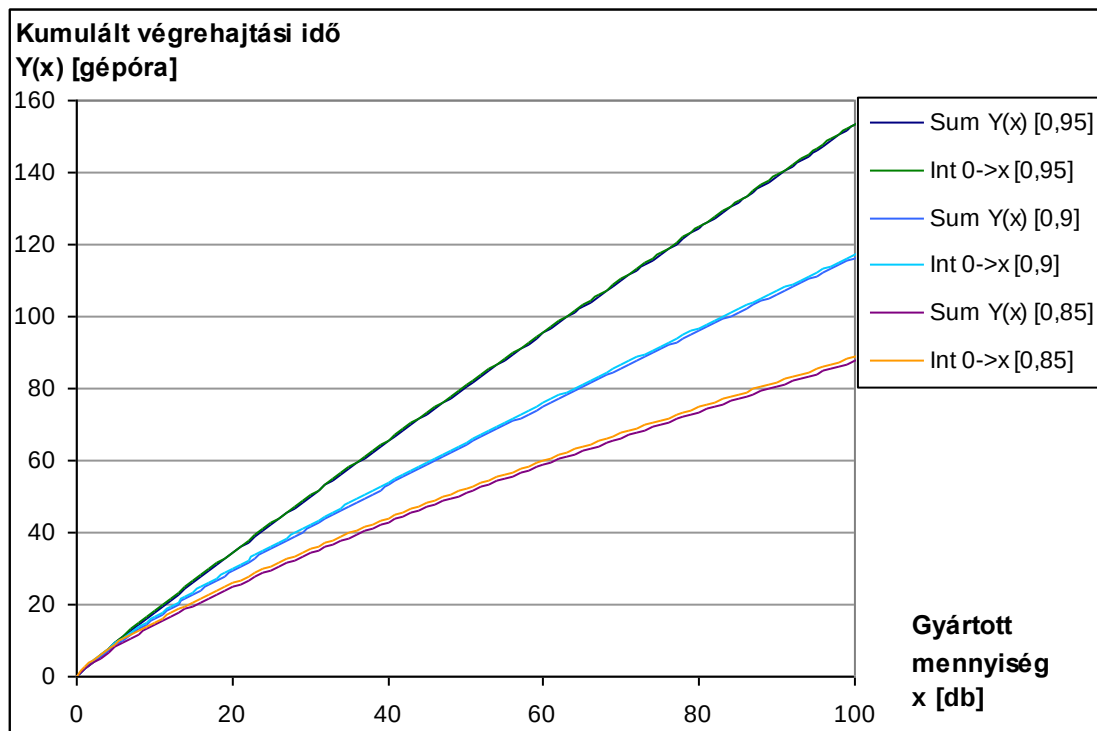
Az 5.2. fejezetben a kumulált tanulási görbe szummáját integrállal közelítettük a (33) képlet szerint:

$$\sum_{k=1}^{x_i} k^{b_i} \approx \int_0^{x_i} k^{b_i} dk = \left[\frac{1}{b_i + 1} k^{b_i + 1} \right]_0^{x_i} = \frac{1}{b_i + 1} \left[k^{b_i + 1} \right]_0^{x_i} = \frac{x_i^{b_i + 1}}{b_i + 1} \quad (61)$$

Mivel a nemlineáris termékszerkezet optimalizálási modellen ezt a közelítést használok, ezért fontos megvizsgálni a közelítés okozta torzítás jelentőségét. A szummával és integrállal számolt értékek közötti különbség szemléltetésére elkészítettem a 15. ábrát, melyen a kumulált végrehajtási idő látható a gyártott mennyiség függvényében $L = 0,95$; $L = 0,9$ és $L = 0,85$ tanulási ráták esetén. Az ábrán látható, hogy a szummás alak és az integrálos közelítés közötti különbség csekély. Minél nagyobb a tanulás mértéke, vagyis minél kisebb az L , annál nagyobb a kettő közötti különbség, ugyanakkor ez a különbség a gyártott mennyiség növekedésével folyamatosan csökken, ami a 6. táblázatban számszerűen is megfigyelhető.

A 6. táblázat a gyártott mennyiséget (x), a fajlagos végrehajtási időt ($Y(x) [L]$), a kumulált végrehajtási időt ($\text{Sum } Y(x) [L]$), a kumulált végrehajtási idő integrálos közelítését ($\text{Int } 0 \rightarrow x [L]$), valamint utóbbi kettő közötti százalékos eltérést mutatja adott L tanulási ráta esetén. A táblázatból kiolvasható, hogy a százalékos eltérés kezdetben gyorsan csökken és viszonylag hamar, kis mennyiségnél elér egy elfogadható hibahatárt

(pl. $L = 0,85$ esetén a százalékos eltérés a 17. darab esetében már 5% alatt van), majd még tovább csökken. A valóságban ennél sokkal nagyobb mennyiségeket gyártanak. Nagy mennyiségek esetén a szummás és integrálos alak közötti eltérés már valóban elhanyagolható, vagyis az integrálos alak jó közelítést ad, ezért alkalmas arra, hogy a nemlineáris termékszerkezet optimalizálási modellben ezt használjuk.



15. ábra A kumulált tanulási görbe szummájának és integrálos közelítésének összehasonlítása

Forrás: saját

6. táblázat A kumulált tanulási görbe szummájának
és integrálos közelítésének összehasonlítása

Forrás: saját

	$L = 0,95; b = - 0,074;$ $a = 2$ [gépóra]				$L = 0,90; b = - 0,152;$ $a = 2$ [gépóra]				$L = 0,85; b = - 0,234;$ $a = 2$ [gépóra]			
x	Y(x) [0,95]	Sum Y(x) [0,95]	Int 0→x [0,95]	d(int0- sum)/ sum* 100	Y(x) [0,9]	Sum Y(x) [0,9]	Int 0→x [0,9]	d(int0- sum)/ sum* 100	Y(x) [0,85]	Sum Y(x) [0,85]	Int 0→x [0,85]	d(int0- sum)/ sum* 100
[db]	[gó]	[gó]	[gó]	[%]	[gó]	[gó]	[gó]	[%]	[gó]	[gó]	[gó]	[%]
0	0,00	0,00	0,00	####	0,00	0,00	0,00	####	0,00	0,00	0,00	####
1	2,00	2,00	2,16	7,99	2,00	2,00	2,36	17,92	2,00	2,00	2,61	30,63
2	1,90	3,90	4,10	5,22	1,80	3,80	4,25	11,72	1,70	3,70	4,44	20,04
3	1,84	5,74	5,97	4,00	1,69	5,49	5,99	9,01	1,55	5,25	6,06	15,48
4	1,81	7,55	7,80	3,29	1,62	7,11	7,64	7,44	1,45	6,69	7,55	12,85
5	1,78	9,32	9,59	2,81	1,57	8,68	9,23	6,39	1,37	8,06	8,96	11,10
6	1,75	11,08	11,35	2,47	1,52	10,20	10,78	5,64	1,31	9,38	10,30	9,84
7	1,73	12,81	13,09	2,21	1,49	11,69	12,28	5,07	1,27	10,64	11,59	8,88
8	1,71	14,52	14,81	2,01	1,46	13,15	13,75	4,62	1,23	11,87	12,84	8,12
9	1,70	16,22	16,52	1,84	1,43	14,58	15,20	4,25	1,19	13,07	14,05	7,50
10	1,69	17,91	18,21	1,71	1,41	15,99	16,62	3,95	1,17	14,23	15,23	6,99
11	1,67	19,58	19,90	1,59	1,39	17,38	18,02	3,69	1,14	15,37	16,38	6,55
12	1,66	21,25	21,56	1,49	1,37	18,75	19,40	3,47	1,12	16,49	17,51	6,18
13	1,65	22,90	23,22	1,40	1,35	20,10	20,76	3,27	1,10	17,58	18,61	5,85
14	1,65	24,55	24,87	1,33	1,34	21,44	22,11	3,10	1,08	18,66	19,70	5,56
15	1,64	26,18	26,51	1,26	1,33	22,77	23,44	2,95	1,06	19,72	20,77	5,31
16	1,63	27,81	28,15	1,20	1,31	24,08	24,76	2,82	1,04	20,77	21,82	5,08
17	1,62	29,43	29,77	1,15	1,30	25,38	26,06	2,70	1,03	21,80	22,86	4,87
18	1,61	31,05	31,39	1,10	1,29	26,67	27,36	2,59	1,02	22,81	23,88	4,68
19	1,61	32,66	33,00	1,05	1,28	27,95	28,64	2,49	1,00	23,81	24,89	4,51
20	1,60	34,26	34,61	1,01	1,27	29,22	29,92	2,40	0,99	24,80	25,89	4,36
21	1,60	35,86	36,21	0,98	1,26	30,47	31,18	2,31	0,98	25,78	26,87	4,21
22	1,59	37,45	37,80	0,94	1,25	31,72	32,43	2,24	0,97	26,75	27,84	4,08
23	1,59	39,03	39,39	0,91	1,24	32,97	33,68	2,17	0,96	27,71	28,81	3,96
24	1,58	40,61	40,97	0,88	1,23	34,20	34,92	2,10	0,95	28,66	29,76	3,84
25	1,58	42,19	42,55	0,85	1,23	35,43	36,15	2,04	0,94	29,60	30,71	3,73
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

7. ÖSSZEFOGLALÁS

- TDK dolgozatomban a tanulási hatás figyelembevételének lehetőségét vizsgáltam költségelemzési és termékszerkezetvizsgálati problémáknál.

- A dolgozat első részében összefoglaltam a tanulási görbével kapcsolatos alapismereteket, bemutattam az alapfogalmakat, ezután ismertettem ÁKFN-struktúrához kapcsolódó alapokat.

- A hagyományos ÁFKN-modell számításainál lineáris költség és árbevétel függvényeket használnak. Ez részben leegyszerűsíti a számításokat, másrészt, ha a dolgozatban említett feltételek nem állnak fenn, akkor jó közelítést ad. Ha azonban figyelembe vesszük a tanulási hatást is, akkor a költséggörbék a lineárisal szemben degresszívek, és az így kapott eredmények jelentősen eltérhetnek a lineáris modell értékeitől, különösen nagy mennyiségek gyártásakor.

- TDK dolgozatom kapcsán azt vizsgáltam meg, hogy különböző tanulási ráták esetén mekkora a lineáris és a nemlineáris modellek eltérése és ez milyen menedzsment következtetések levonását teszi szükségessé. A vizsgálatokhoz Excelben modellt készítettem, melynek segítségével számításokat végeztem. Az eredményeket táblázatokba szerkesztettem és ábrákra szemléltettem. Az ábrák segítségével megállapítható, hogy minél nagyobb a tanulási hatás, vagyis minél kisebb a tanulási ráta értéke, annál alacsonyabb a költségfüggvények (proporcionális- és ezáltal az összes költség függvény) értéke. Már 95%-os tanulási ráta esetén is jelentősen csökkentek a költségek abban az esetben, ahol a proporcionális költségek aránya jóval meghaladta a fix költségek arányát.

- TDK dolgozatomban megvizsgáltam, továbbá azt is, hogy hogyan alakul a hagyományos, lineáris termékszerkezet optimalizálási modell, ha figyelembe vesszük a tanulási hatást. Megállapítottam, hogy a tanulási hatás figyelembevétele olyan nemlineáris problémára vezet (konvex erőforráskorlát és konkáv célfüggvény) amely a nemlineáris optimalizálás módszereivel is csak nehezen oldható meg. Kidolgoztam ezért egy olyan módszert, mely ezeket a nemlineáris függvényeket linearizálja. Ennek eredményeképpen felírható egy új lineáris feladat, mely alulról közelíti a tanulási hatást is figyelembe vevő görbéket, lehetővé téve ezzel a feladat megoldását, lineáris programozással, továbbá az érzékenységvizsgálati eredmények értelmezését is.

- A TDK dolgozatomban a nemlineáris termékszerkezet optimalizálási problémának a megoldása kapta a fő hangsúlyt. A kutatás további iránya lehet a tanulási görbe

stacionárius állapotát is figyelembe vevő elemzések kidolgozása, valamint a linearizált termékösszetételi feladat érzékenységvizsgálati eredményeinek értelmezése és érvényességének meghatározása.

8. IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Conway, R. és Schultz, A. (1959): „The Manufacturing Progress Function.” Journal of Industrial Engineering, Vol. 10, No.1, 39-53.o.
- [2] Hirschmann, W. B. (1964): „Profit from the Learning Curve.” Harvard Business Review, Vol.42., No. 1, 125-139.o.
- [3] Koltai T. (2006): „Termelésmenedzsment”, Kapacitáselemzés c. fejezet, 87-90.o, Typotex
- [4] Kövesi J. (szerk.) (2007): „Menedzsment és vállalkozásgazdaságtan”, Költség-volumen-eredmény-elemzés c. fejezet, 265-274.o, Typotex
- [5] McIntyre, E. V. (1977): „Cost-Volume-Profit Analysis Adjusted for Learning”, Management Science, Vol.24, No.2, 149-160.o.
- [6] Reguero, Miguel A. (1957): An Economic Study of the Military Airframe Industry, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Department of the Air Force, 213.o. – Hivatkozta: Hirschmann, W. B. (1964): „Profit from the Learning Curve” Harvard Business Review, Vol.42., No. 1, 125-139.o.
- [7] Wright, T. P. (1936): „Factors Affecting the Cost of Airplanes”, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol.3., No. 4, 122-128. o. – Hivatkozta: Conway, R. és Schultz, A. (1959): „The Manufacturing Progress Function.” Journal of Industrial Engineering, Vol. 10, No.1, 39-53.o., illetve Yelle, Louis E. (1979): University of Lowell, Education, „The Learning Curve: Historical Review and Comprehensive Survey”, Decision Sciences, Vol.10., 302-328.o.
- [8] Yelle, Louis E. (1979): University of Lowell, Education, „The Learning Curve: Historical Review and Comprehensive Survey”, Decision Sciences, Vol.10., 302-328.o.