

Ovális alaprajzú falazott boltozatok diszkrét elemes vizsgálata

SIMON JÓZSEF *- BAGI KATALIN**

Absztrakt

Az ovális alaprajzú kupolák a reneszánsz és a barokk idején éltek virágkorukat. Mechanikai viselkedésük megismerése a műemlékvédelem és rekonstrukció szempontjából fontos feladat. Vizsgálatainkhoz a diszkrét elemek módszerét alkalmaztuk a módszer speciális képességei miatt, mellyel a blokkok szétválása, egymáson való megcsúszása és akár a teljes összeomlás folyamata is szimulálható. Vizsgálataink tárgyát képezte bármely, a gömbkupolától eltérő mechanikai viselkedés feltárása: például önsúly esetén a támaszerők eloszlásának, a különböző kialakítások összeomlási mechanizmusának, valamint a repedéskép kialakulásának vizsgálata. Ezen túlmenően vizsgáltuk még a kupolákat egyenlőtlen támaszsüllyedésekre, illetve féloldalas terhelésre is.

Abstract

Domes with oval plan were commonly used in the Renaissance and in the Baroque. It is important to know their mechanical behaviour for the preservation of these historic structures. In our study the discrete element method was applied due to the special characteristics of the method which can simulate the whole collapse procedure. In the analysis for dead load we were interested in exploring any difference between the mechanical behaviour of spherical domes and domes with oval plan: e.g. the distribution of the reaction forces, the collapse mechanisms of different geometries, crack propagation etc. Further investigations were carried out to study the domes in case of support yielding and antisymmetric load patterns.

1. Bevezető

Az ovális alaprajzú kupolák építészeti jelentőségéről és mechanikai modellezésének lehetőségeiről a Magyar Építőipar egy korábbi számában írtunk (Simon, 2012). Itt és most kifejezetten a diszkrét elemes módszerre vonatkozó megállapításokat szeretnénk csak kiemelni.

Ha a mikroszintű viselkedésnek, az esetleges mechanizmusok kialakulásának, repedések megnyílásának és az azzal járó feszültségátrendeződésnek vagy az egyes kövek megcsúszási lehetőségének megismerése a cél, akkor a kontinuummechanikai vizsgálatok nem alkalmazhatóak. Ez esetben részletesebb diszkontinuum modellek segítségével végezhetjük el az analízist. A végelemek módszerével ez a következőképpen tehető meg: a kontinuumot olyan rész-tartományokra osztjuk, amelyek éppen egy-egy adott építőelemnek felelnek meg, majd ezeket kapcsolati elemekkel kötjük össze. Ez a modellezés rendkívül körülményes és nehézkes, hisz minden egyes kapcsolatot külön kell definiálnunk, ezek nem szakadhatnak fel, új kapcsolatok nem keletkezhetnek a modellben, ha előre nem adtuk meg az adott helyen erre a lehetőséget. Ezzel szemben egy numerikus eljárást akkor tekinthetünk diszkrét elemes modellnek (Cundall és Hart, 1992), ha:

- egymástól egyértelműen elkülönülő elemekből épül fel,
- az elemek önálló elmozdulási szabadságfokokkal rendelkeznek oly módon, hogy a modell képes követni az elemek véges nagyságú eltolódásait és elfordulásait deformálható elemek esetén deformációt is), illetve
- az elemek között új kapcsolatok jöhetnek létre és meglévő kapcsolatok szűnhetnek meg.

A végeselemes módszerrel ellentétben a kapcsolatok bármely két, kölcsönhatásba kerülő elem között létrejöhetnek, a meglévő kapcsolatok felszakadhatnak, amit a diszkrét ele-

mes eljárások teljesen automatikusan, numerikusan kezelnek.

A diszkrét elemek módszerét kifejezetten diszkrét felépítésű szerkezetek és anyagok mechanikai viselkedésének vizsgálatára fejlesztették ki. Ilyen szerkezet lehet pl. bármilyen falazott, kövekből összeépített szerkezet – boltív, boltozat, falak, oszlopok –, anyag pedig bármilyen szemcse-halmaz – pl. talaj, silóban tárolt gabona stb. (Bagi, 2007). Az első diszkrét elemes modellt P.A. Cundall (Cundall, 1971) olyan töredezett sziklák által alkotott lejtők, rézsűk vizsgálatára fejlesztette ki, amelyeknél a tönkremeneteli mechanizmus a már létező törések mentén az elemek elválásával vagy megcsúszásával jön létre. Cundall a numerikus megoldáshoz a blokkok mozgásegyenleteinek időintegrálását választotta, így lehetősége nyílt az elemek aktuális helyének folyamatos követésével a nagy elmozdulások vizsgálatára is. A módszer használatának problémáját a számítógépek kapacitása jelentette. A 90-es években a számítógépek fejlődése lehetővé tette valós problémák vizsgálatát már egyszerű PC-ken is, így a módszer bevonult a mérnöki gyakorlatba. A mai napig számos diszkrét elemes szoftver jelenik meg, némelyik kizárólag kutatási célra, de egyre több változata már a mindennapi mérnöki, tervezői gyakorlatban is jól használható. A falazott szerkezetek diszkrét elemes modellezésének lehetőségeit Lemos (Lemos, 2007) foglalta össze részletesen.

2. Alkalmazott szoftver bemutatása

Vizsgálatainkhoz az Itasca cég 3DEC (Three-Dimensional Distinct Element Code) programját alkalmaztuk. A 3DEC szoftverben tetszőleges poliéder elemeket alkalmazhatunk, amelyek lehetnek merevek vagy deformálhatóak is. Utóbbi esetben az elemeket belső hálóval látjuk el, egyszerű vége-selemekre osztjuk, amelyek általában szimplexek, de elvileg magasabb fokú elemek alkalmazására is lehetőség van. A deformálható elemek mechanikai viselkedésének modellezésére a legkülönbözőbb anyagmodelleket használhatjuk: például lineárisan rugalmas, képlékeny, viszkoeelasztikus vagy akár egyedileg definiált anyagmodell is. A 3DEC exp-

* doktorandusz, BME Hidak és Szerkezetek Tanszék

** egyetemi tanár, BME Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék

licit időintegrálást, ezen belül a centrális differenciák módszerét alkalmazza, a mozgási differenciálegyenleteket oldja meg diszkrét időpillanatokban, az egyes időpillanatokhoz tartozó megoldások sorozataként szimulálva le a teljes folyamatot. A mozgásegyenletek felírása merev elemek esetén az elemek referenciapontjára (általában a súlypontra), deformálható elemeknél a szimplexek csúcspontjaira, illetve az azokhoz tartozó Voronoi-cellákra történik. Az elemek és a közöttük lévő kapcsolatok mechanikai modellezése, a paraméterek helyes megadása épp olyan fontos, mint egy rugalmas anyag analízise során az anyagjellemzők megadása, hiszen ez alapjaiban befolyásolja a megoldás helyességét, valószerűségét. Az elemek fiktív egymásba nyomódását, egymásba metsződését ez esetben normális és érintő irányú kapcsolati, ún. büntetőmerevségekkel szabályozhatjuk. A falazatok esetén azonban ezen merevségek megválasztása nem csak numerikus értelemben fontos. Nedves eljárással kialakított falazat esetén a habarcs mechanikai tulajdonságait modellezhetjük kapcsolati szinten, száraz falazás esetén pedig a nem egyenletes felfekvés, érdes felület következtében létrejövő feszültségkoncentrációk miatt kialakuló lokális deformációkat vehetjük így figyelembe. Ebben az esetben laboratóriumi kísérleti eredmények használata ajánlott. Falazott szerkezetek esetén a leggyakrabban alkalmazott kapcsolati modellek a Coulomb-féle súrlódásos, valamint a kohéziós modell, de itt is lehetőség van összetett (időfüggő, fellazuló, képlékeny) vagy akár egyedileg definiált modellek használatára is. A numerikus megoldás konvergenciájának javítására és valós disszipációs jelenségek modellezésére a program különféle valós és fiktív csillapítókat alkalmaz (Bagi, 2007).

3. Saját vizsgálataink

Eddigi vizsgálataink az ovális alaprajzú kupolákkal kapcsolatban négy kérdéskört elemeztük:

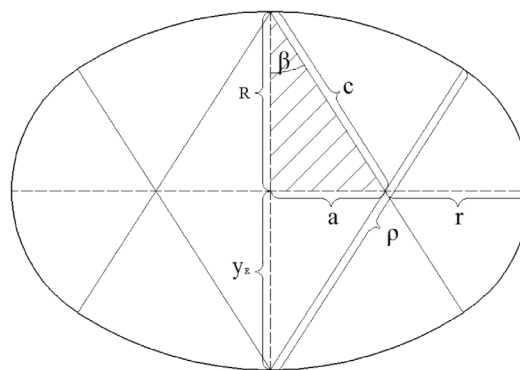
- (1) különböző mértékben elnyújtott alaprajzok esetére meghatároztuk a Heyman-féle minimális falvastagságot (Heyman, 1995), amely az a legkisebb konstans falvastagság, amellyel a kupola éppen elbírná a saját súlyát;
- (2) elemeztük a reakciók eloszlását az alap-ovális mentén;
- (3) megvizsgáltuk a támaszmozgások hatását a geometriai kialakítástól függően;
- (4) megvizsgáltuk a féloldalas függőleges terhek esetét is.

3.1. Heyman-féle minimális falvastagság meghatározása ovális alaprajzú kupolákra

A vizsgálataink egyik fő célja volt ovális alaprajzú kupolák esetére az ún. Heyman-féle minimális falvastagság meghatározása. Eredményeinket részletesen a (Simon és Bagi, 2012) cikkben mutattuk be, itt csupán a vizsgálatok lényegét foglaljuk össze. A Heyman-féle minimális falvastagságról a (Simon, 2012) cikkben és a (Heyman, 1995) könyvben találhat részletesebb leírást az olvasó. A Heyman-féle minimális falvastagság az a konstans falvastagság, amely esetén egy boltozat a saját önsúlya alatt még éppen nem omlik össze. Heyman a képlékenységtan statikai módszere szerint gömbkupola esetére a minimális falvastagságot a kupola középsugarának 4,2 %-ában határozta meg. Ovális kupolák esetében is megoldhatjuk a problémát statikai vagy kinematikai módszerrel, ám a megoldás komplexitása nagyságrendekkel nagyobb feladat, az ovális kupolák esetére egy jól kalibrált diszkrét elemes, numerikus modell használata ajánlott.

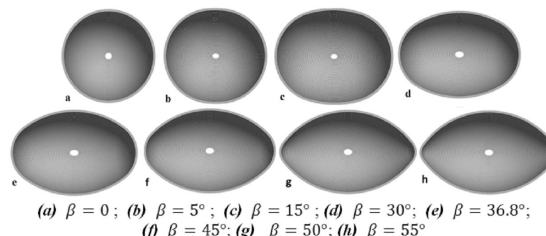
A numerikus vizsgálatainkban az építészeti gyakorlatban leggyakrabban alkalmazott, négy körívből illesztett, ún. ál-

talánosított egyiptomi ovális alaprajzzal dolgoztunk, de az elkészített numerikus modell teljesen parametrikus, bármilyen ovális alaprajzot képes kezelni (1. ábra).



1. ábra: Általánosított egyiptomi ovális paraméteres rajza

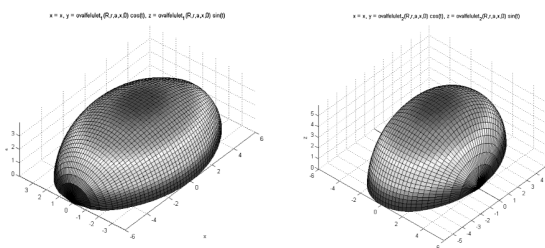
A körtől való eltérést a β szög jellemzi. A $\beta = 0$ esetben az $r = R$ egyenlőség miatt egy kör alaprajzot kapunk. A másik véglet $a = 60^\circ$, azaz $r = 0$ eset, amikor a kisebbik sugarú ív görbülete végtelen nagy. A vizsgált geometriai kialakításokat a 2. ábra mutatja.



2. ábra: A vizsgált alaprajzi kialakítások

A pontos matematikai felületet az alaprajzi görbe hosszabbik (1. típus), vagy rövidebbik tengelye körüli megforgatásával (2. típus) hoztuk létre (3. ábra). Matlab programkörnyezetben egy algoritmust írtunk, amely előre definiált átlagos elemmérettel, osztásközzel poligonhálózatot hoz létre a belső felületen, mely az egyes építőkövek belső felületi csomópontjainak felelnek meg. Az elemek külső felületi csomópontjait a belső felület csomópontjaihoz tartozó normálvektorok segítségével származtattuk. Az algoritmus azt is figyelembe veszi, ha egy-egy vízszintes gyűrűsorban nem fér el egész számú építőelem. Ekkor úgy darabolja az utolsó köveket, hogy mindegyik nagysága reális legyen. Például nem fordulhat elő, hogy az utolsó előtti kő teljes méretű, az utolsó pedig csak ennek tizede. Az algoritmus azt is megvizsgálja, hogy nem kerül-e két függőleges fuga egymás fölé. Ha igen, akkor az egyik sorba két kisebb (esetleg egyetlen nagyobb) elemet helyez el a kérdéses helyre, így oldva meg a problémát.

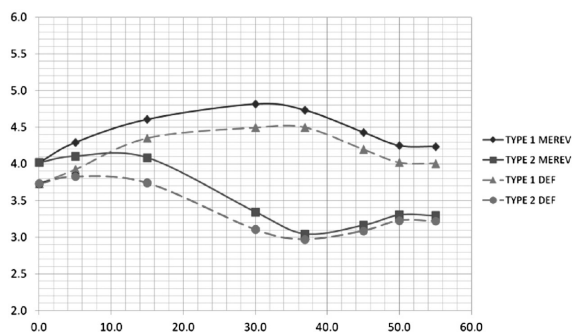
3. ábra: 1. és 2. típusú geometriai kialakítás a megforgatási tengelytől függően



A numerikus modell kalibrációját a gömbkupolára ismert minimális falvastagság alapján végeztük el. A merev elemes futtatásokhoz kalibrálnunk kellett a kapcsolati büntetőmevségeket. Túl kis merevségek esetén a modell irreálisan lágyan viselkedik, az érintkező elemek felszíni pontjai túlságosan mélyen egymás belsejébe kerülnek, ami a vizsgálatok numerikus összeomlását okozza. Túl nagy merevségek esetén az alkalmazható időlépés annyira kicsiny lenne, hogy a numerikus kerekítési hibák miatt a megoldás nem fog konvergálni, az elemek esetleg szét is repülhetnek. A kalibrációval kapcsolatos részleteket a (Simon és Bagi, 2012) cikk mutatja be.

A kalibráció során elvégeztük a mérethatás vizsgálatát is, hiszen a megoldás pontosságát az is befolyásolhatja, hogy a pontos matematikai felületet hány poliéder elemmel fedjük le, milyen magasságokba kerülnek a kapcsolatok. Érdekes tapasztalat volt, hogy sűrű elemfelosztás, azaz egyre kisebb méretű elemek esetén a minimálisan szükséges falvastagságok nagyobbra adódtak, mint durva felosztás, azaz nagy elemek esetén. Ennek magyarázata, hogy az elemek képesek hajlítást is felvenni, míg a kapcsolatok nem, s kis elemek esetén jóval több kapcsolat alakul ki, nagyobb az esélye annak, hogy valamelyiknél éppen kialakul a törési mechanizmushoz szükséges csukló, csuklósor.

A kalibráció után iterációs úton több, egyre elnyújtottabb alaprajzú kupola minimális falvastagságát meghatároztuk mind merev, mind deformálható elemekkel. A minimális falvastagságokat a gömbkupola középsugarával, mint ekvivalens sugarral normáltuk, majd a β szög függvényében ábrázoltuk (4. ábra).

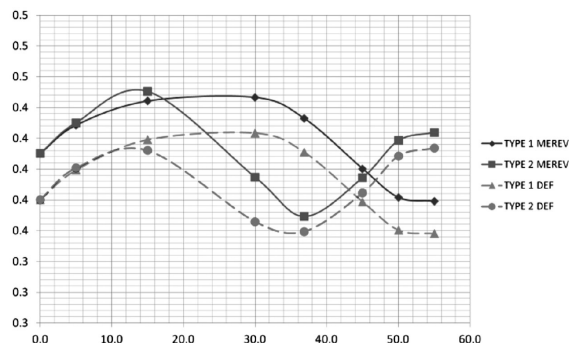


4. ábra: A szükséges minimális falvastagság [%] az ekvivalens sugarhoz viszonyítva, a β szög függvényében

A merev elemes futtatások eredményei alapján az első fontos megállapítás, hogy gömbkupola esetén az arányszám kisebbre adódott (0,040) az elméleti értéknél (0,042) az elemek egymásra hatása, a sűrűlódási kapcsolatok stabilizáló hatása miatt. A stabilizálást az elemek kötésben való elhelyezése okozza: az egymás fölötti sorok falazóelemei vízszintesen nem tudnak elcsúszni egymáson a kapcsolatok sűrűlódási ellenállása miatt. A legszembetűnőbb, hogy a két fajta geometriai kialakítás (a rövidebb, illetve a hosszabb szimmetriatengely körül megforgatott oválisként előállított intrados) teljesen más eredményeket ad. A laposabb, „1. típusú”, a hossz tengely megforgatásával keletkező geometria esetén a minimális értékek minden esetben nagyobbra adódtak, mint a „2. típus” (a rövidebb tengely körüli megforgatással előállított felület) eredményei. Ennek az az oka, hogy ugyanazon alaprajzi kialakítással a rövidebb tengely körüli megforgatással keletkező kupola metszeteinek geometriája jóval közelebb áll a láncgörbéhez. Ez előnyös, hisz az önsúly eloszlása kedvezőbb, a nyomásvonal alakja közelebb áll az eredeti metszet alakjához, így a falazatból csak igen kis vastagság esetén lép ki. A másik esetben ellaposodott ívek alkotják a metszeteket, amelyeknek súlyeloszlása előnytelen, a nyomásvonal könnyebben hagyja el a ke-

resztmetszetet. Az egyik legfontosabb eredménye a vizsgálatoknak az, hogy deformálható elemekkel történő futtatások esetén az értékek minden β -ra végig a merev elemes eredmények alatt futnak. Ez azt jelenti, hogy a merev elemeket feltételező klasszikus elmélet és az ezen alapuló mérnöki számítások a biztonság javára tévednek.

Az anyagfelhasználás gazdaságosságáról akkor kapunk képet, ha az egyes kialakításokhoz a fajlagos, 1 m^2 -nyi alapterületre jutó építőelem-térfogatot meghatározzuk. Ezt mind merev, mind deformálható elemek esetére megtettük, majd az eredményeket itt is a β szög függvényében ábrázoltuk (5. ábra).



5. ábra: Egységnyi alaprajzi területre jutó építőelem-térfogat [m^3] a β szög függvényében

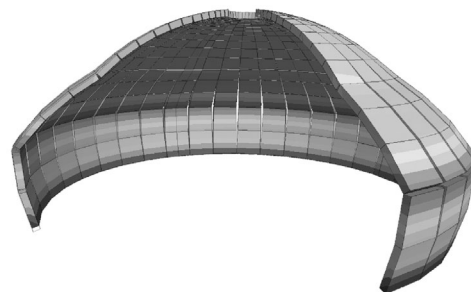
Az 5. ábrából az tűnik ki, hogy mindkét típus esetében találunk a gömbkupoláénál anyagtakarékosabb kialakítást, ám ezek inkább a nagy elnyújtottságú, gyakorlatban alig alkalmazott eseteknél fordulnak elő.

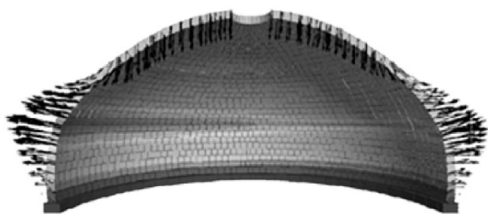
3.2. Az összeomlási mechanizmusok vizsgálata

A diszkrét elemek módszere alkalmas a teljes összeomlási folyamat szimulálására, amivel részletes képet kaphatunk az ovális alaprajzú kupolák tönkremeneteli módjairól, azok kialakulásáról, a szerkezet „gyenge” pontjairól. Az összeomlási mechanizmus tengelyesen szimmetrikusan ható függőleges teherrel terhelt, tengelyesen szimmetrikusan elrendezett falazóelemekből kialakított gömbkupola esetén körszimmetrikus: három csukló sor alakul ki, egy a kupola tövében, kettő pedig a kupola közbelső magasságaiban. Az alsó elemek kifelé borulnak, a legfelső elemegyüttes függőlegesen lefelé halad (6. ábra).

Egy tényleges szerkezet esetében azonban az elemeket kötésben helyezik el, azaz valójában a megépült gömbkupola nem tökéletesen körszimmetrikus, így maga az összeomlási mechanizmus is aszimmetrikussá válik (7. ábra). Az aszimmetrikus összeomlás kialakulásához elegendő lehet az, hogy a darabolások révén a kövek kiosztása nem egyenletes. Ekkor több kisebb elem környezetében a kupola gyűrűirányban könnyebben megnyílik, több meridián irányú repedés alakul ki, és így a gyűrűirányú erők eloszlása sem

6. ábra: Teljesen körszimmetrikusan falazott gömbkupola összeomlási mechanizmusa önsúlyra

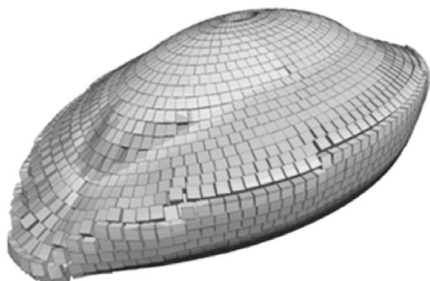




7. ábra: Általános, kötésben falazott gömbkupola összeomlási mechanizmusa önsúlyra

lesz egyenletes. A kifelé billenése következtében az alsó rész szintén szétnyílik, ami a gyűrűirányú erő nagyságát befolyásolja, azaz az aszimmetria biztosított.

Ha a hossz tengely körül megforgatott ovális kupolák esetét (1. típusú) vizsgáljuk, kis β értékeknél (azaz körhöz közeli alaprajzoknál) a mechanizmus szimmetrikusnak indul, majd a későbbi fázisokban aszimmetrikussá válik: a csuklósorok magassága változik, térgömböt alkot. Az alaprajzi görbe hossz tengelyével „párhuzamos” részekben magasabban, míg a kis görbületi sugarú, a hossz tengelyt lezáró részekben alacsonyabban halad ez az elfordulási tengely (**8. ábra**). Az elnyújtottság növelésével egyre inkább a hossz tengely végénél lévő lokális beomlás dominál, ami megelőzi a kupola teljes összeomlását. Ilyenkor a teljesen körbe menő csukló sor megszűnik, az a hossz tengely végéhez csapódik le.

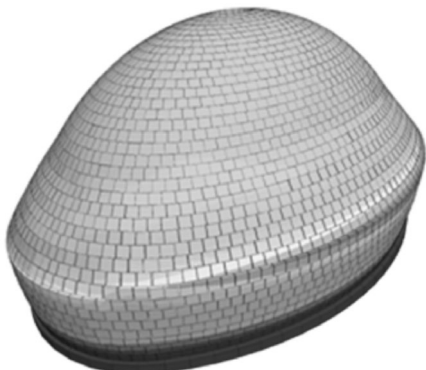


8. ábra: 1. típusú, nagy elnyújtottságú kupola összeomlási mechanizmusa önsúlyra

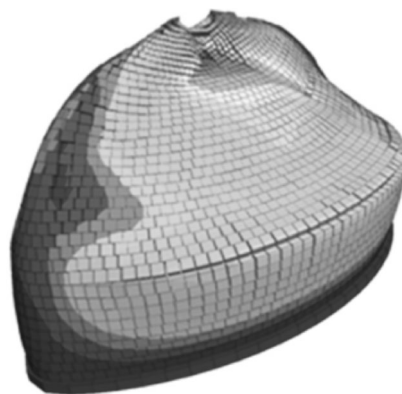
A 2. típusú, a rövidebb tengely körül megforgatott kialakítás esetén, kis elnyújtottsági értékeknél szintén megkapjuk a gömbkupolához hasonló mechanizmust. A **9. ábrán** a teljesen körbemenő csukló sorok láthatóak.

A nagyobb elnyújtottságú, 2. típusú kupolák esetén az alaprajzi görbe a hossz tengelyek végénél egyre csúcsosabbá, hegyesebbé válik, ami a megforgatás utáni felületen a hossz tengely mentén egy merev elválasztó ívet eredményez. Az egyre elnyújtottabb boltozatok esetében a rövidebbik tengellyel párhuzamos metszetekben egyre nagyobb görbületi sugarú, egyre kisebb görbületű csúcsívek kelet-

9. ábra: 2. típusú, kis elnyújtottságú kupola összeomlási mechanizmusa önsúlyra



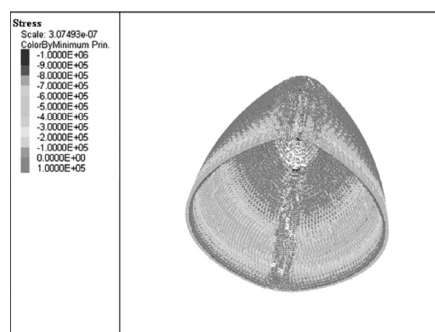
keznek. A térbeli membrán teherviselés annál hatékonyabb, minél jobban görbült a boltozat felülete. Az egyre kisebb görbuletek következtében a hajlítás is egyre inkább dominánssá válhat ezeken a csaknem sík részekben. Ez az erőjáték a nyomásvonalat könnyen kitérítetheti a keresztmetszetből. Az ív és az ennek két oldalról nekitámaszkodó kevésbé görbült, hajlításnak is kitett részek közösen azt eredményezik, hogy egy-egy csukló sor már nem egy zárt görbe, hanem azok az elválasztó ívnél, azaz a hossz tengely végeinél megszakadnak. Az összeomlási mechanizmus során az ív talpánál lévő részeket a többi rész kifelé tolja, erre ez az ív a boltívhez hasonló elmozdulásokkal reagál, de a többi rész mozgásához képest relatív mozdulatlanak tekinthető. Az ezen kívül eső részekben a magasság mentén két helyen, valamint a talp-



10. ábra: 2. típusú, nagy elnyújtottságú kupola összeomlási mechanizmusa önsúlyra

nál alakul ki csukló sor – az eddig megszokott módon –, az ív megtámasztó hatása révén azonban ezek a részek külön-külön az elválasztó ív két oldalán omlanak be, az alsó részek pedig itt is kifelé billennek (**10. ábra**). A **11. ábrán** a 10. ábrán látható kupolának az erőjátéka látható, ahol a skálázás a 3. főfeszültség nagyságát mutatja.

Ovális kupolák esetében önsúlyteherre a repedésképp a gyűrűirányú húzások miatt jórészt a gömbkupolánál ismert meridián irányú repedésekből áll. Felülnézetből ezek a re-



11. ábra: 2. típusú, nagy elnyújtottságú kupola erőjátéka a 3. főfeszültségek nagyságának ábrázolásával

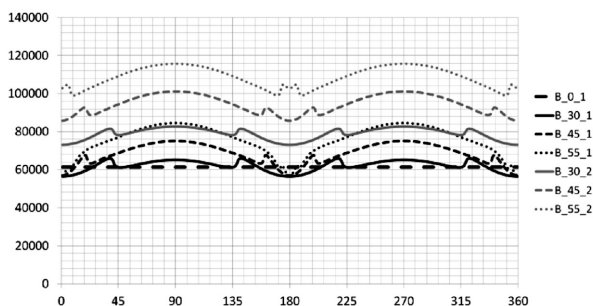
pedések nem a kupola geometriai középpontja felé tartanak, hanem mindig a vízszintes metszetek alkotta görbékre merőlegesen futnak. A megnyílások a kisebb görbületű részekben lesznek nagyobbak, azaz esetünkben a hossz tengely végénél lévő részekben. Ettől kissé eltér az utolsónak bemutatott, nagy elnyújtottságú kupolák repedésképe, hiszen itt jelentős repedések alakulnak ki az elválasztó ív mentén is a merevségváltozás miatt.

3.3. A belső erők vizsgálata

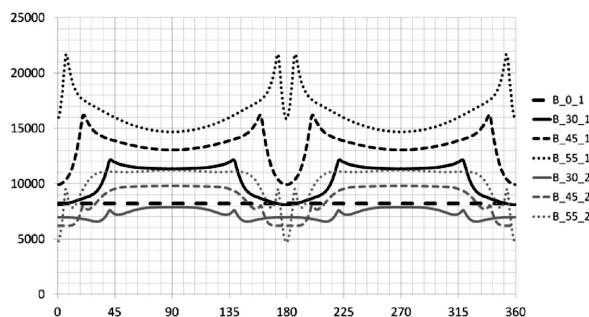
A támaszerő eloszlása, annak függőleges és vízszintes komponensének nagysága határozza meg, hogy az alátámasztó

szerkezeti részt hol lehet biztonsággal megbontani, annak eltávolítása vagy károsodása esetén mekkora erőt kell ideiglenesen vagy véglegesen beépített megtámasztó szerkezetekkel felvenni.

A támaszerő-eloszlás függ az alátámasztás merevségétől is. Vizsgálatainkban merev alátámasztást feltételeztünk, hogy képet kaphassunk az ovális kupolák globális viselkedéséről. Egy stabil, önsúlyára össze nem omló kupola esetén a támaszerő-eloszlás egy olyan globális jellemző, amelyet lényegesen nem változtat meg a szerkezet folytonos vagy diszkrét jellege. Ezen vizsgálat elvégzésére parametrikus modellt építettünk az ANSYS végeleemes programba is, amellyel – csakúgy, mint a 3DEC esetén – bármely általános kialakítású ovális alaprajzú kupola vizsgálható. A vizsgált paraméterek a Poisson-tényező, a falvastagság, és az elnyújtottság mértéke voltak. Független és vízszintes támaszerő-eloszlásokat a 12. és 13. ábrán láthatunk.



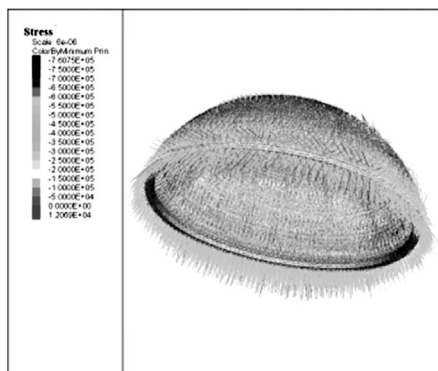
12. ábra: Azonos alapterületű és t/R_{kiv} arányú ovális kupolák függőleges támaszerőinek [N/m] eloszlása az alaprajzi görbe mentén számított alaprajzi szög [°] függvényében



13. ábra: Azonos alapterületű és t/R_{kiv} arányú ovális kupolák vízszintes támaszerőinek [N/m] eloszlása az alaprajzi görbe mentén számított alaprajzi szög [°] függvényében

A kontinuum-mechanikai alapon kapott eredmények azt mutatják, hogy az ovális kupolák – hasonlóan az egyirányban teherhordó lemezekhez – a hossz tengellyel „párhuzamos” peremeik mentén hordják a nagyobb függőleges terheket, illetve ennek mértéke annál nagyobb, minél elnyújtottabb a kupola, azaz minél nagyobb a hossz tengely és a rövidebb tengely aránya. Látható, hogy az 1. típus esetén a kevésbé meredekebb falak miatt a vízszintes támaszerő, míg a 2. típus esetén a függőleges támaszerő lesz dominánsabb. Mindegyik esetben az alaprajzi ovális görbe illesztési pontjainál az eloszlásban zavar figyelhető meg.

A diszkrét elemes vizsgálatok szerint az erőjáték több szempontból is más lesz, ha a szerkezet nem folytonos (mint pl. egy vasbeton vagy acélhéz esetén), hanem diszkrét falazóelemekből épül fel. Eltérően a 12–13. ábrán látottaktól, a görbületváltásnál megfigyelhető perturbációk eltűnnek (14. ábra), az elnyújtottság nagy értékeinél a reakciók eloszlása újra egyenletessé válik.

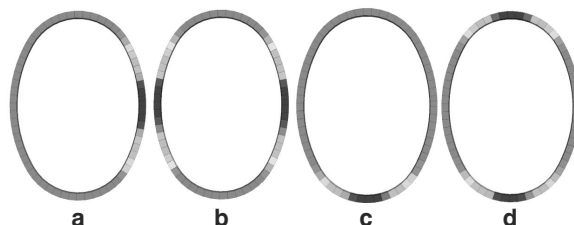


14. ábra: 14. 2. típusú, $\beta = 30^\circ$ -os kupola reakcióinak eloszlása a diszkrét elemes modellben

3.4. Egyenlőtlen támaszsüllyedések vizsgálata

A merev támaszok feltételezése megalapozatlan, mert a valóságban egy tényleges szerkezet alatt kisebb-nagyobb süllyedések mindenképp kialakulnak, így a támaszok nem tekinthetők végtelen merevnek. Az alátámasztások süllyedése, mozgása olyan mértékben változtathatja meg a peremfeltételeket, hogy a tökéletes szerkezeten és merev megtámasztások feltételezésével végzett analízishez képest az erőjáték és a nyomásfelület alakja jelentősen megváltozhat. Így a valós viselkedést előrejelezni is csak erős közelítéssel lehet.

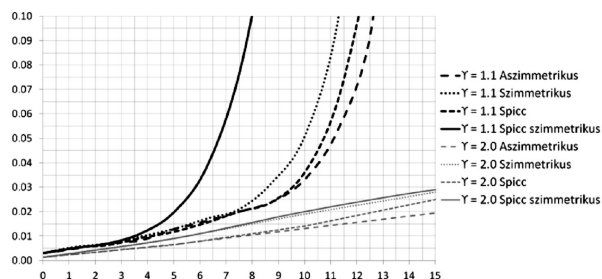
Valós körülmények között a legkülönbözőbb süllyedési módok, süllyedési képek alakulhatnak ki. A modellezés során nyilván csak egy-egy mértékadó állapotot lehet vizsgálni. Vizsgálatunkban a süllyedési horpa alakját $\cos^2(x)$ alakú függvényekkel írtuk le úgy, hogy egy fél koszinusz hullám hossza éppen a rövidebbik vagy a hosszabbik alaprajzi tengely hosszával egyezzen meg. Négy különböző, általunk mértékadónak vélt elrendezést vizsgáltunk (15. ábra).

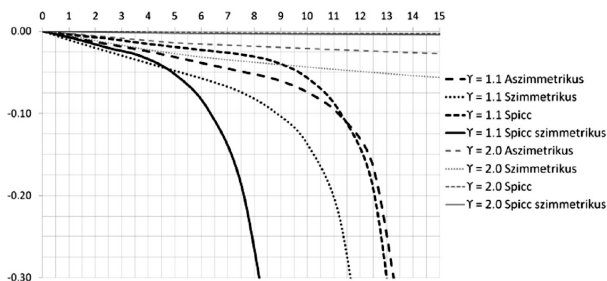


15. ábra: Süllyedési módok: a – aszimmetrikus, b – szimmetrikus, c – spiccs aszimmetrikus, d – spiccs szimmetrikus

A vizsgált kialakítást folyamatosan, lassan süllyesztettük, közben az idő függvényében figyeltük a süllyedés mértékét, a tetőpont elmozdulását, valamint egy külön algoritmussal a maximális repedéstágasságot. A 16. és 17. ábrán $\beta = 30^\circ$ -os, azaz kismértékben elnyújtott, a hosszabb tengely körül megforgatott kialakítás esetére mutatjuk be a $\gamma = 1.1$ és

16. ábra: $\beta = 30^\circ$ 1. típusú kupola maximális repedéstágasságának [m] változása a süllyedés [cm] mértékének függvényében





17. ábra: $\beta = 30^\circ$ 1. típusú kupola tetőponti elmozdulásának [m] változása a süllyedés [cm] mértékének függvényében

$\gamma = 2.0$ biztonsági szintekhez, és különböző süllyedési módokhoz tartozó süllyedés-repedéstágasság (16. ábra), valamint süllyedés-tetőponti elmozdulás (17. ábra) grafikonokat. (A γ geometriai biztonsági mérőszám a tényleges és a minimálisan szükséges falvastagság arányát jelöli.)

Mind a maximális repedéstágasság, mind a tetőponti elmozdulás esetén látható, hogy a szerkezet globális merevsége egyértelműen növekszik a falvastagság, azaz a geometriai biztonsági mérőszám növelésével. Ez azt jelenti, hogy ugyanazon süllyedési szinten a magasabb geometriai biztonsági szintű kupola maximális repedései és tetőponti elmozdulásai jóval kisebbek, mint a kisebb biztonság, kisebb falvastagság esetén. A $\gamma = 2.0$ -es esetben ugyan nem következik be összeomlás (a görbék nem tartanak a végtelenbe) a vizsgált tartományon, de a használhatóságot is figyelembe kell vennünk, nem engedhető meg, hogy a kupola felületén több centis repedések, lyukak keletkezzenek. Ezek egy része ugyan kiinjektálható, javítható, de egyes esetekben a kupola a süllyedés következtében felnyílik, annyira összeropadozik, hogy használhatatlannak minősülhet. A süllyedés-repedéstágasság összefüggéséből (16. ábra) az olvasható le, hogy a használhatósági követelmények miatt még nagy biztonsági mérőszám mellett sem engedhető meg nagy süllyedés, még akkor sem, ha a kupola az adott süllyedésre statikailag biztonságos és nem omlik össze. Ha például a maximálisan megengedhető repedéstágasság, felnyílás értéke 1,5 centiméter, akkor láthatóan körülbelül ugyanarra a 8 centiméteres megengedhető süllyedési értékre jutunk, mint a kisebb biztonságú kupola teherbírási vizsgálatánál.

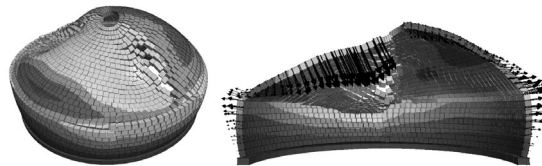
A vizsgálatokat elvégeztük több különböző kialakítású ovális kupolára is. A tetőponti elmozdulás és repedéstágasság követésével a megengedhető maximális süllyedés mértékére mind teherbírási, mind használhatósági szempontból korlátot tudtunk adni. A legfontosabb konklúzió az, hogy bármely kialakítás esetén a mértékadó süllyedési mód a spiccnél kialakuló kétoldali szimmetrikus süllyedés.

3.5. Féloldalas terhelések vizsgálata

Az alábbiakban a féloldalas terhelések esetén bekövetkező néhány összeomlási módot mutatunk be. Kiemelnénk, hogy csak függőleges terheléssel (ilyen például a hőteher) foglalkoztunk, az eredmények erre az esetre vonatkoznak.

Kissé elnyújtott esetek ($\beta = 30^\circ$) – az 1. vagy 2. típusú kialakítás esetén is – akár rövidebbik, akár hosszabbik tengelyre való féloldalas terhelése során az összeomlási módok hasonlóak. A gömbkupola esetén feltűntettünk egy met-szetet is (18. ábra). Itt látszódik, hogy az összeomlási mechanizmus a metszetben hasonló a boltíveknél megszokott féloldalas terhelésre kialakuló mechanizmushoz. A kupola alsó részei körben kifelé billennek, a felső részek pedig nem függőlegesen omlanak be, mint azt a tisztán önsúly- és merev támasznál kialakuló összeomlásoknál láthattunk, hanem úgy mond elborulnak a féloldalas teherrel átellenes oldal irányába. Ez a metszettől távolabb a féloldalas teher

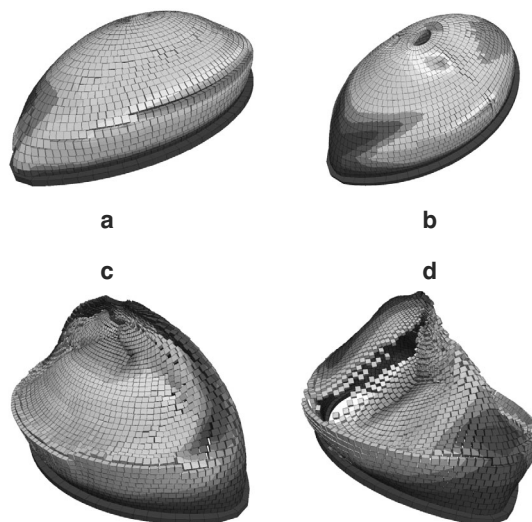
tengelye mentén már nem tud kialakulni, ezért a középső részekről távolabb előbb omlik be a kupola. Látható a 18. ábrán is, hogy a hajlítás és nyírás együtteseként a kapcsolatok függőlegesen elnyíródnak (súrlódási ellenállásuk kimerül), a folytonosság megszűnése itt nem csuklós mecha-- nizmussal, hanem az elemek függőleges relatív eltolódásával következik be. Fontos hangsúlyozni, hogy a falazott szerkezetek klasszikus elmélete alapján való analízis az ilyen tönkremenetelek ellen nem véd, a megcsúszó kapcsolatokat a



18. ábra: Gömbkupola összeomlási mechanizmusa féloldalas függőleges terhelésre

klasszikus elmélet nem tudja kezelni, a DEM számára azonban ezek az esetek is könnyen modellezhetők.

A nagyon elnyújtott esetek némely kialakításánál az összeomlás máshogy játszódik le. A 19.a ábrán láthatjuk, hogy a hossz tengely körüli megforgatással kialakított kupola esetén és hossz tengelyre féloldalas teher fennállásakor az előbb említett függőleges elnyíródás nem következik be, a kupola annyira elnyújtott, hogy a hossz tengely körül egyszerűen elborul a féloldalas teherrel átellenes oldal felé. Ugyanezen kialakítás a rövidebbik tengelyre féloldalas terhelésre hasonlóan reagál, mint a kisebb elnyújtottságú kupolák, azaz elnyíródás is bekövetkezik, de az alsó részek kifelé billenése csak a hossz tengelyekkel párhuzamos részekben történik meg (19.b ábra). A rövidebbik tengely körüli megforgatással kialakuló kupolánál az elválasztó ív ismét nagy szerepet kap. Ha az ív két oldalára féloldalas a terhelés, akkor a jól megszokott módon az ív – mivel az igen merev – és az alsó kibillenő részek között omlik be a boltozat (19.c ábra). Rövidebbik tengelyre féloldalas terhelés esetén az ív a végéig kitart, két oldalán kialakul az elnyíródás, majd az egész kupola beomlik (19.d ábra). Látható, hogy itt



19. ábra: Összeomlási mechanizmus; $\beta = 55^\circ$ (1. és 2. típus); féloldalas függőleges terhelésekre

az oldalirányú mozgások minimálisak, az elválasztó ív gátolja ezeket.

A féloldalas terhelések esetén kimutatható volt, hogy bármely kialakítású kupola a saját önsúlyának másfélszeresét féloldalas teherként biztonsággal elviselte.

ÖSSZEFOGLALÁS

A kutatásunk célja ovális alaprajzú falazott boltozatok mechanikai viselkedésének vizsgálata. Megállapítottuk, hogy a deformálható elemekkel történő számítások kisebb minimális falvastagsági értékeket adtak, mint a végtelen merev elemeket alkalmazó futtatások, azaz a merev építőelemek feltételezése ovális kupolák esetén a biztonság javára történik. Az anyagfelhasználás vizsgálatával megmutattuk, hogy ezek az ovális kupolák azonos biztonsággal és alaprajzi területtel akár anyagtakarékosabban is épülhetnek, mint a hagyományos gömbkupolák. A támaszerő-eloszlások vizsgálata elengedhetetlen a kupola viselkedésének megismeréséhez. Ezzel kapcsolatban láthattuk, hogy kontinuum-moddal ovális alaprajz esetén az alaprajzi görbe illesztési pontjainál kiugró értékeket kapunk, amelyek azonban nem jelennek meg a diszkrét felépítésű modellekben. A támaszsüllyedések hatása gyakorlati szempontból igen fontos lehet olyan esetekben, ahol a már meglévő boltozat körüli talajkörnyezetet szeretnénk befolyásolni, kiemelni stb. A többféle támaszsüllyedési mód vizsgálata alapján minden esetben a legveszélyesebb a szimmetrikus süllyedési mód, illetve azon belül is a spicceknél történő süllyedés. Részletesen bemutattuk az önsúly és féloldalas terhelés következtében kialakuló különböző tönkremeneteli módokat.

Ezek a vizsgálatok és eredményeink reményeink szerint segítséget nyújtanak a gyakorló mérnökök számára az ovális alaprajzú falazott boltozatok mechanikai viselkedésének megismeréséhez.

IRODALOM

- (Bagi, 2007) Bagi, K., 2007. A diszkrét elemek módszere. *Egyetemi jegyzet*. BME, Budapest, ISBN 978-963-420-929-4
- (Cundall, 1971) Cundall, P.A., 1971. A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky

rock systems. *Proceedings of the Symposium on Rock Fracture (ISRM)*. vol. 1, paper II-8. Nancy, France.

- (Cundall és Hart, 1992) Cundall, P.A., Hart, D.H., 1992. Numerical modelling of discontinua. *Journal of Engineering Computations*, vol. 9, pp. 101–113
- (Heyman, 1995) Heyman, J., 1995. The Stone Skeleton. *Structural Engineering of Masonry Architecture*. Cambridge: Cambridge University Press.
- (Huerta, 2004) Huerta, S., 2004. Arcos, bóvedas y cúpulas. *Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica*. Madrid: Instituto Juan de Herrera.
- (Huerta, 2007) Huerta, S., 2007. Oval domes: History, geometry and mechanics. *Nexus Network Journal*, 9(2), pp. 211–248.
- (Lemos, 2007) Lemos, V.J.V., 2007. Discrete Element Modeling of Masonry Structures. *International Journal of Architectural Heritage*. 1: 2, pp.190–213.
- (Simon és Bagi, 2012) Simon, J., Bagi, K., 2012. Discrete element analysis of the minimum thickness of oval masonry domes. *International Journal of Solids and Structures*, under review
- (Simon, 2012) Simon, J., 2012. Ovális alaprajzú falazott boltozatok mechanikai vizsgálatának lehetőségei. *Magyar Építőipar*. 62(4), pp. 144–148.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A bemutatott kutatások az OTKA 100770 projekt támogatásával készültek.