



***Ovális alaprajzú falazott boltozatok
mechanikájának diszkrét elemes vizsgálata***

Készítette : Simon József
(MSc Építőmérnök hallgató)

Konzulensek : Dr. Bagi Katalin és Dr. Bojtár Imre
Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék



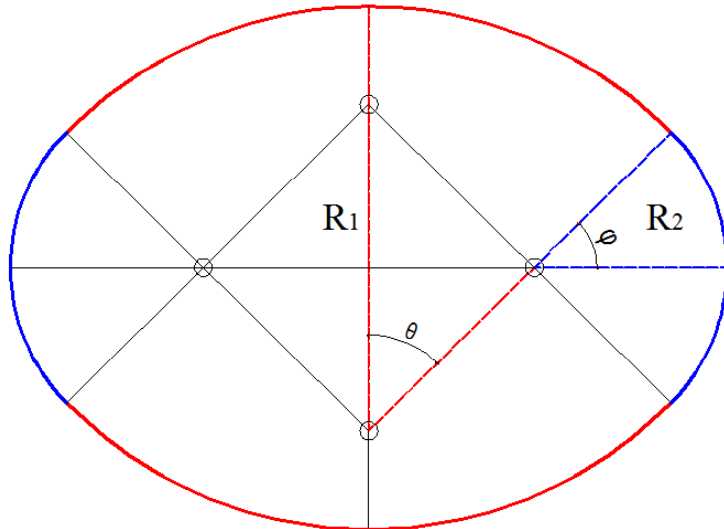
Az ovális kupola

Az építészetben alkalmazott oválisok :

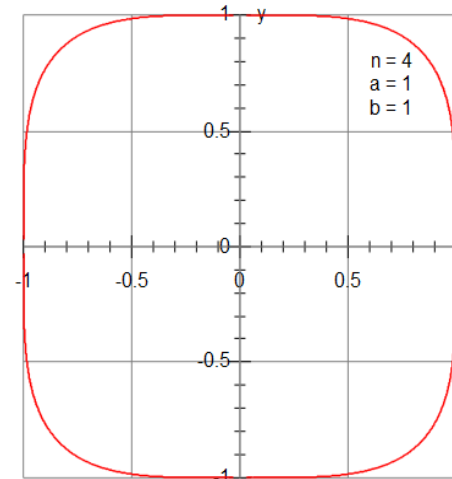
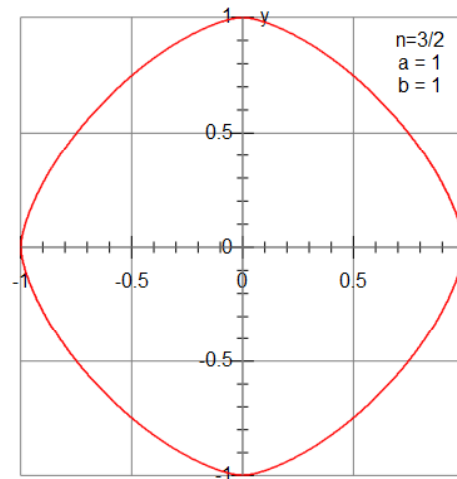
- konvex, zárt, folytonos görbék
- legalább egyszeresen differenciálhatóak
- minimum egy szimmetriatengelyük van
- speciális esetük az ellipszis, illetve a kör

Előállítás

Körívek illesztésével

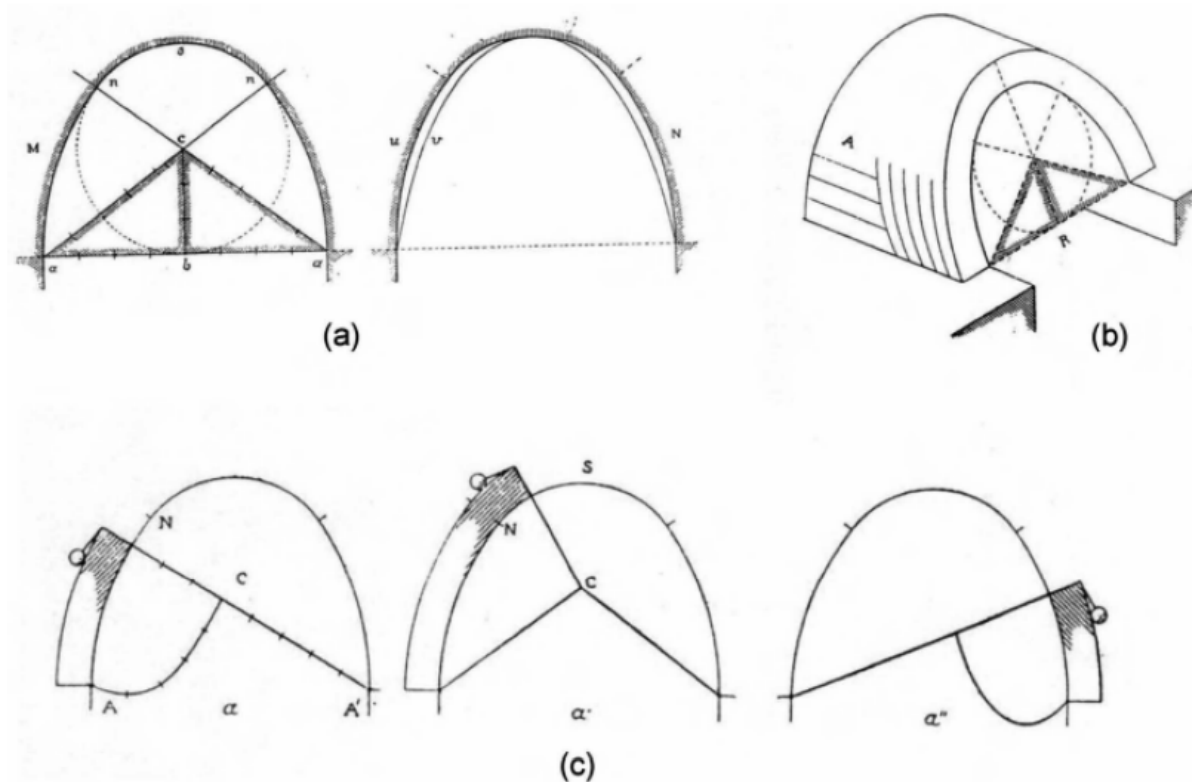


Matematikailag pontosan definiálva



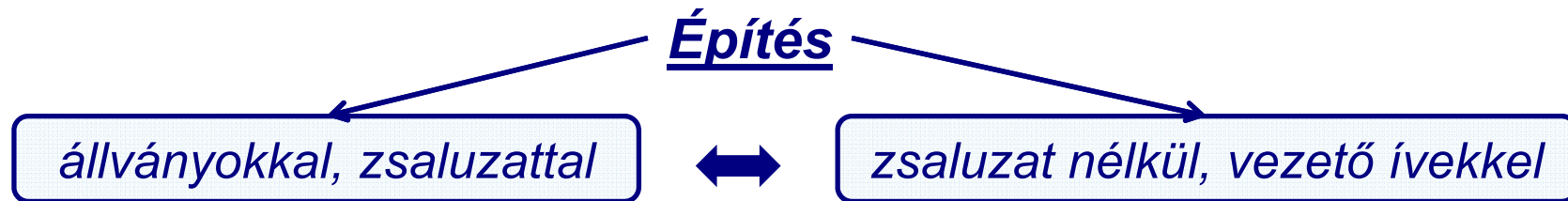
Ovális előállítás körívek illesztésével

- *minimum 4 körívből lehet létrehozni*
- *több körív, sugár, középpont*
- *illesztési pontban azonos érintő*
- *állandó görbületű szakaszok*



Falazott ovális alaprajzú kupolák kitűzése, kivitelezése

- *Belső felület definiálása*

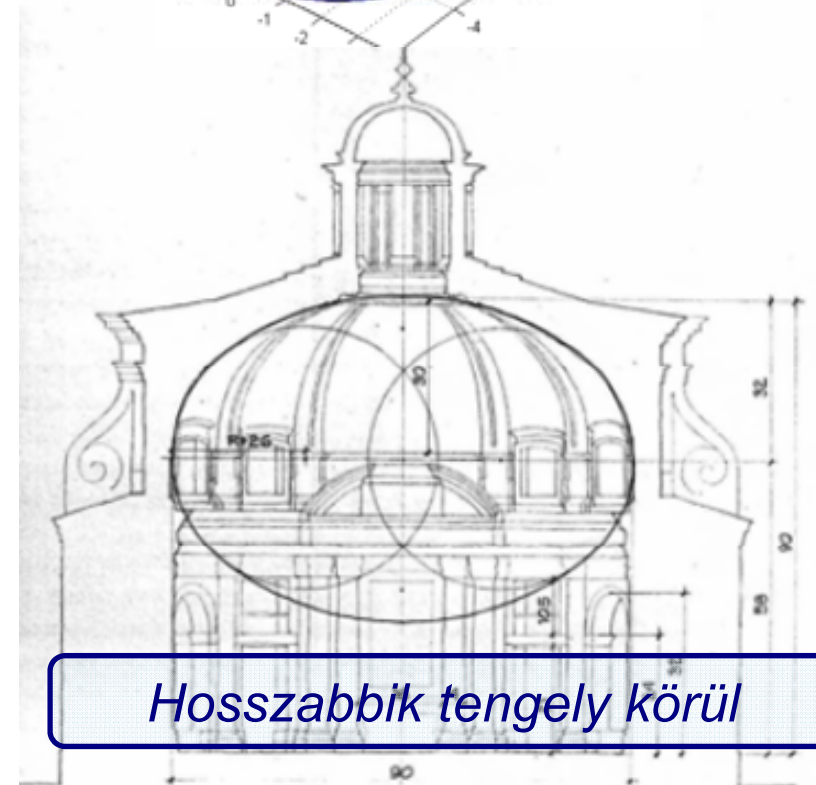
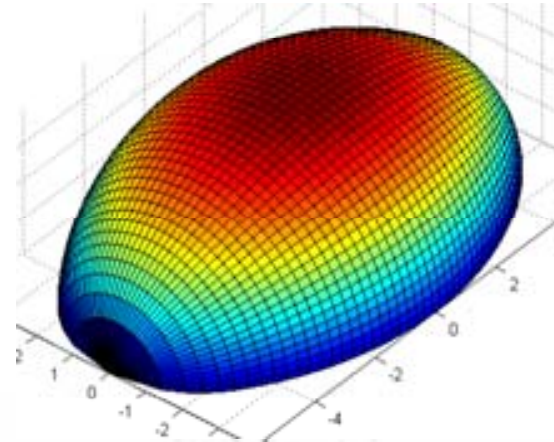
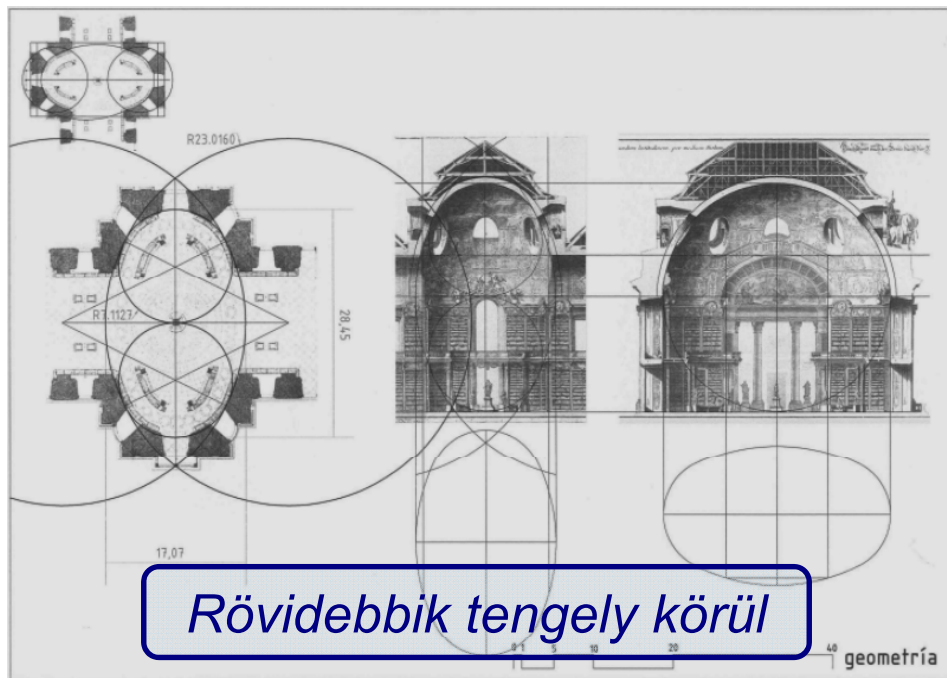
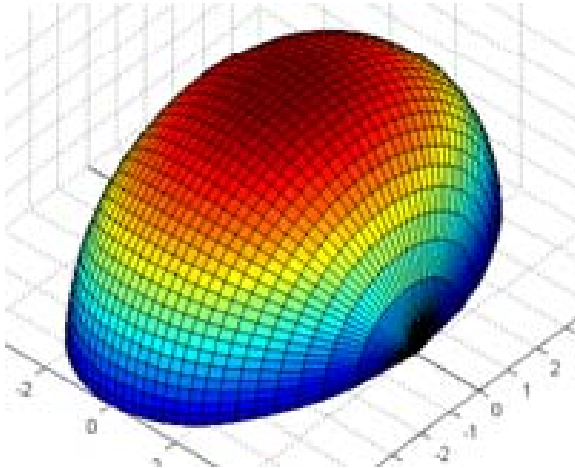


- *felület definiálására*
- *több elemű zsaluzat*
- *bontás több ütemben*

- *felület definiálására*
- *gyűrű zárás után teherhordó*
- *elemek hátrahorgonyozása*
- *bordarendszer + kifalazás*
- *vasalatok alkalmazása*

- **Forgásfelületek** alkalmazása
- *Alaprajzi ovális görbe megforgatása*
- *Megforgatás : rövidebbik vagy hosszabbik alaprajzi tengely körül*

Alaprajzi görbe megforgatása



Falazott kupolák anyaga

Építőelem

Kő

20-200
23-43
5-100
0.2-0.3
2000-2900

Egyirányú nyomószilárdság	$[N/mm^2]$
Súrlódási szög	$[^\circ]$
Rugalmassági modulus	$[Gpa]$
Poisson-tényező	$[-]$
Térfogatsűrűség	$[kg/m^3]$

Tégla

1-100
30-40
10-24
0.2-0.3
650-2500

Kötés

Habarccsal

Húzószilárdság

$< 1 N/mm^2$

Habarcs nélkül

0

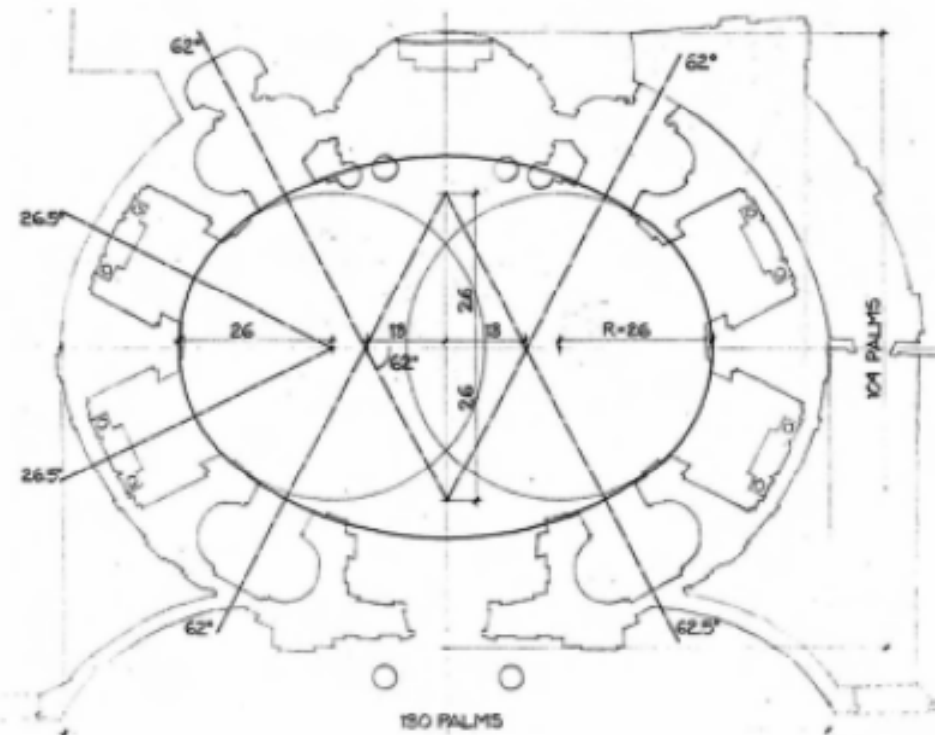
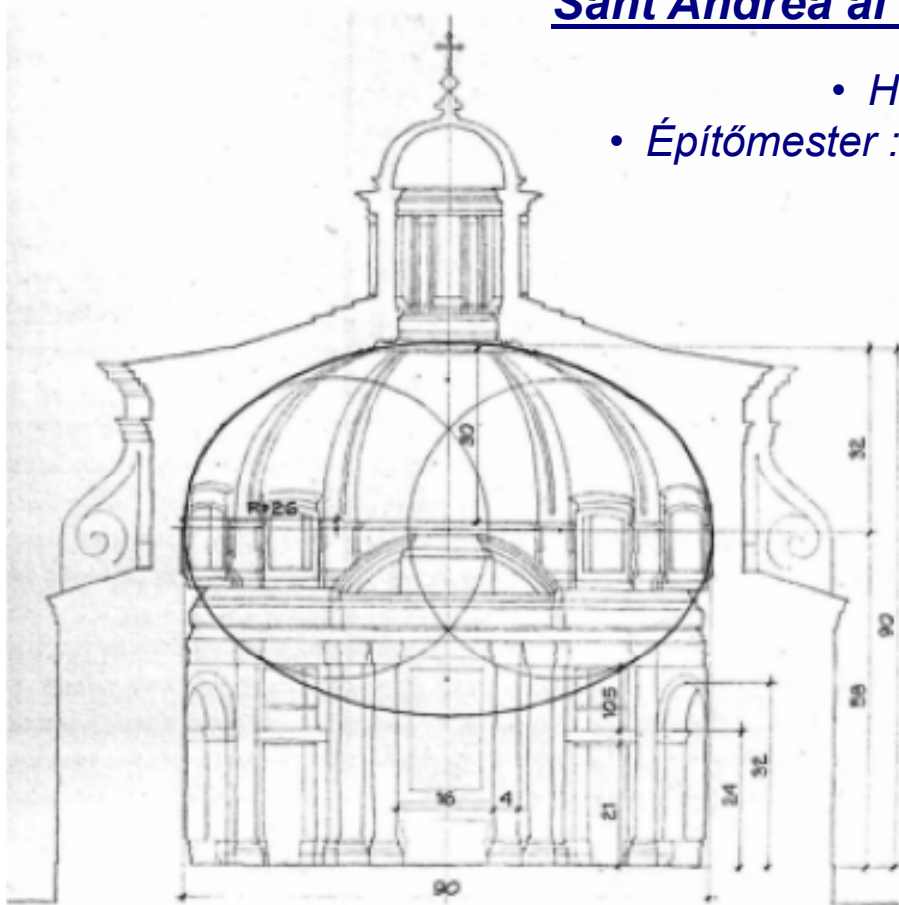
- Inhomogén, komplex szerkezetek
- Diszkrét elemek együttese

Építészettörténeti áttekintés 1.

- *Középkori román stílusú templomok*
- *Kiteljesedés : **reneszánsz és barokk***
- *Híres építőmesterek : Giovanni Lorenzo Bernini és Francesco Borromini*

Sant'Andrea al Quirinale (1658-1670)

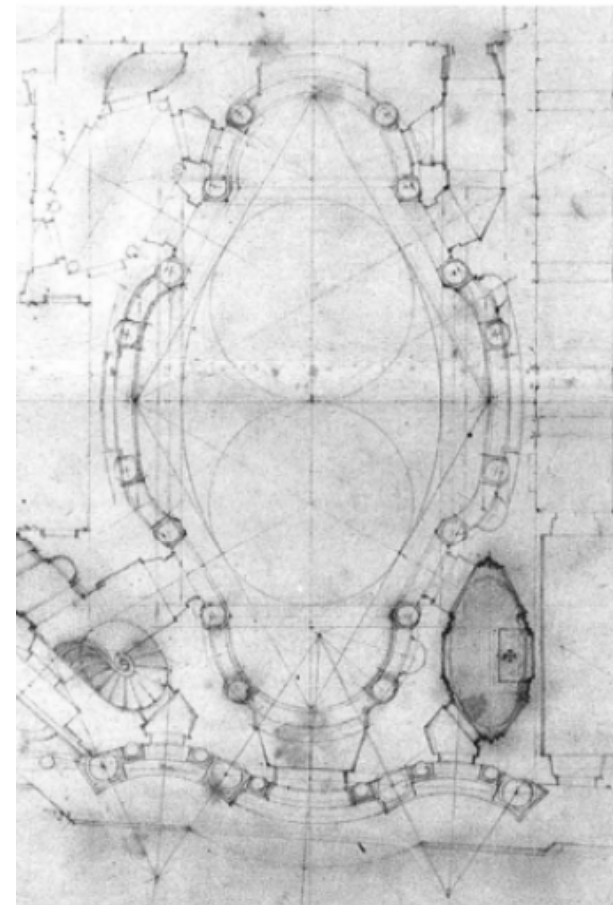
- *Hely : Róma*
- *Építőmester : Gian Lorenzo Bernini*



Építészettörténeti áttekintés 2.

San Carlo alle Quattro Fontane (1638-1641)

- Hely : Róma
- Építőmester : *Francesco Borromini*



Építészettörténeti áttekintés 3.

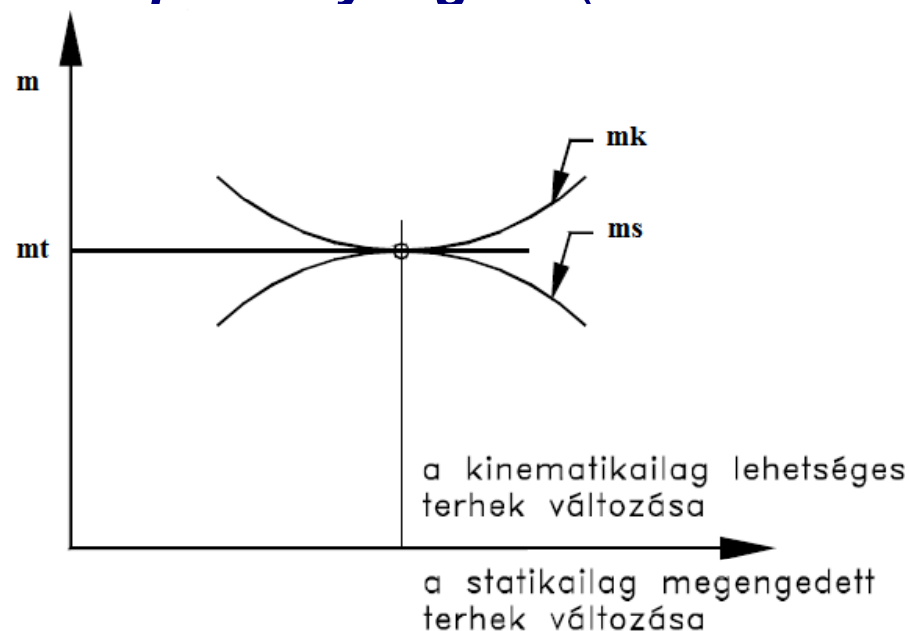
Santuario di Vicoforte (1596-1884)

- Hely : Vicoforte
- Építőmester : Ascanio Vitozzi és Francesco Gallo
- **Európa legnagyobb ovális kupolája (25 m * 36 m)**



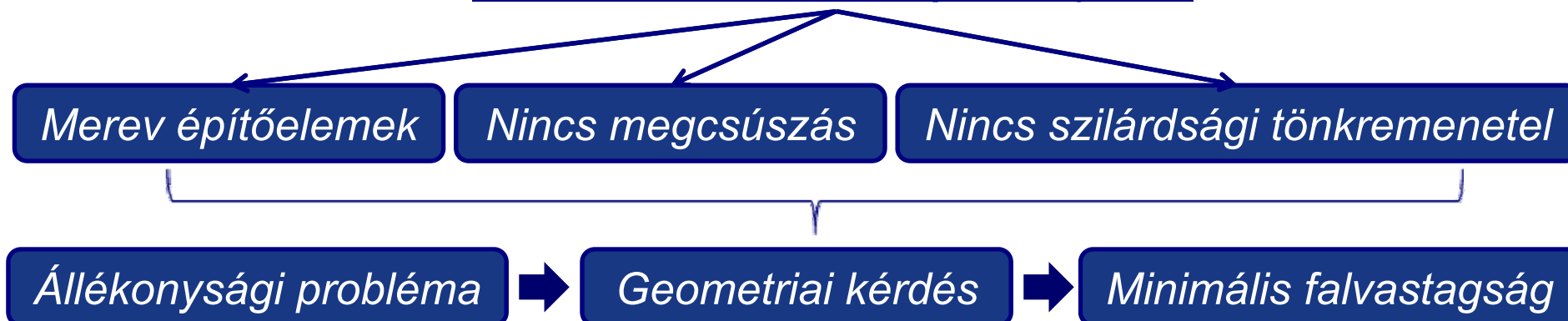
Falazott kupolák mechanikai vizsgálata

- **Nyomásfelület** : kapcsolati eredők támadáspontjának összekötése
- Összeomlás feltétele : csuklós mechanizmus
- Kezdetben ***rugalmasságtan*** szerint
 - pillanatnyi állapot
 - membránelmélet
 - vékony, mérsékelten vastag, vastag héjak hajlítási elmélete
 - megoldás erősen függ az anyagjellemzőktől és peremfeltételektől
- Törési állapot >> ***képlékenységtan*** (statikai v. kinematikai tétel)

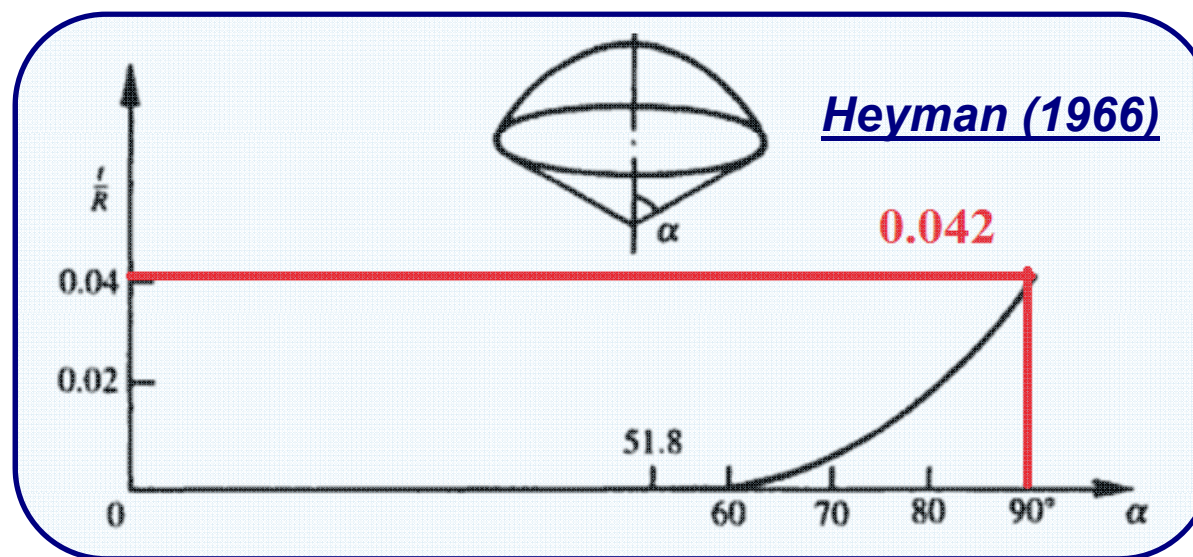


Heyman-féle minimális falvastagság

Klasszikus elmélet (Jacques Heyman)



Gömbkupolára levezetett megoldása statikai módszerrel



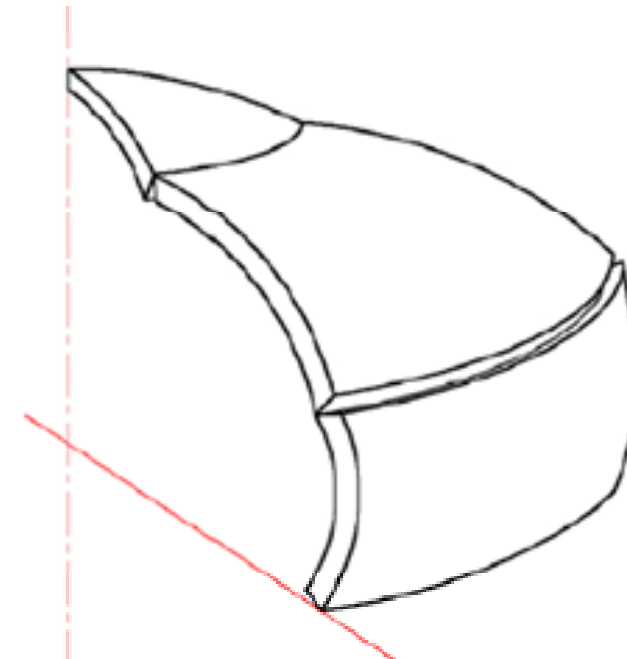
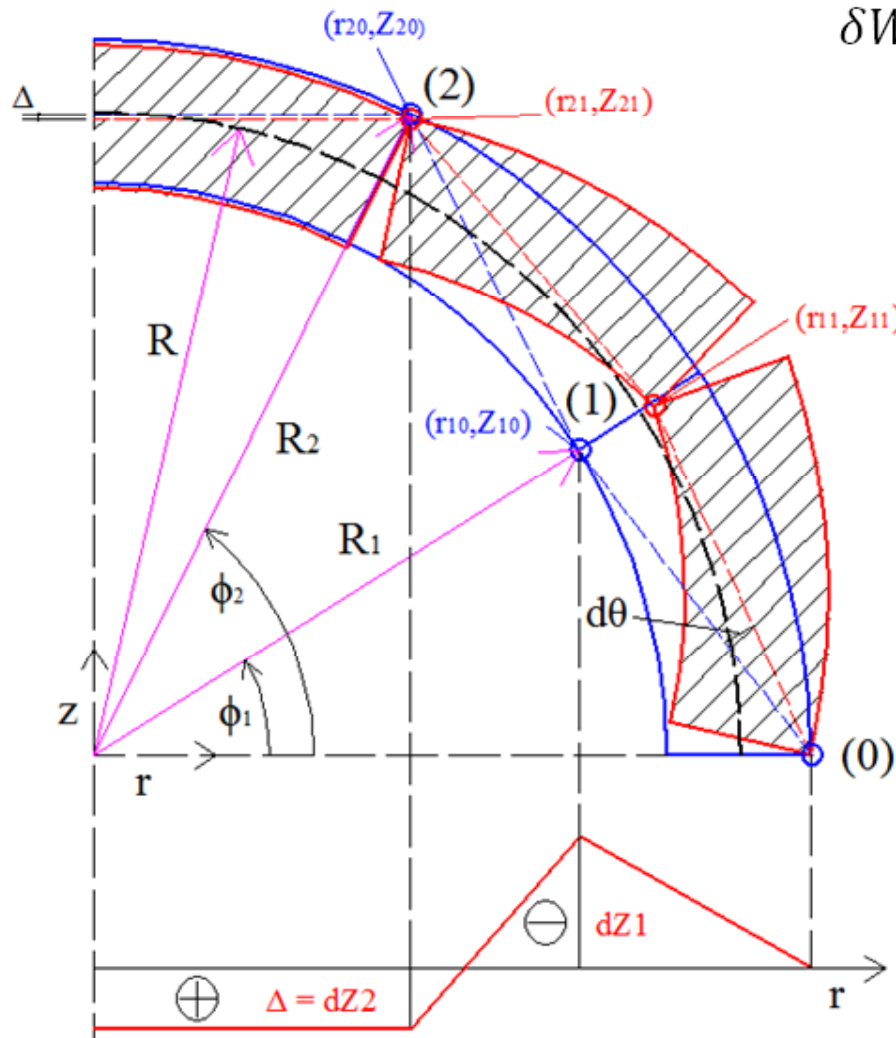
Gömbkupolára vonatkozó saját megoldásom kinematikai módszerrel

Virtuális elmozdulások tétele

$$\delta W_k = \mathbf{f}^T \delta \mathbf{e} + \int_{(S)} \mathbf{q}^T \delta \mathbf{u} dS + \int_{(V)} \mathbf{g}^T \delta \mathbf{u} dV$$

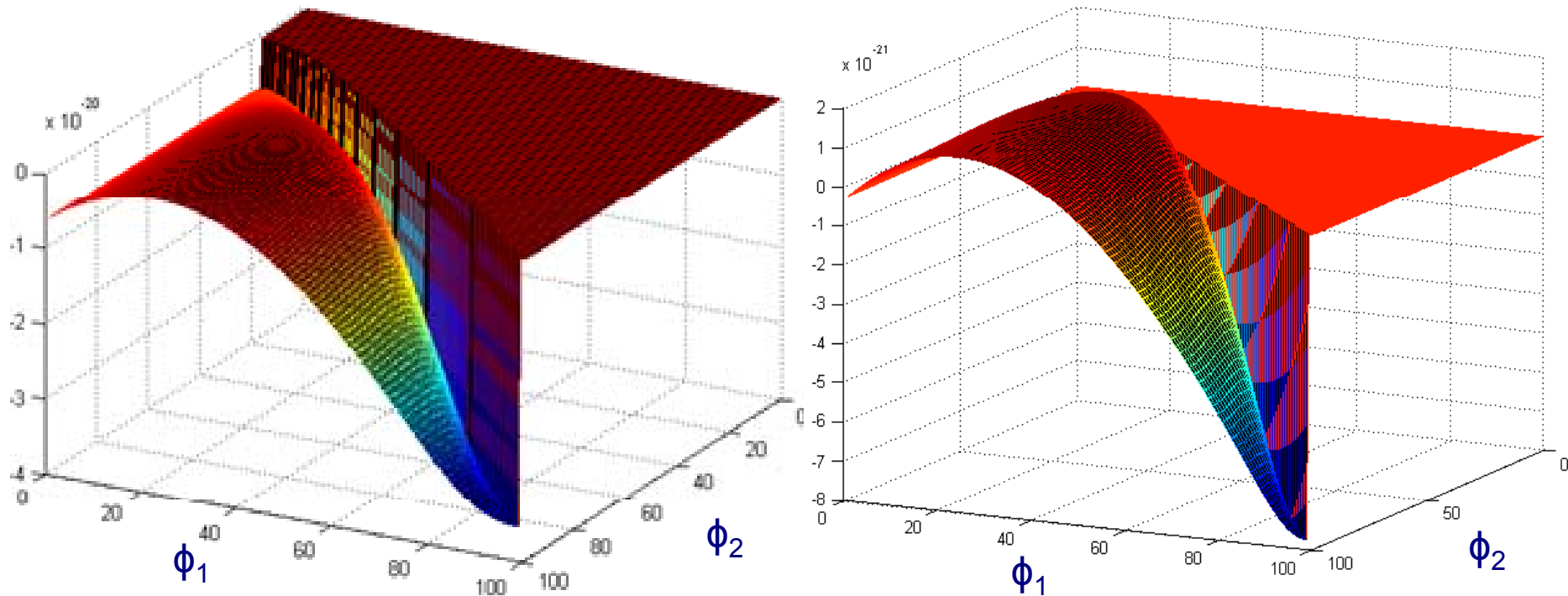
$$\delta W_b = - \int_{(V)} \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV$$

$$\delta W = \delta W_k = \int_{(V)} \mathbf{g}^T \delta \mathbf{u} dV = 0$$



- ϕ_1 és ϕ_2 paraméterek
- virtuális munka kiszámítása

Gömbkupolára vonatkozó saját megoldásom kinematikai módszerrel



- ϕ_1 és ϕ_2 paraméterek az x és y tengelyeken
- virtuális munka ábrázolása felületként fix falvastagság esetére
- az éppen $z=0$ síkot érintő felületet keressük $> t_{mim}$

$$t/R = 4,27\%$$

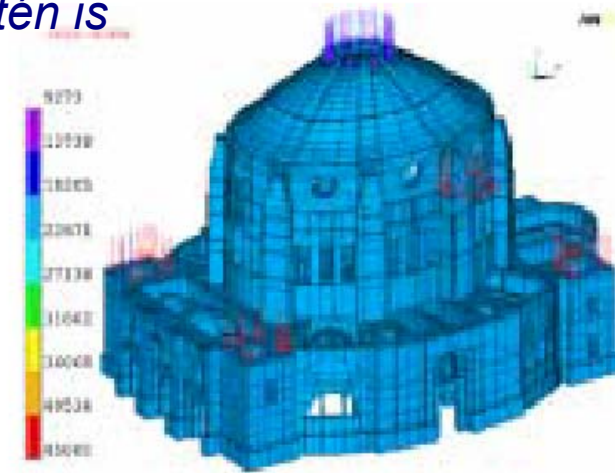
- konzervatív becslés
- eltérés oka lehet : véges nagyságú virtuális elmozdulásrendszer felvétele

Numerikus megoldások : VEM

- *VEM : kontinuum és diszkrét felépítésű modellek esetén is*

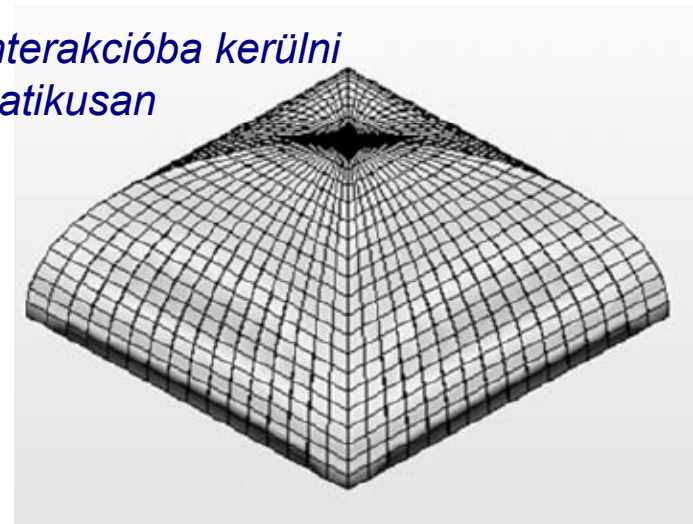
- **Kontinuum modell**

- rugalmas vizsgálatok
- támaszerők nagysága, iránya merev támasz esetére
- feszültségek nagysága
- húzófeszültségek, lehetséges repedések helye



- **Diszkrét felépítésű modell**

- kontakt elemek alkalmazása
- előre kell definiálni, hogy melyik elem melyikkel fog interakcióba kerülni
- nem szakadhat fel és keletkezhets új kapcsolat automatikusan
- repedések megnyílása utáni viselkedés
- feszültségátrendeződés
- összeomlás modellezése



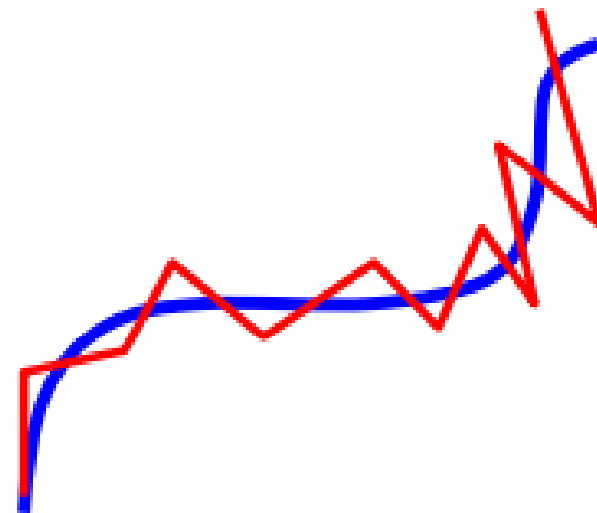
Körülményes és nehézkes!

Diszkrét elemes modell

- egymástól egyértelműen elkülönülő elemek;
- önálló elmozdulási szabadságfok;
- képes követni véges nagyságú eltolódást, elfordulást, alakváltozást;
- elemek között új kapcsolatok jöhetnek létre, meglévők szűnhetnek meg;

Modellezés lépései

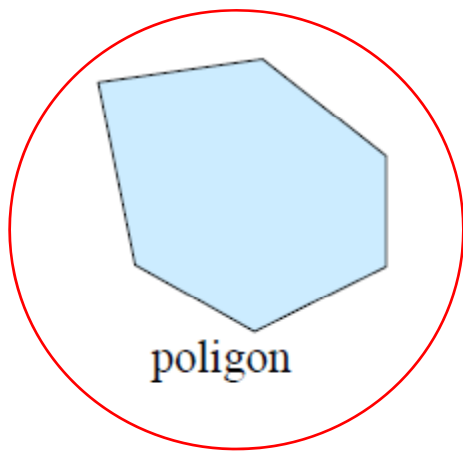
- Kiindulási geometria megadása (!!!)
- Anyagi és kapcsolati jellemzők definiálása
- Terhek megadása
- A terhelési folyamat szimulálása



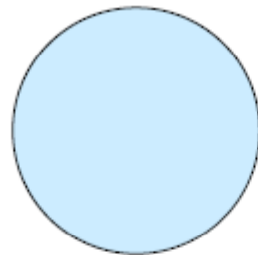
DEM : Kiindulási geometria

A modellezés első és talán legnehezebb lépése!

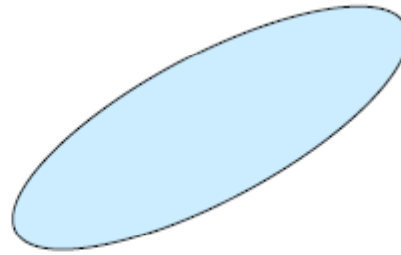
Alkalmazható elemek az egyes programokban



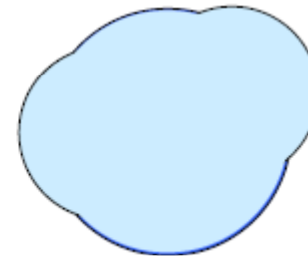
poligon



kör



ellipszis



körökből összetett elem

- *Falazott szerkezetek esetén : poligon, poliéder elemek*
- *Megadása : sarokpontok koordinátaival*
- *A koordináták ismerete, kiszámítása jelenthet nehézséget*

DEM : Anyagi jellemzők

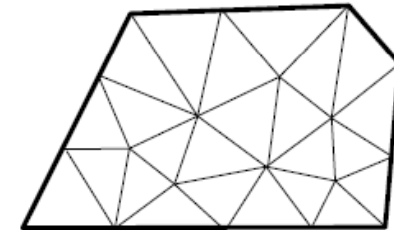
Elemek

Merev

- *modell viselkedése > kapcsolati jell.*
- *anyagjellemző : sűrűség*

Deformálható

- *belső háló létrehozása (szimplexek)*
- *anyagjellemzők megadása*



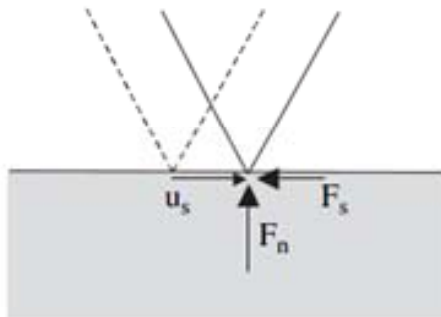
Anyagmodellek :

- *lin. rugalmas, izotróp (K,G)*
- *lineáris, képlékeny*
- *egyedi anyagmodell*

DEM : Anyagi és kapcsolati jellemzők

Kapcsolat

Merev

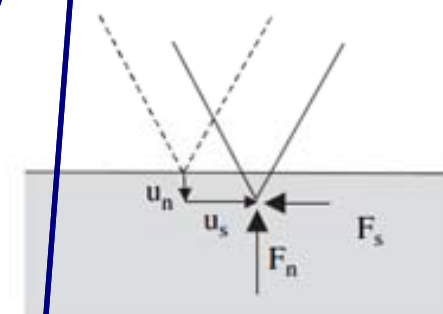


(a)

Coulomb-féle súrlódásos modell

$$\begin{aligned} N^c &= k_N^c \delta_N^c \quad N^c \leq 0 \\ \begin{bmatrix} T_t^c \\ T_w^c \end{bmatrix} &= k_T^c \begin{bmatrix} \delta_t^c \\ \delta_w^c \end{bmatrix} \\ \sqrt{(T_t^c)^2 + (T_w^c)^2} &\leq -\nu N^c \end{aligned}$$

Deformálható



(b)

Kapcsolati húzó és nyírási szilárdsággal

$$\begin{aligned} N^c &= k_N^c \delta_N^c \quad ; \quad N^c \leq N_{max} , \\ \begin{bmatrix} T_t^c \\ T_w^c \end{bmatrix} &= k_T^c \begin{bmatrix} \delta_t^c \\ \delta_w^c \end{bmatrix} \quad ; \quad \sqrt{(T_t^c)^2 + (T_w^c)^2} \leq T_{max} . \end{aligned}$$

Egyéb modellek : időfüggő, fellazuló, képlékeny, egyedileg definiált stb.

DEM : Terhek megadása, terhelési folyamat szimulálása

Teher

- erő jellegű (koncentrált, felületi, térfogati)
- kinematikai teher (kezdeti sebesség, gyorsulás, megtámasztás esetén 0!)

Megoldási módszerek

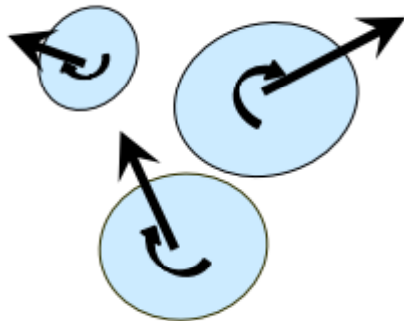
Kvázi-statikus

$$0 = f(\Delta u)$$

$$K\Delta u = \Delta f$$

Merev elem

elem referenciapontjára



Időintegrálásos

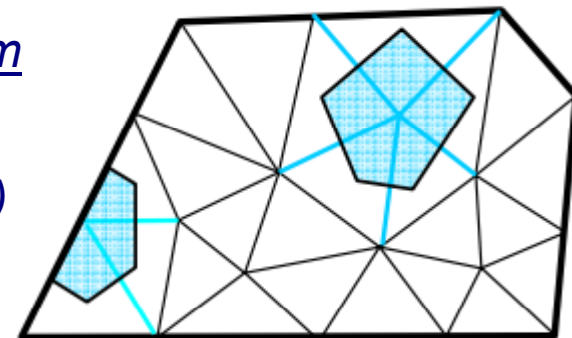
$$M(t)a(t) = f(t, u(t), v(t))$$

Implicit

Explicit

Deformálható elem

*Csomópontokra
(Voronoi-cellákra)*



DEM : Explicit időintegrálásos megoldási módszer

Tipikusan a centrális differenciák módszerének alkalmazása

$$0 = f(t_i, \mathbf{u}_{i+1}(t), \mathbf{v}_i(t)) - \mathbf{M}_i \mathbf{a}_i(t)$$

$$\mathbf{M}_i^p \frac{\mathbf{v}_{i+1/2}^p - \mathbf{v}_{i-1/2}^p}{\Delta t} = \mathbf{f}_i^p \quad \left| \quad \mathbf{v}_{i+1/2}^p = \mathbf{v}_{i-1/2}^p + \Delta t (\mathbf{M}_i^p)^{-1} \mathbf{f}_i^p \quad \right| \quad \mathbf{u}_{i+1}^p = \mathbf{u}_i^p + \Delta t \mathbf{v}_{i+1/2}^p$$

Elmozdulásokat túlbecsüli > nagy belső erők > oszcillálhat a megoldás körül!!

Csillapítások > gyorsabb konvergencia > energia disszipáció modellezése

„Lokális” csillapítás

Kapcsolati viszkózus csillapítás

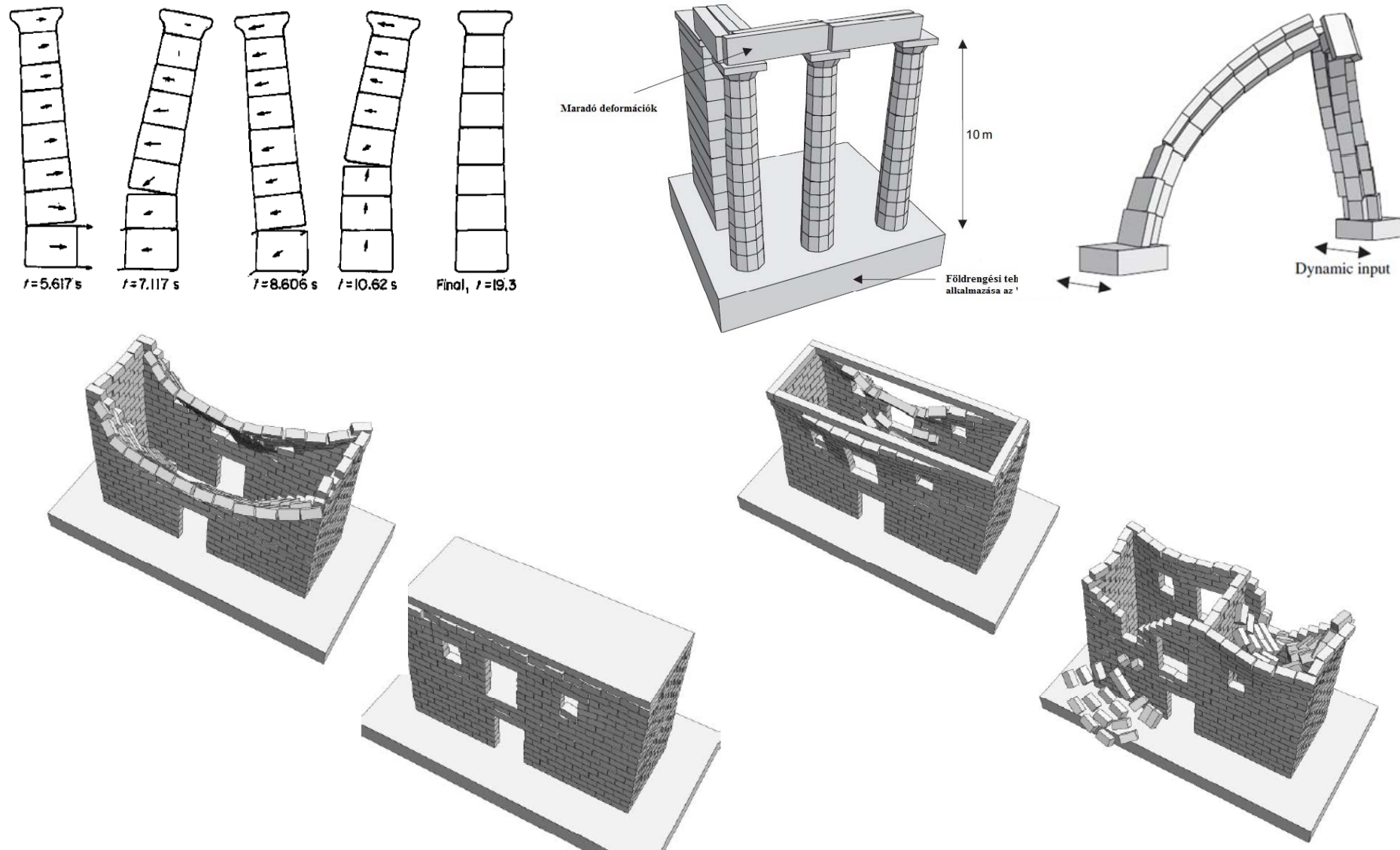
$$|D_N| = c_N \cdot v_{n,i-1/2}^c$$

- kapcsolati elmozdulási sebességgel arányos, ellentétes irányú erő
- valós disszipációt modellez

- elem sebességével ellentétes irányú erő
- elemre ható erővel arányos
- legkevésebbé egyensúlyban lévő elemre a legnagyobb

$$\mathbf{v}_{x,i+1/2}^p = \mathbf{v}_{x,i-1/2}^p + \Delta t \cdot \frac{1}{m^p} \left(\mathbf{f}_{x,i}^p - \alpha \cdot \left| \mathbf{f}_{x,i}^p \right| \cdot \frac{\mathbf{v}_{x,i-1/2}^p}{\left| \mathbf{v}_{x,i-1/2}^p \right|} \right)$$

DEM : Példák falazott szerkezetek vizsgálatára



Saját vizsgálatok összefoglalása

1. Heyman-féle minimális falvastagság általánosítása ovális alaprajzú falazott kupolákra

1.a Az általános ovális felület matematikai definiálása

1.b Numerikus modellt felépítő algoritmus

1.c Numerikus modell kalibrációja

1.d Minimális falvastagságok meghatározása numerikus modell alapján

1.e Ovális kupolák anyagfelhasználása

Módszer : DEM

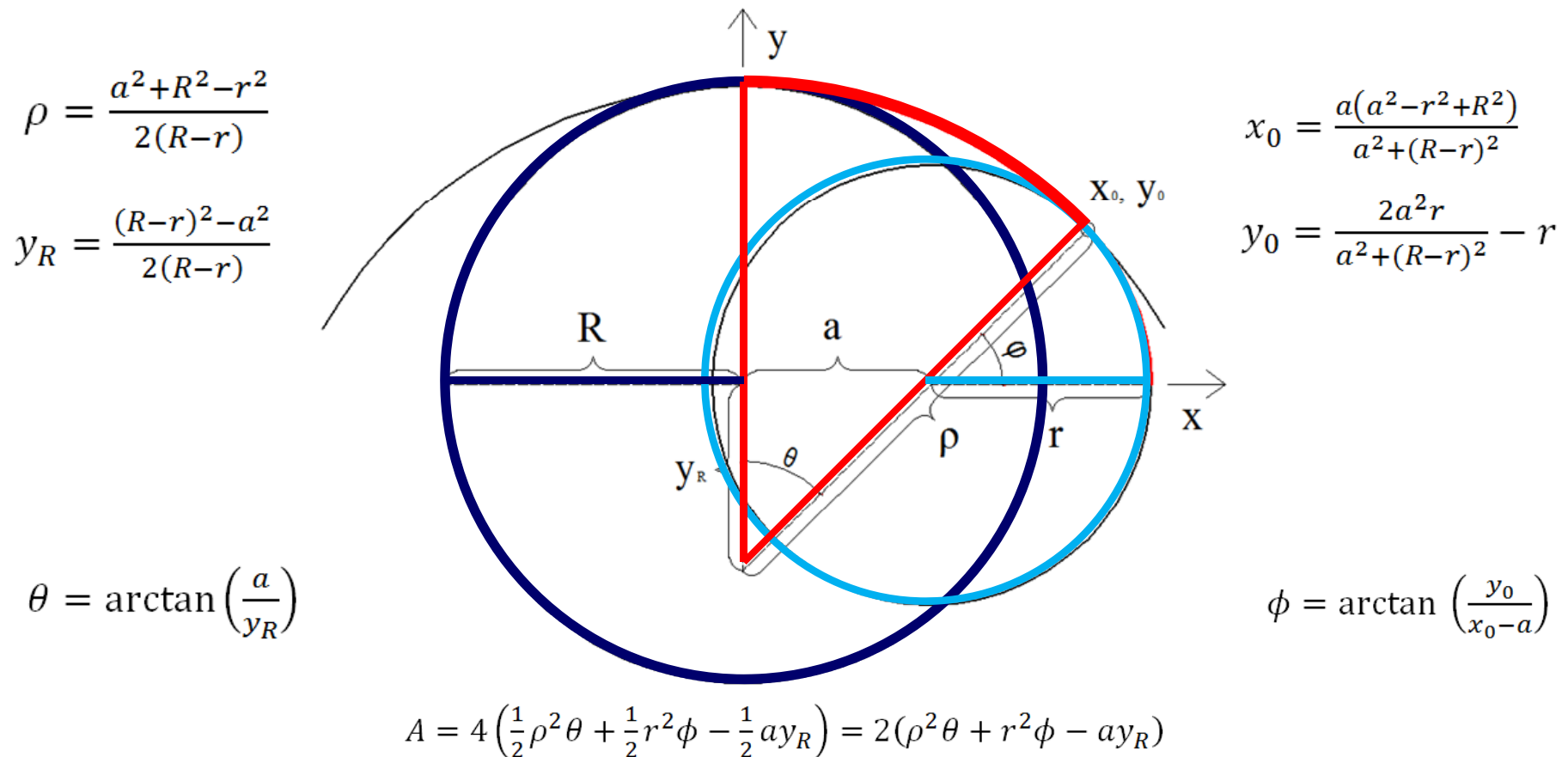
2. Törésképek, repedésekek vizsgálata

Módszer : DEM

3. Támaszerők eloszlásának vizsgálata

Módszer : DEM és VEM

1.a Az általános ovális felület matematikai definiálása

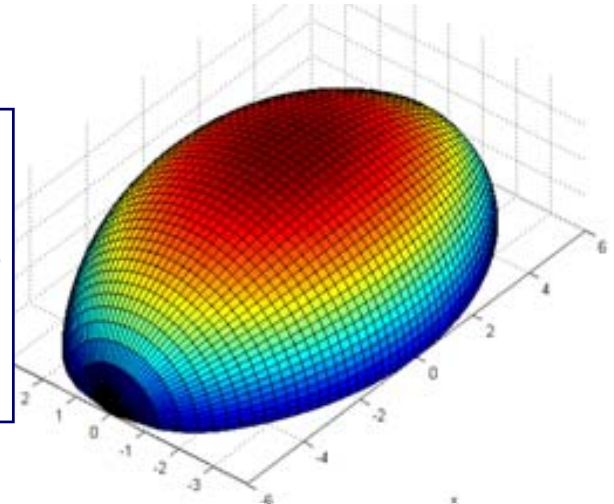


$$y = f(x) = \begin{cases} \pm(\sqrt{\rho^2 - x^2} + y_R) & \text{ha } x \geq -x_0 \text{ és } x \leq x_0 \\ \pm(\sqrt{r^2 - (x - a)^2}) & \text{ha } x > x_0 \\ \pm(\sqrt{r^2 - (x + a)^2}) & \text{ha } x < -x_0 \end{cases}$$

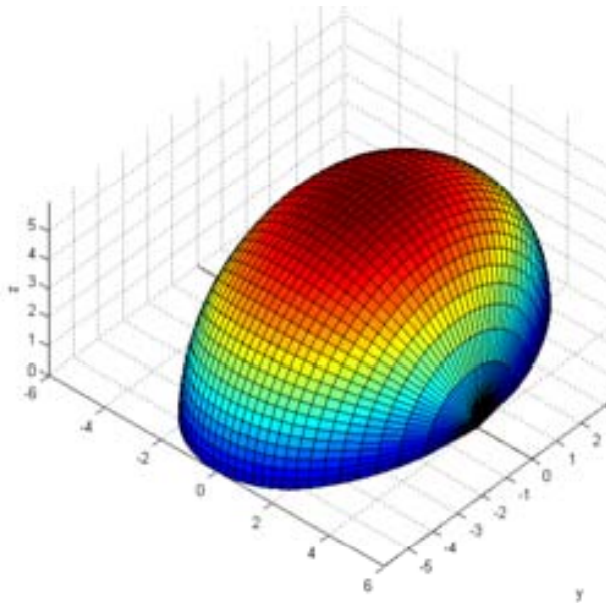
1.a Az általános ovális felület matematikai definiálása

1. Típusú kialakítás

$$z(x, y) = \begin{cases} \sqrt{(\sqrt{\rho^2 - x^2} + y_R)^2 - y^2} & \text{ha } x \geq -x_0 \text{ és } x \leq x_0 \\ \sqrt{r^2 - (x - a)^2 - y^2} & \text{ha } x > x_0 \\ \sqrt{r^2 - (x + a)^2 - y^2} & \text{ha } x < -x_0 \end{cases}$$



2. Típusú kialakítás



$$z(x, y) = \begin{cases} \sqrt{(\sqrt{r^2 - x^2} + a)^2 - y^2} & \text{ha } x \geq -x_0 \text{ és } x \leq x_0 \\ \sqrt{\rho^2 - (x - y_R)^2 - y^2} & \text{ha } x > x_0 \\ \sqrt{\rho^2 - (x + y_R)^2 - y^2} & \text{ha } x < -x_0 \end{cases}$$

1.b Numerikus modellt felépítő algoritmus

3DEC : matematikai
függvények hiánya

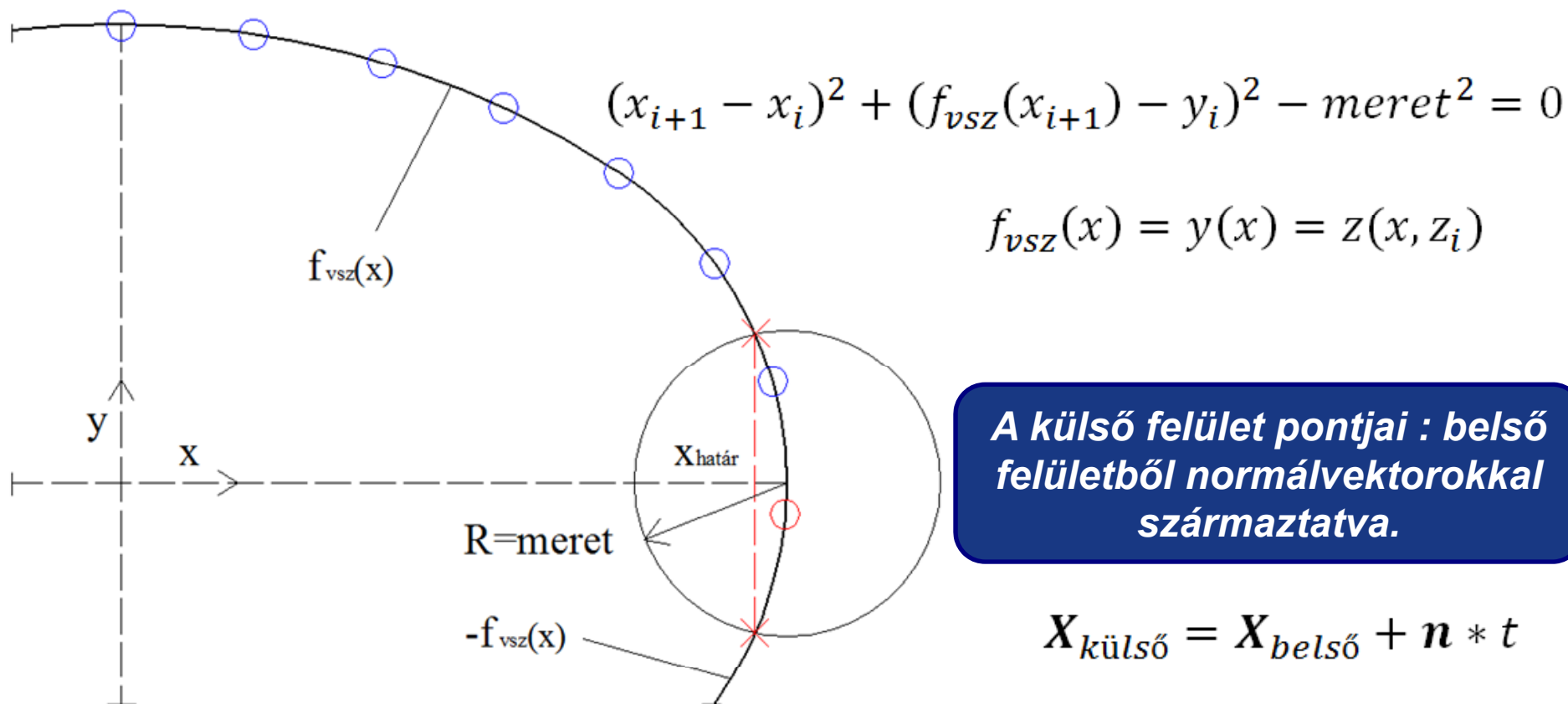


Komplex
algoritmus (Matlab)



Input file generálása
3DEC számára

Adott magasságokban az építőelemek helyének kiosztásának algoritmus.

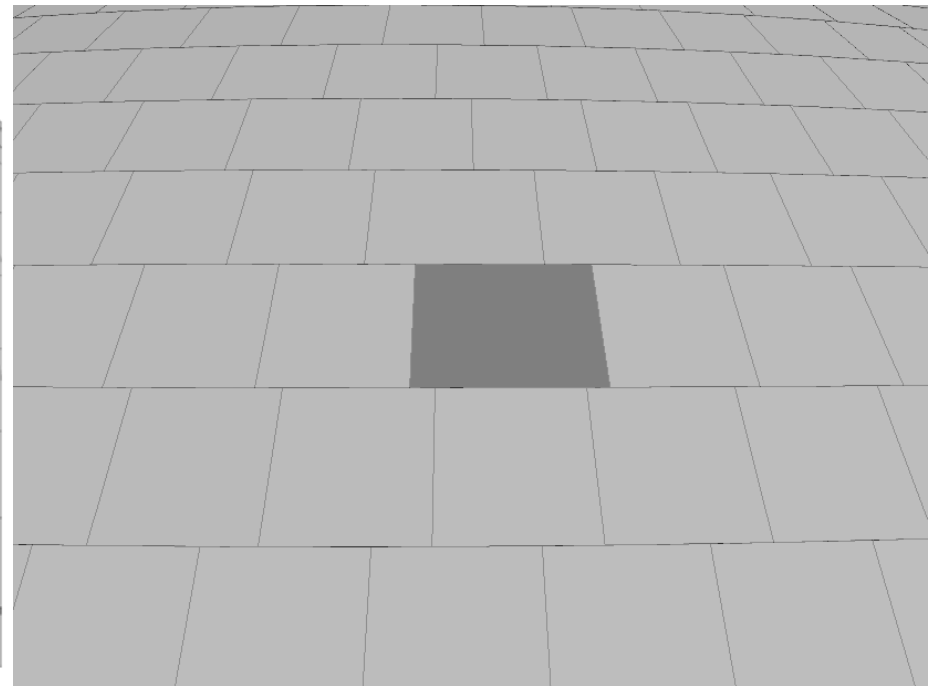
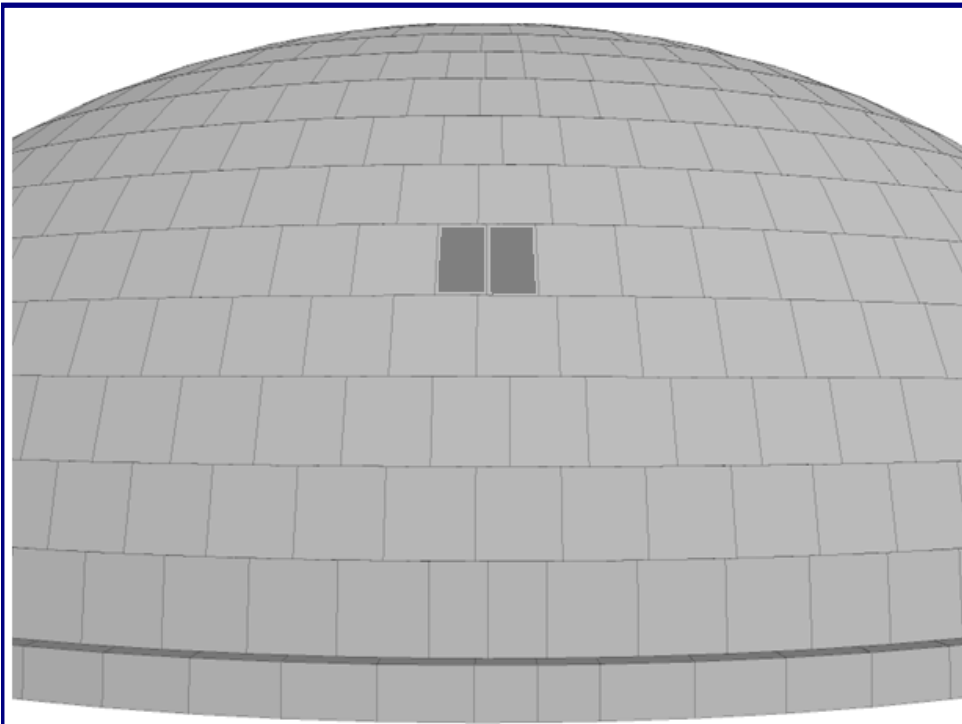


1.b Numerikus modellt felépítő algoritmus

Részletek

Záró kövek darabolása

Fugák egymásra kerülése

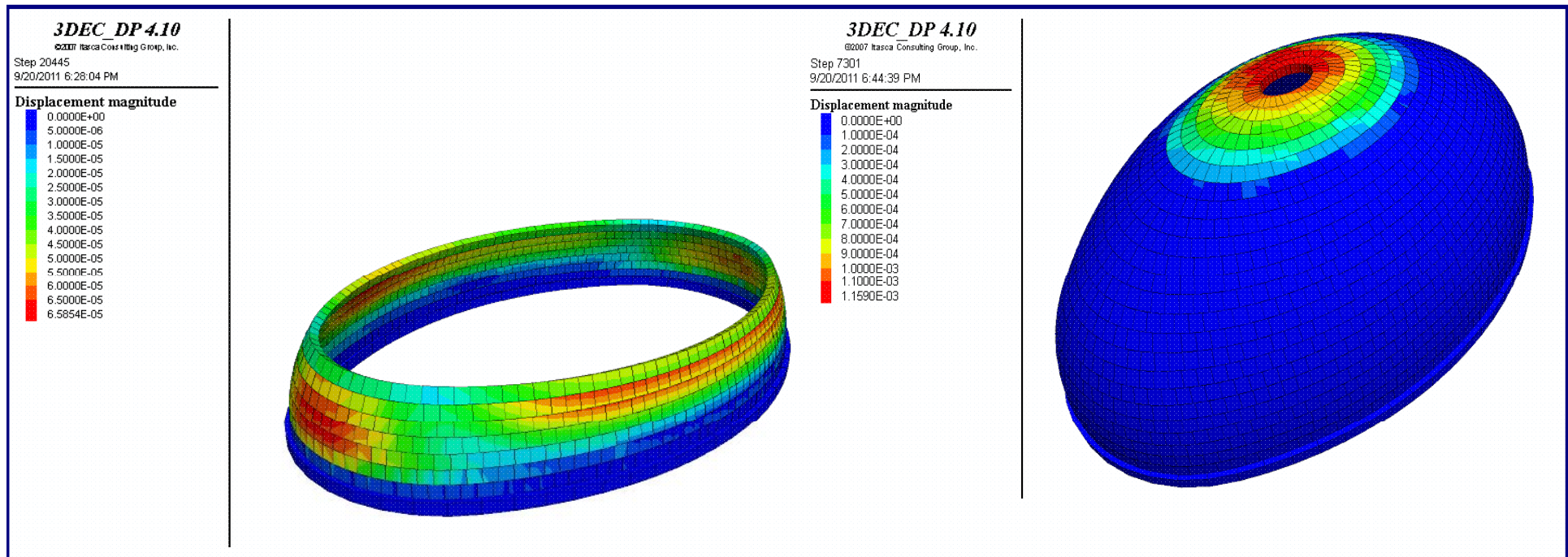


1.b Numerikus modellt felépítő algoritmus

Építési mód

Zsaluzás nélkül

Zsaluzással



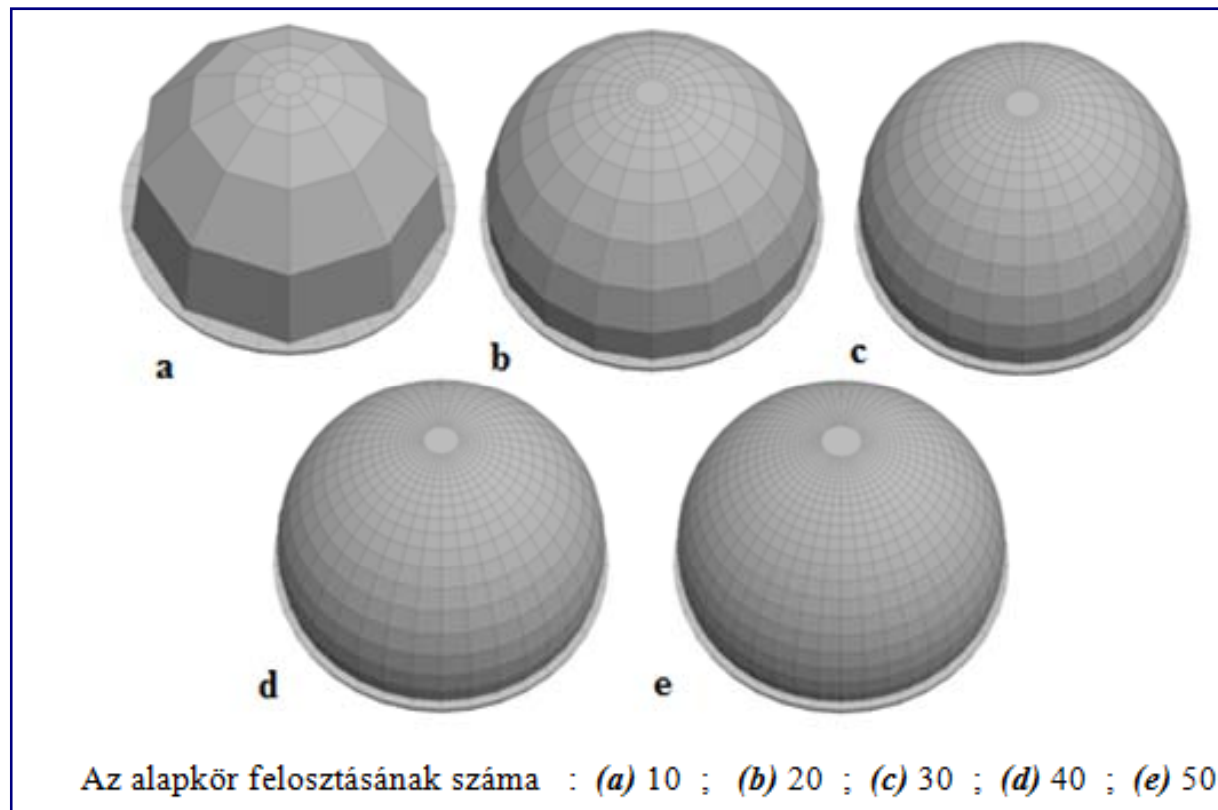
1.c Numerikus modell kalibrációja

Cél

Mérethatás vizsgálata

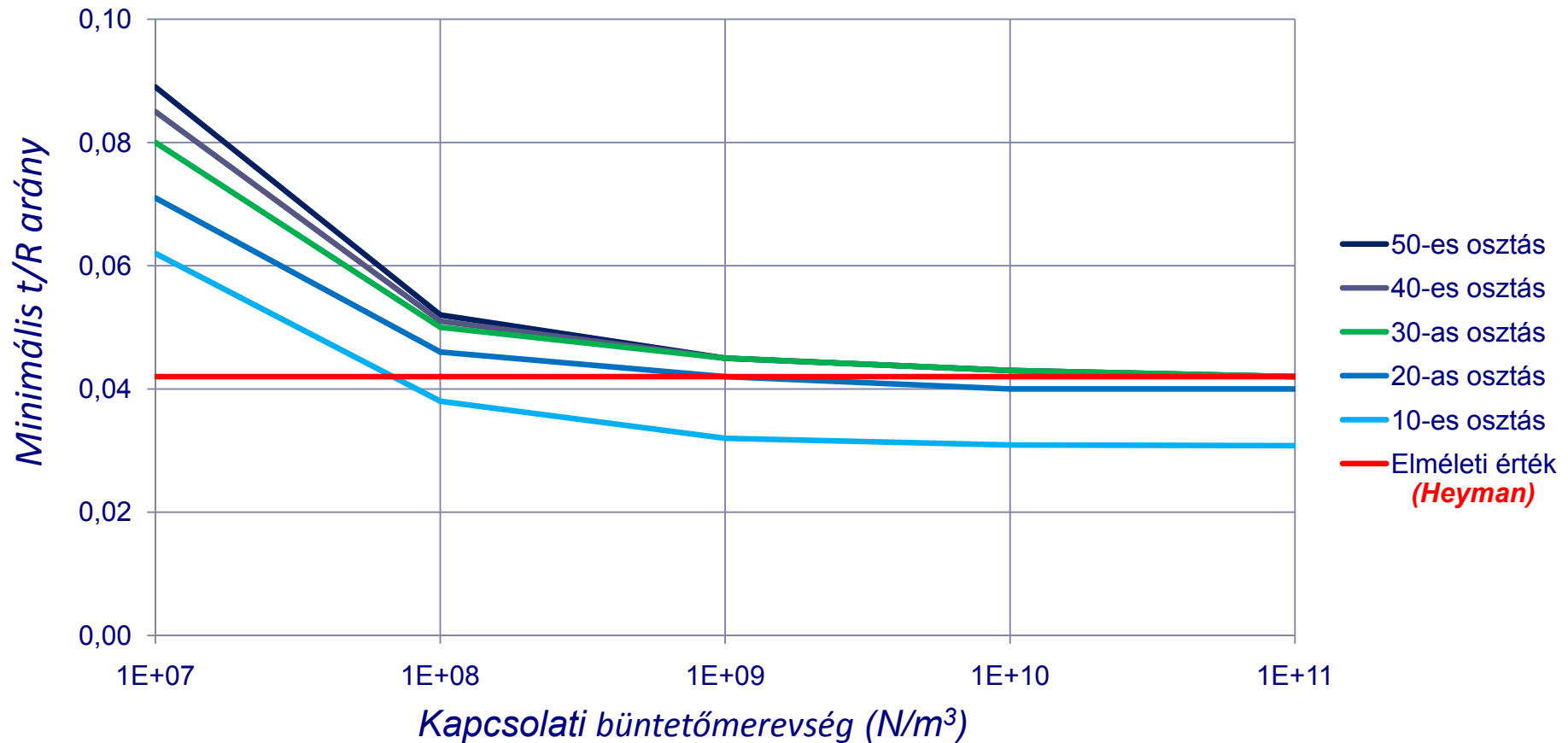
Kapcsolati merevségek kalibrálása

Eszköz : Meglévő elméleti eredmény gömbkupola esetére ($t/R=0.042$)



1.c Numerikus modell kalibrációja

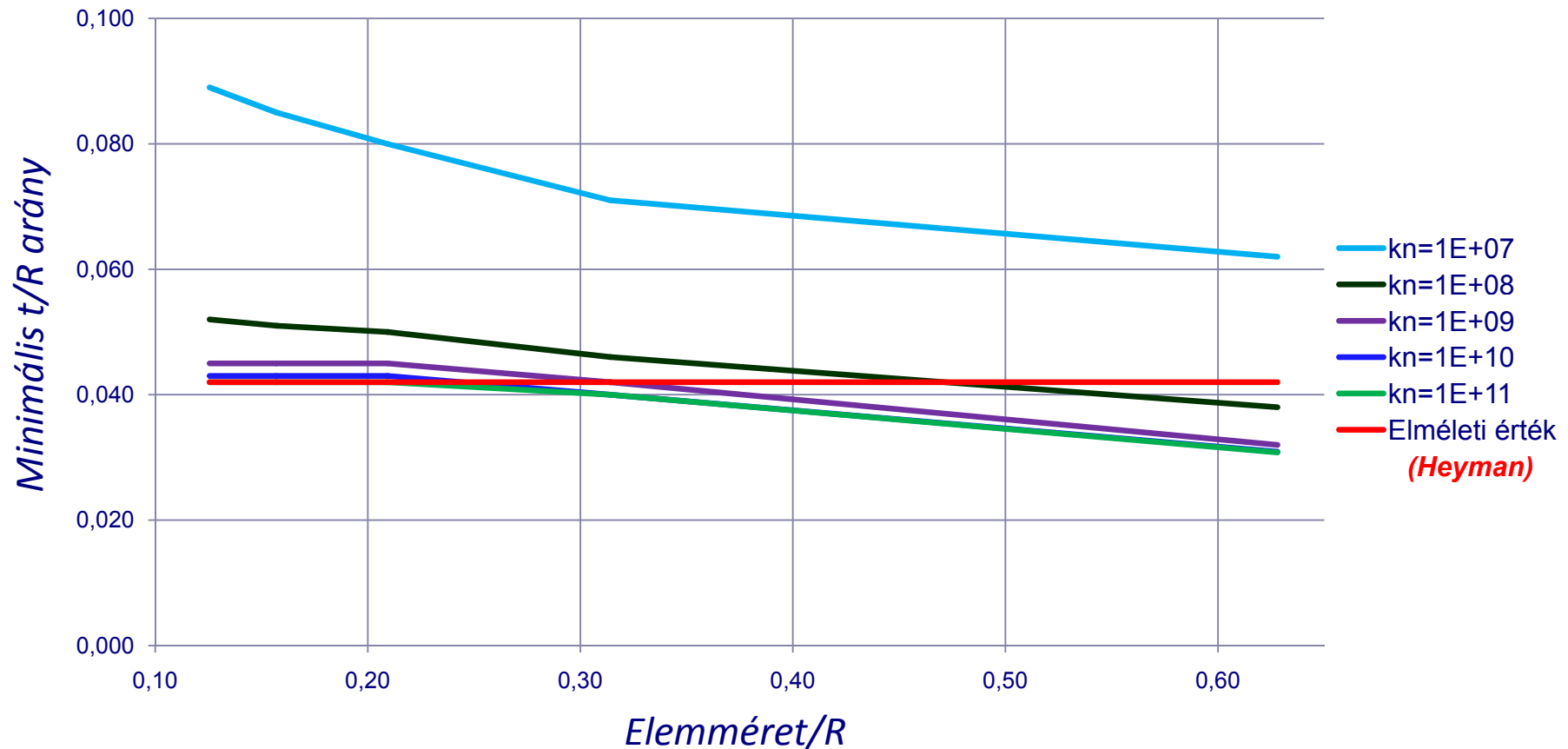
A t/R arány a kapcsolati büntető merevségek függvényében



- A kapcsolati normálmerektség min . 10^9 - 10^{10} N/m^3
- Nagy elemek > hajlítási teherbírással > kisebb szükséges falvastagság

1.c Numerikus modell kalibrációja

A t/R arány változása az elemméret és sugár arányának függvényében



Átlagos elemméret / kupola jellemző mérete (R) = 0.20-0.25 esetén megfelelő eredmények > nem feltétlen kell modelleznünk az összes építőelemet!

1.d Minimális falvastagságok meghatározása numerikus modell alapján

Anyagjellemzők felvétele

Merev

Deformálható

Kalibrációs vizsgálat alapján

Laborkísérletek alapján **

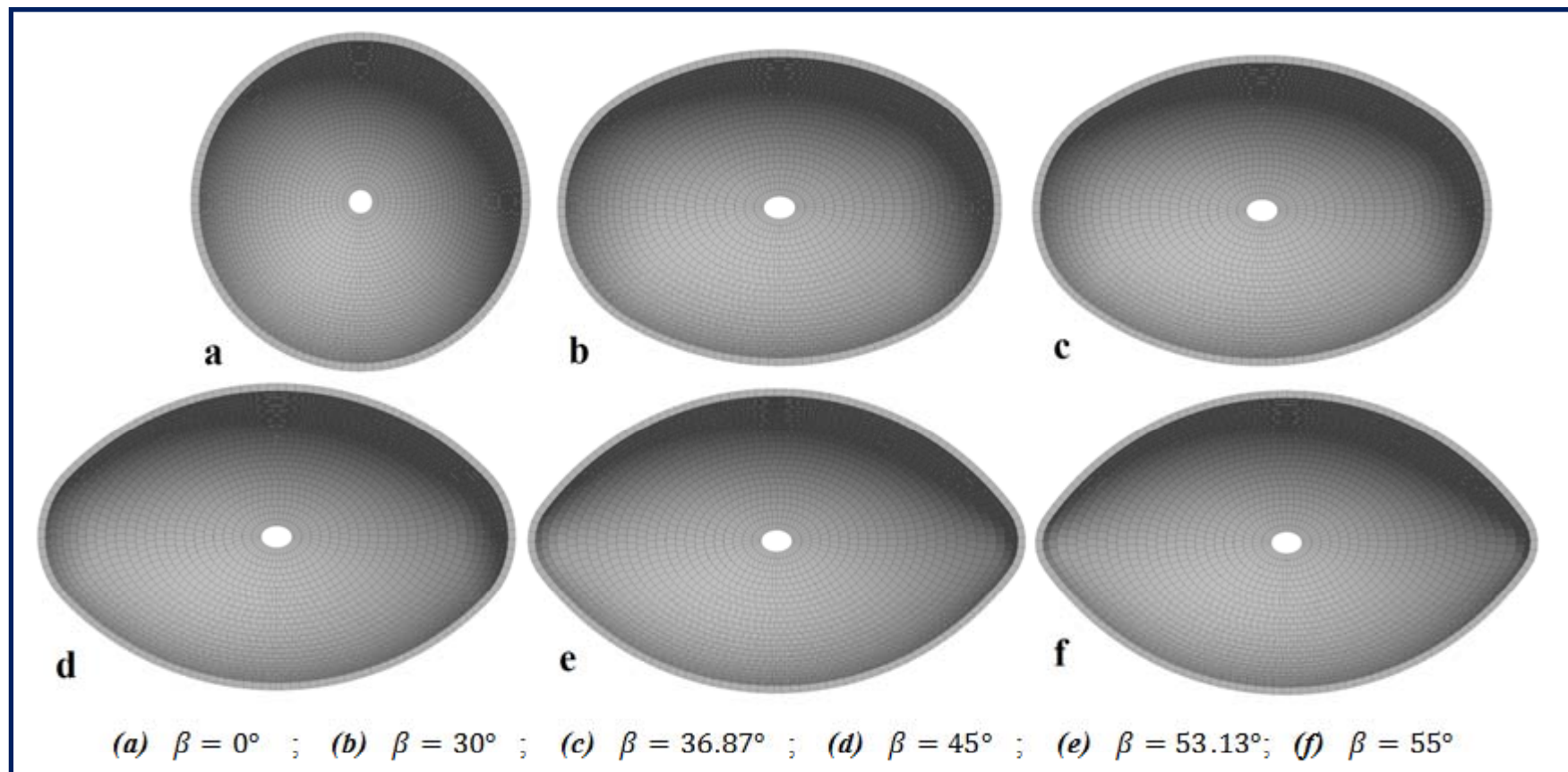
Kapcsolat : Coulomb-féle súrlódásos kapcsolat

ELEMÉK	Anyagjellemzők					Kapcsolati jellemzők		
	Sűrűség	E	ν	G	K	k_n	k_s	f
	kg/m ³	10 ⁹ Pa	-	10 ⁹ Pa	10 ⁹ Pa	N/m ³	N/m ³	°
Merev	2500	x	x	x	x	10 ¹¹	10 ¹¹	90
Deformálható	2500	25	0,15	10,87	11,90	10 ¹¹	11 ¹⁰	35

(**az anyagi és kapcsolati jellemzőket Fódi Anita laborkísérletei alapján vettem fel)

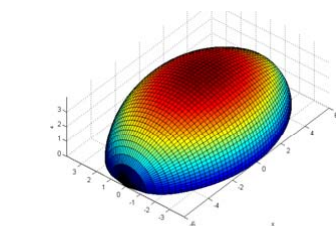
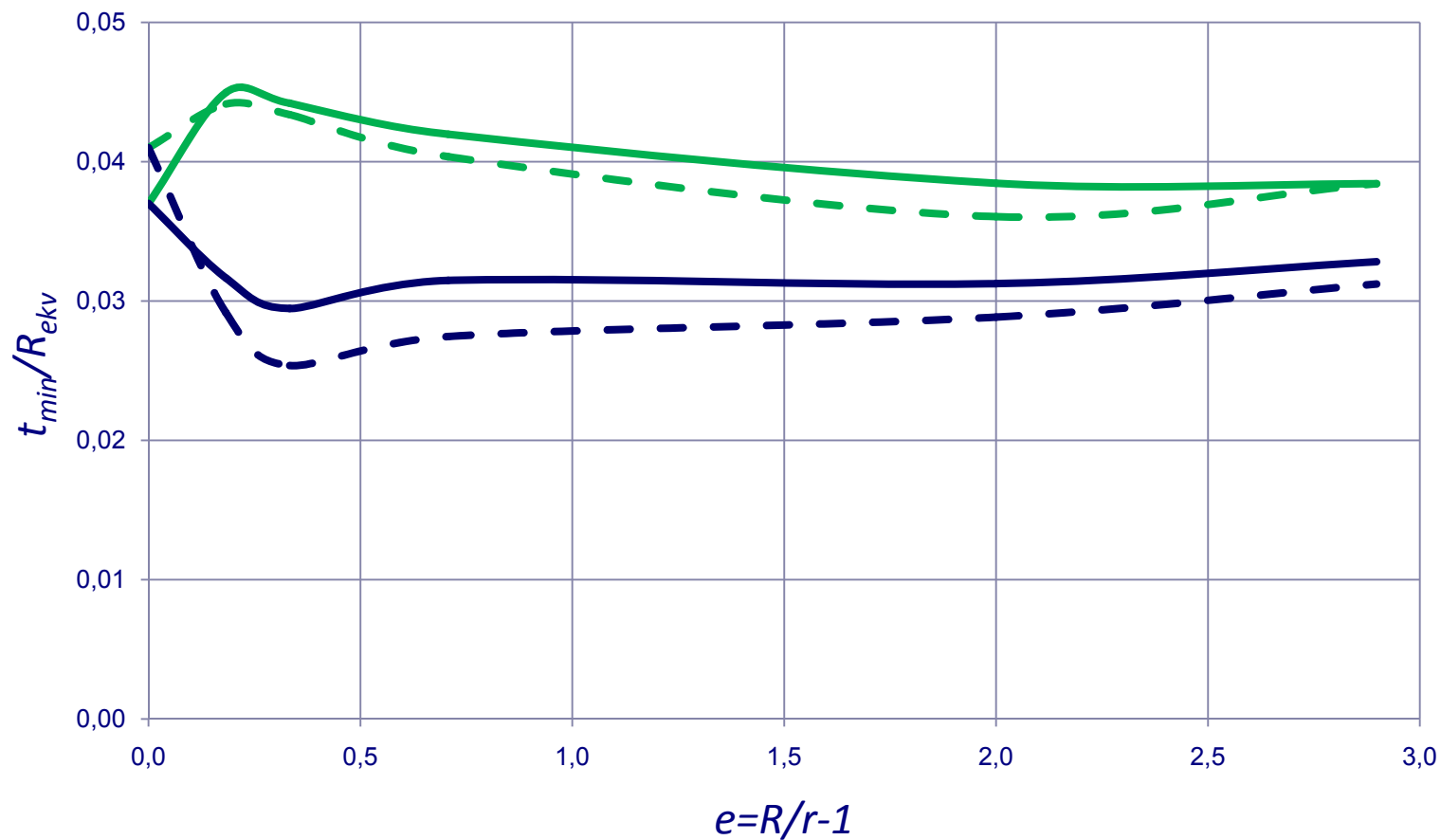
1.d Minimális falvastagságok meghatározása numerikus modell alapján

- 6 különböző, egyre elnyújtottabb ovális alaprajz vizsgálata
- Azonos alapterület
- A gömbkupola sugara $> R_{ekvivalens}$

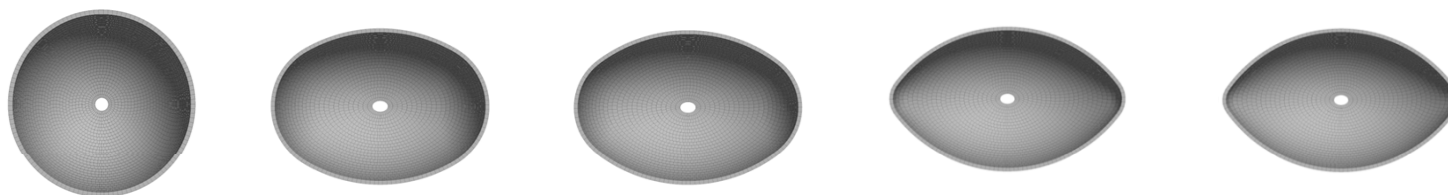
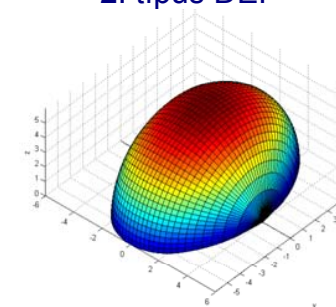


1.d Minimális falvastagságok meghatározása numerikus modell alapján

t_{min}/R_{ekv} értékei különböző kialakítású ovális kupolák esetén

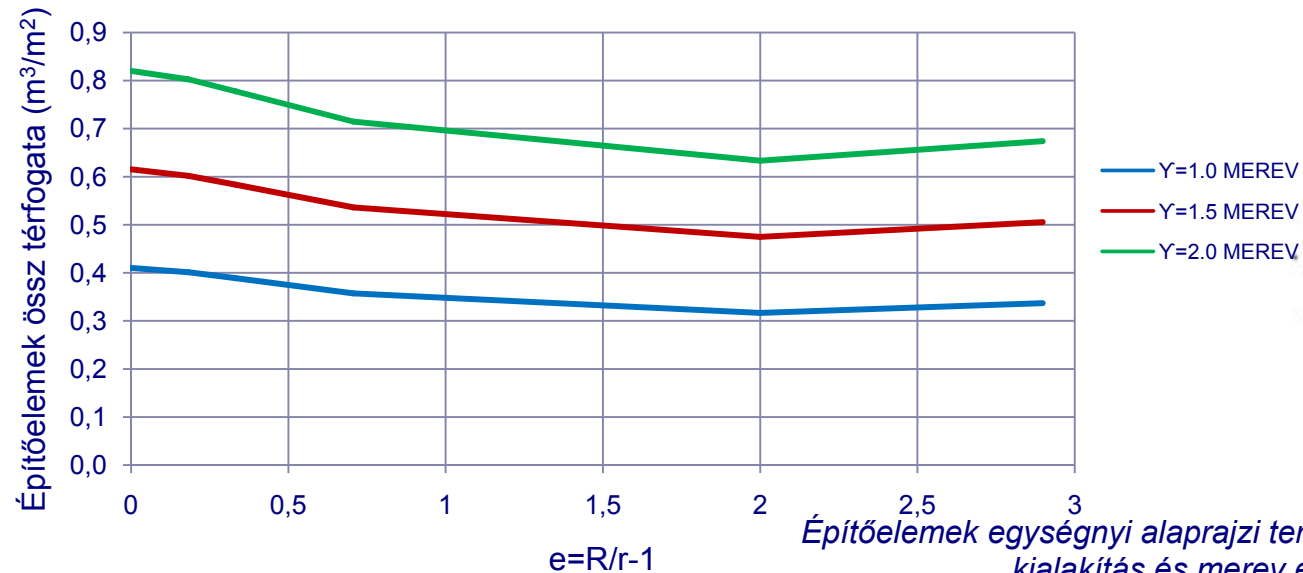


- 1. típus MEREV
- 1. típus DEF
- 2. típus MEREV
- 2. típus DEF

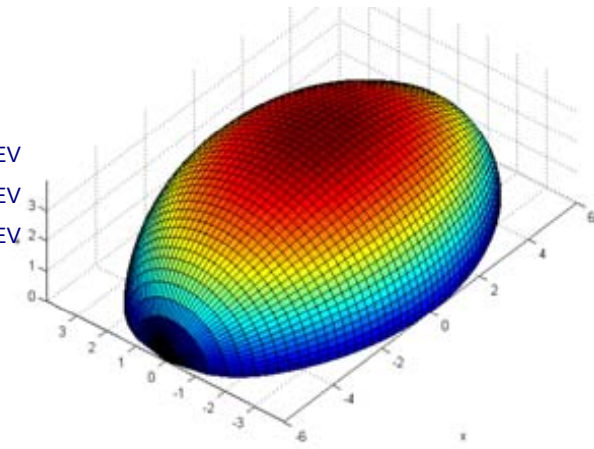


1.e Ovális kupolák anyagfelhasználása

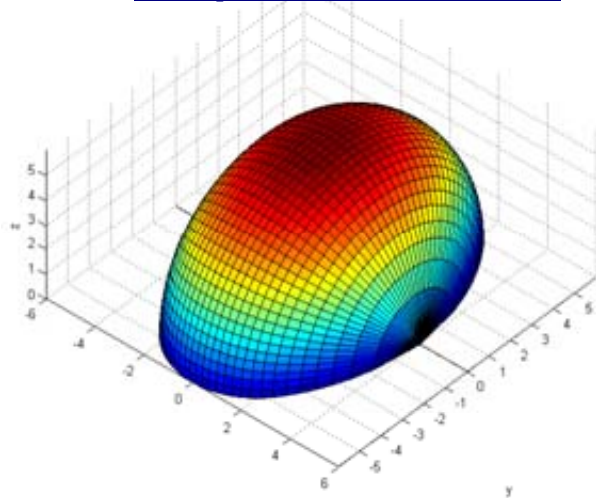
Építőelemek egységnyi alaprajzi területre eső térfogata 1. típusú kialakítás és merev elemek esetén



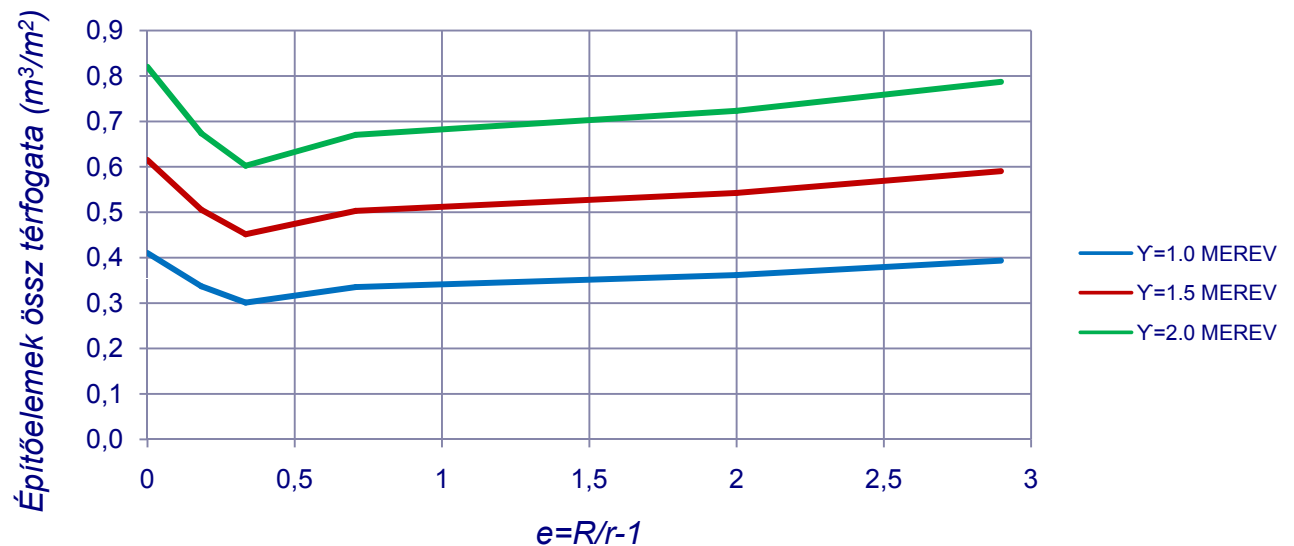
1. Típusú kialakítás



2. Típusú kialakítás

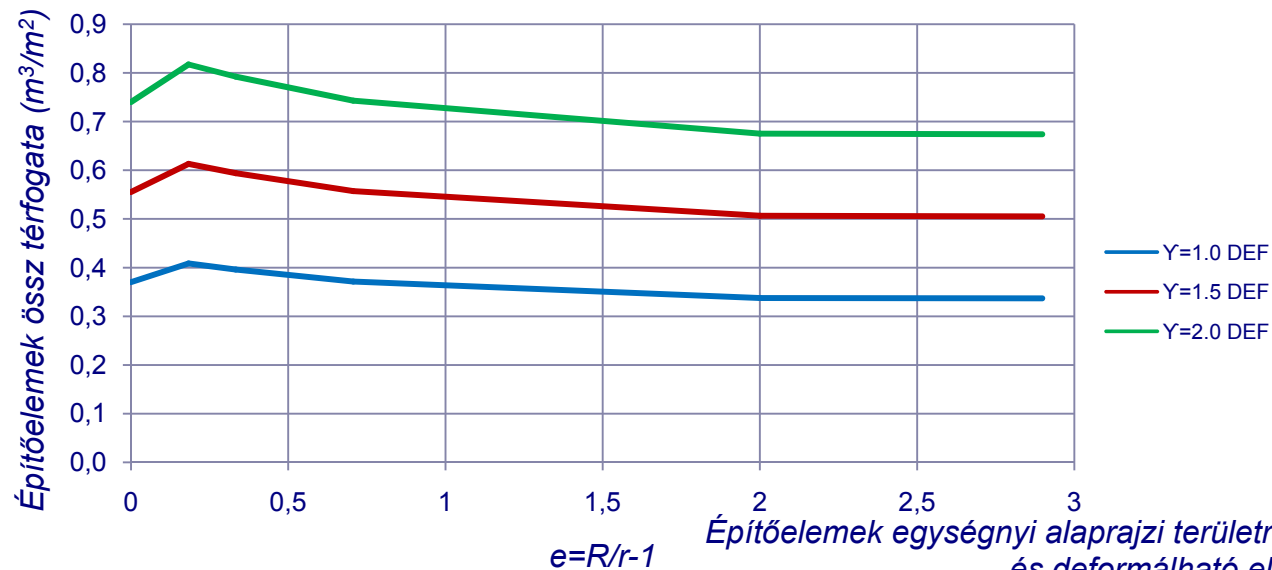


Építőelemek egységnyi alaprajzi területre eső térfogata 2. típusú kialakítás és merev elemek esetén

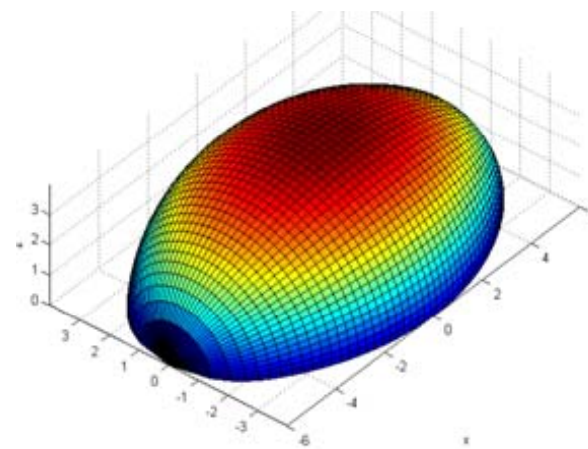


1.e Ovális kupolák anyagfelhasználása

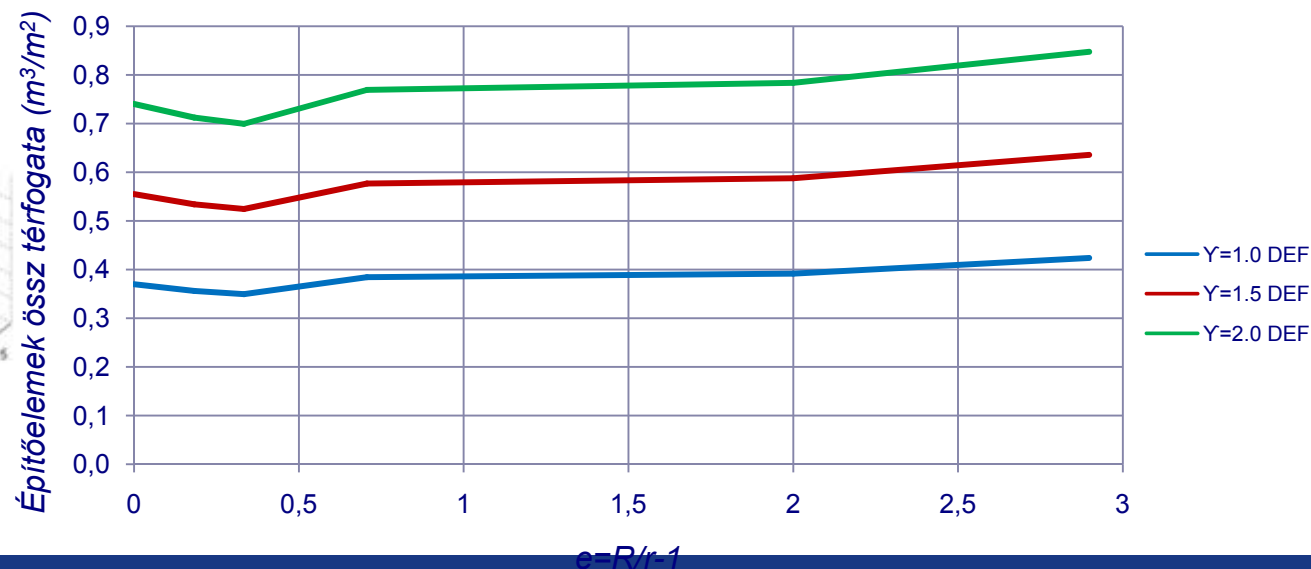
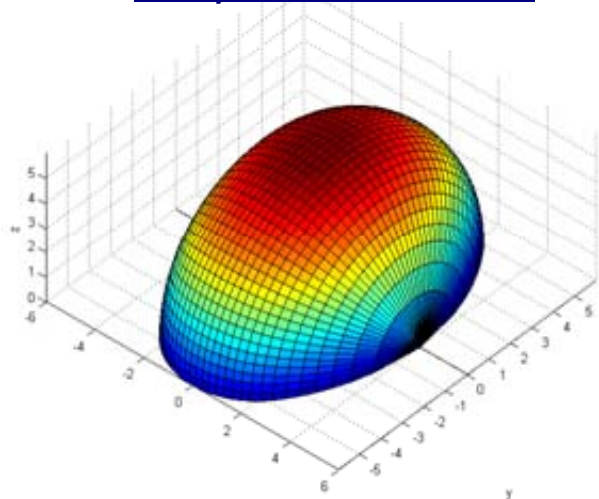
Építőelemek egységnyi alaprajzi területre eső térfogata 1. típusú kialakítás és deformálható elemek esetén



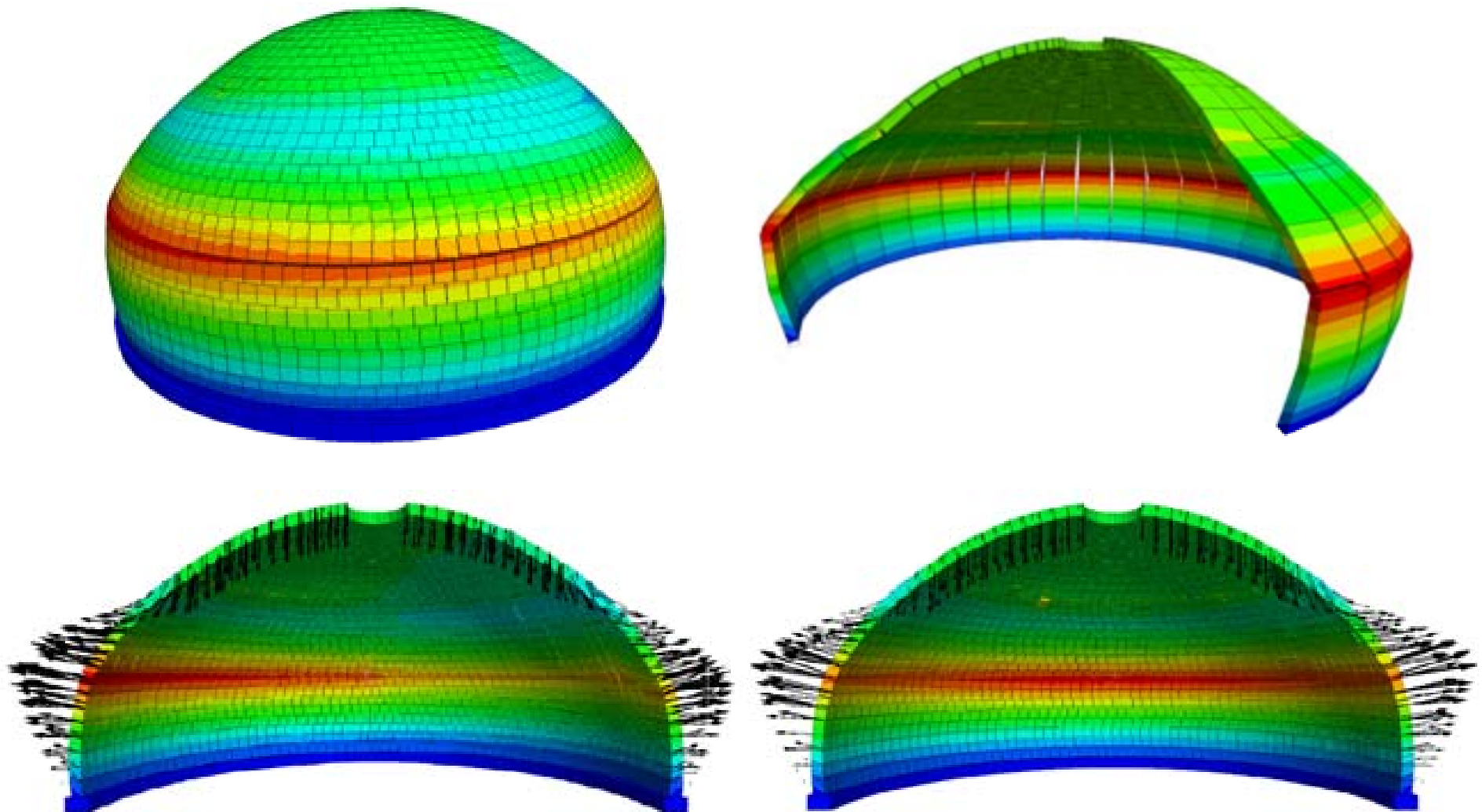
1. Típusú kialakítás



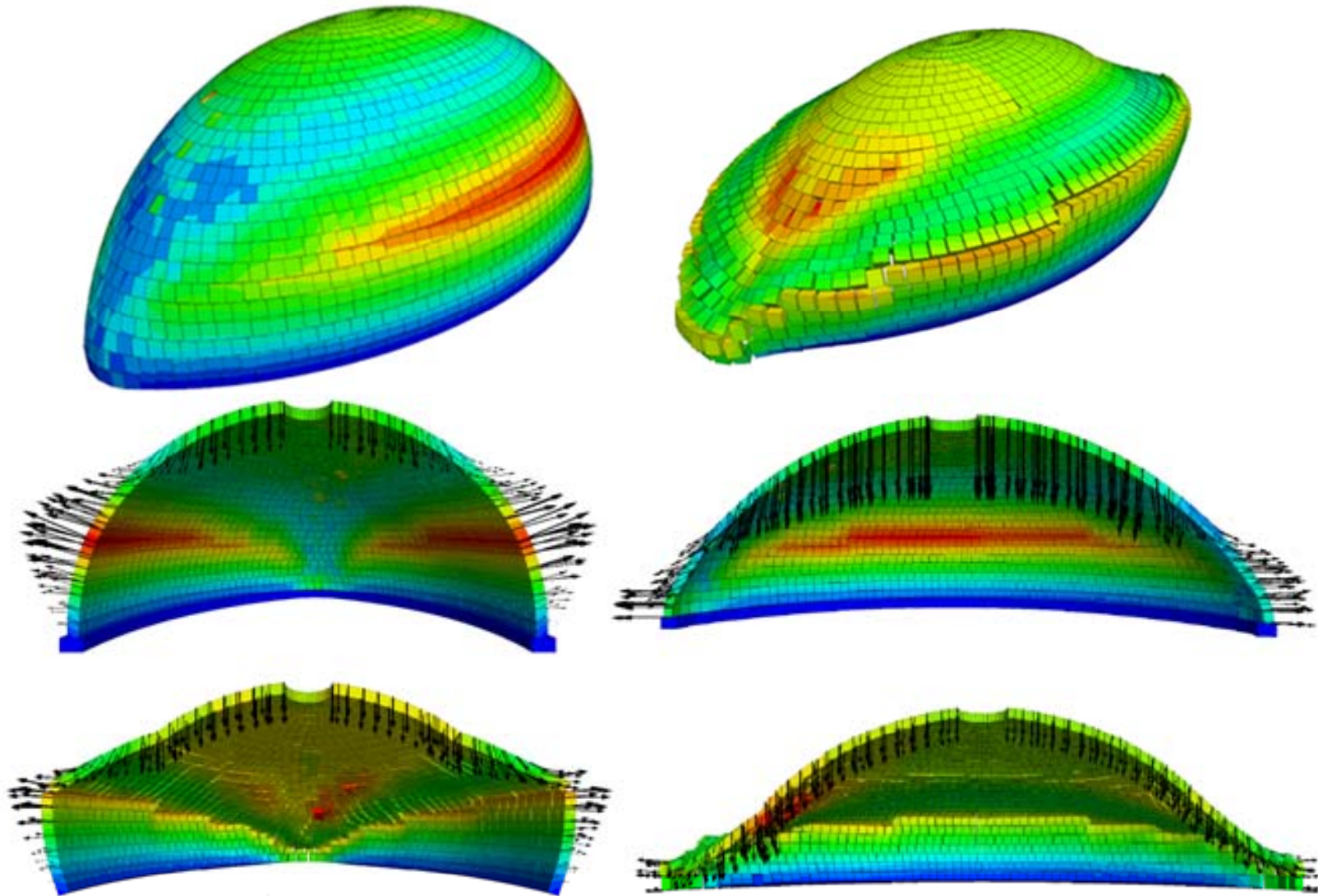
2. Típusú kialakítás



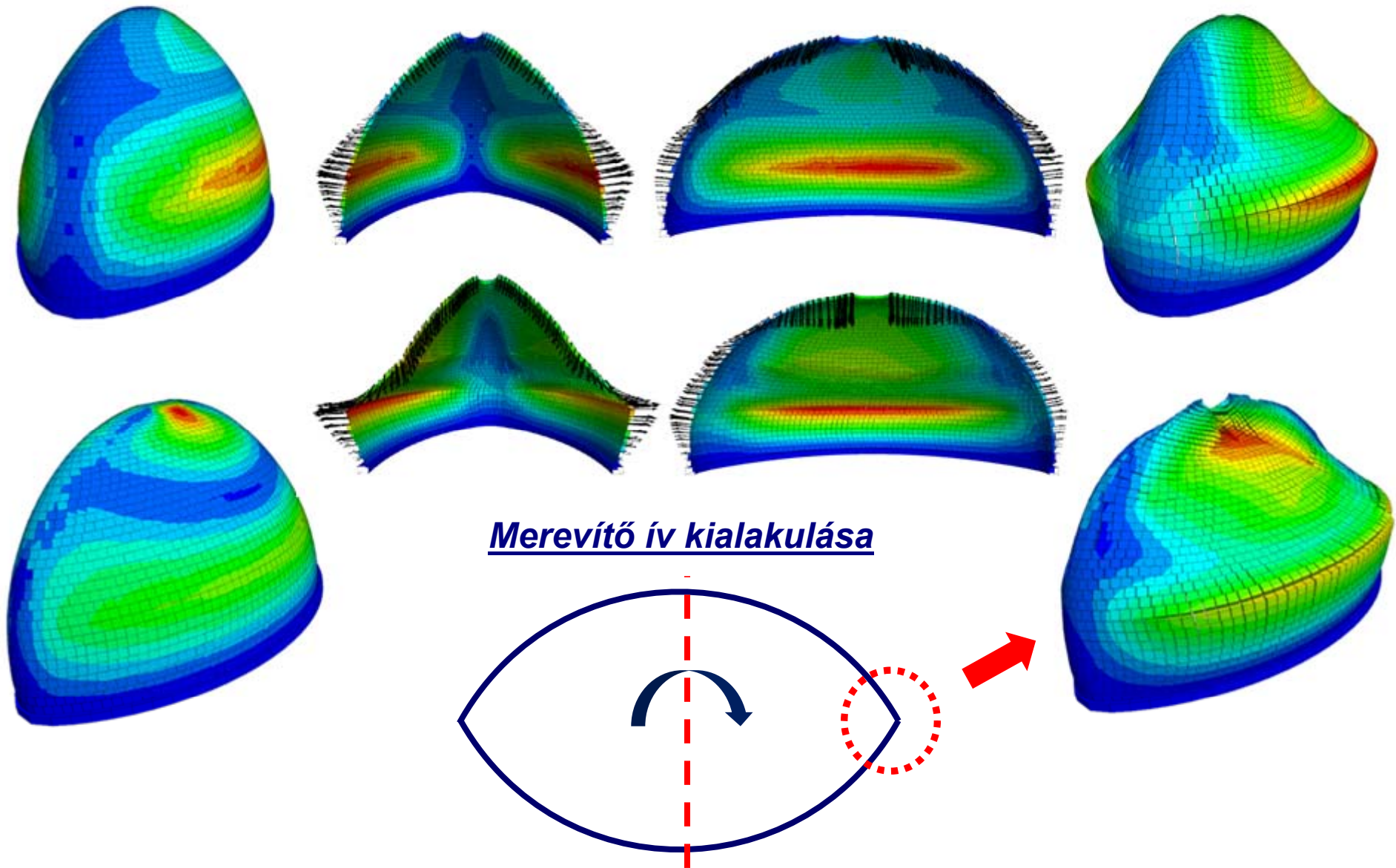
2. Összeomlási módok, repedéskép : Gömbkupola



2. Összeomlási módok, repedéskép : 1. típusú kialakítás

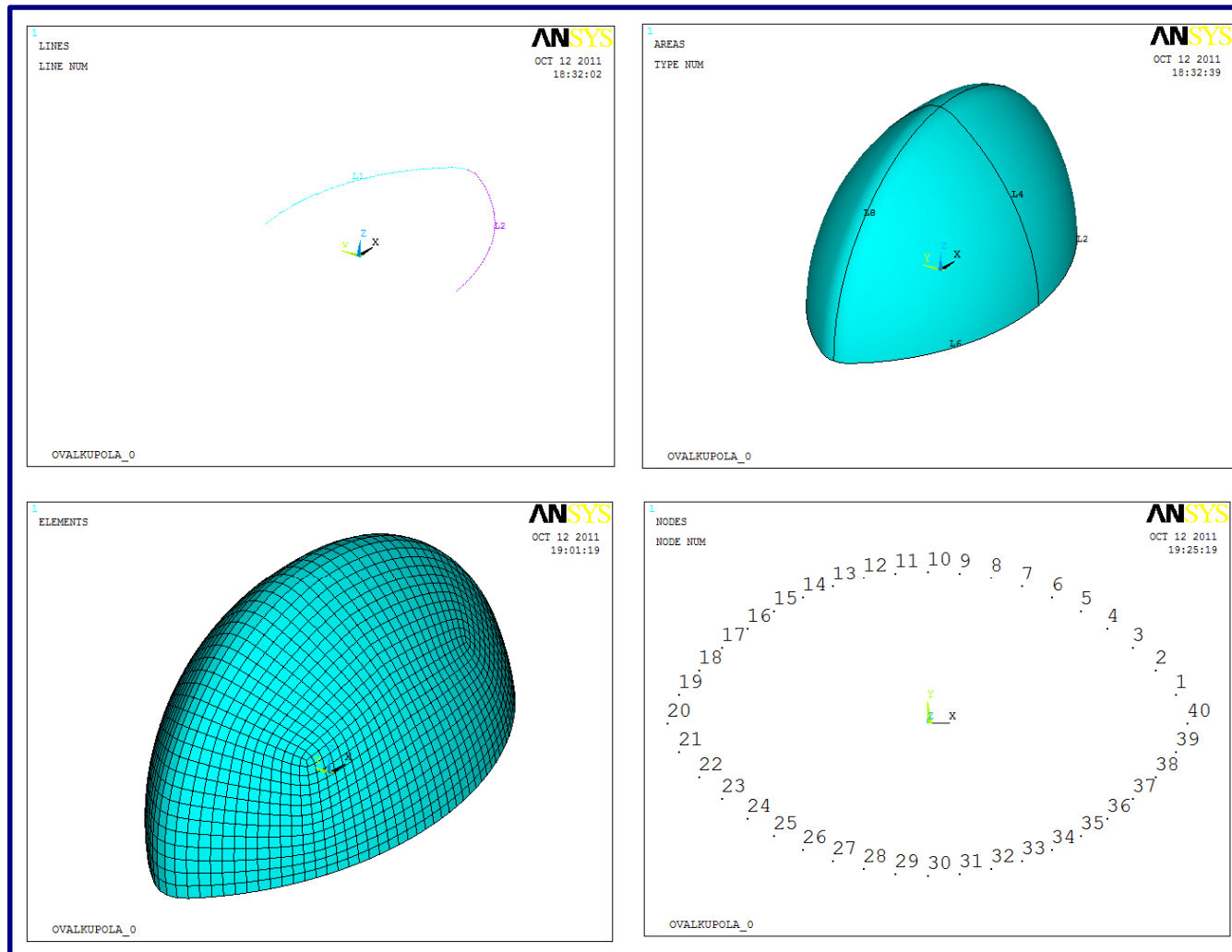


2. Összeomlási módok, repedéskép : 2. típusú kialakítás



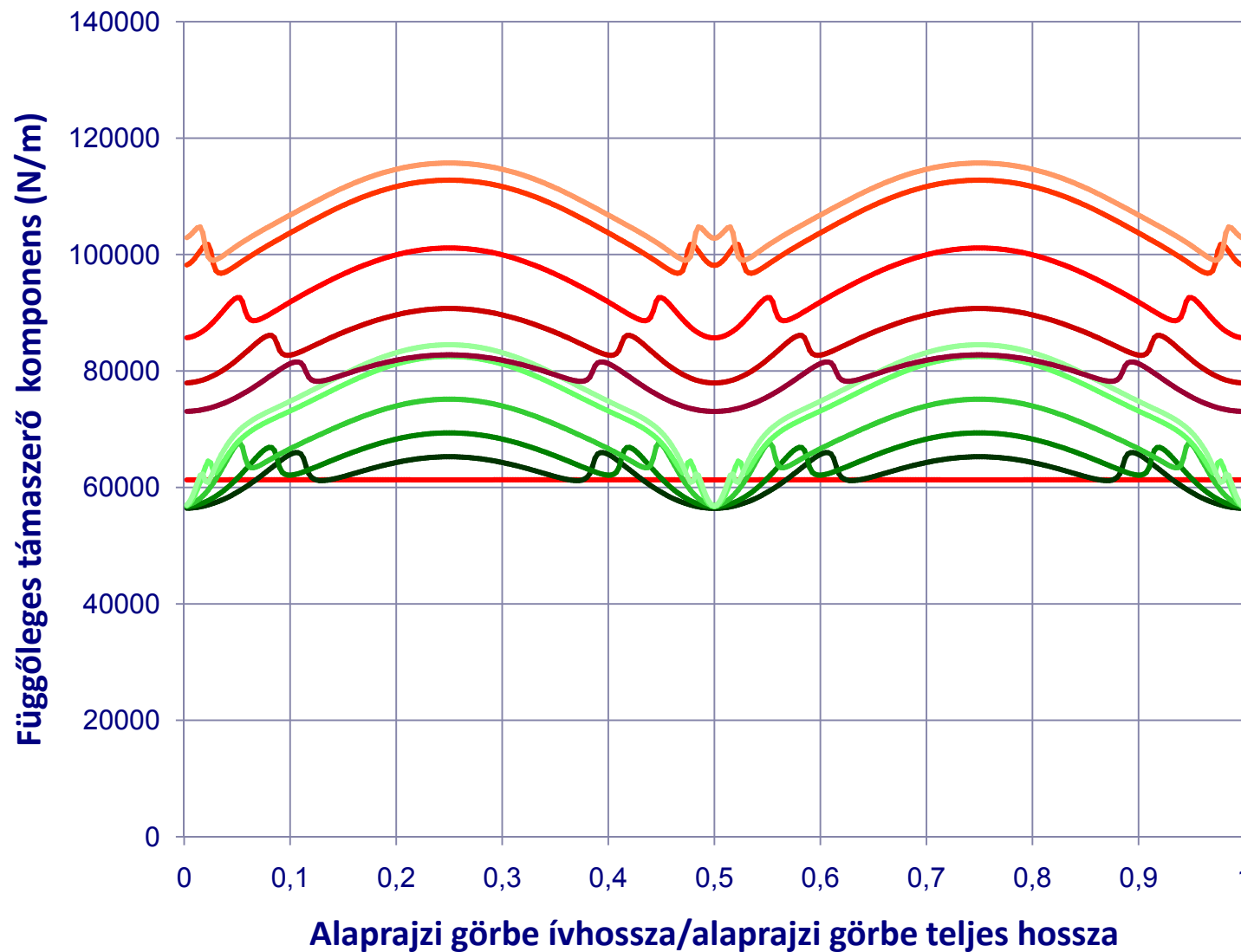
3. Támaszerők eloszlásának vizsgálata

Numerikus modell ANSYS programkörnyezetben

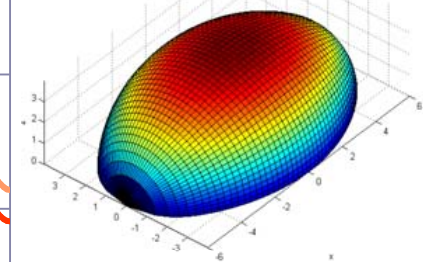


3. Támaszerők eloszlásának vizsgálata

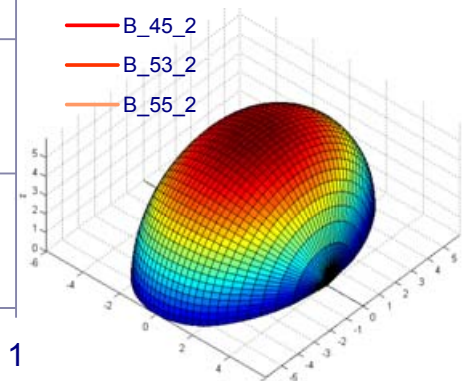
Támaszerő függőleges komponensének eloszlása



1. Típusú kialakítás



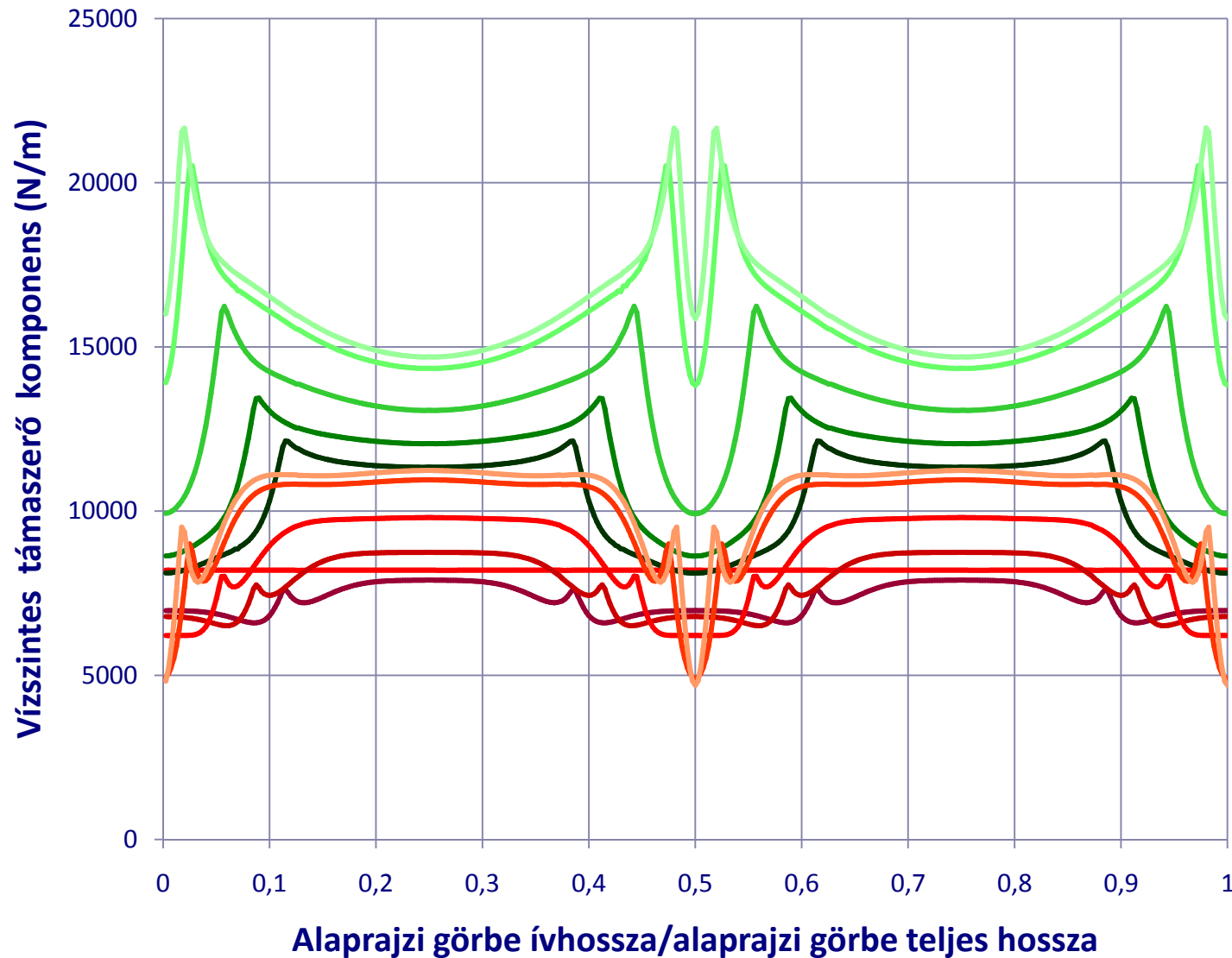
- B_0_1
- B_30_1
- B_36_1
- B_45_1
- B_53_1
- B_55_1
- B_30_2
- B_36_2
- B_45_2
- B_53_2
- B_55_2



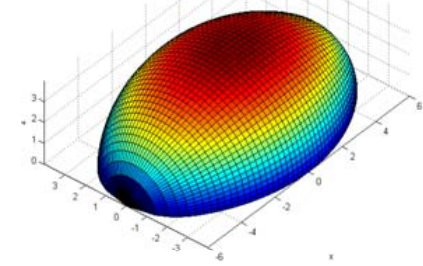
2. Típusú kialakítás

3. Támaszerők eloszlásának vizsgálata

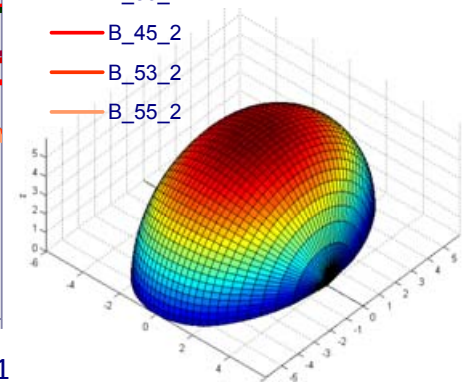
Támaszerő vízszintes komponensének eloszlása



1. Típusú kialakítás



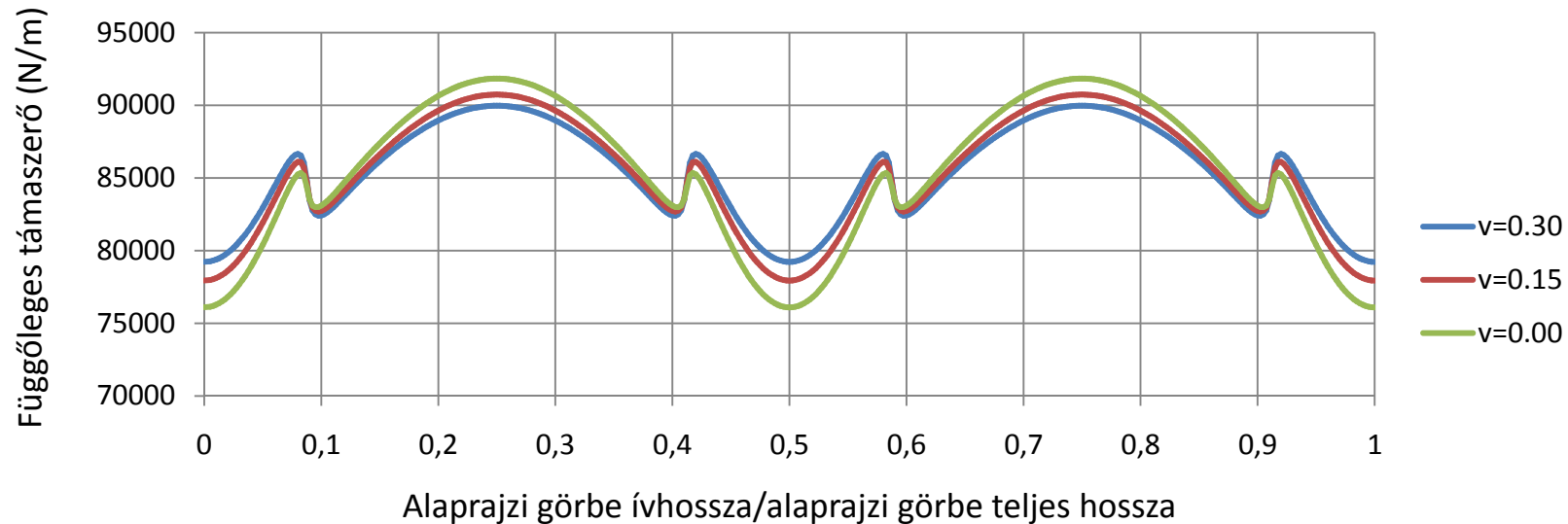
B_0_1
B_30_1
B_36_1
B_45_1
B_53_1
B_55_1
B_30_2
B_36_2
B_45_2
B_53_2
B_55_2



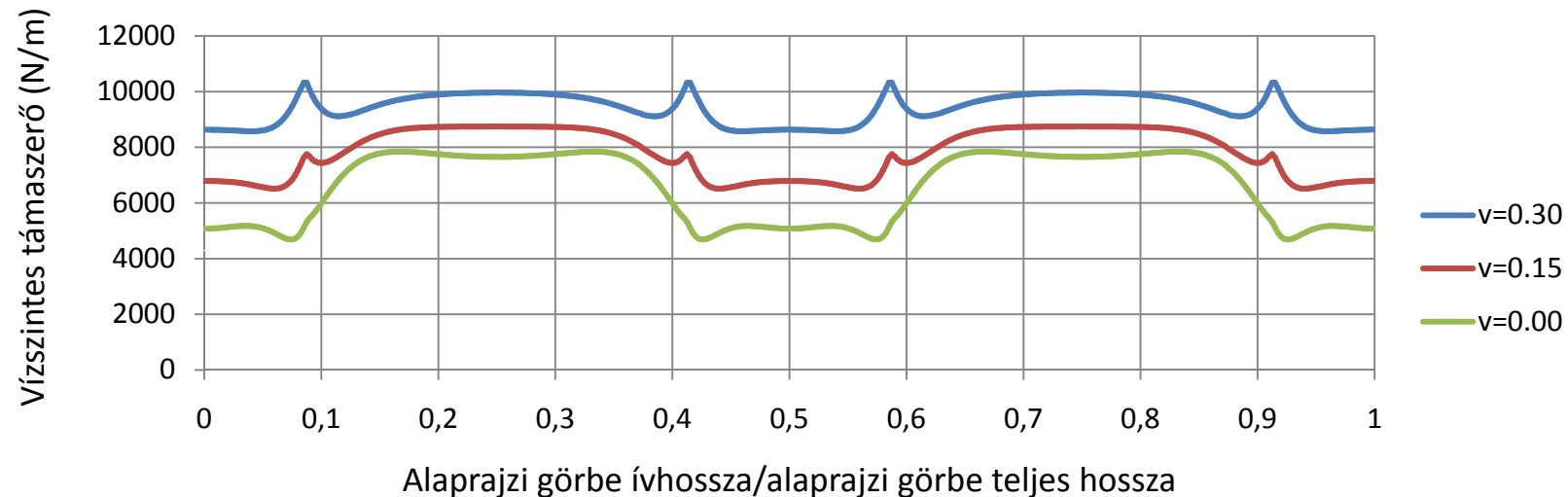
2. Típusú kialakítás

3. Támaszerők eloszlásának vizsgálata

Függőleges támaszerő komponens a Poisson-tényező függvényében



Vízszintes támaszerő komponens a Poisson-tényező függvényében



Összefoglalás

1. Heyman-féle minimális falvastagság általánosítása ovális alaprajzú falazott kupolákra

Gömbkupola : Kinematikai módszer alkalmazása

Bonyolultabb geometriák : diszkrét elemes modell építése (3DEC)

Elemek : Merev és deformálható



A merev elemek feltételezése a legtöbb esetben a biztonság kárára téved!

Ovális alaprajzú kupola anyagtakarékosabb is lehet a gömbkupolánál.

2. Törésképek, repedések vizsgálata

Összeomlási módok igencsak eltérhetnek a gömbkupoláétól.

3. Támaszerők eloszlásának vizsgálata

Merev támasz feltételezésével!

Az illesztési pontok környezetében zavar van!

További célkitűzések

A minimális falvastagságok függősége

Anyagjellemzőktől

Kapcsolati jellemzőktől

Támasz rugalmasságától

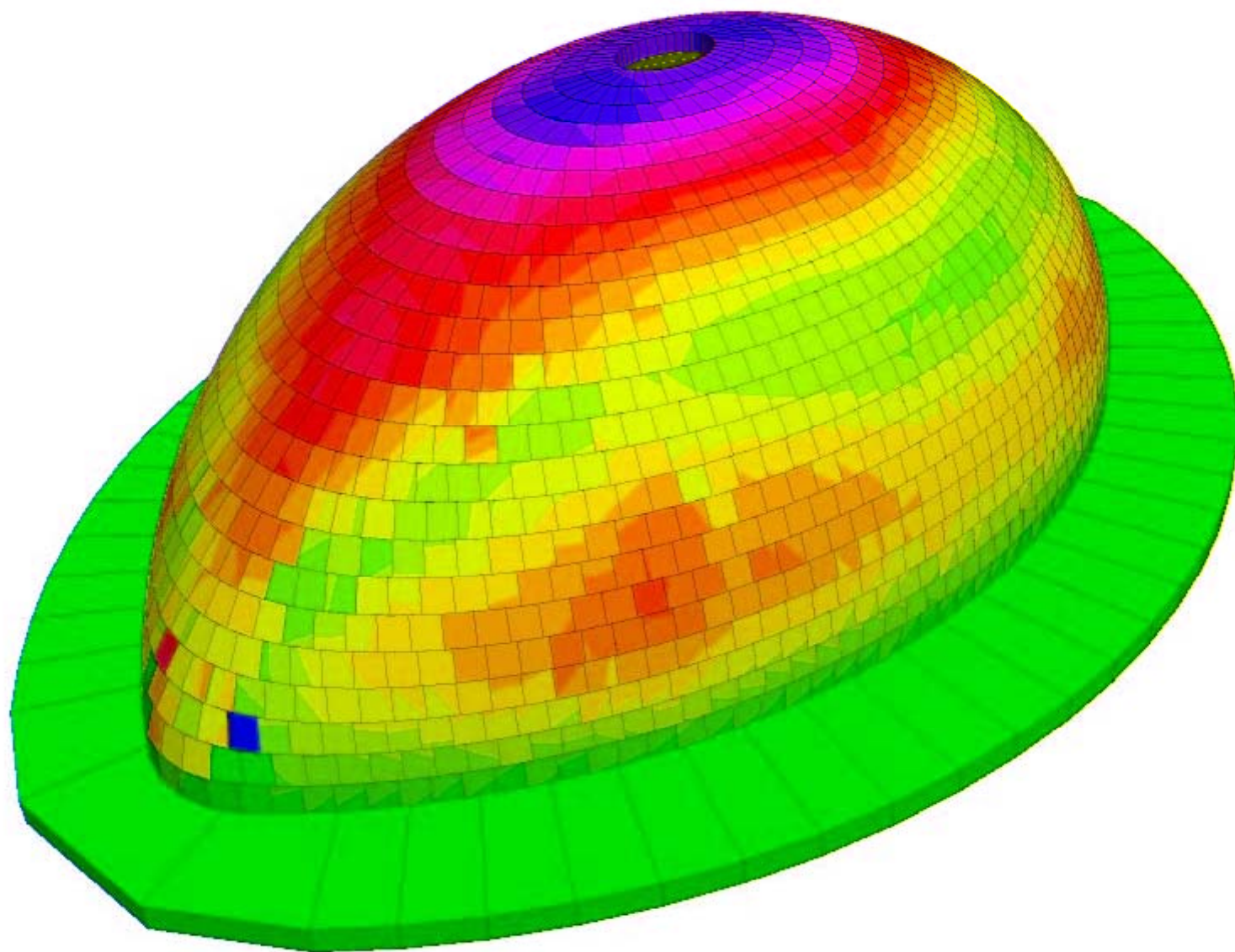
Egyéb terhek vizsgálata

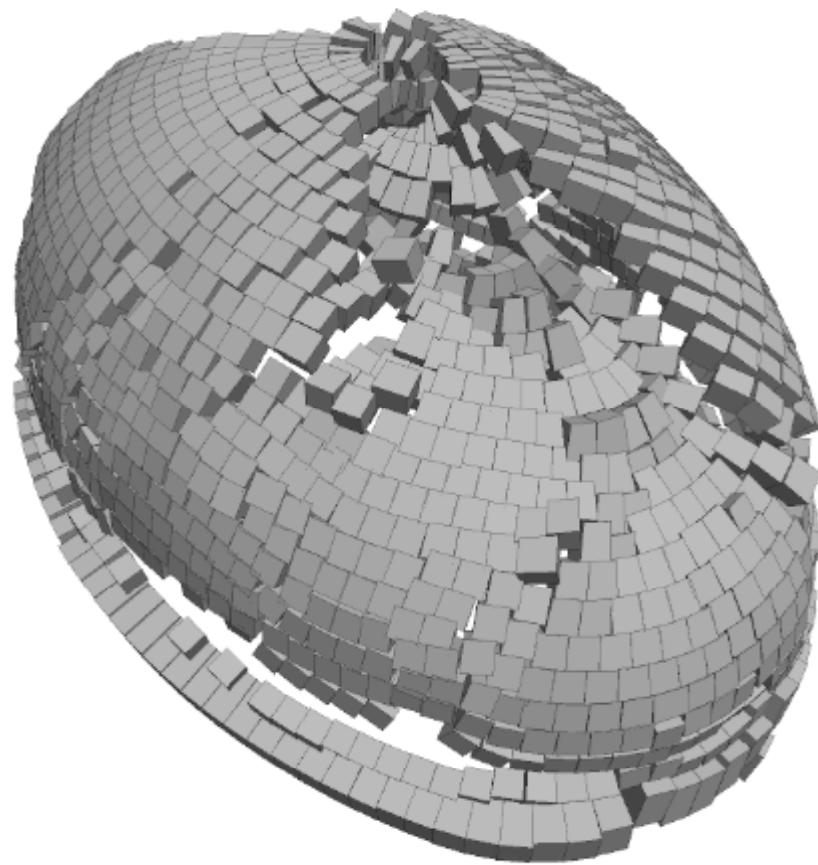
Féloldalas

Pontszerű

Szeizmikus

Egyenlőtlen támaszsüllyedés





Köszönöm a megtisztelő figyelmet!