

Histerézises rezgő láncok

HYSTERESIS OSCILLATOR CHAINS

LELKES János

Egyetemi hallgató

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Áramlástan Tanszék

1111 Budapest, Bertalan Lajos u. 4-6. Telefon: +36-1-463-4072, Fax: +36-1-463-3464

Honlap: www.ara.bme.hu, E-mail: jani1234321@gmail.com

ABSTRACT

Hysteresis as a nonlinear phenomenon is present in many scientific areas. Whether it appears in mechanics, electromagnetism or phase transition of materials, hysteresis causes the state of the system to depend on its previous states. The aim of this paper is to investigate nonlinear systems with harmonic forcing, containing elementary Preisach hysteresis loops and linear elements. Conditions on the amplitude and frequency of the forcing for the existence of symmetric periodic solutions have been obtained for different systems

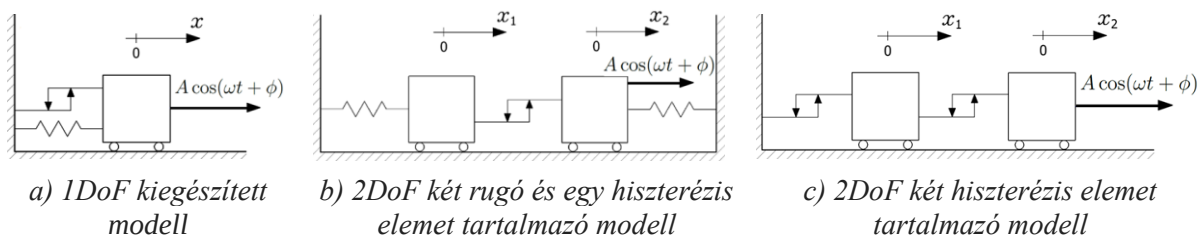
ÖSSZEFOGLALÓ

A histerézis mint nemlineáris jelenség számos tudományterületen jelen van. A histerézis a mechanikában, az elektromágneses anyagokban vagy az anyagok fázisátalakulás esetén ugyanazt jelenti, hogy a rendszer jelenlegi állapota függ a rendszer múltbéli állapotától. A dolgozatban bemutatásra kerül nem lineáris, harmonikusan gerjesztett, Preisach histerézis hurkokat tartalmazó nemlineáris rendszerek vizsgálata. Szimmetrikus periodikus pályák létrehozásához a harmonikus gerjesztés amplitúdójára és frekvenciájára vonatkozó összefüggéseket határozzunk meg.

Kulcsszavak: histerézis, periodikus pályák, nemlineáris differenciálegyenletek.

1. BEVEZETÉS

Az egy szabadsági fokú, csak histerézis elemet tartalmazó rendszert Kalmár-Nagy és társai már részletesen megvizsgálták [1]. Ezen vizsgálat eredményeit felhasználva egy lineáris rugóval kiegészített egy szabadsági fokú (1DoF), illetve különböző két szabadsági fokú (2DoF) modellek kerülnek bemutatásra. A vizsgált rendszereket az 1. ábra szemlélteti.



1. ábra: A vizsgált rendszerek sematikus ábrái

A következőkben bemutatott analitikus vizsgálat segítségével, periodikus pályák előállításához szükséges gerjesztési paramétereket határozzunk meg.

2. EGY SZABADSÁGI FOKÚ RENDSZER

Ebben a fejezetben egy hiszterézis elemet és egy lineáris rugót tartalmazó egy szabadságfokú rendszert vizsgálunk (lásd. 1. a ábra). A rendszer mozgásegyenlete a következő alakban írható fel:

$$\ddot{x}(t) + x(t) + F[x(t)] = A \cos(\omega t + \phi), \quad A \geq 0, \omega > 0, \phi \in (-\pi, \pi]. \quad (1)$$

Ahol A, ω, ϕ a gerjesztés amplitúdója, körfrekvenciája, fáziseltolása. Az $F[x(t)]$ hiszterézis operátort pedig a következőképpen definiáljuk:

$$F[x(t)] = \begin{cases} -1, & x(t) \leq -1, \\ e, & -1 < x(t) < 1, \\ 1, & x(t) \geq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Ahol az e értéke 1 vagy -1 , attól függően, hogy milyen irányból lépünk be a hiszterézis hurokba (lásd. 2. a ábra). Először nézzük, mi történik, ha nem alkalmazunk gerjesztést, tehát:

$$\ddot{x}(t) + x(t) + F[x(t)] = 0. \quad (3)$$

Ez esetben a rendszert két alrendszerre bonthatjuk annak függvényében, hogy $F[x(t)] = -1$ (I -es alrendszer) vagy $F[x(t)] = 1$ (II -es alrendszer). Az alrendszerek közti váltás akkor történik, amikor $x_I(t) = 1$ és $\dot{x}_I(t) \geq 0$ illetve, amikor $x_{II}(t) = -1$ és $\dot{x}_{II}(t) \leq 0$. Az időt az alrendszerek közti váltás esetén nullázzuk. Amennyiben gerjesztést is alkalmazunk, ezt az időeltolást a gerjesztés fázisának eltolásával vesszük figyelembe. Ennek megfelelően az alrendszerekre vonatkozó differenciálegyenletek és a hozzájuk tartozó kezdeti feltételek a következőképpen alakulnak:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_I(t) + x_I(t) - 1 &= 0, & x_I(0) &= -1, & \dot{x}_I(0) &= v_I, \\ \ddot{x}_{II}(t) + x_{II}(t) + 1 &= 0, & x_{II}(0) &= 1, & \dot{x}_{II}(0) &= v_{II}. \end{aligned} \quad (4)$$

Az $x_I(t)$, $x_{II}(t)$ alrendszerre vonatkozó differenciálegyenletet megoldva a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} x_I(t) &= -2 \cos t + v_I \sin t + 1, & \dot{x}_I(t) &= 2 \sin t + v_I \cos t, \\ x_{II}(t) &= 2 \cos t + v_{II} \sin t - 1, & \dot{x}_{II}(t) &= -2 \sin t + v_{II} \cos t. \end{aligned} \quad (4)$$

A továbbiakban belátjuk, hogy a gerjesztés nélküli rendszer összes pályája nem korlátos. Amikor $x_I(t_I) = 1$ (t_I, t_{II} a váltási időket jelöli) az I -es alrendszer átvált a II -es alrendszerbe:

$$\dot{x}_I(t_I) = \sqrt{4 + v_I^2} = v_{II} > |v_I|. \quad (5)$$

Illetve, ha $x_{II}(t_{II}) = -1$ az II -es alrendszer átvált az I -es alrendszerbe:

$$\dot{x}_{II}(t_{II}) = -\sqrt{4 + v_{II}^2} = -\sqrt{8 + v_I^2}, \quad \sqrt{8 + v_I^2} > |v_{II}| > |v_I|. \quad (6)$$

Az (5) és (6) összefüggésekből látható, hogy a váltásoknál a rendszer sebessége növekszik, tehát energia injektálódik a rendszerbe. Ebből adódik, hogy a rendszer pályái nem korlátosak (lásd. 2. b ábra).

Gerjesztés alkalmazása esetén a két alrendszer a következőképpen módosul:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_I(t) + x_I(t) - 1 &= A \cos(\omega t + \phi_I), & x_I(0) &= -1, \dot{x}_I(0) &= v_I, \\ \ddot{x}_{II}(t) + x_{II}(t) + 1 &= A \cos(\omega t + \phi_{II}), & x_{II}(0) &= 1, \dot{x}_{II}(0) &= v_{II}. \end{aligned} \quad (7)$$

Az $x_I(t)$, $x_{II}(t)$ alrendszerekre vonatkozó differenciálegyenletet megoldva a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} x_I(t) &= \frac{-A}{\omega^2 - 1} \cos(\phi_I + \omega t) + \left(\frac{A \cos \phi_I}{\omega^2 - 1} - 2 \right) \cos t + \left(\frac{A \sin \phi_I}{\omega^2 - 1} + v_I \right) \sin t + 1, \\ x_{II}(t) &= \frac{-A}{\omega^2 - 1} \cos(\phi_{II} + \omega t) + \left(\frac{A \cos \phi_{II}}{\omega^2 - 1} + 2 \right) \cos t + \left(\frac{A \sin \phi_{II}}{\omega^2 - 1} + v_{II} \right) \sin t - 1. \end{aligned} \quad (8)$$

A periodikus rezgés során a gerjesztés fázistolására a következő írható fel:

$$\phi_{II} = \phi_I + \omega t_I, \quad \phi_I = \phi_{II} + \omega t_{II}, \quad \text{mod } 2\pi. \quad (9)$$

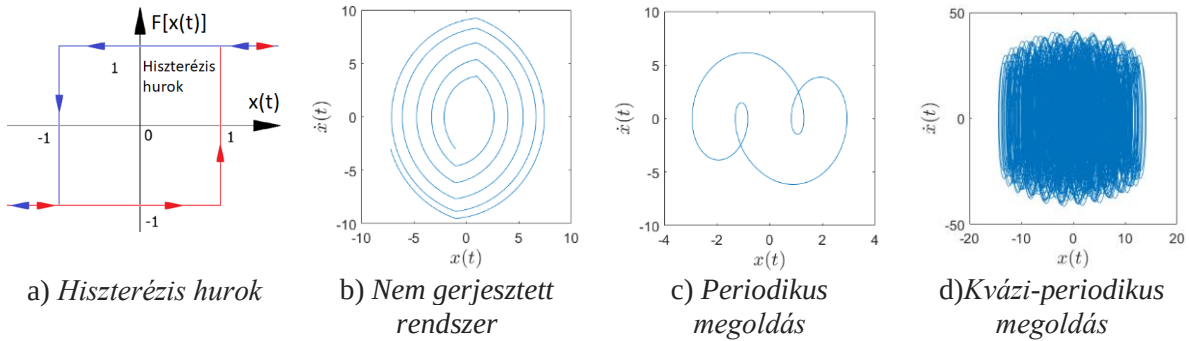
Szimmetrikus periodikus pályát feltételezve, a váltásidőpontjában a sebességre érvényes, hogy $v_I = -v_{II}$. Ezt felhasználva a következő összefüggéseket kapjuk a váltási időkre és a gerjesztés fázisára:

$$t_{II} = t_I = \frac{k\pi}{\omega}, \quad k \in \mathbb{Z}^+; \quad \phi_I = 0, \quad \phi_{II} = \pi, \quad \text{mod } 2\pi. \quad (10)$$

Az alrendszerek differenciálegyenleteinek megoldásai (8), illetve a fázistolásra vonatkozó összefüggések (9) felhasználásával meghatározhatóak a periodikus pályák feltételei:

$$\phi_I = \pi, \quad \omega = \frac{k\pi}{2 \tan^{-1}(-v_I)}, \quad A = \omega^2 - 1, \quad k \in \mathbb{Z}^+. \quad (11)$$

Ezzel megkaptuk milyen gerjesztési paraméterek szükségesek, amennyiben a rendszert $x_I(0) = -1$, $\dot{x}_I(0) = v_I$ illetve $F[x_I(0)] = -1$ kezdeti értékkel indítjuk el.



2. **ábra:** Az alkalmazott hiszterézis gurok illetve különböző típusú trajektóriák a fázissíkban

3. KÉT SZABADSÁGI FOKÚ RENDSZEREK

3.1. Két rugó és egy hiszterézis elem

Az első két szabadságfokú rendszer két rugót illetve egy hiszterézis elemet tartalmaz (lásd. 1. b ábra). A rendszer mozgásegyenlete a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) + x_1(t) - F[x_2(t) - x_1(t)] &= 0, \\ \ddot{x}_2(t) + x_2(t) + F[x_2(t) - x_1(t)] &= A \cos(\omega t + \phi). \end{aligned} \quad (12)$$

Bevezetjük a $z(t) = x_2(t) - x_1(t)$ transzformációt. Ezzel az új differenciálegyenlet a következő lesz:

$$\ddot{z}(t) + z(t) + 2F[z(t)] = A \cos(\omega t + \phi). \quad (13)$$

Az egy szabadságfokú rendszerhez hasonlóan meghatározhatóak a periodikus pályák feltételei:

$$\phi_I = 0, \quad \omega = \frac{k\pi}{2 \tan^{-1}(-2w_I/3)}, \quad A = \frac{3}{2}(\omega^2 - 1), \quad k \in \mathbb{Z}^+. \quad (14)$$

Ahol $\dot{z}_I(0) = w_I$ illetve a rendszer kezdeti állapota $z_I(0) = -1$, illetve $F[z_I(0)] = -1$. Egy $z(t)$ koordinátában periodikus pálya tetszőlegesen felbontható $x_1(t), x_2(t)$ koordinátában periodikus pályára a megfelelő kezdeti értékeket megválasztva ($z(t) = x_2(0) - x_1(0), \dot{z}(0) = \dot{x}_2(0) - \dot{x}_1(0)$).

3.1. Két hiszterézis elem

Ebben az alfejezetben vizsgált rendszer két hiszterézis elemet tartalmaz (lásd. 1. c ábra). A rendszer mozgásegyenletei a következőképpen alakulnak:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) + F[x_1(t)] - F[x_2(t) - x_1(t)] &= 0, \\ \ddot{x}_2(t) + F[x_2(t) - x_1(t)] &= A \cos(\omega t + \phi). \end{aligned} \quad (15)$$

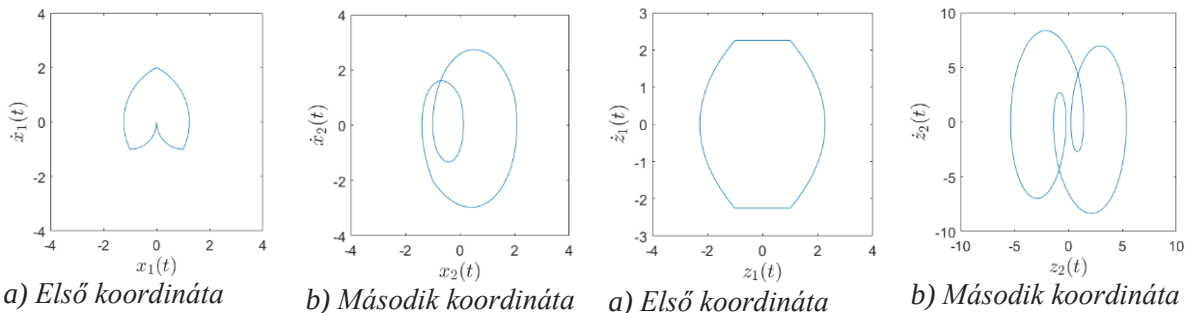
Bevezetjük a $z_1(t) = x_1(t), z_2(t) = x_2(t) - x_1(t)$ transzformációkat, hogy a hiszterézis operátoron belül csak egy változó szerepeljen:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1(t) + F[z_1(t)] - F[z_2(t)] &= 0 \\ \ddot{z}_2(t) - F[z_1(t)] + 2F[z_2(t)] &= A \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (16)$$

Az egy szabadsági fokú rendszerhez hasonlóan, analitikus vizsgálat segítségével a $z_1(t), z_2(t)$ koordinátában szimmetrikus, periodikus pályákra a következő összefüggéseket határozhatunk meg:

$$\begin{aligned} w_{1,I} &= \frac{4\omega}{k\pi} \frac{-1}{1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{4\omega}{k\pi} \right)^2}}, \quad w_{2,I} = - \left(\frac{1}{w_{1,I}} + \frac{3w_{1,I}}{2} \right), \quad k \in \mathbb{Z}^+ \\ \phi_I &= \pi, \quad A = -\omega^2 \left(\frac{1}{w_{1,I}^2} + \frac{3w_{1,I}^2}{4} + \frac{w_{2,I}}{w_{1,I}} + \frac{w_{1,I}w_{2,I}}{2} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Ahol $\dot{z}_{1,I}(0) = w_{1,I}, \dot{z}_{2,I}(0) = w_{2,I}, z_{1,I}(0) = 1$, illetve $z_{2,I}(0) = 1$. Végül pedig nézzük, hogy alakulnak a periodikus pályák a fázissíkban:



3. ábra: Két rugó és egy hiszterézis elem,
 $k = 1, A = 2,8, \omega = 1,69, x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0, x_2(0) = -1, \dot{x}_1(0) = -2$.

4. ábra: Két hiszterézis elem, $k = 3, A = 18, \omega = 3, x_1(0) = 1, \dot{x}_1(0) = -2,25, x_2(0) = 1, \dot{x}_1(0) = 3.83$.

IRODALOM

- [1] T. Kalmar-Nagy, P. Wahi, and A. Halder, Dynamics of a Hysteretic Relay Oscillator with Periodic Forcing, SIAM J. APPLIED DYNAMICAL SYSTEMS Vol. 10, No. 2, pp. 403–422