

Relativisztikus mozgások különböző tenzori rangú mezőkben

A **skalármező** összehasonlítása a már ismert **vektormező** esetével

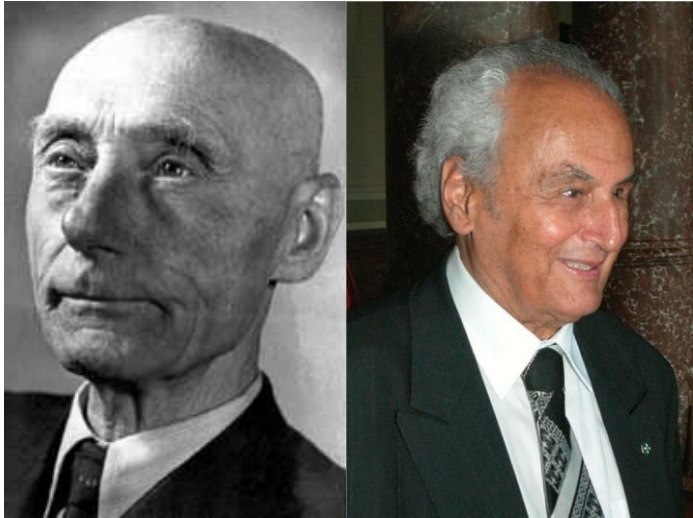
Szepessy Dávid
Fizika BSc elsőéves
Témavezetők:

Cserti József
ELTE Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

Dávid Gyula
ELTE Atomfizika Tanszék

skalármező

- Pl. a Higgs-mező
- Négyesskalár-mező: $\Phi(x^l)$
- Novobátsky, Marx



vektormező

- Pl. az elektromágneses mező
- Négyesvektor-mező: $A_k(x^l)$
- Sommerfeld



Cél: megmaradó mennyiségek

Relativisztikus mozgás

$\mathbf{r}(t)$

Newton-törvény

$$\frac{d}{d\tau} (M \mathbf{v}) = K$$

sajátidő $x^k = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \frac{dx_k}{d\tau}$ $\frac{dx_k}{d\tau}$ egyenes

4 egyenlet - 5 ismeretlen

Hármasjelölés

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial L'}{\partial r_\alpha}$$

$$E = \frac{\partial L'}{\partial v_\alpha} v_\alpha - L'$$

Hatásintegrál

$$S = \int L d\tau$$

$$S = \int L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

Kovariáns jelölés

$$\frac{d}{d\tau} L' = L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial L}{\partial u^k} \frac{du^k}{d\tau} - \frac{\partial L}{\partial x^k} \frac{dx^k}{d\tau}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial L'}{\partial r_\alpha} \frac{\partial L}{\partial u^k} u^k - L$$

$$E = \frac{\partial L'}{\partial v_\alpha} v_\alpha - L'$$

Novobátzky (1950): $\mathbf{r}(t)$
 $M(t)$

Cél: megmaradó mennyiségek

A) skalármező

$$\frac{d}{d\tau} (Mu_k) = g \partial_k \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{x})$$
$$\frac{d}{d\tau} (Mu_0) = 0$$
$$x^k = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}$$
$$u_k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ -\mathbf{v} \end{pmatrix}$$
$$\frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{áll.} = E$$

$$\frac{d}{d\tau} (Mu_k) = K_k$$

$$M = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial L}{\partial u^k} u^k - L \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial L'}{\partial r_\alpha}$$

$$E = \frac{\partial L'}{\partial v_\alpha} v_\alpha - L'$$

Cél: megmaradó mennyiségek

A) skalármező

$$\frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{áll.} = E$$

$$L = L = -c^2 M(r) \mathbb{P}(\mathbf{r})$$

$$M = m + g\Phi(\mathbf{r})$$

$$\Phi \sim -\frac{1}{r}$$

$$M(r) = m \left(1 - \frac{R}{r} \right)$$

~~$$h = c^2 \dot{\varphi}$$~~

$$\frac{d}{d\tau} (Mu_k) = K_k$$

$$M = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial L}{\partial u^k} u^k - L \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial L'}{\partial r_\alpha}$$

$$E = \frac{\partial L'}{\partial v_\alpha} v_\alpha - L'$$

Cél: megmaradó mennyiségek

A) skalármező

B) vektormező

$$\frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{áll.} = E$$

$$L = -c^2 M(r)$$

$$M(r) = m \left(1 - \frac{R}{r} \right)$$

~~$$h = c^2 \dot{\varphi}$$~~

$$L' = -c^2 M(r) \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}{c^2}}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L'}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{Mr^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}{c^2}}} = \frac{Mr^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{áll.}$$

$$\frac{M}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} r^2 \dot{\varphi} = \text{áll.}$$

$$\frac{d}{d\tau} (Mu_k) = K_k$$

$$M = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial L}{\partial u^k} u^k - L \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial L'}{\partial r_\alpha}$$

$$E = \frac{\partial L'}{\partial v_\alpha} v_\alpha - L'$$

Cél: megmaradó mennyiségek

A) skalármező

$$\frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{áll.} = E$$

$$M(r) = m \left(1 - \frac{R}{r} \right)$$

$$h = r^2 \dot{\varphi}$$

B) vektormező

$$L = -mc^2 - \frac{e}{c} A_k u^k$$

$$L' = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e \Psi - \cancel{e \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}}$$

$$\frac{d}{d\tau} (M u_k) = K_k$$

$$M = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial L}{\partial u^k} u^k - L \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial L'}{\partial r_\alpha}$$

$$E = \frac{\partial L'}{\partial v_\alpha} v_\alpha - L'$$

$$\frac{r^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{áll.}$$

Cél: megmaradó mennyiségek

A) skalármező

$$\frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{áll.} = E$$

$$M(r) = m \left(1 - \frac{R}{r} \right)$$

$$h = r^2 \dot{\varphi}$$

B) vektormező

$$\frac{r^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = h$$

$$L' = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\Psi$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\Psi$$

$$\frac{d}{d\tau} (Mu_k) = K_k$$
$$M = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial L}{\partial u^k} u^k - L \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial L'}{\partial r_\alpha}$$

$$E = \frac{\partial L'}{\partial v_\alpha} v_\alpha - L'$$

A pályaegyenletek levezetése



A) skalármező

$$\frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{áll.} = E$$

$$M(r) = m \left(1 - \frac{R}{r} \right)$$

$$h = r^2 \dot{\varphi}$$

B) vektormező

$$\frac{r^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = h$$

$$L' = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\Psi$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\Psi$$

$$\frac{d}{d\tau} (Mu_k) = K_k$$
$$M = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial L}{\partial u^k} u^k - L \right)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial L'}{\partial r_\alpha}$$

$$E = \frac{\partial L'}{\partial v_\alpha} v_\alpha - L'$$

A pályaegyenletek levezetése

A) skalármező

$$\frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{áll.} = E \rightarrow$$

1.

$$v^2 = c^2 \left(1 - \frac{M^2 c^4}{E^2} \right)$$

3.

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

2. $M(r) = m \left(1 - \frac{R}{r} \right)$

$h = r^2 \dot{\varphi}$

4.

$$\dot{r} = \pm c \sqrt{1 - \alpha^2 + 2\alpha^2 \frac{R}{r} - (\alpha^2 + \beta^2) \frac{R^2}{r^2}} \quad \alpha = \frac{E}{mc^2} \quad \beta = \frac{h}{Rc}$$

5. $\dot{r} = r' \dot{\varphi} = r' \frac{h}{r^2} = \frac{d}{d\varphi} \left(-\frac{h}{r} \right)$

$$\frac{d}{d\varphi} \left(-\frac{h}{r} \right) = \pm \sqrt{c^2 \left(1 - \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right) - \left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) \left(\frac{\alpha^2 \beta c}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{h}{r} \right)^2}$$

B) vektormező

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\Psi$$

$$\frac{r^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = h$$

A pályaegyenletek levezetése

A) skalármező

B) vektormező

$$\alpha = \frac{E}{mc^2} \quad \beta = \frac{h}{Rc}$$

$$\frac{d}{d\varphi} \left(-\frac{h}{r} \right) = \pm \sqrt{c^2 \left(1 - \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right) - \left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) \left(\frac{\alpha^2 \beta c}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{h}{r} \right)^2}$$

A pályaegyenletek levezetése

A) skalármező

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\alpha^2 \beta c}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{h}{r} \right) = \pm \sqrt{c^2 \left(1 - \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right) - \left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) \left(\frac{\alpha^2 \beta c}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{h}{r} \right)^2} \quad \alpha = \frac{E}{mc^2} \quad \beta = \frac{h}{Rc}$$

$u' =$

$$u(\varphi) = A \cos(n\varphi) \quad r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(n\varphi)}$$

B) vektormező

$$\Psi = -\frac{Ze\mathcal{E}}{r} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} - \frac{1}{r} \right) = \pm \sqrt{\frac{E^2}{\alpha^2 e^4 \beta^4} \left(1 + \frac{\alpha^2 \beta^2}{1 - \beta^2} \right) - (1 - \beta^2) \left(\frac{E}{e^2 \beta^2 (1 - \beta^2)} - \frac{1}{r} \right)^2} \quad \alpha = \frac{E}{mc^2} \quad \beta = \frac{Ze^2}{hc}$$

$u' =$

$$u(\varphi) = A \cos(n\varphi) \quad r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(n\varphi)}$$

A pályaegyenletek levezetése



A) skalármező

$$p = R \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \quad \varepsilon = \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 - \beta^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right)} \quad n = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}} > 1 \quad \boxed{\alpha = \frac{E}{mc^2}} \quad \boxed{\beta = \frac{h}{Rc}}$$

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(n\varphi)}$$

B) vektormező

$$p = \frac{e^2}{E} \left(\frac{1}{\beta^2} - 1 \right) \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{1}{\alpha^2} \right)} \quad n = \sqrt{1 - \beta^2} < 1 \quad \boxed{\alpha = \frac{E}{mc^2}} \quad \boxed{\beta = \frac{Ze^2}{hc}}$$

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(n\varphi)}$$

A) skalármező

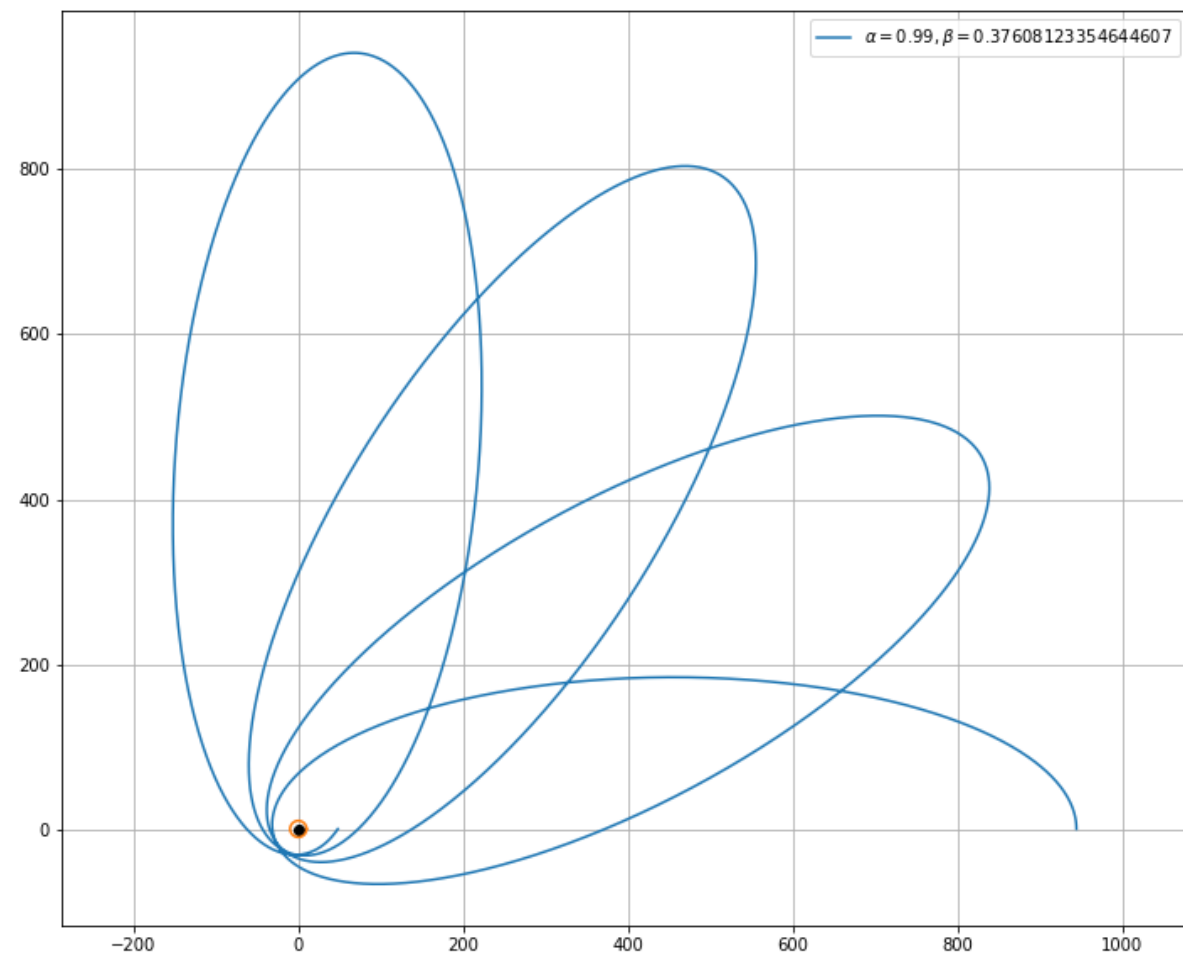
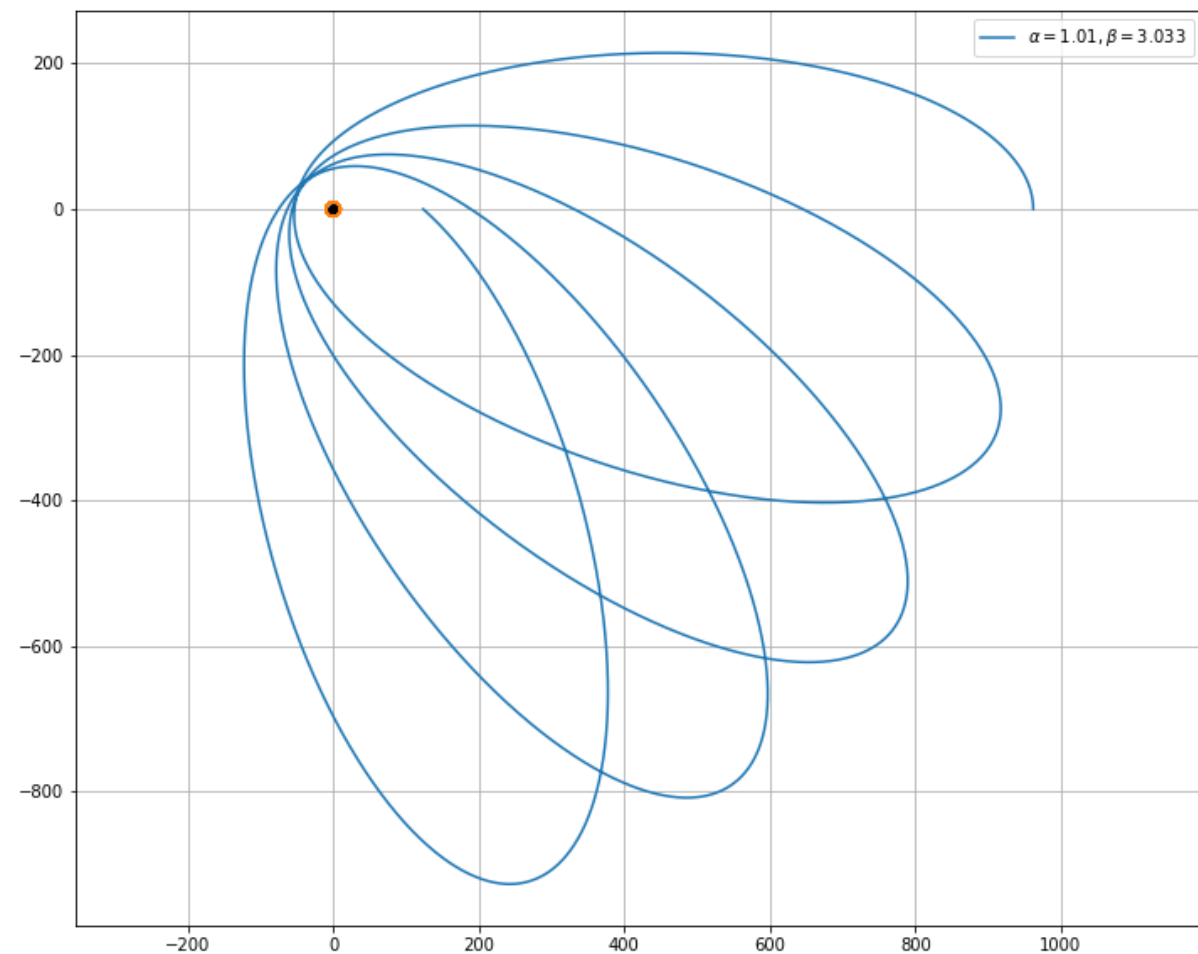
$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(n\varphi)}$$

B) vektormező

$n > 1$

1. Ellipszisjellegű

$n < 1$



A) skalármező

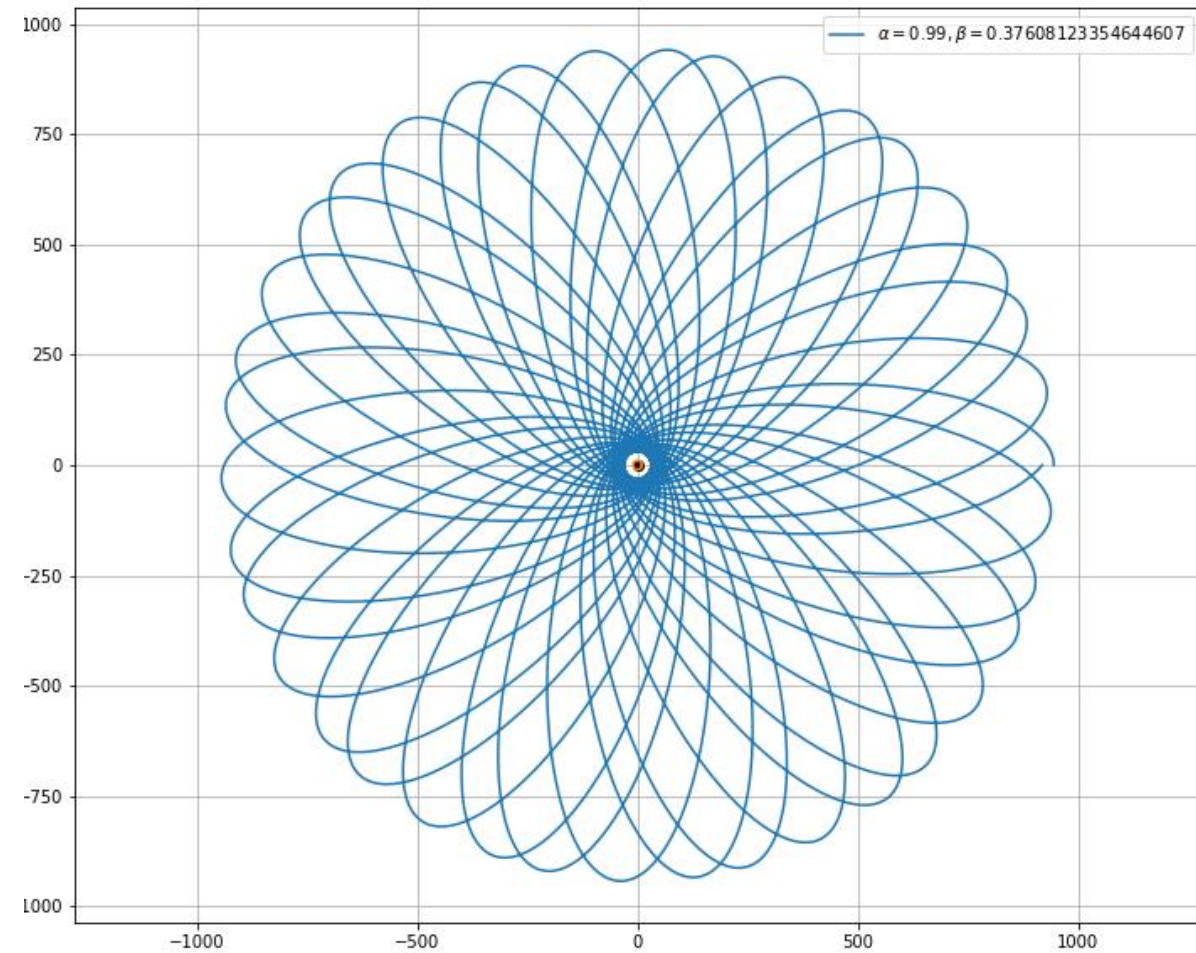
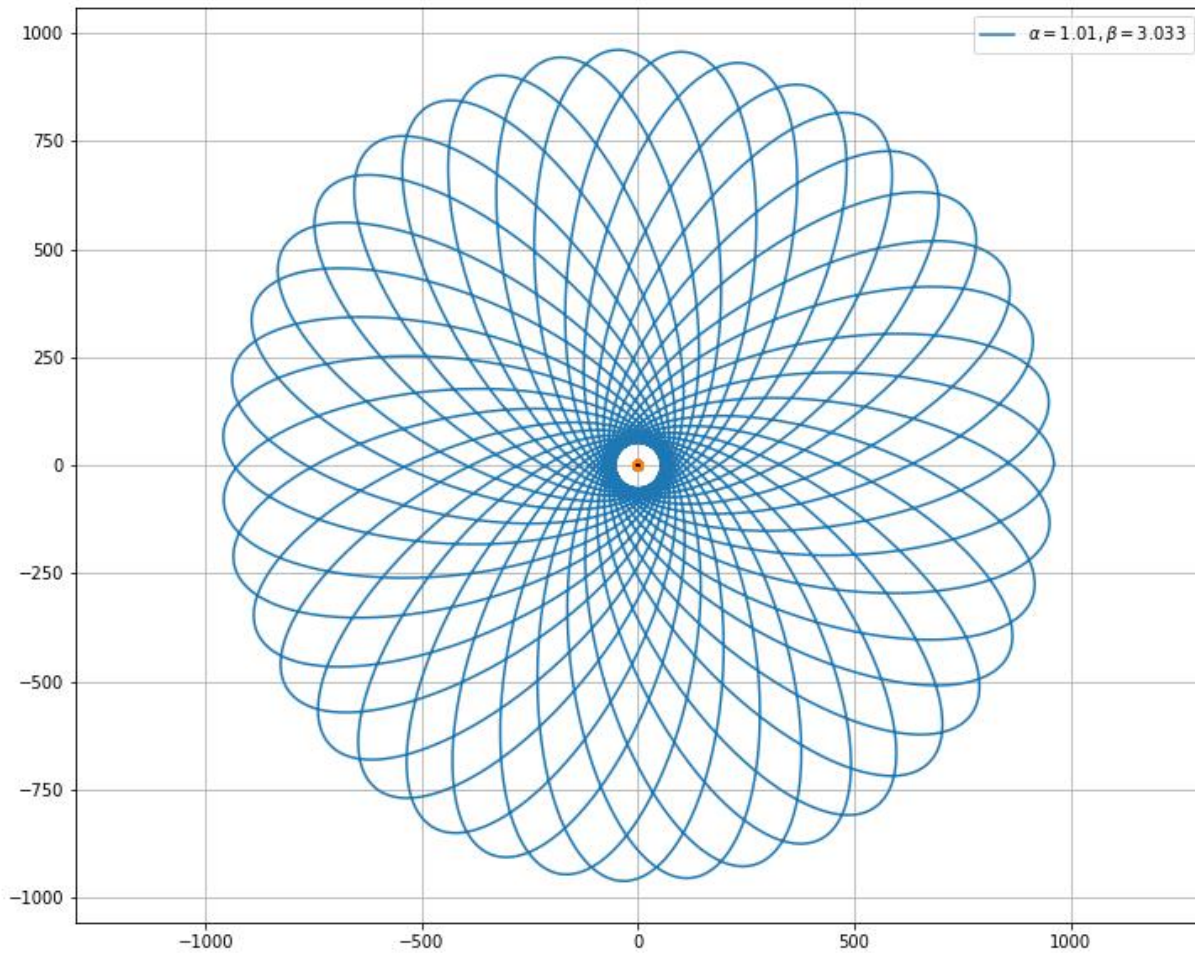
$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(n\varphi)}$$

B) vektormező

$n > 1$

1. Ellipszisjellegű

$n < 1$



A) skalármező

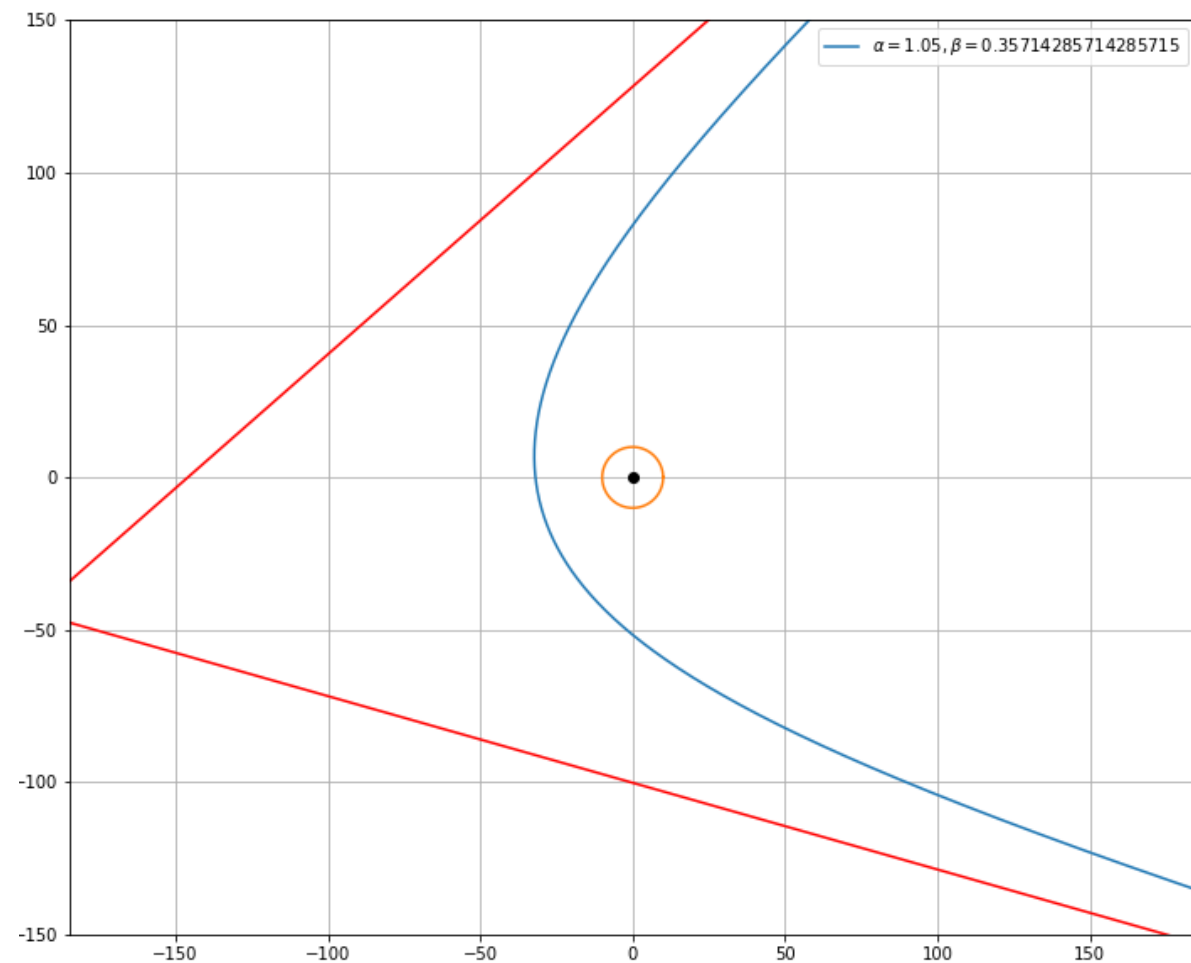
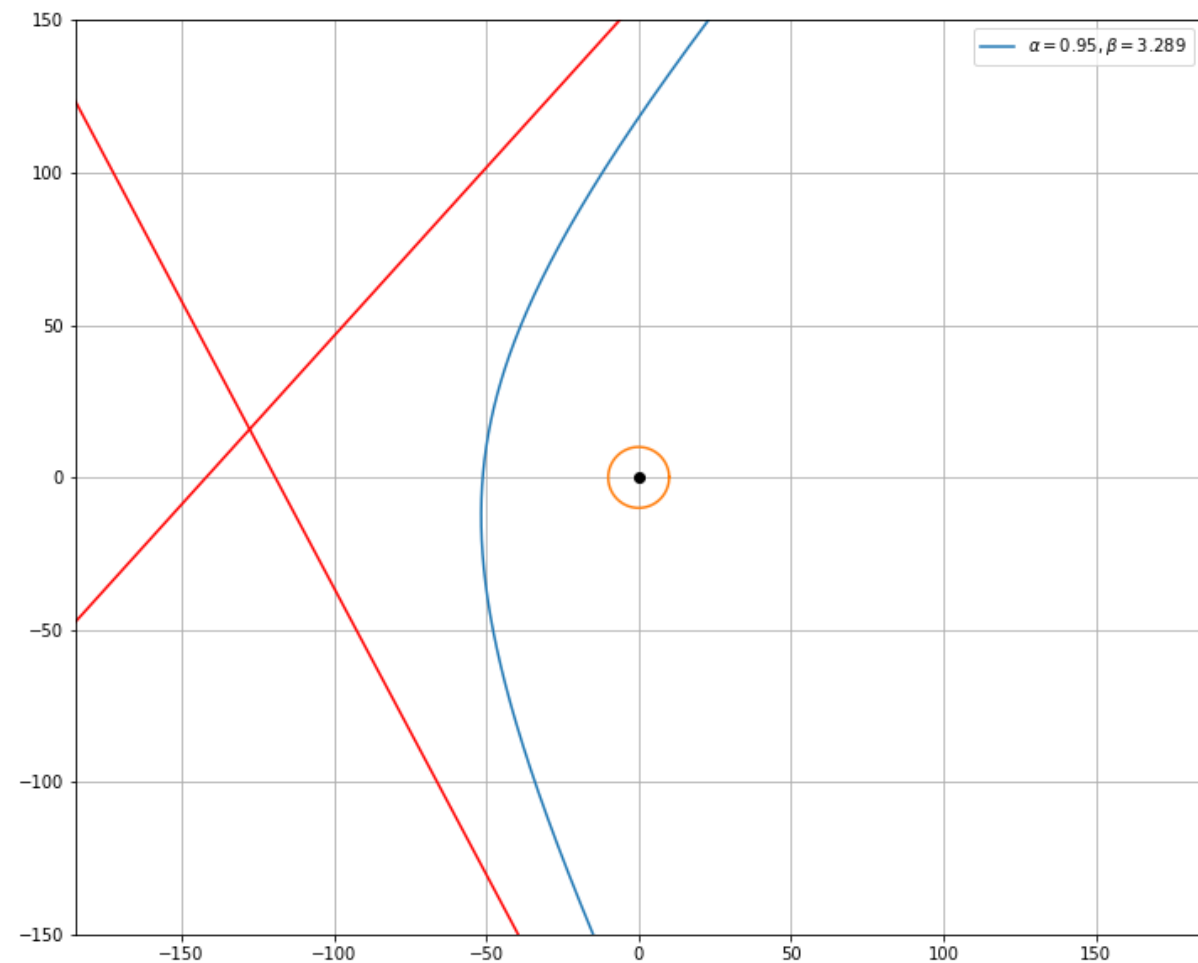
$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(n\varphi)}$$

B) vektormező

$n > 1$

2. hiperbolajellegű

$n < 1$

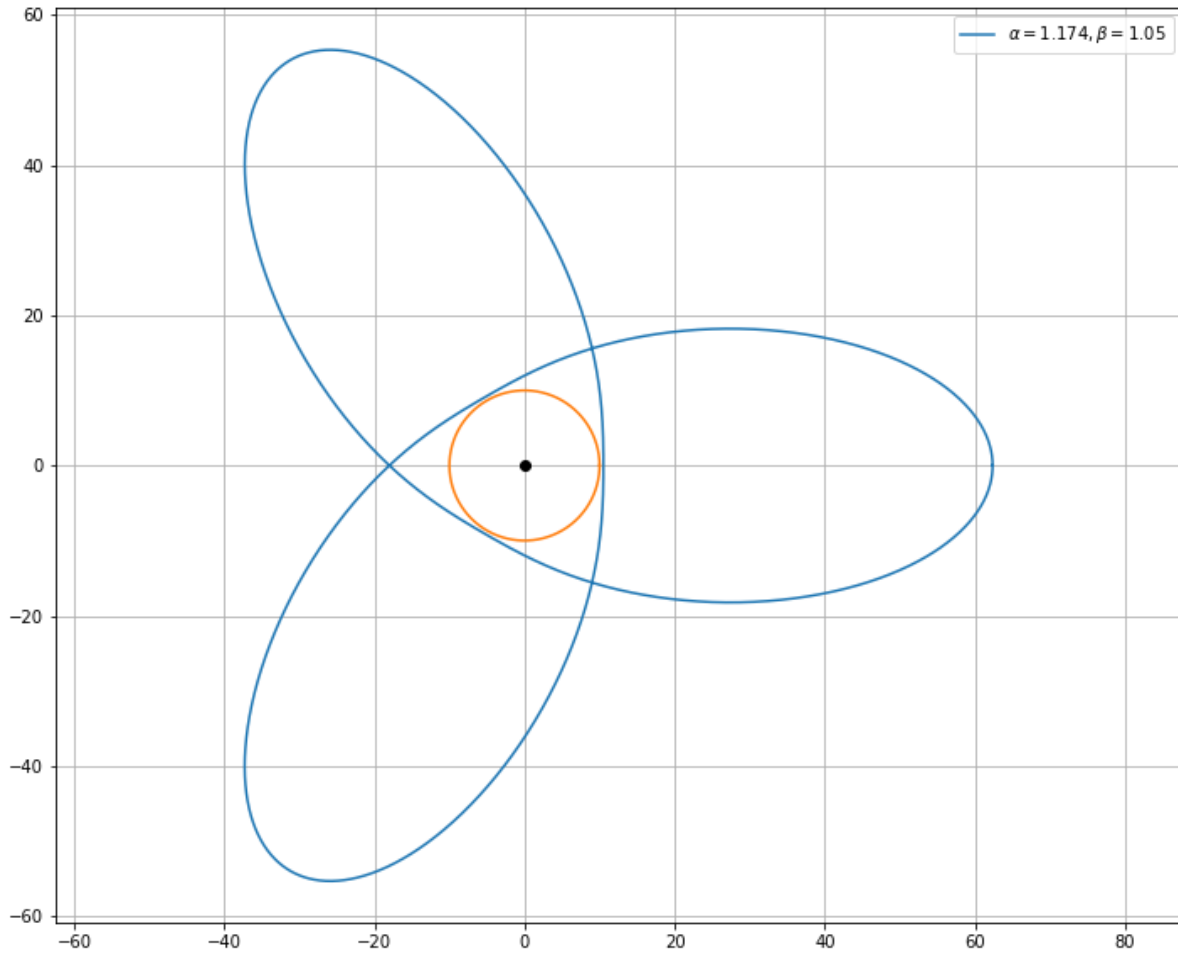


A) skalármező

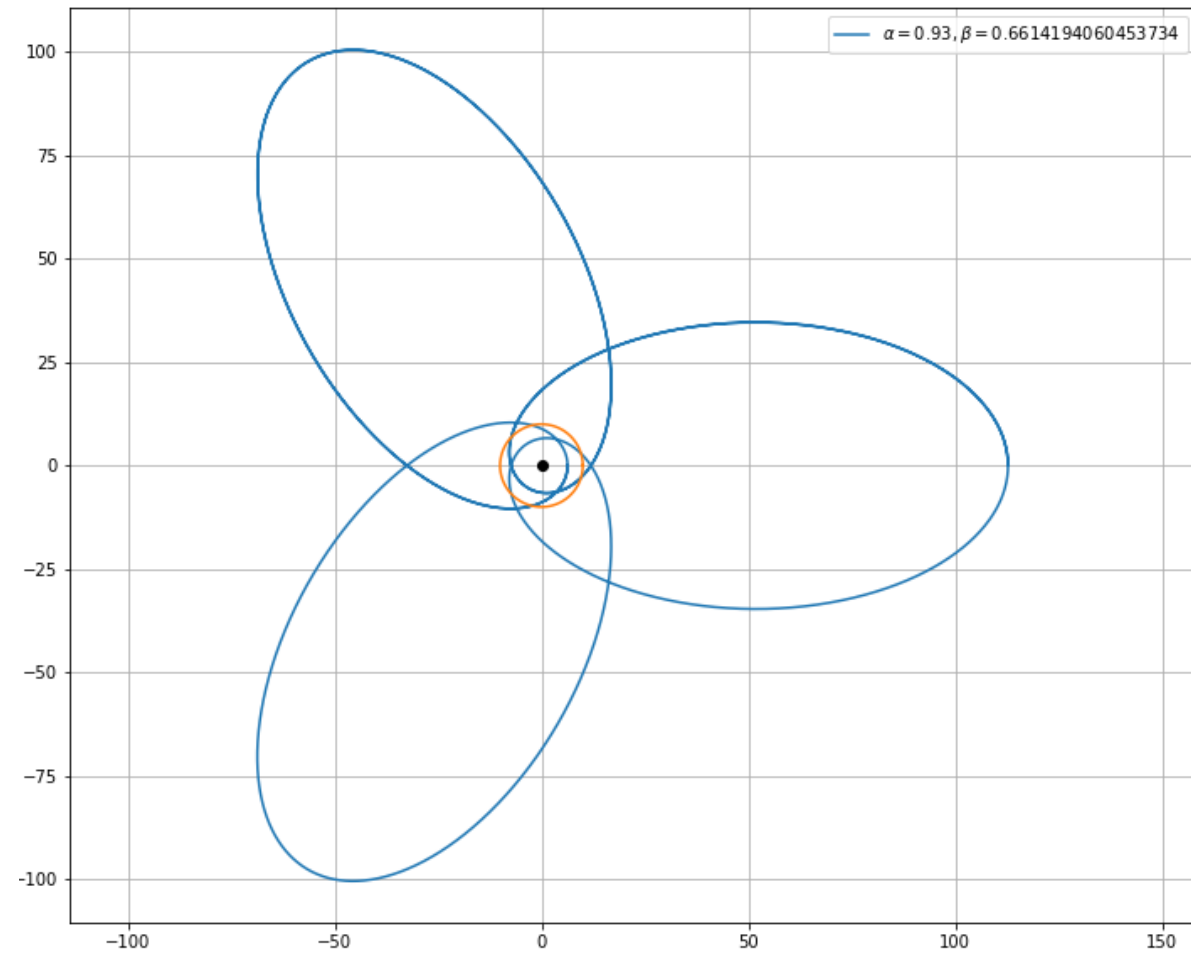
$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(n\varphi)}$$

B) vektormező

$n > 1$



$n < 1$

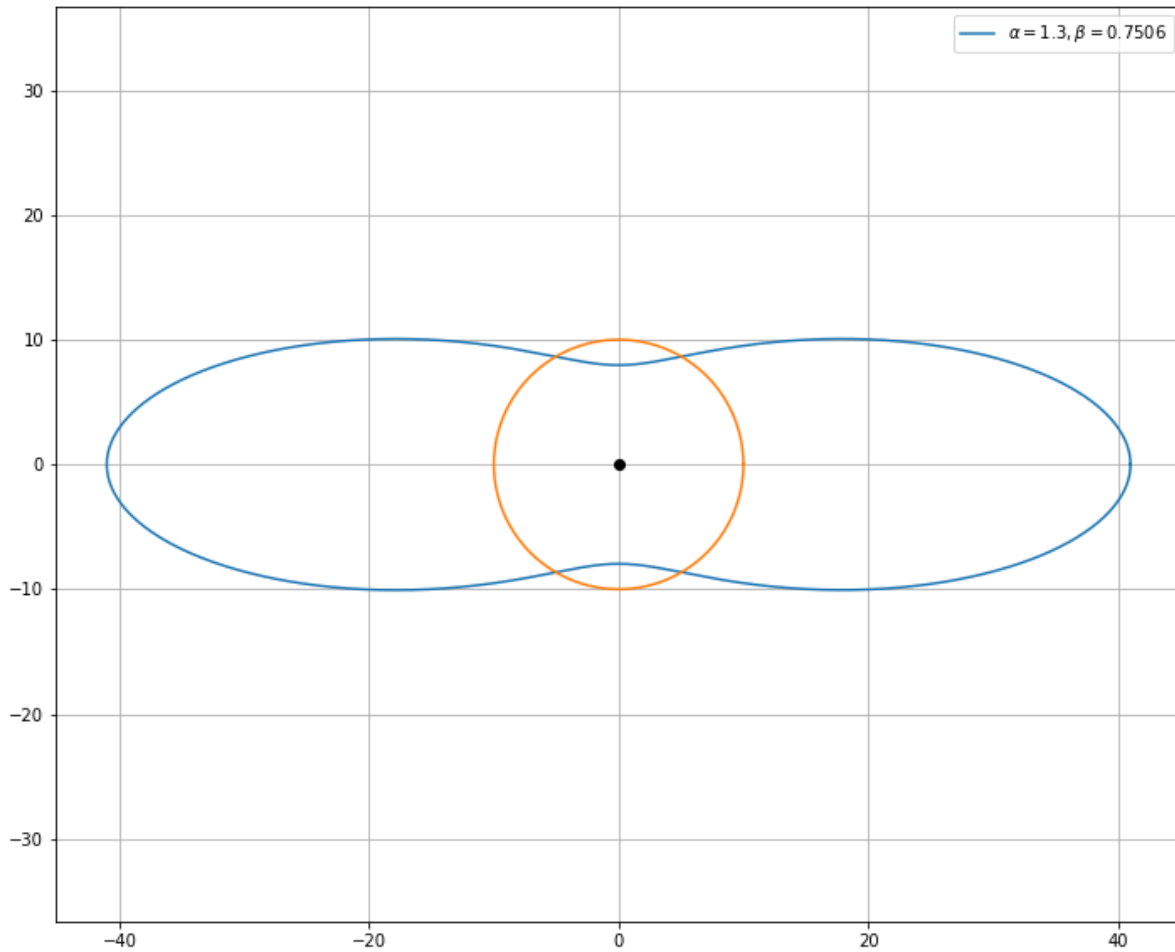


A) skalármező

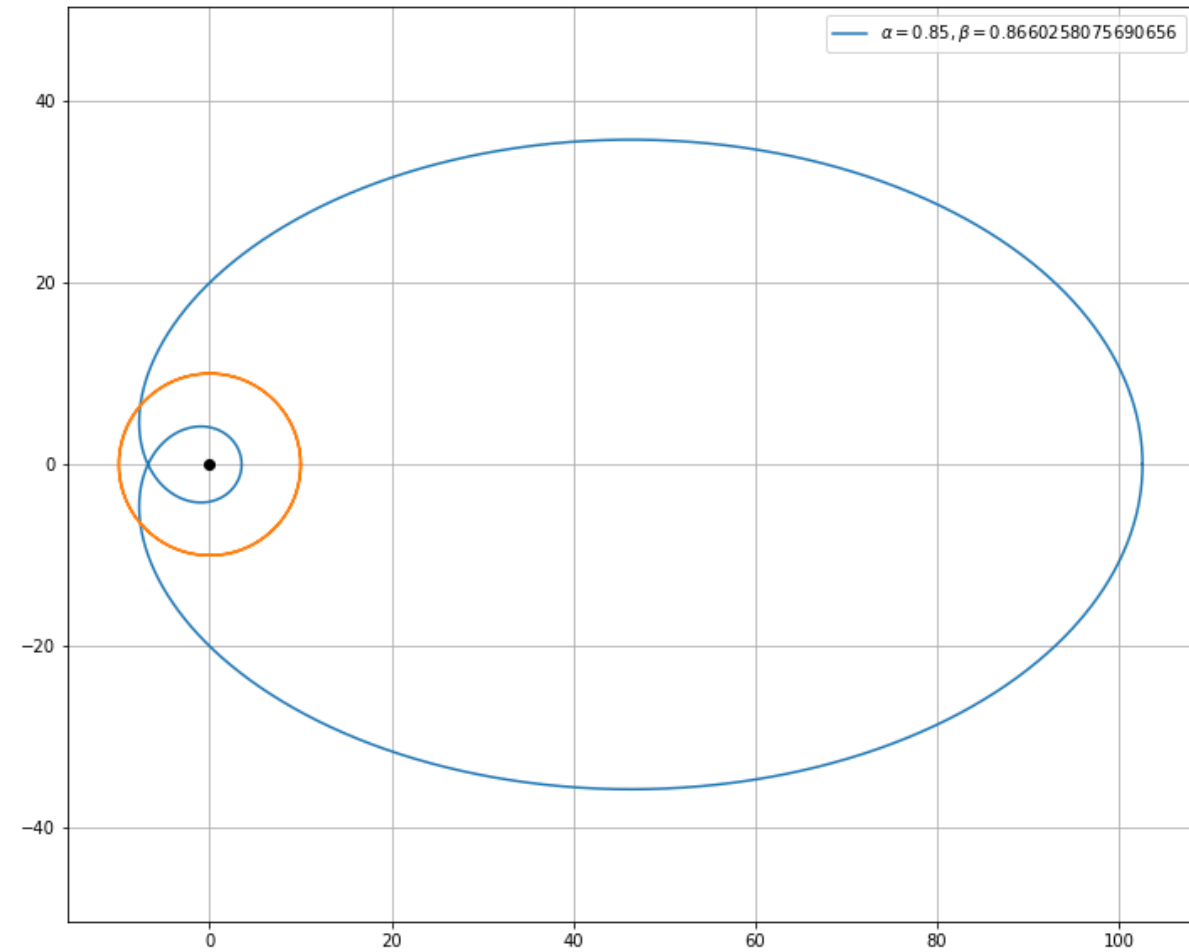
$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(n\varphi)}$$

B) vektormező

$$n > 1$$



$$n < 1$$

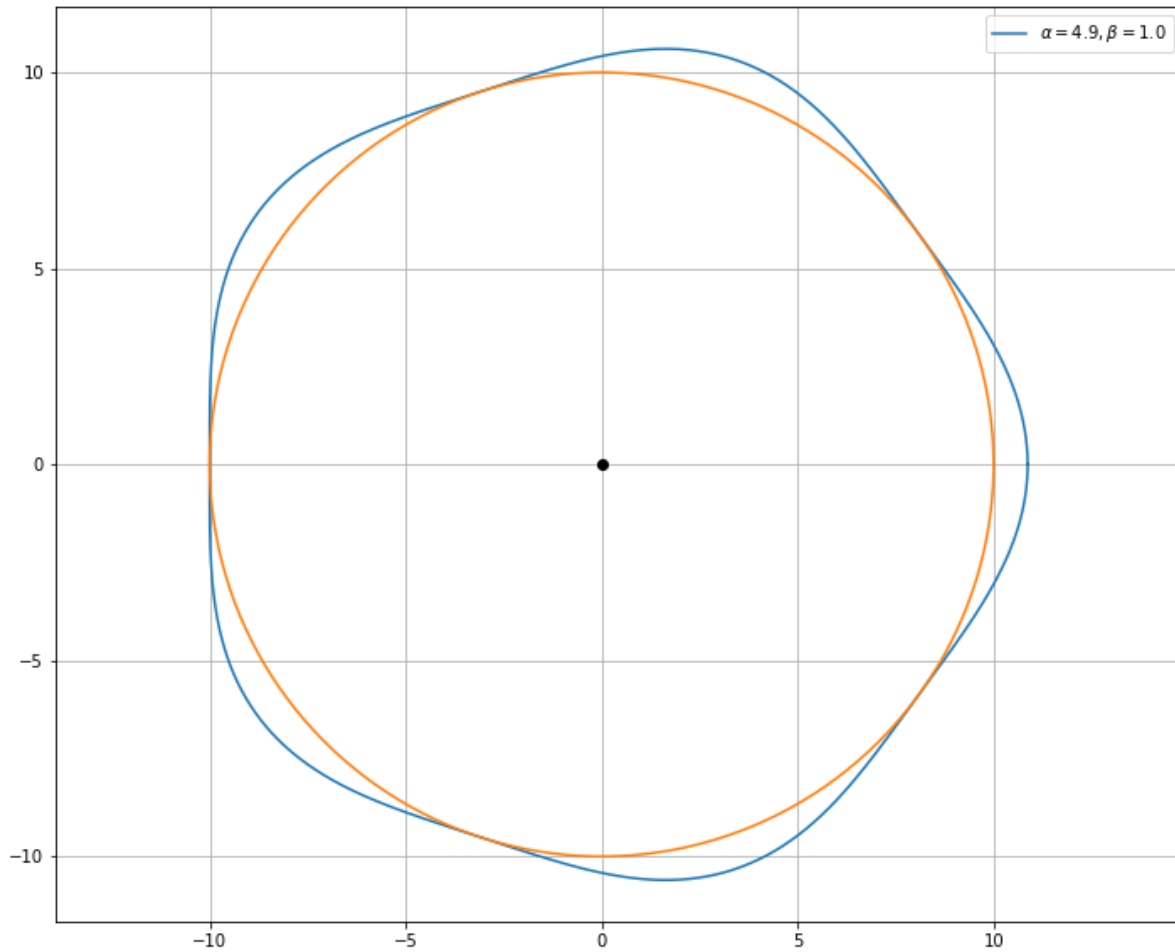


A) skalármező

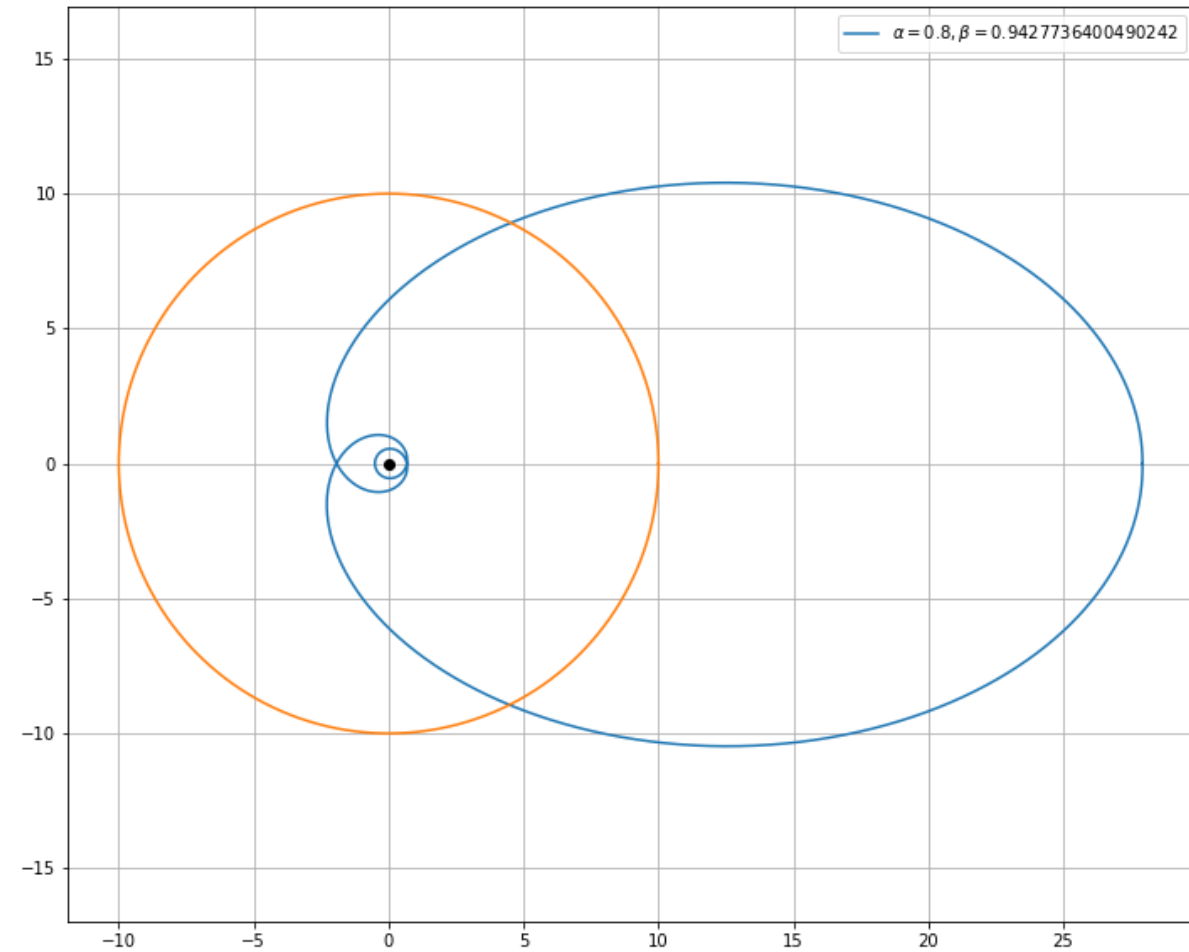
$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(n\varphi)}$$

B) vektormező

$n > 1$



$n < 1$

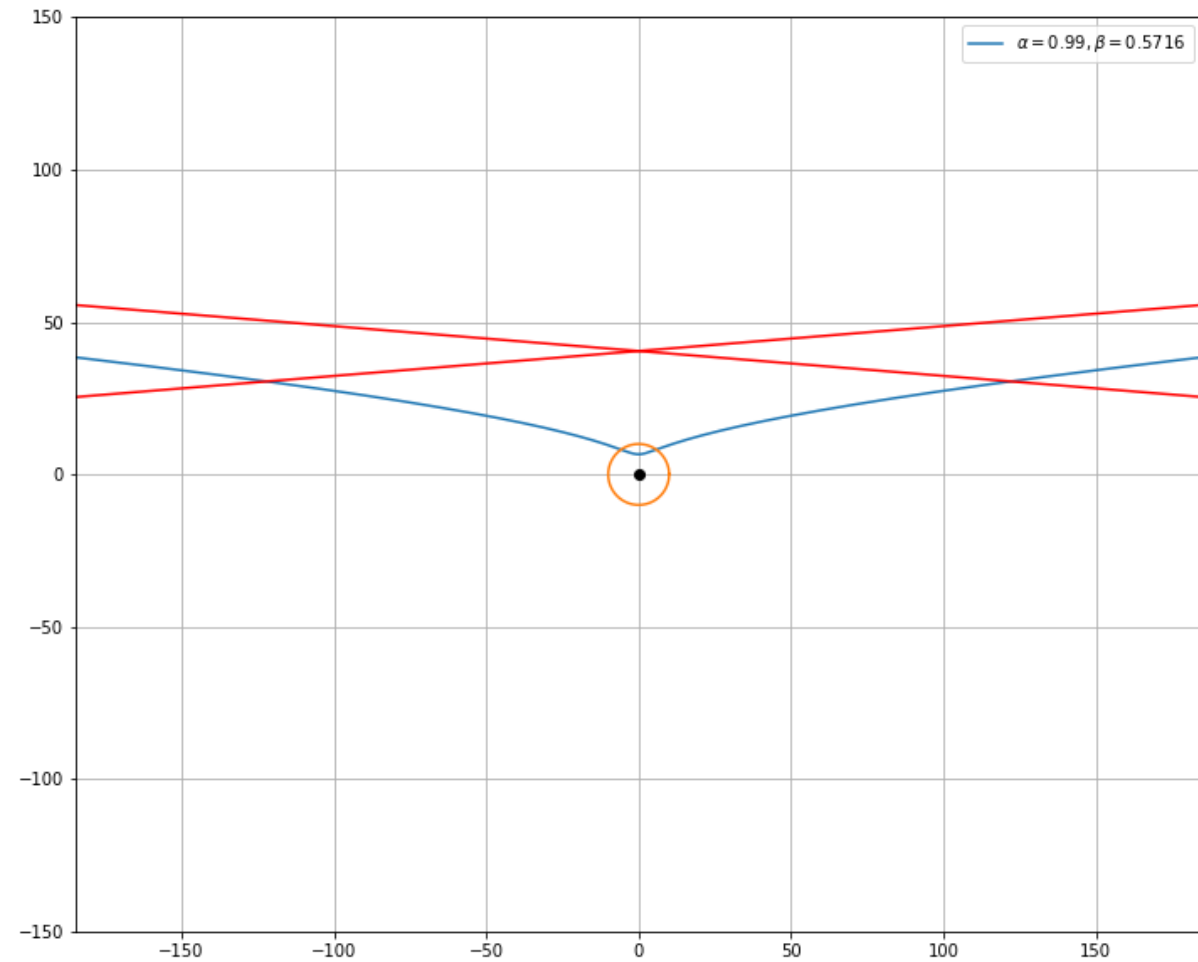


A) skalármező

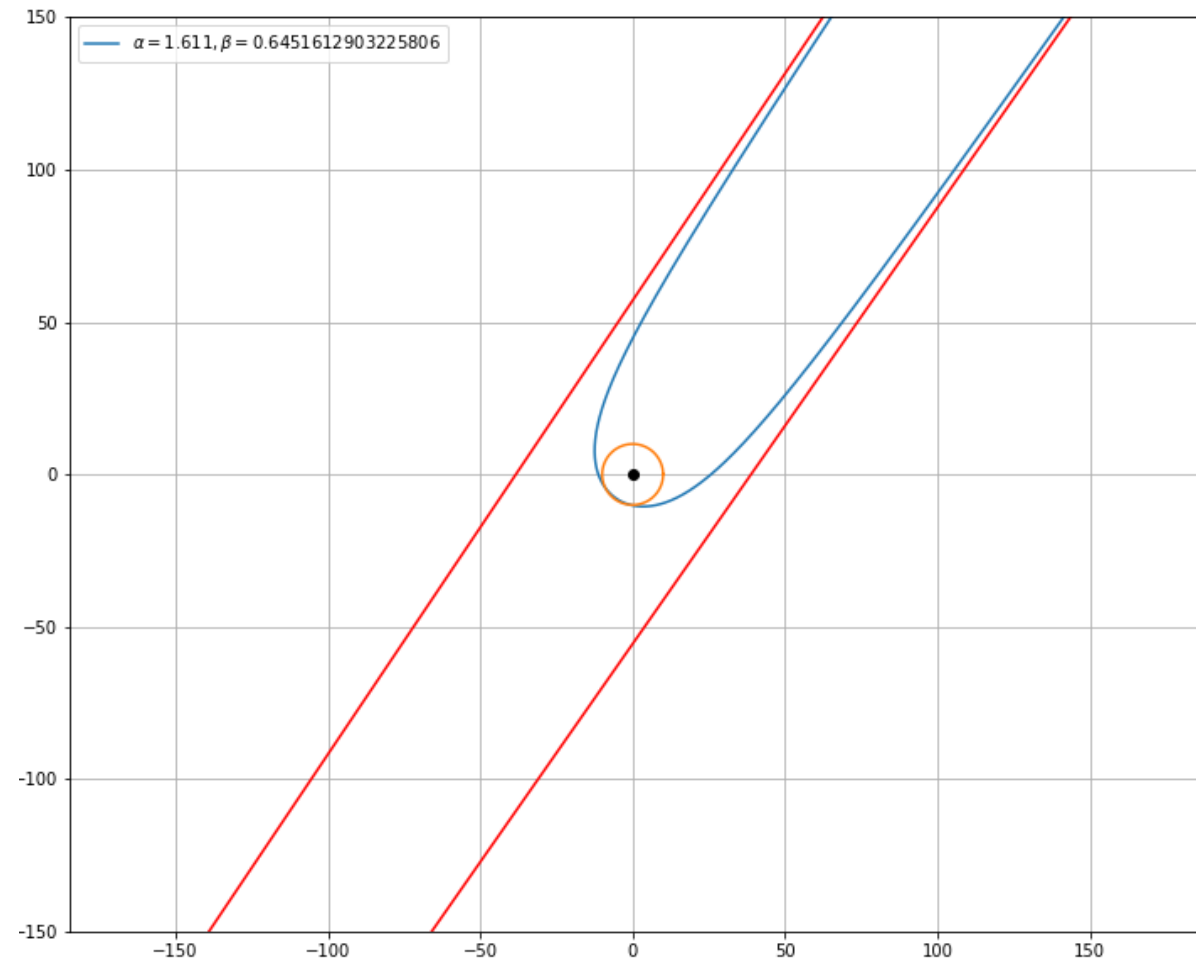
$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(n\varphi)}$$

B) vektormező

$n > 1$



$n < 1$

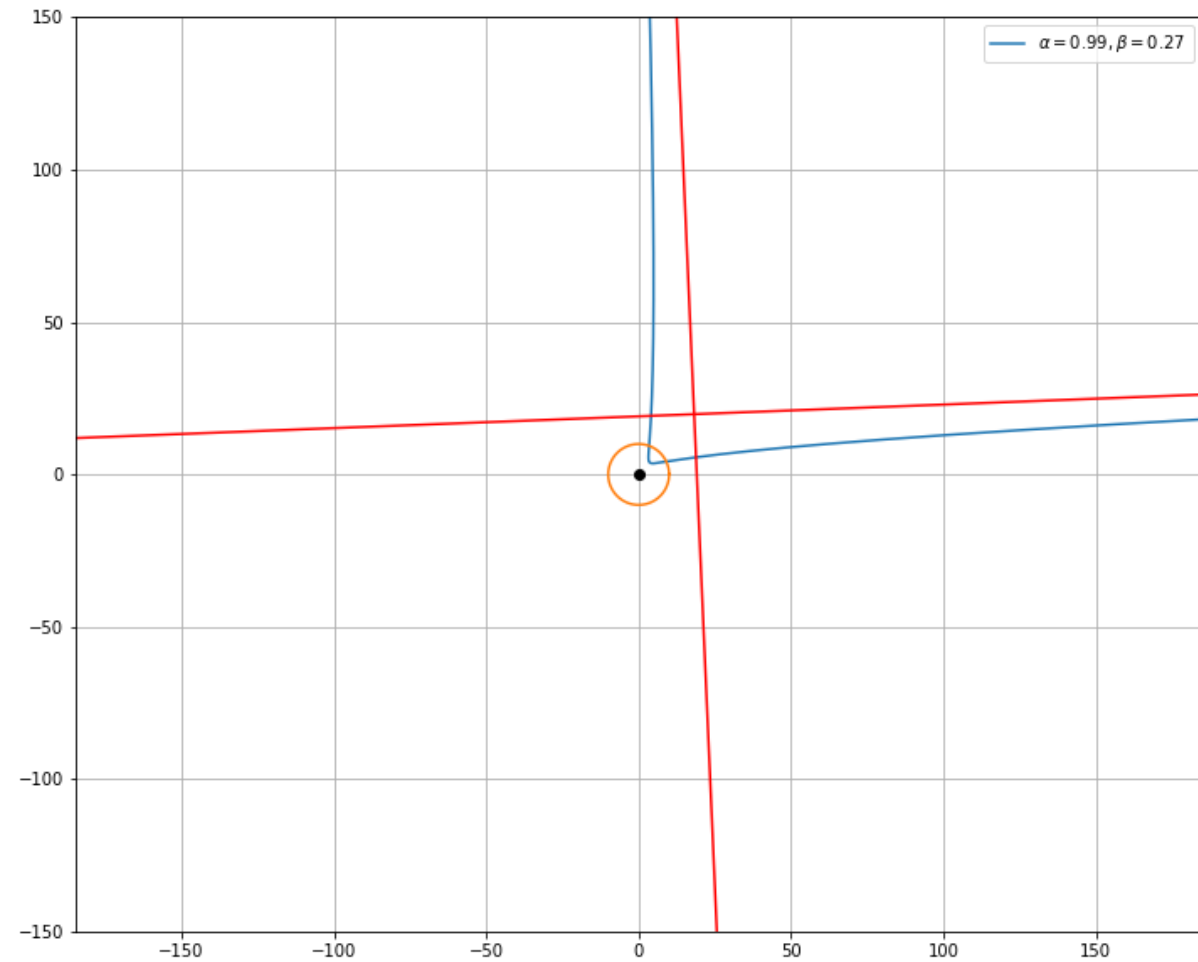


A) skalármező

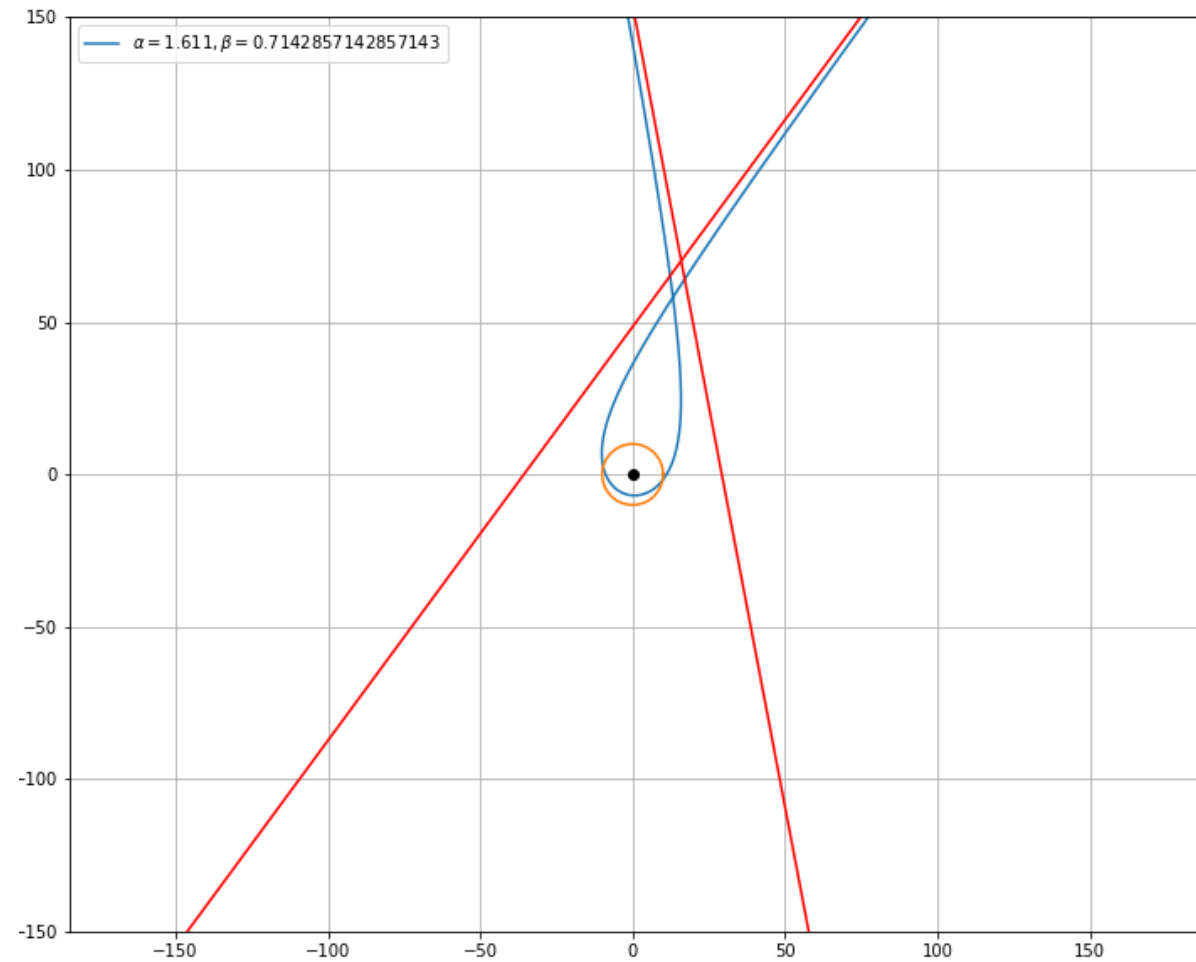
$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(n\varphi)}$$

B) vektormező

$n > 1$



$n < 1$

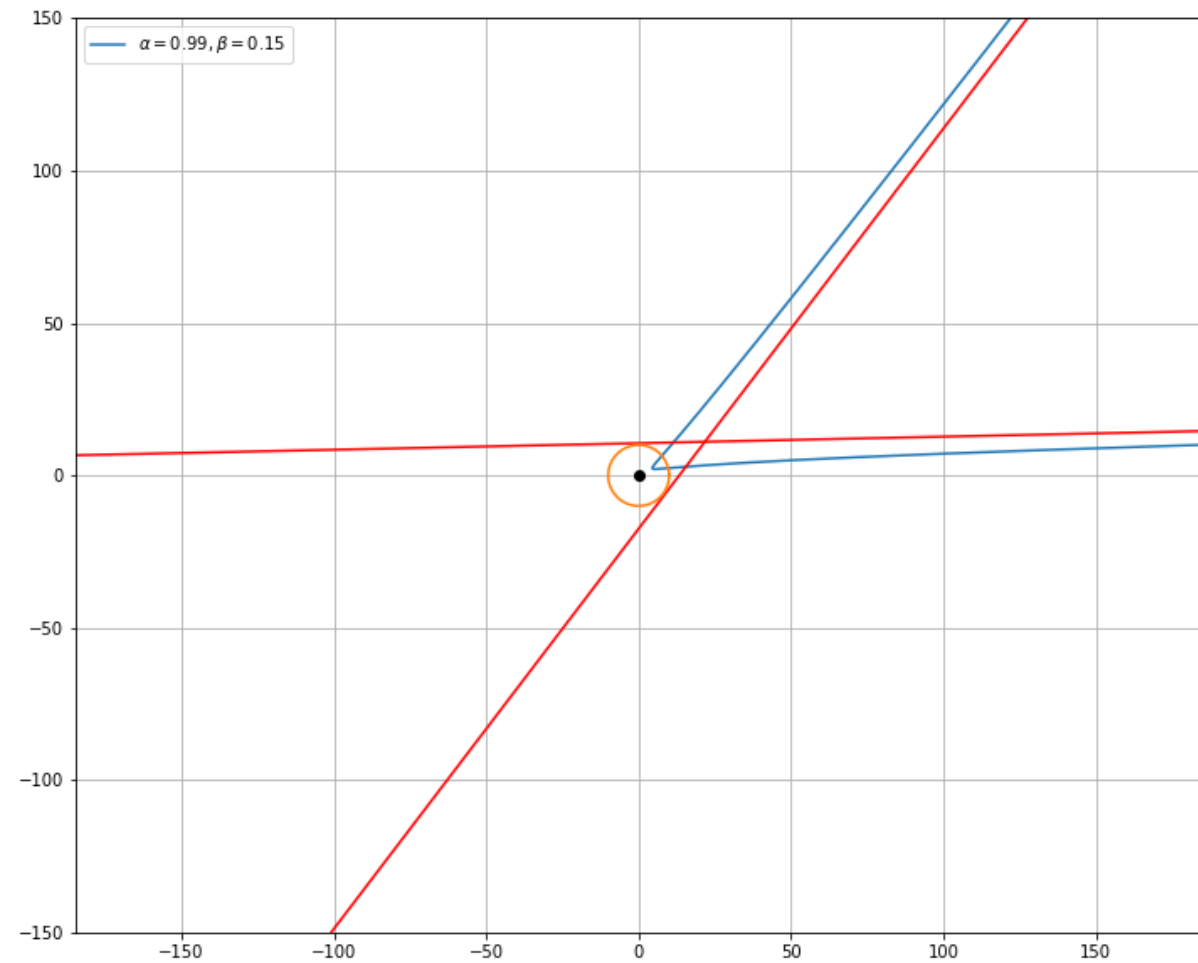


A) skalármező

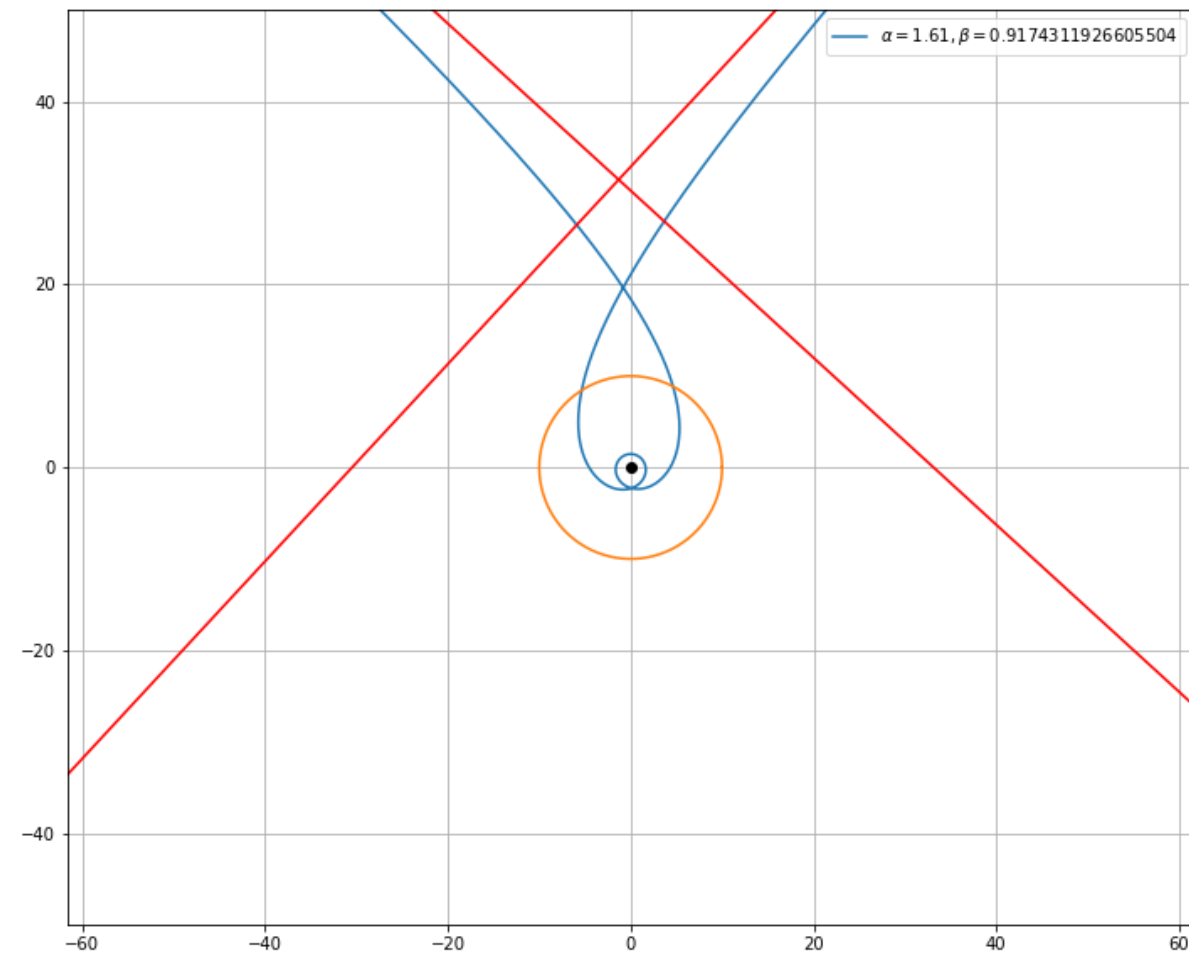
$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(n\varphi)}$$

B) vektormező

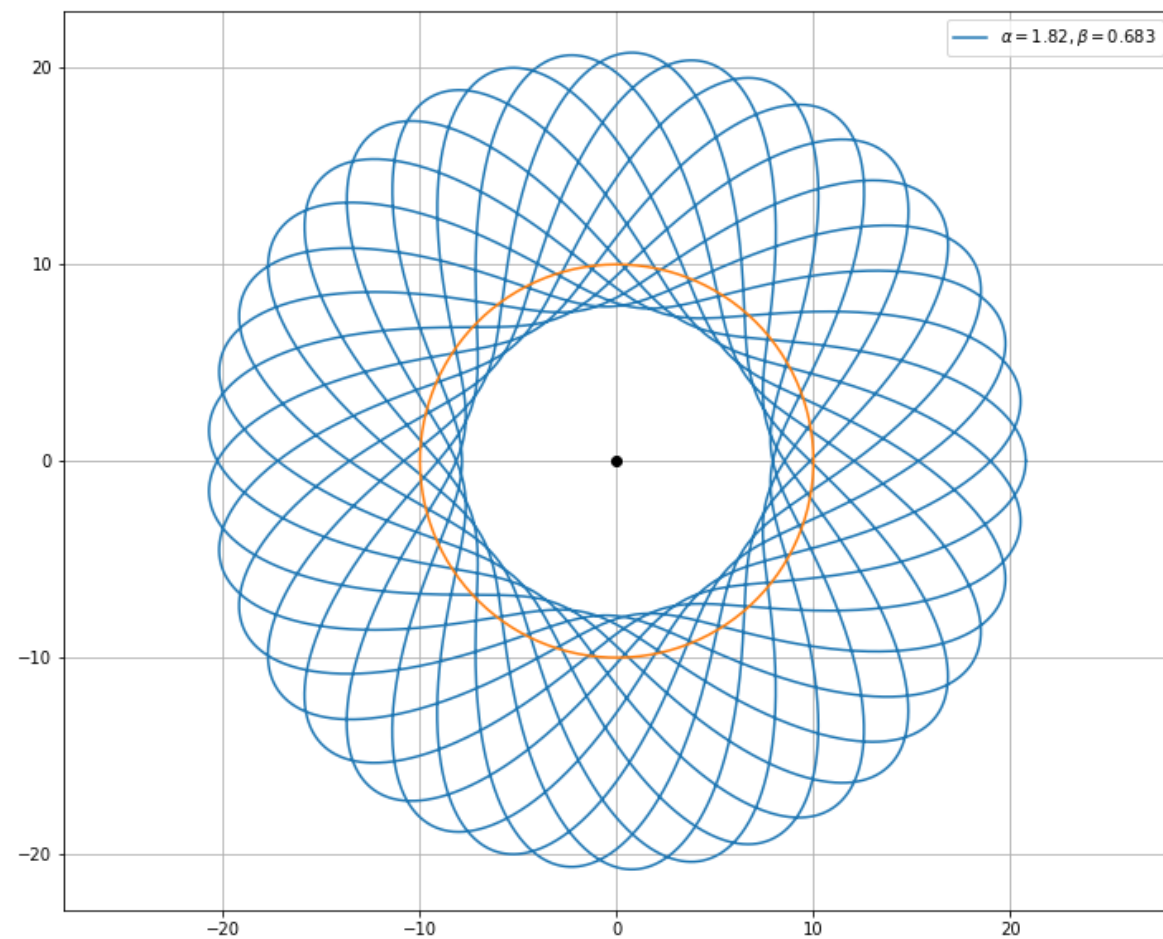
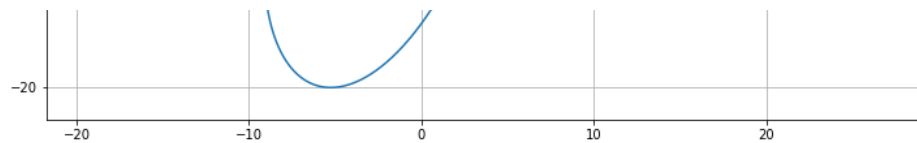
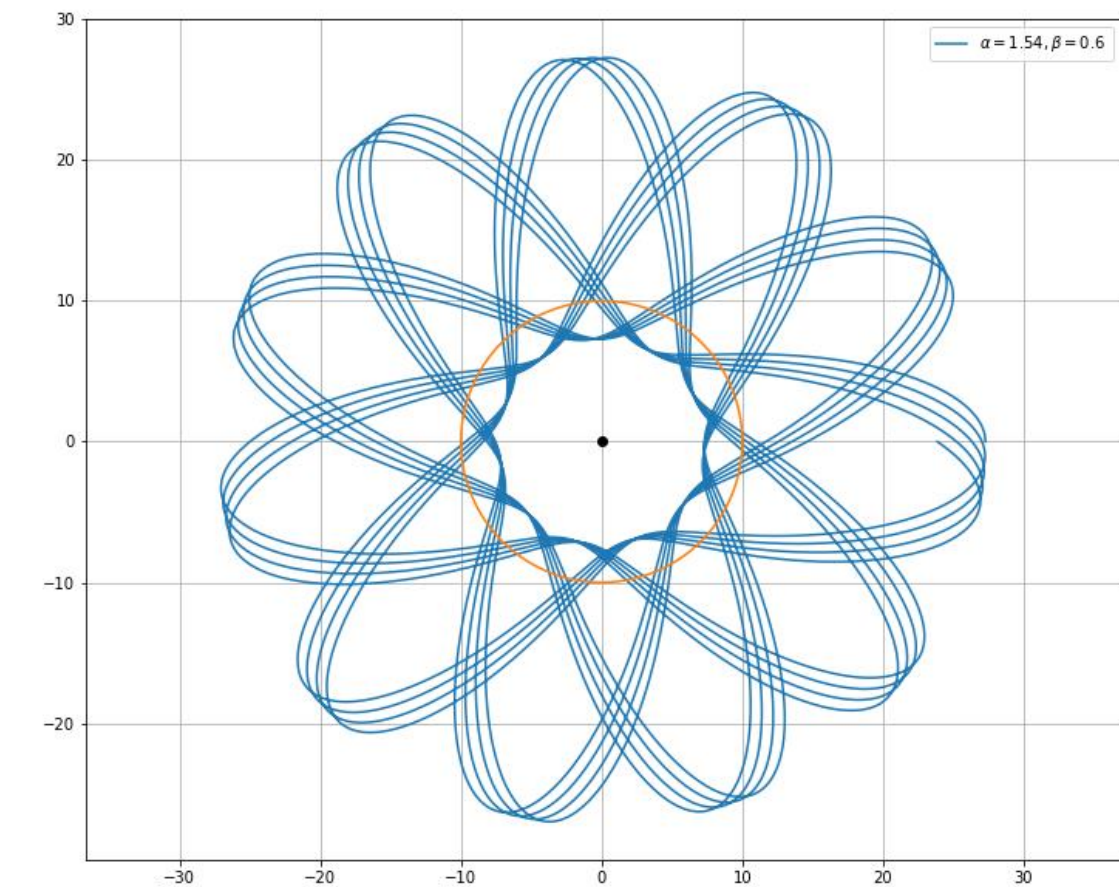
$n > 1$



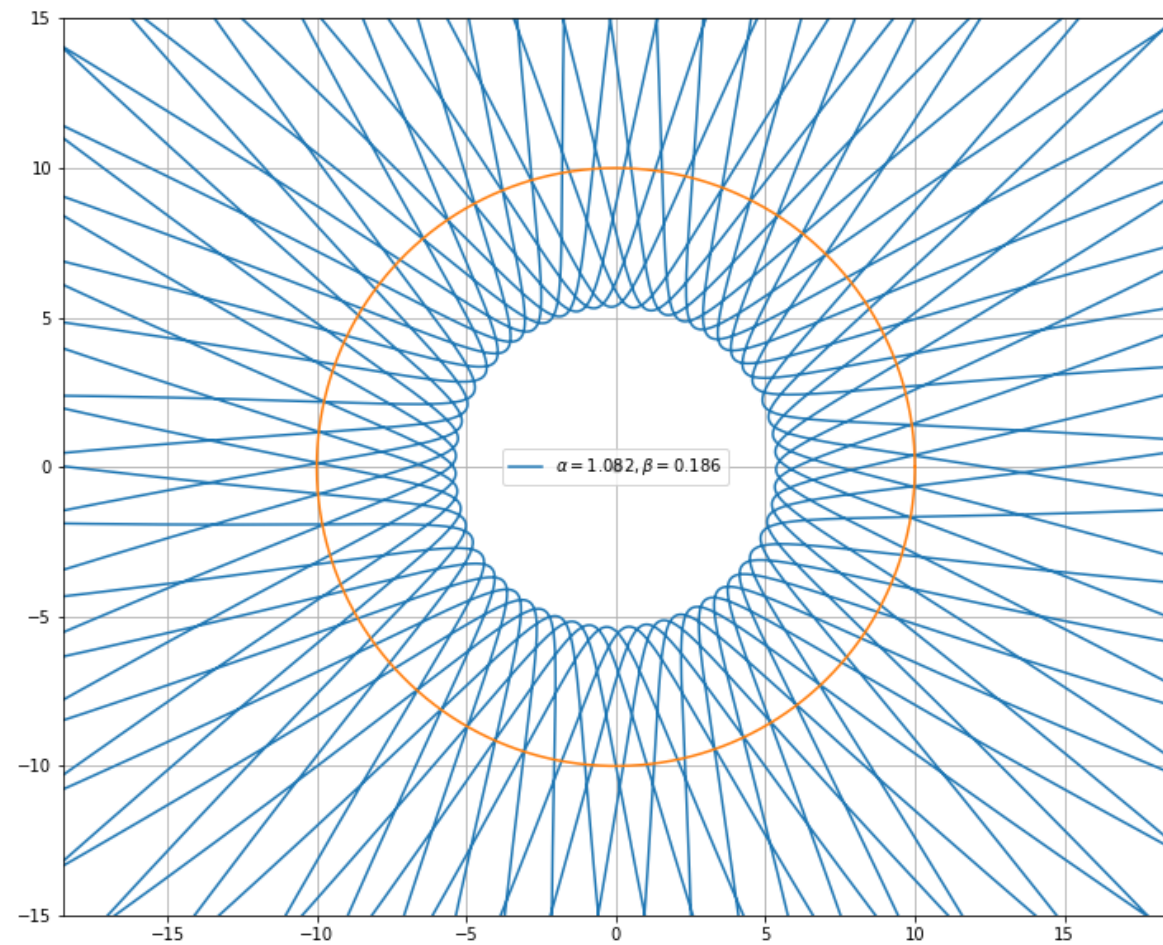
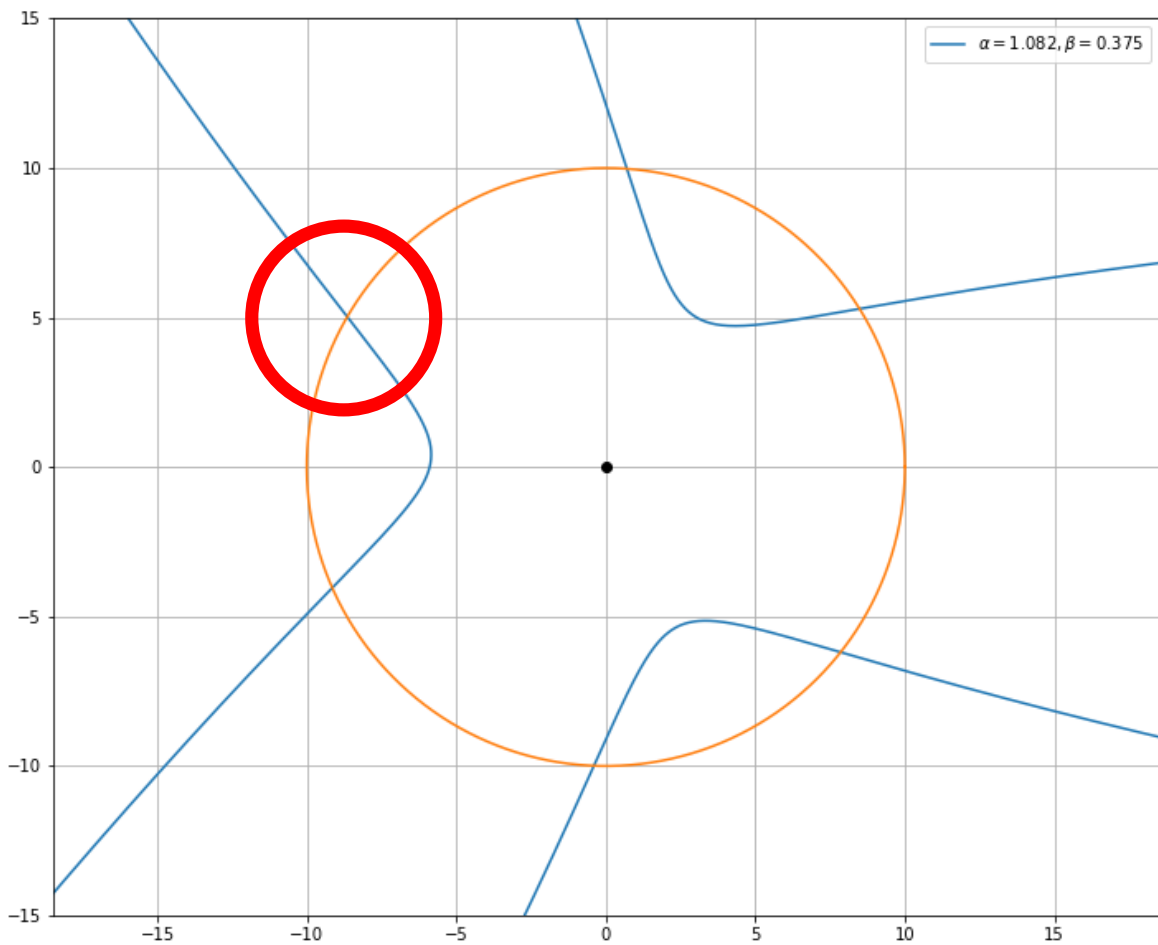
$n < 1$



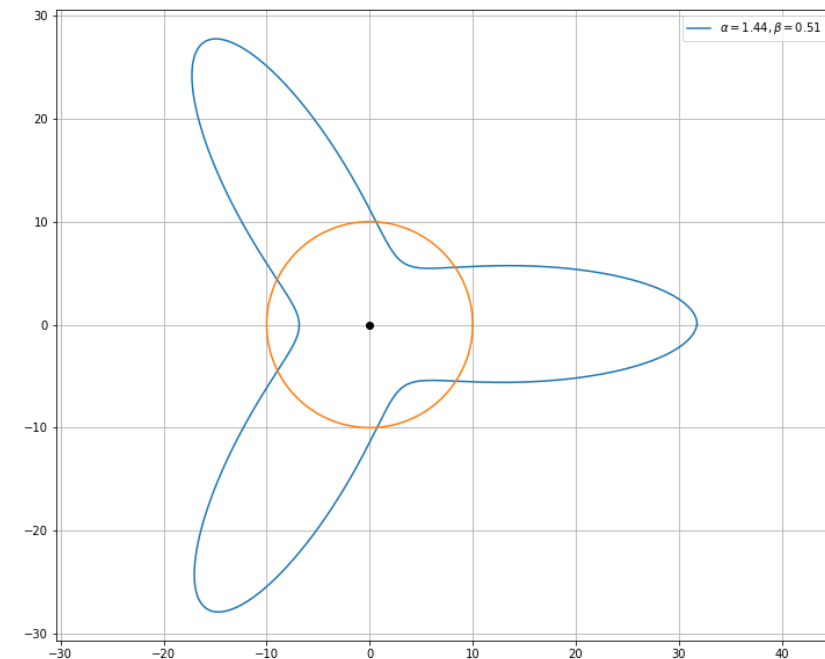
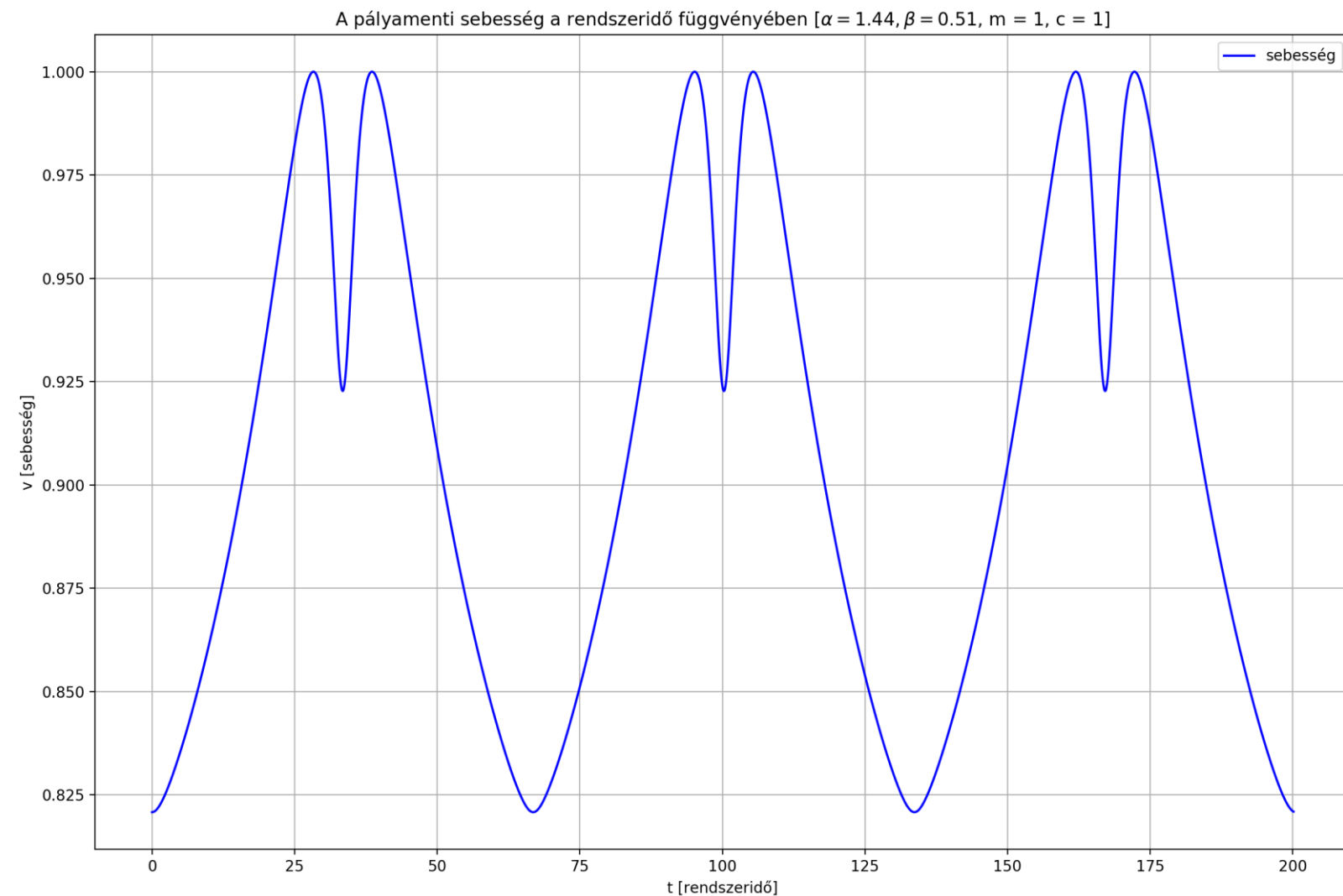
Az **R** sugáron belül... (skalármező)



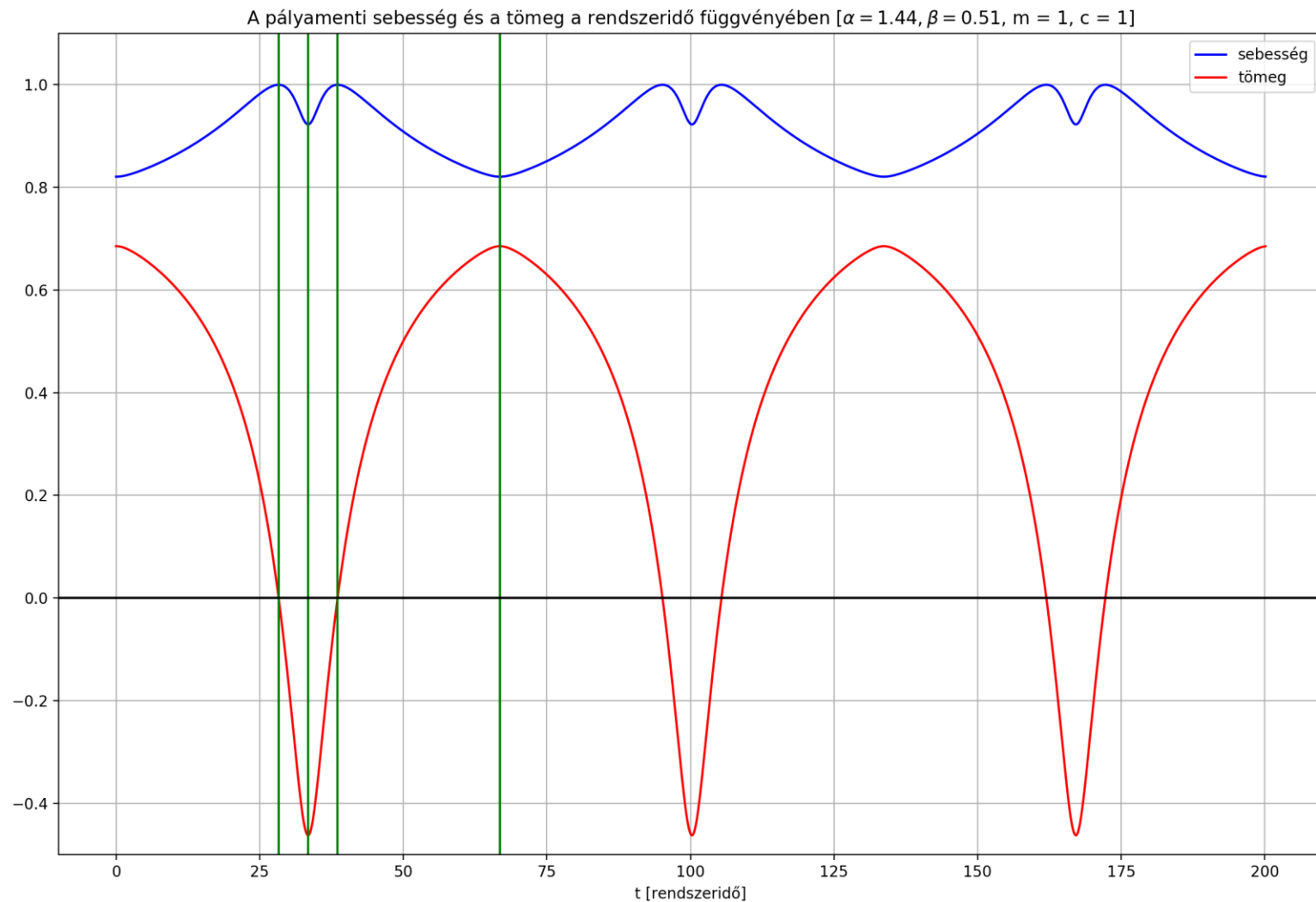
Az **R** sugáron belül... (skalármező)



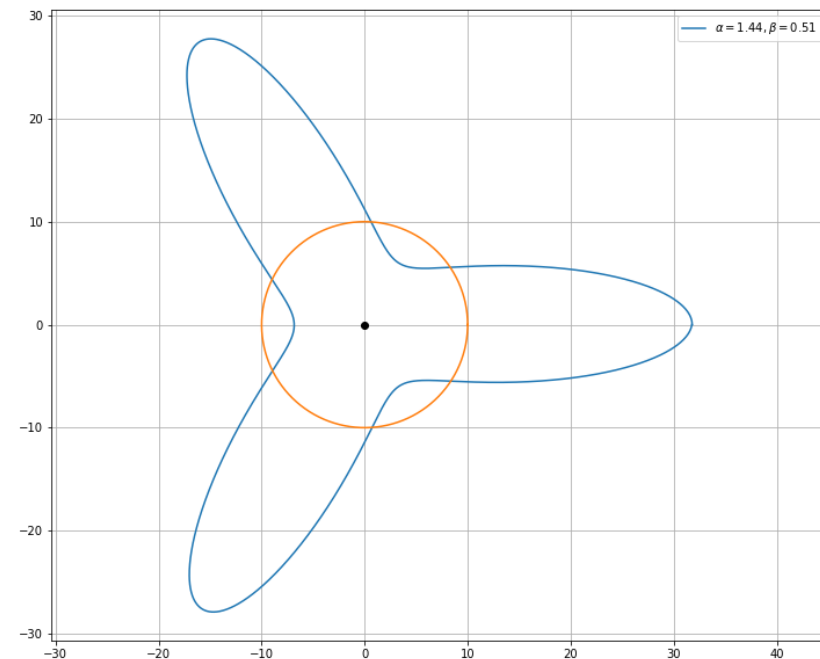
Az **R** sugáron belül... (skalármező)



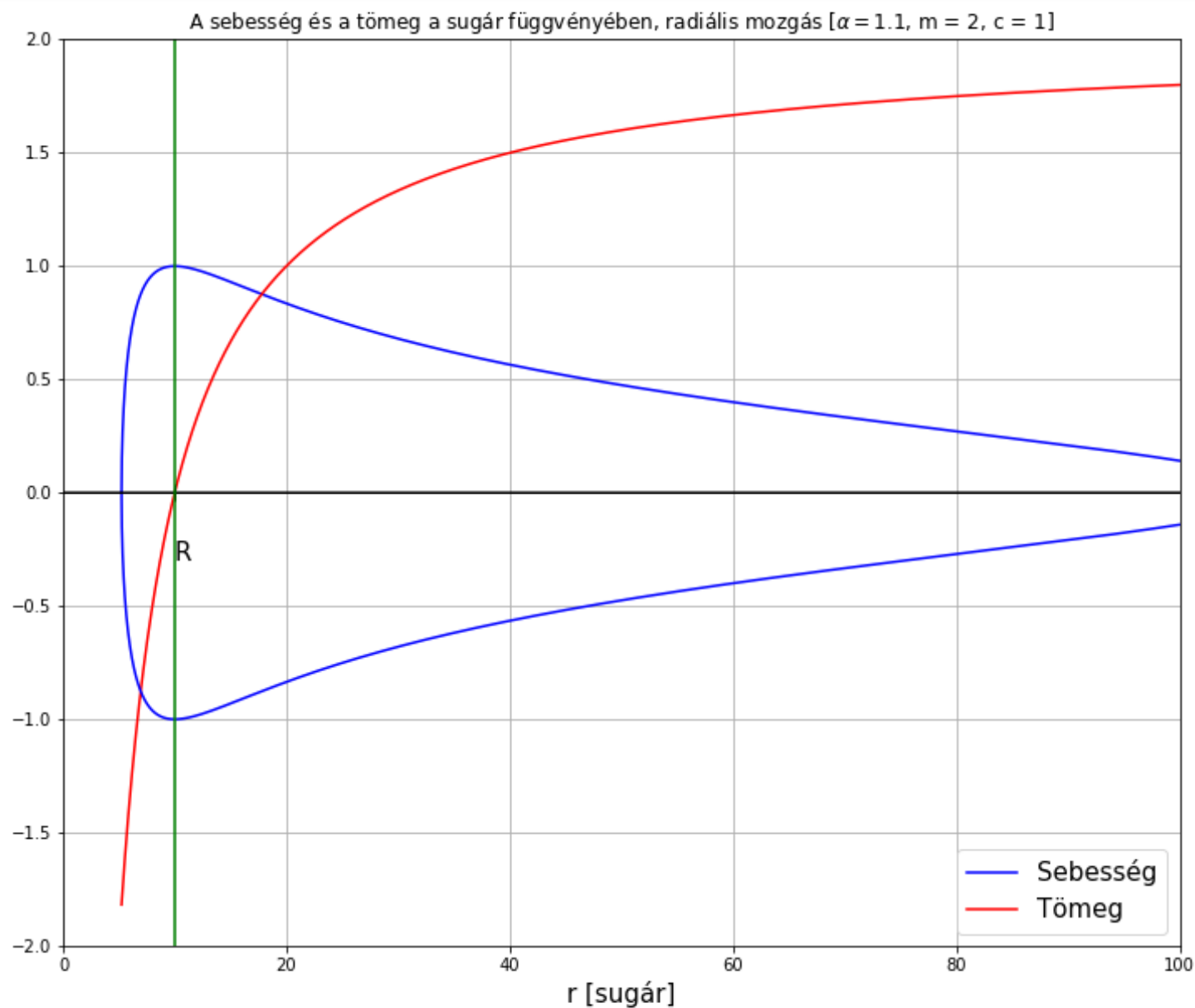
Az **R** sugáron belül... (skalármező)



$$M(r) = m \left(1 - \frac{R}{r} \right)$$

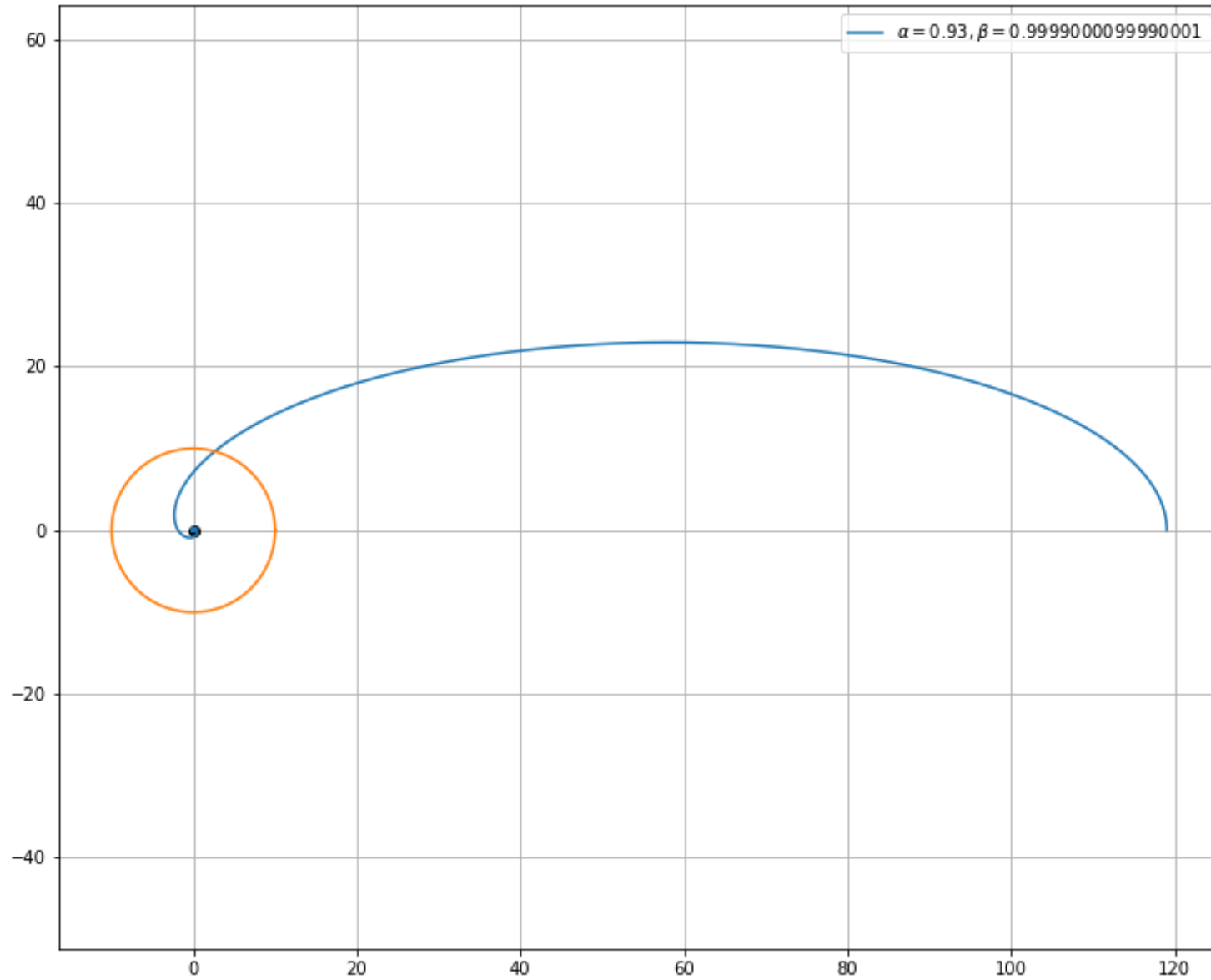


Az **R** sugáron belül... (skalármező)



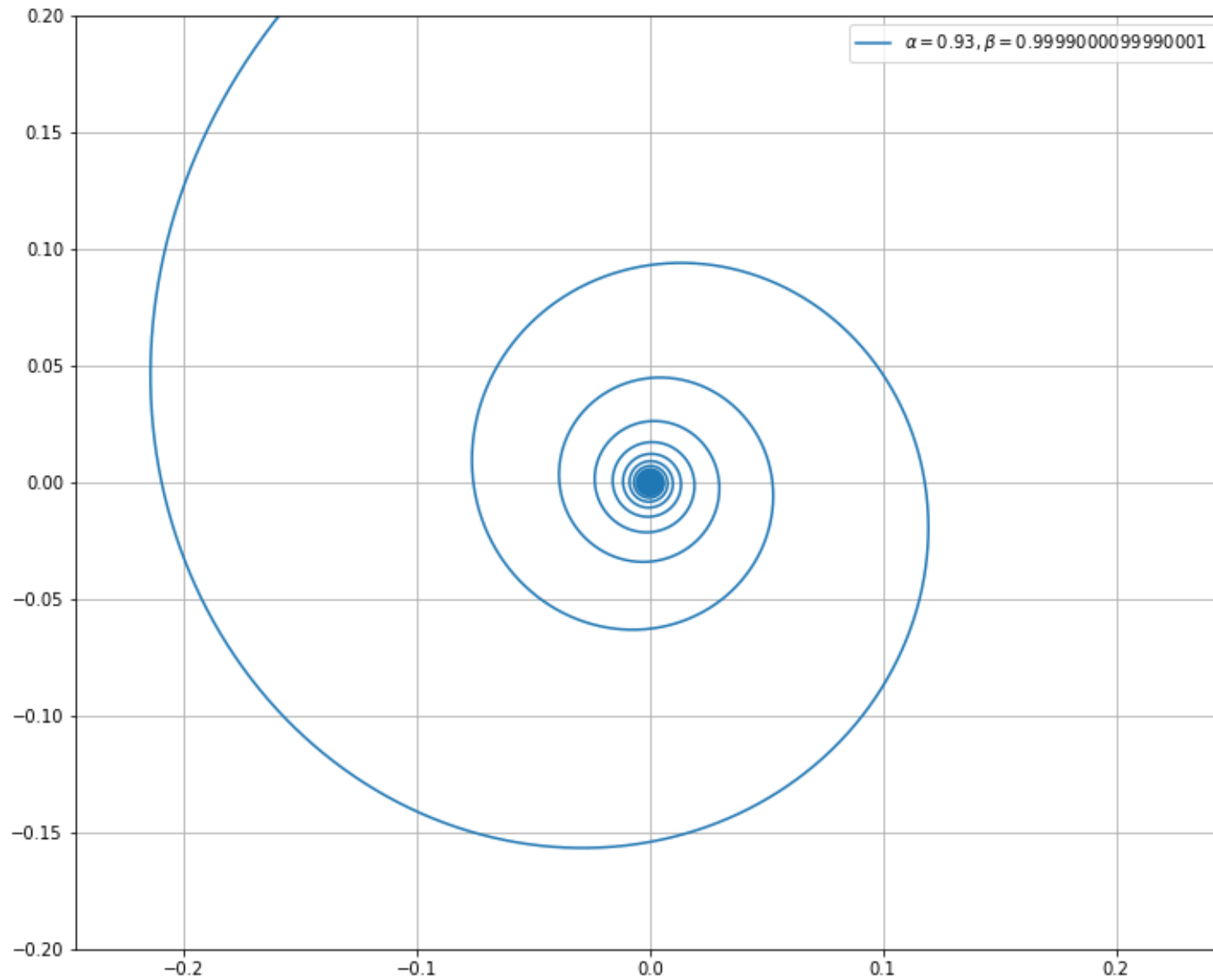
$$M(r) = m \left(1 - \frac{R}{r} \right)$$

Zuhanás a **centrumba**... (vektormező)



$$r(\varphi) = \frac{p}{\varepsilon \operatorname{ch}(n\varphi) - 1}$$

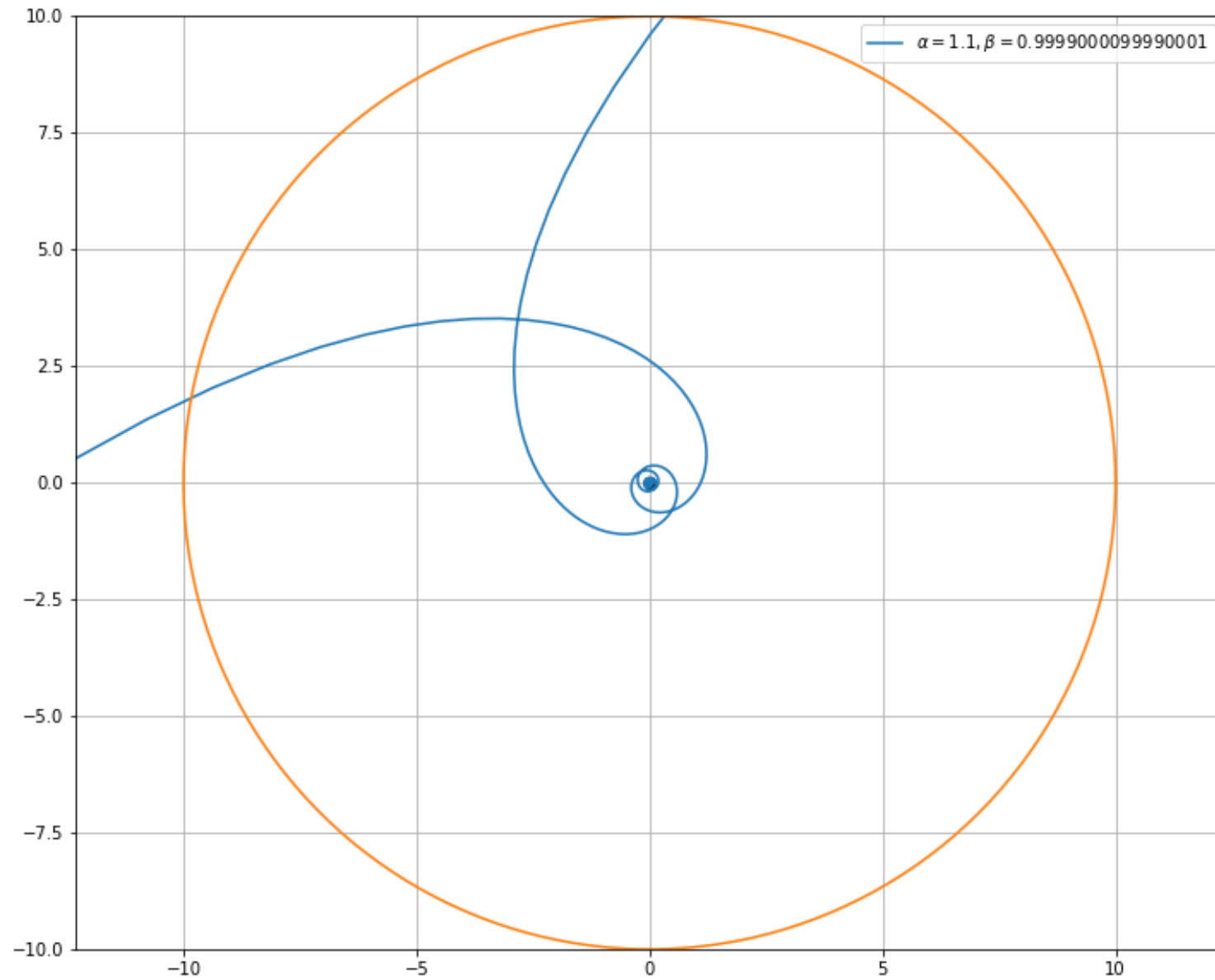
Zuhanás a **centrumba**... (vektormező)



$$r(\varphi) = \frac{p}{\varepsilon \operatorname{ch}(n\varphi) - 1}$$

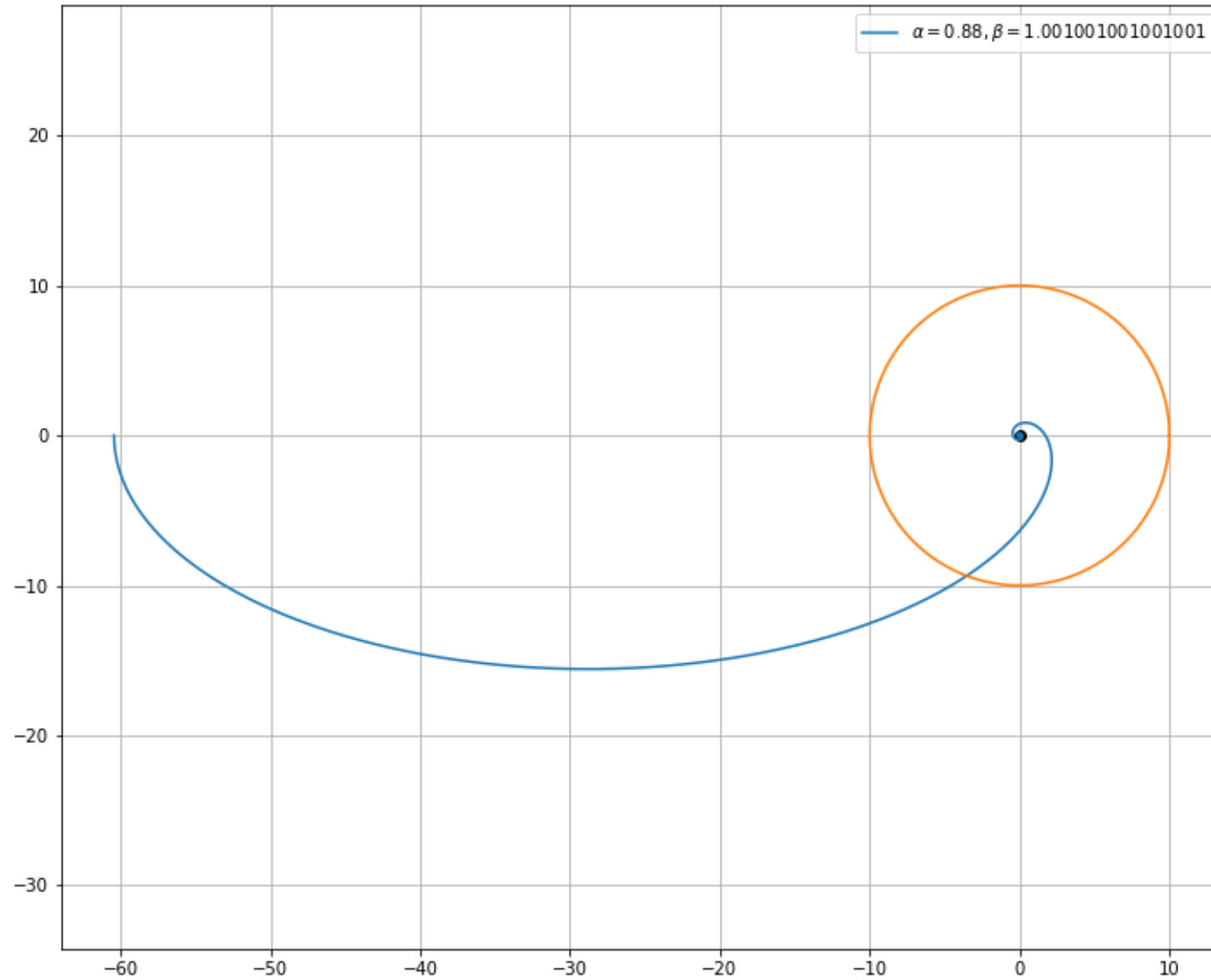
Zuhanás a **centrumba**...

(vektormező)



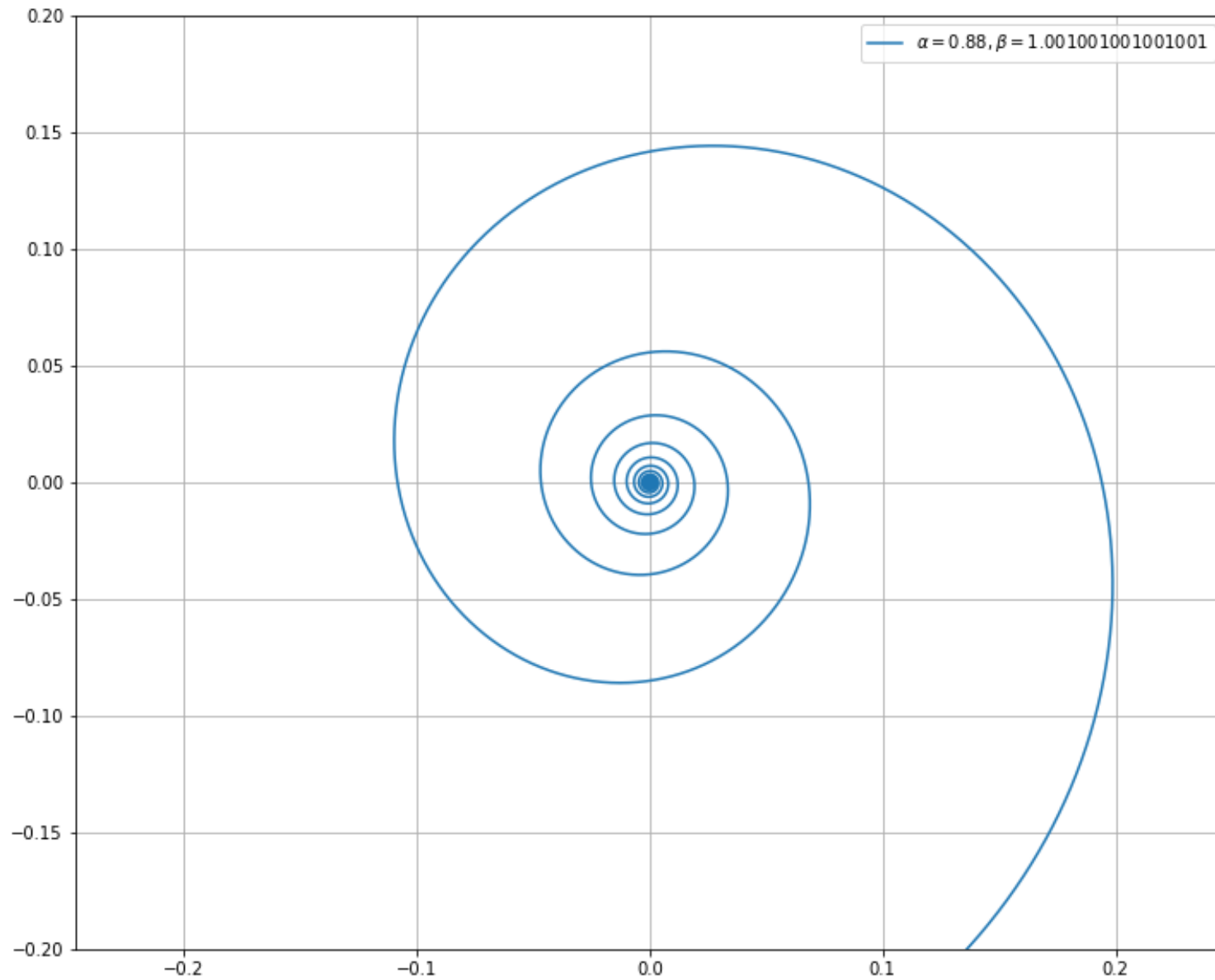
$$r(\varphi) = \frac{p}{\varepsilon \operatorname{ch}(n\varphi) - 1}$$

Zuhanás a **centrumba**... (vektormező)



$$r(\varphi) = \frac{p}{\varepsilon \operatorname{ch}(n\varphi) - 1}$$

Zuhanás a **centrumba**... (vektormező)



$$r(\varphi) = \frac{p}{\varepsilon \operatorname{ch}(n\varphi) - 1}$$

Zárszó

Különböző tenzori rangú mezők – lényegesen különböző megoldások

Új eredmények:

Skalármező: taszítógömb

Vektormező: bespirálozás a centrumba

További érdekes lehetőségek:

Ugyanezen mezőkben más potenciálok (pl. ferdehajítás, harmonikus oszcillátor)

Más tenzori jellegű mezők (pl. mágneses mező, négyestenzor-mező)

Köszönöm szépen a figyelmet!

AZ INNOVÁCIÓS ÉS TECHNOLOGIAI MINISZTERIUM ÚNKP-20-6 KÓDSZÁMÚ
ÚJ NEMZETI KIVÁLÓSÁG PROGRAMJÁNAK A NEMZETI KUTATÁSI, FEJLESZTÉSI
ÉS INNOVÁCIÓS ALAPBÓL FINANSZÍROZOTT SZAKMAI TÁMOGATÁSÁVAL
KÉSZÜLT.