

Duna-kavics

A Dunaújvárosi Főiskola online folyóirata 2015. III. évfolyam VII. szám

Műszaki-, Informatikai és Társadalomtudományok

KIRCHNER ISTVÁN

Az iteráció konvergenciájának
gyorsítása lineáris egyenletrend-
szerek megoldásakor

FANCSIKNÉ HAMAR ÉVA–TÓTH
GYULA

Függőleges gravitációs gradiens
számításával kapcsolatos integ-
rál csonkítási együttthatóinak
meghatározása

VÖRÖS TÜNDE

Az intézményi struktúra és a
gazdasági fejlettség kapcsola-
tának vizsgálata matematikai-
statisztikai eszközökkel

BARTALOS NORBERT–UJBÁNYI
TIBOR–KÖVÁRI ATTILA–NAGY
BÁLINT

A Chua-rendszer vizsgálata az
Octave alkalmazásával



Dunakavics

A Dunaújvárosi Főiskola online folyóirata 2015. III. évfolyam VII. szám

Műszaki-, Informatikai és Társadalomtudományok

MEGJELENIK ÉVENTE 12 ALKALOMMAL

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG

András István, Király Zoltán, Kukorelli Katalin, Palotás Béla,
Rajcsányi-Molnár Mónika.

SZERKESZTŐSÉG

Ladányi Gábor (Műszaki)
Nagy Bálint (Informatika és matematika)
Szakács István (Gazdaság és társadalom)
Klucsik Gábor (technikai szerkesztő)

Felelős szerkesztő Németh István
Tördelés Duma Attila

Szerkesztőség és a kiadó címe 2400 Dunaújváros, Táncsics M. u. 1/a.

Kiadja DUF Press, a Dunaújvárosi Főiskola kiadója
Felelős kiadó András István, rektor

A lap megjelenését támogatta TÁMOP-4.2.3-12/1/KONV-2012-0051
„Tudományos eredmények elismerése és disszeminációja
a Dunaújvárosi Főiskolán”.
<http://dunakavics.duf.hu>

ISSN 2064-5007

Tartalom

KIRCHNER ISTVÁN

Az iteráció konvergenciájának gyorsítása lineáris egyenletrendszerek megoldásakor

5

FANCSIKNÉ HAMAR ÉVA–TÓTH GYULA

Függőleges gravitációs gradiens számításával kapcsolatos integrál csonkítási együtthatóinak meghatározása

17

VÖRÖS TÜNDE

Az intézményi struktúra és a gazdasági fejlettség kapcsolatának vizsgálata matematikai-statisztikai eszközökkel

23

BARTALOS NORBERT–UJBÁNYI TIBOR–KÓVÁRI ATTILA–NAGY BÁLINT

A Chua-rendszer vizsgálata az Octave alkalmazásával

41

Galéria

(Duma Bálint fotói)

58

A Chua-rendszer vizsgálata az Octave alkalmazásával

Összefoglalás: Jelen dolgozatban a kaotikus rendszerek egyik jól ismert példáját, a Chua-áramkört és annak viselkedését leíró differenciálegyenlet-rendszert vizsgáljuk az Octave alkalmazásával.

Kulcsszavak: Dinamikai rendszerek, attraktor, kaotikus rendszerek, Chua-áramkör.

Abstract: In this work a well-known example of chaotic systems, the Chua-circuit and its differential equation describing the behavior of this circuit is investigated using Octave.

Keywords: Dynamical system, attractor, chaotic systems, Chua circuit.

Alkalmazott eszközök

Az Octave [1] programot alapvetően a Matlabhoz hasonlóan numerikus számítások végrehajtására tervezték, de megfelelő csomagok telepítésével képességei bővíthetők. A Matlabhoz hasonlít nemcsak a cél, hanem a program teljes felépítése is.

2014-ben adták ki az Octave 3.8.2 verzióját, mely már grafikus felhasználói felülettel rendelkezik. Elérhető a Matlab esetén megszokott Command Window, Workspace, Command History ablak és az Editor is.

A Matlabban megírt szkriptek, .m fájlok kevés módosítással (gyakran módosítás nélkül) az Octaveban is alkalmazhatóak.

* *Dunaújvárosi Főiskola,
Informatikai Intézet*
E-mail: ihuntlexaa@gmail.com

** *Dunaújvárosi Főiskola,
Informatikai Intézet*
E-mail: ujbanyi.tibor@mail.duf.hu

*** *Dunaújvárosi Főiskola,
Informatikai Intézet*
E-mail: kovari.attila@mail.duf.hu

**** *Dunaújvárosi Főiskola,
Informatikai Intézet*
E-mail: nagy.balint@mail.duf.hu

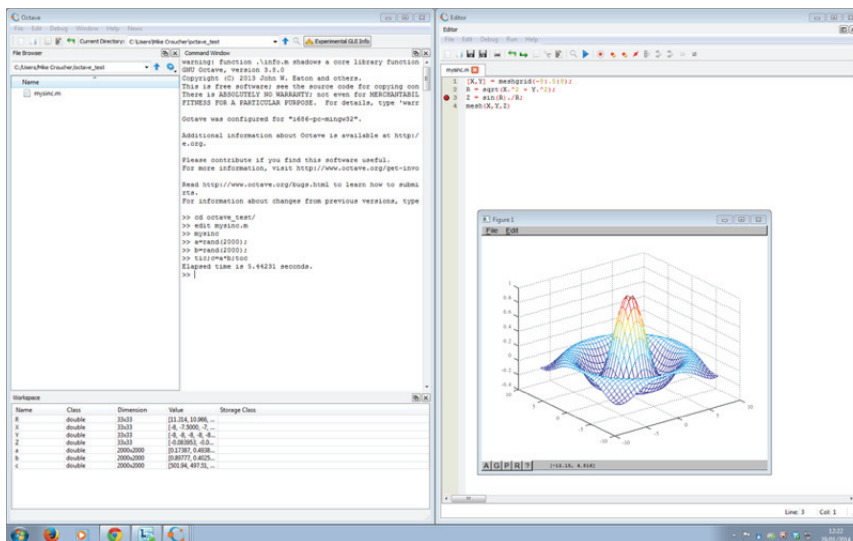
[1] <https://www.gnu.org/software/octave/> 2015. március 2.

[2] <http://www.walkingrandomly.com/?p=5336>
2015.
március 2.

[3] <http://octave.sourceforge.net/odepkg/2015.marcius.2>.

[4] <http://www.dm.unipi.it/cluster-pages/meini/ODE12/odepkg.pdf>
2015.
március 2.

1. ábra. az Octave 3.8.2 grafikus felülete. [2]



Jelen dolgozatban az Octave alkalmazásával differenciálegyenletek trajektóriáit vizsgáljuk. Ehhez az odepkg [3] csomag szükséges. A szükséges csomag legújabb verziója, az odepkg-0.8.4.tar.gz letölthető a [3] címről. A csomag telepítése az Octave indítása után, annak Command Window ablakában végrehajtható a

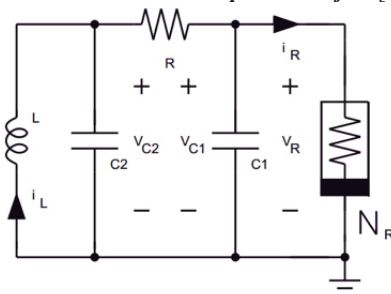
```
>>pkg install odepkg-0.8.4.tar.gz
```

A Chua-áramkör

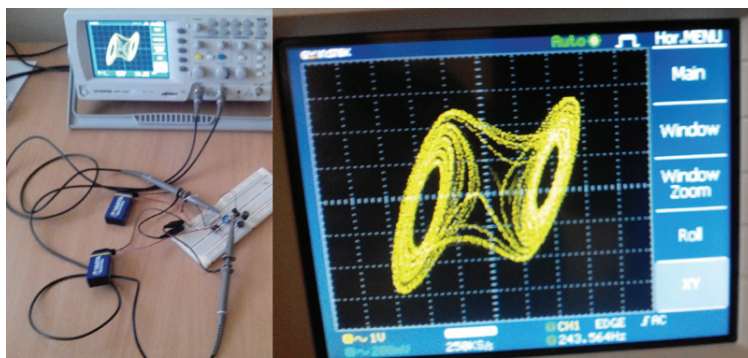
Ebben a fejezetben az egyik legegyszerűbb kaotikus rendszert, a Chua-rendszert vizsgáljuk [5, 6]. Az áramkört 1983 őszén építette meg Leon O. Chua. Célja egy olyan laboratóriumi rendszer elkészítése volt, mellyel bizonyítható, hogy a káosz egy fizikai jelenség, nem számítási hibák forrása.

A megépített áramkör egy része passzív lineáris karakterisztikájú egyszerű elektronikai alkatrészekből épül fel. Ezek az elemek a kondenzátor ($C1$ és $C2$), az ellenállás (R) és a tekercs (L , ahol I a tekercs árama). Az áramkörben található egy aktív, nemlineáris karakterisztikájú áramköri elem is, az úgynevezett Chua-dióda (a 2. ábrán NR). Ezen dióda néhány ellenállás és két műveleti erősítő segítségével szintén felépíthető.

2. ábra. A Chua-áramkör kapcsolási rajza. [7]



3. ábra. A megépített áramkör és az oszcilloszkóp képe. [Saját készítés.]



[5] Chua, L.O.–Komuro, T. M. (1986): The Double Scroll Family. *IEEE Transactions on circuits and systems*. Vol. CAS-33. No. 11.

[6] Chua, L. O. (2007): *Scholarpedia*. 2 (10):1488. http://www.scholarpedia.org/article/Chua_circuit

[7] Kennedy, M. P. (1992): Robust OP Amp realization of chua's circuit. *Frequenz*, 46 (3). Pp. 66–80.

[5] Chua, L.O.–Komuro, T. M. (1986): The Double Scroll Family. *IEEE Transactions on circuits and systems*. Vol. CAS-33. No. 11.

[6] Chua, L. O. (2007): *Scholarpedia*. 2 (10):1488. http://www.scholarpedia.org/article/Chua_circuit

[8] Lynch, S. (2004): *Dynamical systems with applications using Matlab*. Boston: Birkhuser.

Az áramkör viselkedésének leírására Leon O. Chua az alábbi közönséges differenciálegyenlet-rendszert írta fel [5]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - \phi(x)) \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y\end{aligned}$$

$$\text{ahol } \phi(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|).$$

A paraméterek bizonyos értéke esetén a rendszer kaotikus tulajdonságokat

mutat, amint ezt Chua et al. $\alpha = 9, \beta = \frac{28}{7}, m_0 = -\frac{1}{7}, m_1 = \frac{2}{7}$ esetén bizonyította [6].

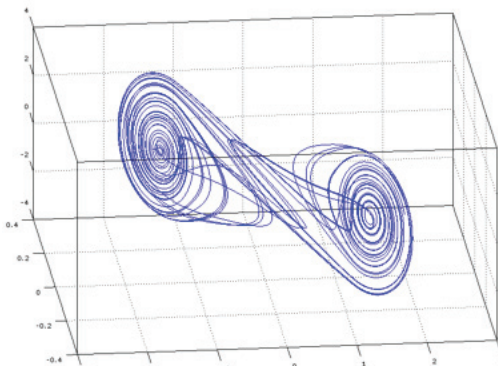
Egy kis változtatással felírható az a modell, amelyet többek között [8] könyve tárgyal:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x - \phi(x)) \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y\end{aligned}$$

$$\text{ahol } \phi(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|).$$

Lynch egy rövid Matlab szkriptet is közöl, mellyel a differenciálegyenlet-rendszer trajektóriái ábrázolhatók. Ezen szkript egyszerűen futtatható az Octave programmal is. (4. ábra).

4. ábra. A Chua-egyenletek trajektóriái $\alpha=14$ esetén.



fenti szkript segítségével vizsgálható a Chua-egyenletek megoldása különböző paraméterértékek és kiindulási feltételek esetén. A híres „double-scroll attractor” az alábbiak szerint ábrázolható:

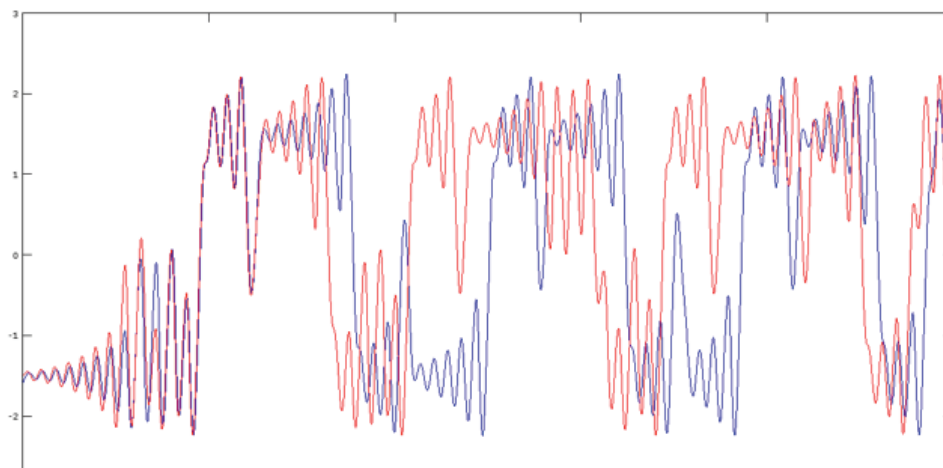
```
a=@(t,x)[14*(x(2)-x(1))-(-(5/7)*x(1)+(1/2)*(-(8/7)-(-
)*abs(x(1)+1)-abs(x(1)-1)))] ;
-x(2)+x(3);-25.58*x(2)] ;
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);
[b,t]=ode45(Chua,[0 100],[-1.6,0,1.6],options);
plot3(xb(:,1),xb(:,2),xb(:,3))
```

az attraktor matematikai értelemben kaotikus. Megmutatható például, hogy közeli kezdeti feltételek esetén a megoldások eltávolodnak egymástól.

Íme például a fenti egyenlet alábbi megoldásait. (5. ábra)

```
xa=ode23(Chua,[0 100],[-1.6,0,1.6],options);
xb=ode23(Chua,[0 100],[-1.5,0,1.6],options);
plot(ta, xa(:,1))
hold on
plot(tb, xb(:,1), "r")
```

5. ábra. Érzékenység a kezdeti feltételre a Chua-rendszerben.



[9] Simon L. P.–Tóth J. (2005). *Differenciálegyenletek*. Budapest: Typotex.

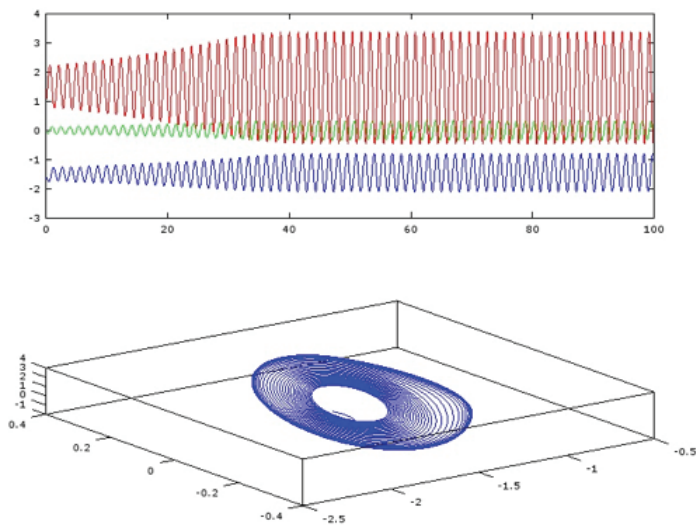
[10] Huang, A.–Pivka, L.–Wu, C. W.–Franz, M. (1996): Chua's equation with cubic nonlinearity. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 6 (12a). Pp. 2175–2222.

(Természetesen a megoldások ezen tulajdonságáról a Ljapunov-eggyüttható is tájékoztat, azonban ennek részletezésétől itt eltekintünk.

Az érdeklődő olvasó számára javasoljuk a [9] könyv elmélyült tanulmányozását.)

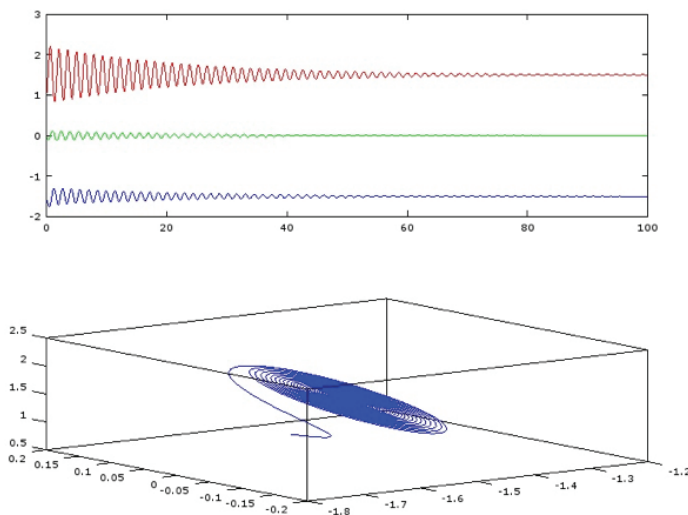
Megfelelő paraméter változtatásával a rendszer más viselkedést mutat. Például $\alpha=10$ esetén a rendszernek stabil határciklusa van, amint ez a 6. ábra alapján sejthető.

6. ábra. Stabil határciklus $\alpha=10$ esetén.



Ha $\alpha=9$, akkor a rendszernek stabil egyensúlyi pontja van. (7. ábra)

7. ábra. Stabil egyensúlyi pont $\alpha=9$ esetén.



A Chua-rendszer módosítása

A Chua-egyenletekben szereplő $\phi(x)$ függvény – az egyetlen nemlineáris függvény a rendszerben – alapvető fontosságú a rendszer viselkedése szempontjából. Ezen viselkedés leírására több módszer használja az egyenletek jobboldala által meghatározott függvények deriváltjait. Tekintettel arra, hogy a $g(x)=|x+1|-|x-1|$ függvény nem folytonosan deriválható, célszerű a rendszert $\phi(x)$ megfelelő módosításával alakítani. Ezzel a megfontolással számos folytonosan deriválható módosítást írtak már fel. Huang, Pivka és Wu harmadfokú hatványfüggvény segítségével készítettek megfelelő módosítást [10]

$$\dot{x} = \alpha(y - x^3 - x)$$

$$\dot{y} = x - y + z$$

$$\dot{z} = -\beta y$$

Ebben a rendszerben $\alpha=10$, $\beta=16$, $c=-0.143$ értékek esetén található meg a „double-scroll attractor”.

A továbbiakban megadunk egy új folytonosan deriválható módosítást, továbbá ennek megoldásait vizsgáljuk numerikusan. Vázoljuk a $g(x)=|x+1|-|x-1|$ függvény grafikonját. Vegyük észre, hogy a függvény – többek között – az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 2$. Hasonló tulajdonságokkal rendelkező függvény állítható elő az $x \mapsto \operatorname{atan}(x)$ függvény lineáris transzformációjával. A további vizsgálatainkhoz az $f(x) = r \cdot \operatorname{atan}(x)$ függvényt használjuk a $g(x)=|x+1|-|x-1|$ helyett, míg a Chua-rendszerben szereplő további egyenleteket változatlanul hagyjuk. Egyenleteink tehát a következő alakban írhatóak fel:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x - \phi(x)) \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y\end{aligned}$$

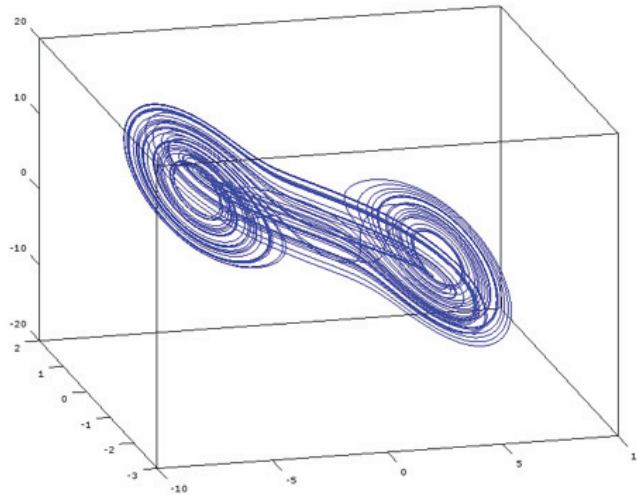
ahol
$$\phi(x) = m_1 x + \frac{r}{2} \operatorname{atan}(x)(m_0 - m_1)$$

A korábban használt szkriptet ezért módosítjuk.

```
Chua=@(t,x)[alpha*(x(2)-x(1)-(-(5/7)*x(1)+(1/2)*(-(8/7)-(-5/7))*(r*atan(x(1)))));x(1)-x(2)+x(3);-25.58*x(2)];
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);
[t,xb]=ode45(Chua,[0 100],[-1.6,0,1.6],options);
plot3(xb(:,1),xb(:,2),xb(:,3))
```

A paraméterek megfelelő változtatásával ebben a rendszerben is nyerhető „double-scroll attractor”.
(8. ábra)

8. ábra. A módosított Chua-rendszerben található ún. „double – scroll attractor” $\alpha=15$.



Eredmények

Jelen dolgozatban a Chua-áramkört leíró differenciálegyelet-rendszer egy új módosítását adtuk meg, mely további matematikai analízist tesz lehetővé.

A rendszer tulajdonságainak szemléltetéséhez az Octave programot használtuk.