

Zene matematikus füllel

Definíciók

Konszonancia: két vagy több hang egyidejű, folytatásra nem szoruló, kellemes hatást keltő, harmonikus megszólalása. Magyarul összehangzás, összhang.

Disszonancia: hangoknak olyan együtthangzása, amelyet a fül a megszokott összhangzattal ellentétesnek, kellemetlennek, érdesnek érez, s amely feloldást kíván. Magyarul széthangzás.

Hangköz: két zenei hang távolsága, hangmagasságuk egymáshoz való viszonya, amelyet a két hang frekvenciaaránya fejez ki.

Tiszta intonáció: az összes zenei hangköz a frekvenciák egész számarányaira (például 3:2 vagy 4:3) hangolva.

Oktáv: a latin octava - nyolcadik szóból származik; egy hanghoz tartozó frekvencia dupláját jelenti.

Tiszta hang: olyan hang, amelynek nyomása az időben a szinuszfüggvénynek megfelelően változik. A mindennapi életben tiszta hang csak kivételesen fordul elő.

Alaphang: a zenei hang fülünk által érzékelt hangmagassága. Az alaphang frekvenciája az alapfrekvencia.

Felhang: együtt hangzó hang, amely egy zenei hang megszólaltatásakor az alaphanggal együtt szól, azt színezi. Ez a rezgő test egy-egy szakaszának (félének, harmadának, negyedének) külön-külön rezgésével keletkező magasabb hangok közül egy. A felhangok frekvenciái az alapfrekvencia egész számú többszörösei (ezért speciálisan az alaphang önmaga felhangja). Ábra: Különböző felhangok megszólalása húron a megfelelő osztópontoknál. Forrás: <https://hu.wikipedia.org/wiki/Felhangsor>

Alhang: olyan hang, amely frekvenciájának egész számú többszöröse az alaphang.

Felhangsor: egy zenei hang részhangjainak sorozata. Ha az alapfrekvencia

v_0 , akkor a felhangsor a $2v_0, 3v_0, 4v_0$ stb frekvenciák sorozata.

Hangsor vagy skála: valamely dallam hangjainak magasságuk szerint rendezett sora. A hangsor foka mondja meg, hány hangból áll a skála.

Kiegyenlített hangolás: az oktáv matematikailag pontosan egyenlő nagyságú hanglépésekre való felosztásával nyert hangolás. Az európai zenében a 12 fokú kiegyenlített hangolású hangsor használatos, pl.: gitár, zongora hangolása.

Bevezetés

Mitől találunk szépnek valamit? Az ember ősidők óta keresi a választ erre a kérdésre. Talán mindnyájan érezzük, hogy csakúgy, mint egy andalító dallam élvezetéhez, a szépség megéléséhez is elengedhetetlen a harmónia.

A cikkben a zenei szépségnek csak apró szeletét fogjuk vizsgálni, amelyet a következő helyzet nagyszerűen szemléltet. Ha csukott szemmel leütünk egyszerre két billentyűt a zongorán, elképzelhető, hogy a két hang együttese kellemes érzéssel tölt el minket, azaz konszonáns, ám az is, hogy feszítő, fülsértő lesz a hatás, azaz disszonáns. A cikk elején fény derül rá, fizikailag milyen eszközzel lehet mérni ezt az érzetet, illetve bevezetünk egy mérőszámot is a matematikai leíráshoz. Itt természetesen a hangoknak megfelelő frekvenciákkal számolunk, hiszen a hangok és a frekvenciák között bijekció áll fenn. Bevezetünk egy zenészek által ugyan nem használt, ám a matematikai értelemben vett távolság fogalmának eleget tevő mennyiséget. Ennek segítségével kapcsolatba lehet hozni ezt a bizonyos szépségérzetet hangok távolságával. Ezt egy gráfstruktúrán is szemléltetni fogjuk. Eleinte relatív prím frekvenciák között definiálunk távolságot, de később ezt általánosítani fogjuk tetszőleges egész frekvenciákra is.

Konszonancia- és Disszonanciamérés

Mindenek előtt el kell különítenünk egy zenei hangban az alaphangot a felhangoktól. Az így megtisztított hangoknak már tudjuk nézni az interferálását, amellyel összefüggésbe hozható a konszonancia- és disszonanciaérzet. Ebben a fejezetben a megtisztítás módszerét mutatjuk be, majd az összefüggés leírására mérőszámokat vezetünk be.

Helmholtz¹ a rezonátor nevű eszközt használta, hogy kiszűrje a felhangokat egy összetett hangból, és számszerűsítse a disszonancia mértékét a lebegésre való tekintettel. Az 1. ábrán látható műszerek paramétereinek (üreg térfogata, nyak keresztmetszete, nyak hossza és ennek megváltoztatása) függvényében lehet mérni és számolni.

1. ábra: Helmholtz rezonátorai. Forrás: <https://physics.case.edu/about/history/antique-physics-instruments/helmholtz-resonator-2/>

Két interferáló hullám frekvenciáját folyamatosan változtatva Helmholtz rájött, hogy azok a frekvenciák, amelyek megtartanak egy racionális arányt, növelik a konszonanciaérzetet. Egy v_0 alaphang p -edik és q -edik felhangját tekintve a konszonancia mértéke nagyjából számszerűsíthető úgy, mint a $\frac{p}{q}$ hányados, ahol $1 \leq \frac{p}{q} < 2$. Tehát minél kisebb az arány, annál kisebb a konszonancia (leszámítva az 1 értéket).

1. táblázat: Helmholtz táblázata az egy oktávon belüli fő felhangarányokról és a megfelelő hangközök elhangoltságából adódó lebegések relatív erősségéről (C_H %-ban). A jobb oldali Δ_H oszlop a C_H mennyiség reciprokának értékét méri logaritmikus skálán, így nincs dimenziója. A felhangsor hetedik vagy későbbi felhangjait tartalmazó arányok sorai szürkék.

Az 1. táblázatban a Helmholtz által vizsgált fontosabb felhangok arányát láthatjuk, valamint ezek erősségét. Ez a paraméter, amelyet Helmholtz a táblázat sorbarendezéséhez használ, a megfelelő hangközök elhangoltságából eredő relatív erősség, amely úgy kapható, hogy modellezzük a Corti-szervben képződő rezonancia erősségét. Ez a mennyiség a következő értékkel írható le:

$$C_H(p, q) = \frac{100}{pq}.$$

Helmholtz azt állította, hogy a hetedik felhang már nagyon halk a legtöbb hangszeren, és a távolabbi felhangoknak általában elhanyagolható a jelenléte. Így a hetedik vagy ennél magasabb felhangokat figyelmen kívül hagyva (ezek szürke sorok az 1. táblázatban) fönnáll a közelítési szabály, miszerint a hányados közvetlen kapcsolatban áll C_H értékével. Ezalól kivételt képez az 5/3 hányados. A táblázat kiegészült még egy oszloppal, amely inverz kapcsolatot

¹Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, 1821 – 1894: orvos, fizikus; az emberi látás és hallás tudományos tanulmányozásának úttörője.

mutat C_H értékével logaritmikus skálán, így dimenzió nélküli mérőszám:

$$\Delta_H(p, q) = \log_2 \frac{100}{C_H(p, q)} = \log_2(pq) \in [0, \infty).$$

(1) egyenlet

Melodikus távolság

A következő fejezetben bevezetünk egy zenészek által ugyan nem használt, azonban a konszonanciával és disszonanciával kapcsolatba hozható függvényt a frekvenciákon, így egyben a hangokon is.

A hallás, csakúgy, mint a többi érzékelés, az inger relatív változását érzékeli, különös tekintettel a $v \in \Omega \equiv (0, \infty)$ frekvenciára. Más megközelítéssel ahhoz, hogy mérni tudjuk a frekvencia változását, bevezetünk egy I függvényt, amelyet a következő képlettel definiálunk:

$$I(v, v_0) \stackrel{\text{def}}{=} a \ln \frac{v}{v_0}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Az $I(v, v_0)$ dimenziómentes mennyiség a v és egy tetszőleges v_0 kezdőérték közötti frekvencia távolságát méri logaritmikus skálán. Feltéve, hogy a távolság egysége egy oktáv, azaz $I(2v_0, v_0) = 1$, adódik, hogy $a = 1/\ln 2$. Tehát a távolság két tiszta hang között a következő módon számolható:

$$I(v, v_0) = \log_2 \frac{v}{v_0}.$$

(2) egyenlet Ez az egyenlet leírja azt a természetes feltételezést is, hogy $I(v, v_0) = -I(v_0, v)$, tehát a távolságnak van előjele és iránya. Másrészt az így értelmezett távolság abszolút értéke az Ω halmazbeli frekvenciák melodikus távolságát definiálja:

$$d(v, v_0) \stackrel{\text{def}}{=} |I(v, v_0)|.$$

(3) egyenlet Egy adott v_0 értékre a távolságfüggvény és a melodikus távolság a frekvenciák (általánosságban frekvenciaarányok) $(0, \infty)$ intervallumában definiáltak, és értéküket az előbbi esetben a hangmagasságok közti távolságok mérésére az $R(I) = (-\infty, \infty)$ intervallumból, az utóbbi esetben pedig az $R(d) = [0, \infty)$ intervallumból veszik föl.

Feltehető, hogy az alaphang frekvencia az 1 egység. Ekkor az alaphang és egy v frekvenciához tartozó hang távolságát a következőképpen írhatjuk le:

$$I(v) \stackrel{\text{def}}{=} I(v, 1).$$

(4) egyenlet Hasonlóan $|I(v)|$ az alaphang és a v frekvenciához tartozó hang melodikus távolsága. Mivel a távolságunknál az egység hossz egy oktáv, ezért a távolság értékének egészrész,

$$\lfloor I(v) \rfloor = \lfloor \log_2 v \rfloor$$

mutatja, hogy hány oktávnyira helyezkedik el a v frekvenciához tartozó hang az alaphanghoz képest.

A (4) egyenletben leírt jelölést és a logaritmus azonosságait két frekvencia szorzatára használva teljesül, hogy

$$I(v_1 v_2) = I(v_1) + I(v_2),$$

valamint a (2) egyenlet kifejezhető úgy, mint

$$I(v, v_0) = I(v) - I(v_0).$$

Például a 12 fokú kiegyenlített hangolású skála hangjai egy oktávon belül az $\alpha_k = 2^{k/12}$; $k = 0, \dots, 11$ frekvenciákat adják. Ez egy mértani sorozat, és az $I(\alpha_k) = k/12$ melodikus távolságaik pedig egy számtani sorozatot alkotnak. A bevezetett távolságfogalmunknak ezen tulajdonsága is egybevág a zenei szemléletmóddal, vagyis hogy egy kiegyenlített hangolású hangsor hangjai egyenlő távolságra vannak egymástól.

Relatív prím felhangok közti távolság

Ebben a fejezetben bevezetünk egy zenészek által ugyan nem használt, a matematikai távolság fogalmának azonban eleget tevő függvényt, amelyet először csak egymáshoz képest relatív prím frekvenciájú felhangokon értelmezzünk. (Vegyük észre, hogy tisztán intonált hangközként hat az alaphang és egy felhangja, hiszen frekvenciaarányuk racionális. Éppen ezért a továbbiakban is az alaphanggal és felhangjaival fogunk számolni, erre értelmezzünk távolságot.) Továbbá konstrukciót adunk a hanggráfra, amelyet mint geometriai szemléltetőeszközt arra fogunk használni, hogy kapcsolatba hozzuk

az egyazon alaphanghoz tartozó két felhang közötti disszonanciát a melodikus távolsággal.

Szeretnénk összehasonlítani egy adott v_0 frekvenciához tartozó alaphang két felhangját:

$$v_p \stackrel{\text{def}}{=} pv_0; \quad v_q \stackrel{\text{def}}{=} qv_0.$$

Először feltesszük, hogy p és q pozitív egészek, és egymáshoz képest relatív prímek. Tehát legnagyobb közös osztójuk $\text{lko}(p, q) = 1$, és legkisebb közös többszörösük $\text{lkkt}(p, q) = pq$. Ekkor a legkisebb a és b természetes számok, amelyekre teljesül, hogy v_p egy felhangja megegyezik v_q egy felhangjával, azaz

$$apv_0 = bqv_0,$$

az nyilvánvalóan az $a = q$ és $b = p$. A fenti megfontolás alapján értelmezzük v_p és v_q legmélyebb közös felhangját (lmkf) mint:

$$\text{lmkf}(v_p, v_q) \stackrel{\text{def}}{=} pqv_0 = \text{lkkt}(p, q)v_0.$$

(5) egyenlet A melodikus távolság tehát egy v_0 alaphang és két felhangjának a legmélyebb közös felhangja között a (3) és (4) egyenletek alapján:

$$d(pqv_0, v_0) = I(pq) = \log_2 pq.$$

Most megépítjük a 2. ábrán látható irányított hanggráfot. A csúcsokban frekvenciák állnak, amelyeket az éleken feltüntetett arányuk szerint kötünk össze. Egy csúcsból az alatta lévő szintre mutat egy p -él az egyik irányba és egy q -él a másikba. Ezt a gráfot távolságmérésre fogjuk használni.

2. ábra: v_0 gyökerű hanggráf, melynek élein a p és q relatív prím frekvenciák állnak. v_0 felmenői szürkék.

A v_0 csúcsból indulunk. A p irány mentén haladva elérjük a pv_0 , p^2v_0 stb. pontokat, a q irány mentén pedig a qv_0 , q^2v_0 stb. pontokat. Általában tehát a $p^mq^n v_0$; $m, n \in \mathbb{N}$ frekvenciáknak megfelelő felhangok állnak a gráf csúcsaiban. A melodikus távolság két szomszédos pont között $\log_2 p$, ha egy p -éllel vannak összekötve, és $\log_2 q$, ha egy q -éllel.

A v_0 csúcsból a $p^mq^n v_0$ csúcsba bármilyen útvonalon eljuthatunk, amely m darab p -élt és n darab q -élt tartalmaz a sorrendtől eltekintve. Ezen útvonal melodikus hossza

$$d(p^mq^n v_0, v_0) = d(p^m v_0, v_0) + d(q^n v_0, v_0) = I(p^m) + I(q^n) = m \log_2 p + n \log_2 q,$$

(6) egyenlet amely egyenként kiszámolható a közös v_0 kezdőcsúcsból $p^m v_0$ -ba és $q^n v_0$ -ba menő távolságok összegeként. Irányított körmentes gráfokban ez a közös kezdőcsúcs a gyökér, amely itt a legmagasabb közös alhangnak felel meg (lmka). Ez az első olyan csúcs a p - és q -élekkel címkézett hanggráfban, amelynek van v_p és v_q leszármazottja is. Így

$$\text{lmka}(p^m v_0, q^n v_0) \stackrel{\text{def}}{=} v_0; \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Vegyük észre, hogy a 2. ábra minden csúcsának közös osztója a legmagasabb közös alhang. Ennél fogva a korábban bevezetett távolságfogalom és műveleti tulajdonságai érvényesek maradnak, ha a legmagasabb közös alhangot választjuk egységnek.

Következésképpen minden p és q relatív prímre (de ez igaz marad minden p^m és q^m prímtvány esetén is) a harmonikus távolság a $v_p = p v_0$ és $v_q = q v_0$ frekvenciákhoz tartozó hangok között úgy definiálható, mint a hangok legmélyebb közös felhangjának a legmagasabb közös alhangjától vett melodikus távolsága:

$$d_H(v_p, v_q) \stackrel{\text{def}}{=} d(\text{lmkf}(v_p, v_q), \text{lmka}(v_p, v_q)).$$

Amint azt a (6) egyenletnél is írtuk, ez megegyezik az $\text{lmka}(v_p, v_q)$ legmagasabb közös alhang v_p és v_q csúcstól mért melodikus távolságának összegével:

$$d_H(v_p, v_q) = d(pq v_0, v_0) = d(p v_0, v_0) + d(q v_0, v_0).$$

(7) egyenlet Minden $v_0 \in \mathbb{R}$ alapfrekvencia esetén a harmonikus távolság két felhangra:

$$d_H(p v_0, q v_0) = d_H(p, q).$$

Ez az érték a hanggráfon lévő távolság a két frekvencia közös alaphangja és legmélyebb közös felhangja között.

Tetszőleges felhangok közti távolság

A következő fejezetben általánosítjuk az előbb bevezetett távolságfogalmat tetszőleges felhangok esetére, majd belátjuk, hogy egy alaphang immáron összes felhangján értelmezett függvény valóban metrika.

Most összehasonlítjuk egy v_0 frekvenciához tartozó alaphang két nem relatív prím felhangját. Ezek legyenek

$$v_P \stackrel{\text{def}}{=} P v_0; \quad v_Q \stackrel{\text{def}}{=} Q v_0,$$

ahol $P, Q \in \mathbb{N}$, és

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \text{lko}(P, Q) > 1.$$

Az előző fejezet jelöléseivel élve $v_P = p D v_0$ és $v_Q = q D v_0$, ahol $p \stackrel{\text{def}}{=} P/D$ és $q \stackrel{\text{def}}{=} Q/D$ relatív prímek, mert ha nem lennének, akkor D sem lehetne P és Q legnagyobb közös osztója. Ismeretes, hogy

$$\text{lko}(P, Q) \cdot \text{lkt}(P, Q) = PQ,$$

azaz

$$D \cdot \text{lkt}(P, Q) = pq D^2.$$

Leosztva az egyenlet mindkét oldalát D -vel:

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \text{lkt}(P, Q) = pq D.$$

Ezek után az (5) egyenlethez hasonlóan értelmezhetjük a legmélyebb közös felhangot mint

$$\text{lmkf}(v_P, v_Q) \stackrel{\text{def}}{=} pq D v_0 = \text{lkt}(P, Q) v_0 = M v_0,$$

valamint a legmagasabb közös alhangot mint

$$\text{lmka}(v_P, v_Q) \stackrel{\text{def}}{=} \text{lko}(P, Q) v_0 = D v_0.$$

Ezzel a 2. ábrához hasonló szerkezetű gráfot kapunk, de most a közös kezdőcsúcs $D v_0$. Ebből már könnyen adhatunk képletet két tetszőleges felhang harmonikus távolságának kiszámítására. Hasonlóan a (7) egyenletben felírtakhoz, v_P és v_Q harmonikus távolsága a legmagasabb közös alhangjuknak a legmélyebb közös felhangjuktól vett melodikus távolságával definiálható:

$$d_H(v_P, v_Q) \stackrel{\text{def}}{=} d(M v_0, D v_0) = d(pq D v_0, D v_0) = |I(pq)| = |\log_2 pq| = \log_2 pq.$$

(8) egyenlet Következésképpen igaz az alábbi egyenlőséglánc:

$$d_H(v_P, v_Q) = d_H(P, Q) = d_H(p, q) = \log_2 pq,$$

vagyis tetszőleges nem relatív prím felhangok harmonikus távolsága visszavezethető relatív prímeikére azáltal, hogy a legkisebb közös többszöröst leosztjuk a legnagyobb közös osztóval, és a megmaradt relatív prímelek harmonikus távolságát mérjük. Tehát a harmonikus távolságra adható másik definíció:

$$d_H(v_P, v_Q) \stackrel{\text{def}}{=} \log_2 \frac{\text{lmkf}(v_P, v_Q)}{\text{lmka}(v_P, v_Q)} = \log_2 \frac{\text{lkkt}(P, Q)}{\text{lko}(P, Q)},$$

(9) egyenlet amely minden $v_0 \in \mathbb{R}$ alaphang esetén fenáll.

A harmonikus távolság valóban távolságot definiál, ugyanis kielégíti a metrika axiómáit.

Nemnegativitás és null hossz: a (8) egyenlet miatt $d_H(v_P, v_Q) = |I(pq)| \geq 0$ nyilvánvalóan. Továbbá $d_H(v_P, v_Q) = 0 \iff |I(pq)| = |\log_2 pq| = \log_2 pq = 0 \iff pq = 1 \iff p = q = 1 \iff (D =)P = Q$, ahol kihasználtuk, hogy $p, q \in \mathbb{N}$.

Szimmetria: a (9) egyenlet miatt

$$d_H(v_P, v_Q) = \log_2 \frac{\text{lkkt}(P, Q)}{\text{lko}(P, Q)} = \log_2 \frac{\text{lkkt}(Q, P)}{\text{lko}(Q, P)} = d_H(v_Q, v_P).$$

Háromszög-egyenlőtlenség: Legyen $v_R = Rv_0$, ahol $R \in \mathbb{N}$ és $\text{lko}(P, R) = D_P$, $\text{lko}(Q, R) = D_Q$. Ekkor R felírható úgy, mint $R = D_P r_P = D_Q r_Q$. Majd ismét a (8) egyenletet használjuk: $d_H(v_P, v_Q) = \log_2 pq \leq \log_2 (pr_P \cdot r_Q) = \log_2 (pr_P) + \log_2 (r_Q) = d_H(v_P, v_R) + d_H(v_R, v_Q)$.

Helyette: Legyen $v_R = Rv_0$, ahol $R \in \mathbb{N}$. Kellene:

$$d_H(v_P, v_Q) \leq d_H(v_P, v_R) + d_H(v_R, v_Q).$$

Ez a (9) egyenlet alapján átalakítva:

$$\log_2 \frac{\text{lkkt}(P, Q)}{\text{lko}(P, Q)} \leq \log_2 \frac{\text{lkkt}(P, R)}{\text{lko}(P, R)} + \log_2 \frac{\text{lkkt}(R, Q)}{\text{lko}(R, Q)} = \log_2 \frac{\text{lkkt}(P, R) \cdot \text{lkkt}(R, Q)}{\text{lko}(P, R) \cdot \text{lko}(R, Q)}.$$

Vizsgáljuk meg külön a számlálót és a nevezőt!

Számláló: Két szám legkisebb közös többszörösét úgy keressük, hogy a számok prímtényezős felbontásaiból a nagyobb hatványon kiválasztjuk a prímekeket, majd ezeket összeszorozzuk. Ez alapján a

jobb oldali számláló valóban nem lehet kisebb a bal oldalánál, hiszen P és Q prímtényezőit most is kiválasztjuk legalább ugyanakkora hatványon, ezen felül R miatt kerülhet be még szorzótényező.

Nevező: Két szám legnagyobb közös osztójának megtalálásához a közös prímtényezőket szorozzuk össze a kisebb hatványon. Öt esetet különíthetünk el:

1. Egy prím P -nek és Q -nak közös prímtényezője, és ez nem osztója R -nek: ezzel a bal oldalon osztunk, a jobb oldalon azonban nem, így a jobb oldal nagyobb vagy egyenlő marad.
2. Egy prím P -nek és Q -nak közös prímtényezője, és ez osztója R -nek is: könnyen meggondolható, hogy ez a prím a jobb oldali számláló egyik kifejezésében előfordul legalább akkora hatványon, mint a bal oldaliban; és a jobb oldali nevező egyik kifejezésében előfordul legfeljebb akkora hatványon, mint a bal oldaliban. Tehát a jobb oldalon összességében biztosan nagyobb hatványon szerepel ez a prím.
3. Egy prím P -nek és Q -nak nem közös prímtényezője, P -nek és R -nek azonban az (ez Q -nak és R -nek biztosan nem közös prímtényezője, mert akkor P -nek és Q -nak is az lenne): ez a prímtényező a bal oldalon csak a számlálóban szerepel; a jobb oldali számláló mindkét kifejezésében megjelenik, ráadásul legalább az egyikben nem kisebb hatványon. A jobb oldali nevezőben pedig legfeljebb akkora hatványon lesz jelen, mint a számlálóban a kisebb. Tehát most is a jobb oldal nagyobb vagy egyenlő.
4. Egy prím P -nek és Q -nak nem közös prímtényezője, Q -nak és R -nek azonban az: ugyanúgy, mint az előző esetben.
5. A három számnak nincs közös prímosztója: mindenhol 1-gyel osztunk, így a jobb oldal nagyobb, mivel a számlálót már vizsgáltuk.

Vegyük észre, hogy $d_H(p, q)$ értéke megegyezik az (1) egyenletben definiált $\Delta_H(p, q)$ kifejezéssel, amellyel az 1. táblázat jobb oldali oszlopának értékeit számítottuk ki. Tehát találtunk egy matematikai mennyiséget, nevezetesen a harmonikus disszonanciát, amellyel a felhangok távolságát, zeneileg a tisztán intonált hangközök hallatán érzett disszonanciát tudjuk mérni.

Szendi Ágoston