

Kaotikus mozgás tanítása - akár általános iskolában

Jánosi Dániel^{*1,2} és Jánosiné Kemenczei Edina^{†1,3}

¹Eötvös Loránd Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Tanszék, 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1A

²HUN-REN Földfizikai és Űrtudományi Kutatóintézet, 9400 Sopron, Csatka Endre utca 6-8

³Budapest VI. Kerületi Kölcsey Ferenc Gimnázium, 1063 Budapest, Munkácsy Mihály utca 26

Bevezetés

Az általános- és középiskolai fizikatanítás korai szakaszát (mechanika, dinamika tanítása) egyszerű, idealizált rendszerek leírása jellemzi, az olyan mindennapi effektusok, mint például a sűrűdés elhanyagolásával. (Gondoljunk csak arra, hogy milyen természetellenesen hat, ha egy, az űrben sűrűdésmentesen mozgó tárgyat nézünk.) Ennek a problémának a megoldása persze sokféle lehet, például kísérletek bemutatása vagy kiegészítő tananyagok leadása. Ebben a cikkben az utóbbira mutatunk példát. Bemutatjuk, hogy egy másfajta mozgás, a káosz fogalma már általános iskolai szinten bevezethető, és segít a tananyagot közelebb vinni a valósághoz. Emellett a káosz önmagában is érdekes és meglepő mozgás, főleg ha az azt produkáló rendszerek kifejezetten egyszerűek.

Kaotikusnak nevezzük az olyan mozgásokat, amelyekre a következő három tulajdonság jellemző [1]:

- *Szabálytalan.* Ez a tulajdonság egyben azt is jelenti, hogy semmilyen periodicitás nincs a rendszerben (még közelítőleg sem), ami meglepő lehet például egy kaotikusan mozgó inga esetén, amelyből általában az ideális, periodikus eset kerül bele a tananyagba. Fontos azonban megjegyezni, hogy itt nem zajos, azaz random mozgásról van szó, ahol már a mozgást leíró egyenletekben is van véletlenszerű tag, mint például egy véletlenszerűen rázogatott rugó esetén. (Az ilyen mozgást stochasztikusnak nevezik, és gyakran keverik a káosszal.) Más szóval, a szabálytalan mozgás itt olyan egyszerű rendszerben valósul meg, melyben ismertek az erőtvények, a mozgás nem zajjal terhelt. A kaotikus mozgások hely-idő diagramjait csak számítógépes programok segítségével lehet kirajzolni, matematikai képlettel nem leírhatók.
- *Érzékeny a kezdőfeltételek kis megváltozására.* Reguláris (azaz nem kaotikus, analitikusan megoldható) mozgások esetén ha két nagyon közel (akár térben akár kezdősebességüket tekintve) induló moz-

gást vizsgálunk, akkor azt tapasztaljuk, hogy azok nagyon sokáig közel is maradnak egymáshoz. Például ha egy puskából kilőtt golyóval 0.01° különbséggel célzunk oldalra az előző lövéshez képest, akkor a két lövedék nagyon hasonló pályát fog leírni, és a különbséget csak akkor látjuk, ha messzi célpontra lövünk (100m távolságon az eltérés kb. 1.7cm). Ezzel szemben, ha a lövedék mozgása kaotikus lenne, például ha puskagolyó helyett egy flippergolyó mozgását vizsgálnánk, ami a játéktér elemei között véletlenszerűen pattog, akkor azt 0.01° -kal eltérő irányban indítva nagyon hamar más pályát kezdene bejárni mint az előző "lövés". Kaotikus rendszerben a nagyon közeli kezdőfeltételekből indított pályák nagyon gyorsan (időegységenként nagyjából a távolság duplázódásával) távolodnak egymástól.

- *Bonyolult geometriai szerkezettel rendelkezik a fázistérben.* Periodikus mozgás képe a fázistérben (azaz a hely- és sebességkoordináták terében) egy jól definiált zárt görbe, például kör vagy ellipszis. A kaotikus mozgás alakja azonban bonyolult, nehezen definiálható szerkezetű. Kiderül azonban, hogy a megfelelő reprezentációban ún. fraktál alakzatot vesz fel. A fraktál egy matematikai objektum, és jellemzője az ön hasonlóság, azaz hogy minden méretskálán ugyanolyan struktúrájú. Ez azt jelenti, hogy a fázistér bármilyen kis területén vizsgáljuk, a kaotikus mozgás mindig hasonló szerkezetű lesz (bár megjegyezzük, hogy elméletben ehhez végtelen hosszú szimuláció kellene).

Ha az a célunk, hogy a káosz jelenségét minél fiatalabb korosztályban megismertessük, akkor a fenti tulajdonságok sorrendje egyben a megértésük nehézségére is utal. A szabálytalan mozgás a diákok által is könnyen látható egyszerű kaotikus rendszerek tényleges bemutatásával. Ilyen népszerű kísérletek tipikusan a kaotikus ingamozgások, például a kettős, mágneses vagy periodikusan mozgó felfüggesztésű inga.

A kezdőfeltételekre való érzékenység ugyanezen kísérletek keretén belül demonstrálható. Erre általános példa, ha bejelöljük a rendszer kiindulási helyzetét, felvesszük

^{*}daniel.janosi@ttk.elte.hu

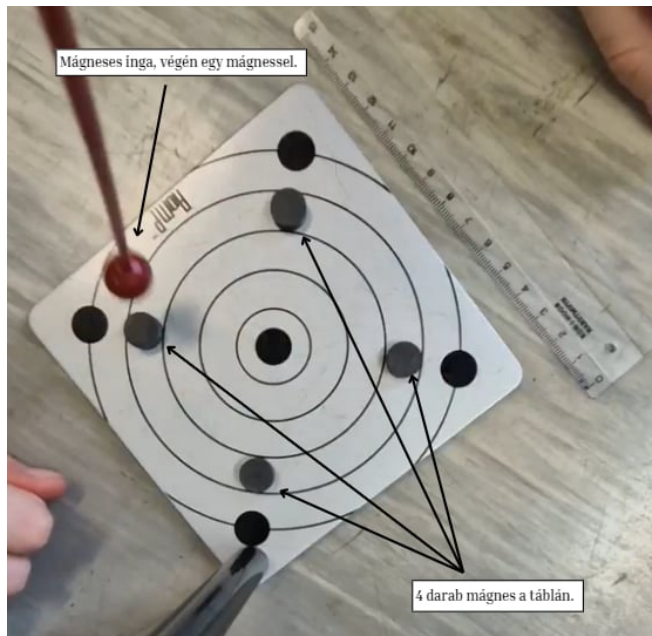
[†]kemenczei.dina@gmail.com

videóra a mozgást, majd másodszor is elindítjuk ugyanonnan, és szintén rögzítjük. Mivel a jelöléshez képest a kísérletező óhatatlanul kissé (szemmel nem láthatóan) máshonnan indítja a második mozgást, a két felvételen azt látjuk, hogy a mozgások egy ideig hasonlóak, később azonban teljesen különbözőek lesznek. Lentebb egy példán keresztül demonstráljuk, hogy hasonló kísérlet általános iskolában is elvégezhető, így az első két tulajdonság bemutatható.

Az itt leírt demonstrációt egy általános tantervű, általános iskolai 8. osztályban végeztük el. Kaotikus mechanika közoktatásban való tanítására mind Magyarországon, mind külföldön csak néhány kísérlet létezik, lásd például [2, 3] (ezen kívül online ismertető anyagok léteznek, pl. [4]). Ezek mind gimnáziumi osztályokban, vagy speciális tantervű illetve fakultációs csoportokban, szakörökön valósultak meg, jelen cikk elsőként mutat be általános iskolai alkalmazást.

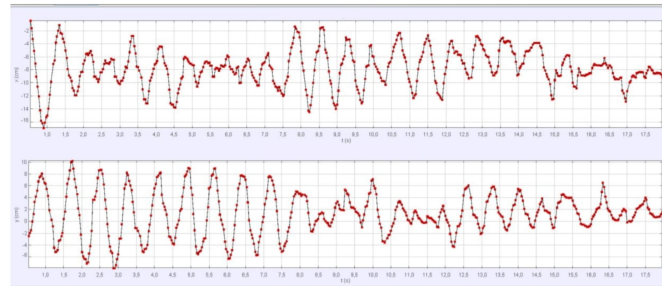
Kísérlet mágneses ingával

A kaotikus mozgás kísérleti demonstrálásához a mágneses ingát [1, 5] választottuk. Az elrendezés (lásd az 1. ábrát) alapja egy fém tábla, amelyre mágneseket helyezünk. Ezek fölé egy 18cm hosszú rudat lógatunk, amelynek a végén szintén egy mágnes található, ami így kölcsönhatásba tud lépni a táblára helyezett mágnesekkel. Az inga felfüggesztése a tábla középpontja fölött található, az inga vége és a tábla távolsága nyugalmi helyzetben 2cm, a mágnesek távolsága a tábla oldala mentén 7cm. Az így készített inga a teljes síkban mozoghat, azaz a tábla síkjának bármely pontjába eljuthat.



1. ábra. A kísérleti elrendezés felülnézetből.

Az inga egyszerűsített mozgásegyenleteit az A Függelékben adjuk meg. Ezek alapján elmondható, hogy egy olyan mozgásról van szó, amelyet zajos tagot nem tartalmazó egyenletek írnak le.¹ Mégis, a létrejövő mozgás szabálytalan, a mágnesek közötti véletlenszerű oszcilláció, amint a 2. ábra is mutatja. Ezek kimért idősorok, melyekhez a mozgást felülnézetből felvéve a szabad hozzáférésű Tracker programmal [6] értékeltük ki, a tanulók bevonásával.

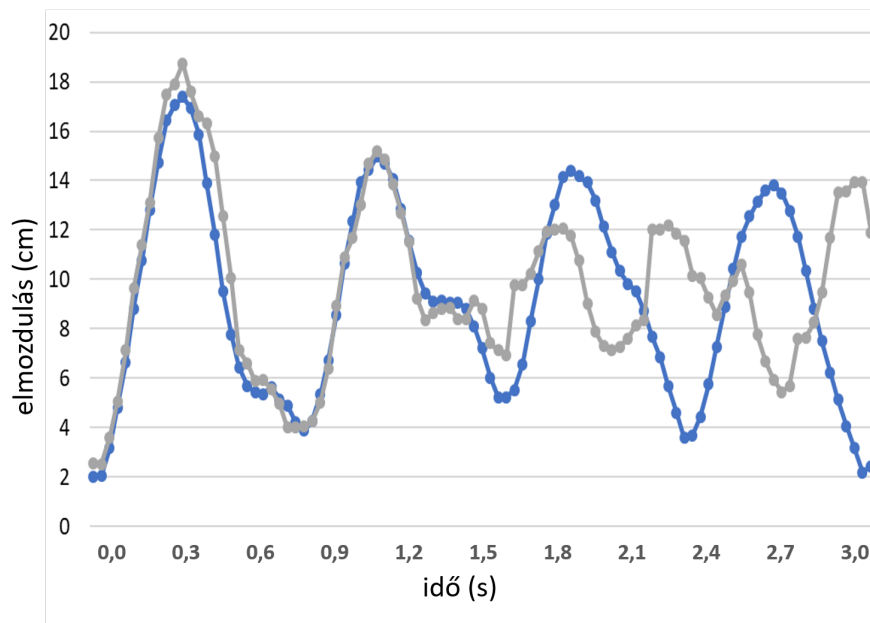


2. ábra. A mágneses inga mozgásának szabálytalan idősora az x és y koordinátákban. Az adatokat a tanulókkal együtt mértük ki a Tracker program használatával, az origót az ingát tartó oszlop aljába helyezve.

A kísérlet kimenetelében fontos szerepe van a táblán lévő mágnesek polaritásának. Ha ezek azonos pólusúak a mozgó mágnessel, akkor állandóan taszítják azt, és a 2. ábrán megfigyelt bonyolult mozgás sokáig fennáll. Ha azonban megfordítjuk a mágneseket, és a mozgó mágnessel ellentétes polaritást adunk nekik, akkor vonzani fogják azt, ekkor az (1) egyenlet (lásd A Függelék) szummás tagjainak együtthatói pozitívak. A bonyolult mozgás ebben az esetben is huzamosabb ideig fennáll (a 2. ábra is ezzel az elrendezéssel készült), tehát a rendszer kaotikus, azonban egy idő után a légellenállás lelassítja az ingát annyira, hogy az azt vonzó mágnesek hatása érvényesülni tudjon, majd végül megállapodjon valamelyik mágnes felett. Ekkor a mozgás természetesen már nem kaotikus, hanem a mágnes feletti oszcillációnak felel meg. Itt olyan ábrákat mutatunk, ahol a mozgás még nem érte el ezt az állapotot.

A fenti jelenség neve tranziens káosz [7], vagyis olyan kaotikus mozgás, amely véges időn belül megszűnik. A tranziensen kaotikus eset kiválóan alkalmas a kezdőfeltételekre való érzékenységi kvalitatív demonstrálására is: a tapasztalat szerint a kezdőfeltételeket csak egy kicsit is megváltoztatva előfordulhat, hogy az inga nem ugyanannál a mágnesnél állapodik meg.

¹Ugyanez elmondható lenne a teljes egyenletről is, figyelembe véve a mágnesek közötti dipólkölcsönhatást, a tábla és az inga mágnesének kölcsönhatását, valamint az inga végének a lengés síkjától való elemelkedését; véletlenszerű tagot sem az egyszerűsített, sem a teljes egyenlet nem tartalmaz.



3. ábra. A tanulók által kimért fáklyadiagram, az ingát tartó oszlop aljától való távolságot ábrázolva. A mozgások közvetlenül az oszlop mellől indultak (tehát ideális esetben kezdetben $r = 0$) kezdősebesség nélkül. Leolvasható, hogy az előrejelzési idő nagyjából 2.1 másodperc.

A kezdőfeltételekre való érzékenység kimérése

A jelenség kísérleti kiméréséhez a tanulókkal ún. fáklyadiagramot készítettünk, ami egy gyakran használt eszköz egy rendszer kaotikusságának demonstrálására. Szimuláció esetén több, kezdetben közeli kezdőfeltételtől kiinduló pálya együttes futtatásáról és idősorainak ábrázolásáról van szó. Ekkor megfigyelhető, hogy eleinte a görbék még hasonló alakúak (gyakran szemmel megkülönböztethetetlenek), később azonban elválnak egymástól, teljesen más mozgásokat leírva. Ez alapján elmondható az is, hogy kaotikus mozgás csak addig jelezhető előre megbízhatóan, amíg ez a szétválás meg nem történik [1].

Érdekes megjegyezni, hogy az ún. valószínűségi időjárás-előrejelzés ugyanezen az elven működik, mert a Föld légkörének dinamikája alapvetően kaotikus (sőt turbulens, tehát térben is bonyolult) jellegű. Emiatt a bonyolult időjárás modellek kimenete adott mennyiség, például a felszíni hőmérséklet előrejelzésére egy ugyanilyen fáklyadiagram. Ennek kiindulópontja ugyanis mindig a legfrissebb mérés, ami azonban mindig hibával terhelt, ami legyen bármilyen kicsi is, kaotikus rendszerben mindig véges előrejelzési időt eredményez. Folyamatosan frissülő, aktuális ilyen időjárás fáklyadiagramok megtekinthetők például a Magyar Meteorológiai Szolgálat (Hungaromet) oldalán [8] (itt az átlag körüli sáv jelzi a szimulációk terjedelmét), vagy a Wetterzentrale német weboldalon [9]. Ezek alapján látszik, hogy például a felszíni hőmérséklet esetén az előrejelzési idő nagyjából 3-4 nap.

Mivel a tanulókkal végzett kísérlethez nem áll rendelkezésünkre több mágneses inga, ezért mi a szimulációs gyakorlattól eltérő módon készítünk fáklyadiagramot: kijelölünk egy kezdőpontot, és a kísérletező (esetünkben a tanulók) ebből a pontból indítja a rendszert *többször egymás után*, majd a kísérletek eredményét *közös grafikonon* ábrázoljuk (hiszen a mozgások időben eltolás-invariánsak). Az inga esetén a kiindulópont közvetlenül a tartóoszlop bal oldalán volt. A Tracker program követi az inga mozgását, ami alapján ábrázolható a komponensek időfüggése minden kezdőfeltétel esetén, vagyis a fáklyadiagram.

Ennek a mérésnek az eredménye látható a 3. ábrán, két mozgás idősorával. Itt az ábrázolt mennyiség $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, ahol a rendszer origóját az ingát tartó oszlop alján (tehát az 1. ábrán a tábla legalsó pontjában) rögzítettük, tehát x , y és r az ettől a ponttól mért komponensek és távolság. A kísérletben összesen három ingamozgást vizsgáltunk, azonban a harmadik idősor már a mozgás elejétől eltér az itt ábrázoltaktól. Összehasonlításképpen ezt a B Függelékben közöljük.

Az ábra szépen mutatja, hogy a görbék eleinte hasonlóan viselkednek, az első két maximumuk nagyjából ugyanott van, 0.3 és 1.1 másodperc környékén. Ezután azonban összekeverednek, ami jelzi a mozgások különbözőségének egyre nagyobb felerősödését. Nagyjából 2.1 másodpercnél már a két görbe teljesen máshol tartózkodó ingákat jelez. Ez alapján kijelenthető, hogy a mérés bizonyíték a mágneses inga kaotikus tulajdonságára, és megállapítható, hogy az előrejelzési idő nagyjából 2.1 másodperc.

A különbségek felerősödésének oka, hogy a kísérletező sosem tudja teljesen pontosan ugyanonnan indítani az

ingát, így megvalósul a közeli (de nem egzaktul ugyanolyan) kezdőfeltételű mozgások vizsgálata. Általánosan a kezdőfeltételeket sosem ismerjük teljesen pontosan: a kísérletekben a kísérletező kezének remegése, a szimulációkban a numerikus pontosság, a természeti folyamatokban pedig a kis skálájú fluktuációk okozhatnak kis eltérést, amik aztán kaotikus rendszerben felfolynak. Ennek köszönhető a különböző végállapotok kialakulása is: a 3. ábrán szemléltetett mozgások végállapotai a szürke görbe esetén az 1. ábra elrendezésében a felső, míg a kék görbe esetén a jobb oldali mágnes.

Összegzés

A kaotikus mechanika több szempontból is ideális kiegészítő demonstrációs fizika tananyag lehet. Egyfelől, a kaotikus mozgás elég szokatlan és meglepő ahhoz, hogy a tanulók figyelmét könnyen felkeltse. Ugyanakkor viszont az itt bemutatott kísérlet megértéséhez elegendő lehet a harmonikus rezgőmozgás, de akár csak az egyenes vonalú egyenletes (vagy egyenletesen gyorsuló) mozgás elmozdulás-idő diagramjának, tehát az általános iskolai fizika tananyag letelejének ismerete (a mágneses inga A Függelékben közölt (1) egyenletei esetünkben sem kerültek felírásra).

Ezen kívül, a kaotikus mozgás könnyen demonstrálható egyszerű rendszerek segítségével, amire jó példa a mágneses inga. Az ilyen kísérletekbe a diákok egyszerűen bevonhatók, esetünkben az inga elengedése volt a feladatuk. Magasabb szinten, például fakultációs csoportban jó lehetőség a kísérletező szoftverek kezelésébe (a Tracker program használata például szerepel az aktuális, 2025-ös emelt szintű fizika érettségi szóbeli részére kiadott mérésekben [10]), valamint a mérési jegyzőkönyv készítésébe való bevezetésre is.

Véletlenszerű mozgás, amely (a zajos esetek mellett) kaotikus rendszerekben valósul meg, jóval többször tapasztalható a természetben, mint a fizikaórán tanult, "idealizált" mozgások. Így, mindenekelőtt, a kaotikus mechanika tanításával a fizika legalapvetőbb jelenségeinek tanítását vihetjük közelebb a valósághoz.

Köszönetnyilvánítás

Köszönjük Tél Tamás témavezetői támogatását J.K.E. Tudományos Diákköri kutatásához, amely alapján ez a cikk készült, illetve hasznos javaslatait a cikk írása során. J.D. az NKFIH hivatali támogatásában részesült, a KDP-2023 C2262591, és TKP-2021 BME-NVA-02 kódszámú pályázatok keretében.

A Függelék: A mágneses inga mozgásegyenletei

A mozgás leírása egyszerűbb, ha az inga szögkitérését kicsinek tekintjük, azaz a rúd l hossza nagy az ingának a tábla síkjában történő kitéréséhez képest. Ekkor az inga végén lévő mágnes úgy tekinthető, hogy a tábla síkjában mozog. Ha l összemérhető a síkbeli kitéréssel, akkor figyelembe kell venni, hogy az inga vége a lengése során eltávolodik a táblától. Elhanyagoljuk továbbá az inga mágneses és a fémtábla közötti kölcsönhatást.

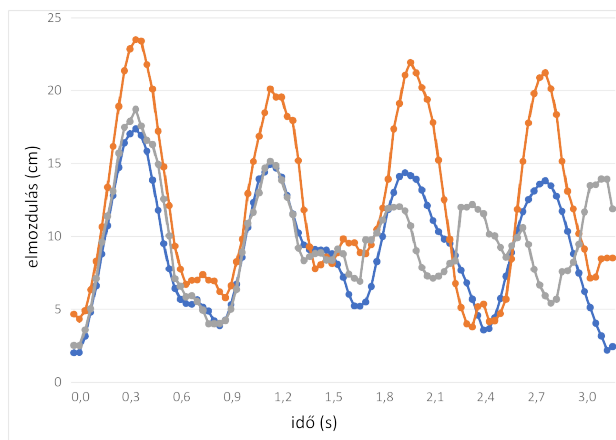
Ezekkel az egyszerűsítésekkel az inga végén lévő mágnesre hat a gravitáció, a légellenállás, valamint a többi mágnessel való kölcsönhatás. Síkmozgás közelítésben, továbbá [1, 5] nyomán a mágnesek között a távolsággal fordítottan arányos négyzetes erőtvénnyt feltételezve (amely a mágneses monopólusokkal való durva közelítésnek felel meg), a mozgás egységnyi tömegre felírható, mint

$$\begin{aligned} a_x &= -\omega_0^2 x - 2\beta v_x \pm \sum_i \frac{x_i - x}{D_i(x, y)^3}, \\ a_y &= -\omega_0^2 y - 2\beta v_y \pm \sum_i \frac{y_i - y}{D_i(x, y)^3}, \end{aligned} \quad (1)$$

ahol x és y a lengő mágnesnek a tábla széleivel párhuzamos koordinátái, a és v a gyorsulás- és sebességkomponensek, ω_0 az oszcilláció harmonikus komponensének frekvenciája (ami mágnesek hiányában az egyszerű ingamozgást írta le), β a légellenállásból adódó disszipációs konstans, (x_i, y_i) a táblán lévő mágnesek koordinátái, valamint $D_i(x, y) = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + d^2}$, ahol d a mágnesek síkja és az inga nyugalmi végpontja közötti távolság. Ahogyan az 1. ábrán látható, a kísérlethez 4db mágneset használtunk, így $i = \{1, 2, 3, 4\}$. Az (1) egyenlet dimenziótlan, az idő- és távolságegységet oly módon megválasztva, hogy a mágneses erő (szummát tartalmazó tag) együtthatója egységnyi legyen. Ennek a tagnak az előjele a "monopólusok" polaritásáról függ (feltéve, hogy mind a négy mágnes ugyanolyan polaritású).

B Függelék: A harmadik kísérlet idősorta

A 4. ábrán mutatjuk a harmadik ingamozgás idősortát narancssárgával, mely láthatóan már a mozgás kezdetén jobban eltér a másik két görbétől, mint azok egymástól. Így nem is marad sokáig közel hozzájuk, az azonban látható, hogy hasonló mozgást ír le, hiszen a görbe alakja hasonló a másik kettőhöz, egészen addig, amíg már a kék és a szürke is jelentősen eltávolodik egymástól.



4. ábra. A három kísérlet időszora egy ábrán. A kék és szürke görbe megegyezik a 3. ábrán lévőekkel, a narancssárga görbe ezekhez képest nagyobb eltéréssel indul.

Irodalom

1. Tél T., Gruiz M.: Kaotikus dinamika, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002
2. Szatmáry-Bajkó I.: Szennyeződések terjedésének vizsgálata a középiskolában: Nemlineáris és kaotikus vonások felfedező tanulása, Doktori disszertáció, Eötvös Loránd Tudományegyetem, 2023
3. A. Nussbaumer, P. Nussbaumer: Basiswissen, Physik-Compact 5, pp 12, Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH, Vienna, 2017
4. <http://theorphys.elte.hu/fiztan/chaosH/>
5. H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe: Chaos and fractals: new frontiers of science, Springer, Dordrecht, 2004
6. <https://physlets.org/tracker/>
7. Y.-C. Lai, T. Tél: Transient chaos, Springer, New York, 2011
8. <https://www.met.hu/idojaras/elorejelzes/valoszinusegi/>
9. https://www.wetterzentrale.de/en/show_diagrams.php?model=gfs&var=2&lid=ENS&h=0
10. https://www.oktatas.hu/koznevelas/erettsegi/2025tavaszi_vizsgaidoszak/2025tavasz_nyilvanos_anyagok_listaja#fizika