

Pontfolyamatok

Szlobodnyik Gergely

2016.05.17

Számláló folyamatok

Az (N_t) ($t \geq 0$) sztochasztikus folyamatot számláló folyamatnak nevezzük, ha $N_0 = 0$ és $N_t(t > 0)$ konstans, eltekintve a $+1$ -es ugrásoktól, azaz (N_t) értékében csak $+1$ értékű ugrások lehetnek minden időpillanatban.

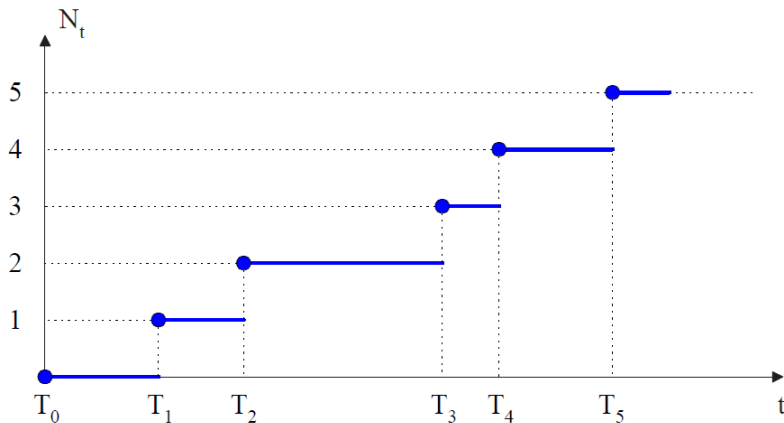
Egy pontfolyamatot $[0, \infty)$ -en egy $T_n \in [0, \infty)$ ($n \geq 0$) szekvenciával jellemezhetünk, melynek minden realizációjára:

$$T_0 = 0$$

$$\text{ha } T_n < \infty, \text{ akkor } T_n < T_{n+1}$$

Pontfolyamat

Pontfolyamat (T_n) és asszociált számláló folyamat (N_t).



Poisson folyamat

Homogén Poisson folyamaton olyan számláló folyamatot értünk, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:

1. független növekményű, azaz az $N_t - N_s$ ($t \geq s$) diszjunkt növekmények független valószínűségi változók
2. stacionárius növekményű, azaz az $N_{t+a} - N_t$ növekmények eloszlásai nem függenek t -től

Ha (N_t) homogén Poisson folyamat, akkor $\exists \lambda > 0$ olyan módon, hogy $\forall t \geq s$ esetén az $N_t - N_s$ növekmények Poisson eloszlásúak λ paraméterrel, azaz

$$P(N_t - N_s = k | \mathcal{F}_s) = \frac{(\lambda(s - t))^k}{k!} e^{-\lambda(s-t)}$$

λ a folyamat intenzitása.

Inhomogén Poisson folyamat

Legyen (N_t) pont folyamat, amely adaptált az $(\mathcal{F}_t)$ filtrációhoz, továbbá legyen λ_t nemnegatív mérhető folyamat, melyre

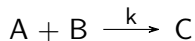
$$\lambda_t \text{ } \mathcal{F}_0\text{-mérhető}$$
$$\int_0^t \lambda_s ds < \infty \quad \forall t\text{-re}$$

Tegyük fel, hogy:

$$P(N_t - N_s = k | \mathcal{F}_s) = \frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda}$$

ahol $\Lambda = \int_s^t \lambda_s ds$. Ekkor (N_t) duplán (feltételesen) sztochasztikus folyamat λ_t sztochasztikus intenzitással.

Kémiai reakciók



$$E\left[\frac{dx_A(t)}{dt}\right] = -kx_A(t)x_B(t)$$

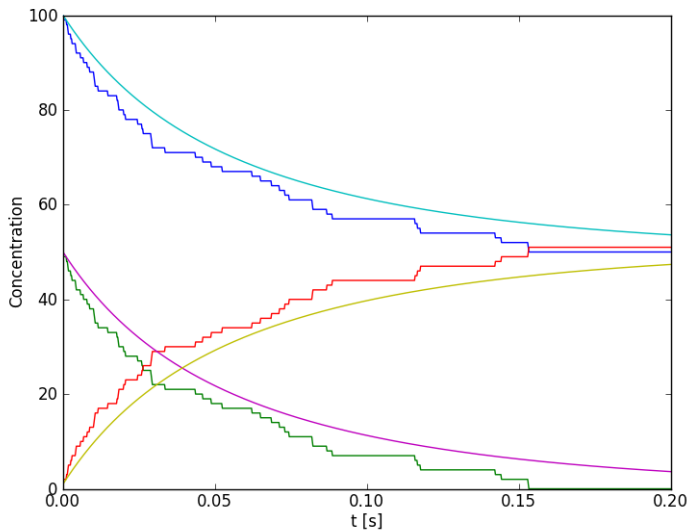
$$E\left[\frac{dx_B(t)}{dt}\right] = -kx_A(t)x_B(t)$$

$$E\left[\frac{dx_C(t)}{dt}\right] = kx_A(t)x_B(t)$$

$$\Lambda(t) = \int_0^t kx_A(s)x_B(s)ds$$

$$X(t) = X(0) + P\left(\int_0^t kx_A(s)x_B(s)ds\right)[-1 \ -1 \ 1]^T$$

Sztokasztikus és determinisztikus dinamika



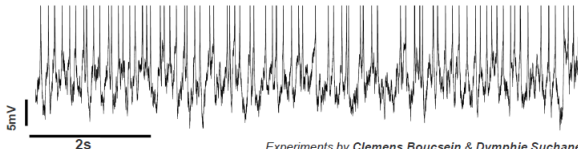
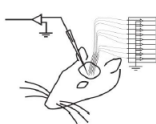
Hawkes folyamatok

Egy (N_t) folyamatot egy dimenziós Hawkes folyamatnak nevezünk, ha az teljesíti az alábbi feltételeket:

$$P(N_{t+h} - N_t = m | \mathcal{F}_t) = \begin{cases} \lambda_t h + o(h) & \text{ha } m = 1 \\ o(h) & \text{ha } m > 1 \end{cases}$$

továbbá a folyamat intenzitása:

$$\lambda_t = \lambda_t^b + \int_{-\infty}^t \mu(t-u) dN_u$$



Experiments by **Clemens Boucsein** & **Dymphie Suchanek**

University of Freiburg, Germany