

ETDK-dolgozat

Galiger Gergő

XXIV. reál- és humántudományi Erdélyi Tudományos Diákköri Konferencia (ETDK)

Kolozsvár, 2021. május 27–30.

Égitestek pályaszámítása genetikus algoritmusokkal

Szerző:

Galiger Gergő

Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Matematika és Informatika Kar, Informatika szak, III. év

Témavezető:

dr. Szenkovits Ferenc, egyetemi docens

Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Matematika és Informatika Kar

Kivonat

Dolgozatom célja Nap körül keringő égitestek heliocentrikus elliptikus pályaelemeit meghatározó genetikusan kifejlesztett algoritmus kifejlesztése. Különböző időpontokban végzett észlelésekkel meghatározott koordináták alapján a program képes meghatározni az égitestek elliptikus heliocentrikus pályaelemeit. Ezen algoritmus az égi mechanikában kifejlesztett hagyományos pályaszámítási módszerek hatékony alternatívája lehet, mivel egy jól megválasztott genetikusan stratégia a numerikus algoritmusoknál számottevően rövidebb idő alatt megközelítő pontosságú eredményhez juthat. A megfelelő stratégia megtalálása érdekében több kiválasztási, rekombinációs és mutációs műveletet elemeztünk és hasonlítottunk össze. Az algoritmus hatékonyságát és pontosságát konkrét bolygók és kisbolygók pályaelemeinek meghatározásával teszteltük. A populációk javításához használt fitnessfüggvényünk a hagyományos efemerisz-számításon alapul. Az így számolt efemeriszek (adott időpontra számolt koordináták) vizsgálatára észlelési adatok alternatívájaként az égitestek látszó koordinátáit a NASA Horizons nevű rendszerétől kérjük le.

Tartalomjegyzék

Bevezető	1
1. Égi mechanika	3
1.1. Az n-test probléma	3
1.1.1. Az n-test probléma első integráljai	5
1.2. Relatív mozgás és az egycentrum-probléma	6
1.3. A pályasík helyzetének meghatározása	8
1.4. Az elliptikus mozgás	9
1.5. Efemerisz-számítás	11
2. A téma rövid története	15
2.1. Jelenleg használt módszerek	15
2.2. Hasonló kutatási eredmények	17
3. Koordináta-transzformációk	19
4. Felhasznált adatok	21
4.1. Telnet	22
4.2. Horizons	22
4.3. Automatikus adatelérési rendszer	23
5. Genetikus algoritmus	24
5.1. Evolúciós algoritmusok	24
5.2. Genetikus algoritmusok	26
5.3. Genetikus algoritmusok alkalmazásai a csillagászatban	27
5.4. A fejlesztés folyamata	28
5.4.1. A feladatrepresentáció	28
5.4.2. A fitnessfüggvény	29
5.4.3. Kiválasztás	33
5.4.4. Variációs operátorok – mutáció és keresztezés	35
5.4.5. Inicializáció és leállás	36
5.4.6. A teljes folyamat	37

6. Szimuláció és teszteredmények	39
Következtetések és továbbfejlesztési lehetőségek	44

Bevezető

Az utóbbi évek során a csillagászati észlelések terén nagy előrehaladás történt. Ez nagymértékben a megfigyelési műszerek és módszerek fejlődésének köszönhető. Ennek eredményeképp részletes megfigyelési információ számos égi objektumról manapság széles körben egyszerűen elérhető. A rengeteg információt fel lehet használni többek között égitestek pálya menti mozgásának meghatározására és ezáltal jövőbeli helyzetük előrejelzésére. E feladat egy helyes és gyors megoldásának kifejlesztése az emberiség számára egy rendkívül fontos feladat. Azon égi objektumok felfedezése és jellemzése, amelyek fenyegetést jelenthetnek bolygónkkal való ütközésük szempontjából, létfontosságú az emberiség túlélése érdekében. A veszélyt jelentő égitestek pályameghatározását képesek kell legyünk a lehető legrövidebb idő alatt nagy pontossággal elvégezni a túlélési esélyünk növelése érdekében.

Az égitestek pályameghatározása a mai napig olyan módszerekkel történi, amely Kepler, Laplace és Gauss ([6]) matematikusok neveihez fűződnek. Ezen numerikus módszerek segítségével pontosan meg lehet határozni bármely égi objektum pályáját, amelyről bizonyos észlelési információval rendelkezünk. E klasszikus eljárások több mint két évszázada jöttek létre, amikor még a csillagászati észlelések rengeteg időt vettek igénybe. A ma garantált információmennyiség és minőség hiányában, ezek kevés észlelési adattal dolgoznak és az elvárt pontosság függvényében relatív hosszú időt igényelhetnek. Manapság nagy mennyiségű pontos megfigyelési adatokhoz könnyedén lehet rövid idő alatt hozzáférni. Emiatt célszerű lehet a klasszikus pályameghatározási módszereket újragondolni.

Egy égitest pályáját hat paraméterrel, úgynevezett pályaelemekkel lehet egyértelműen leírni. A főbb probléma, amelybe a klasszikus numerikus módszerek kifejlesztése során ütköztek az, hogy a pályaelemek keresési tere gyakran nagyon tág. Egy hatékony módszer kifejlesztésével, amely a pályameghatározás során felmerülő keresést gyorsítani tudná, nagyban javíthatunk a klasszikus eljárások teljesítményén. E dolgozat célja a genetikus algoritmusok alkalmasságának ellenőrzése ezen optimalizációs feladat megoldására.

A genetikus algoritmusok elkerülhetik a klasszikus megközelítés problémáit, így a pályaelemek keresése az algoritmus által szimulált evolúciótól és az észlelési adatoktól függ. Ezek alkalmazása egy relatív hatékony eljárást eredményezhet a globálisan legjobban illeszkedő paraméterek meghatározására. Annak ellenére, hogy a genetikus algoritmusok nem képesek precíz értékek előállítására, ezek nagyon hatékonyak egy globális optimum környezetének megtalálására. A globális optimum ebben az esetben egy jó kezdeti pálya

becslését jelenti, amely a későbbiekben a klasszikus módszerek által precíz pályaelemértékek gyors meghatározására használható.

A genetikus algoritmusok mögött lévő alapötlet egy optimalizációs feladat megoldása teljesen véletlenszerű kezdeti értékek evolúciója által. A természetből inspirált evolúció modellezése és a folyamatot irányító paraméterek helyes beállítása a pályaelemek folyamatos fejlődését eredményezik. A bemeneti észlelési adatok meghatározzák az optimum irányú fejlődést. Ezen algoritmuscsaládot számos tudományterületen alkalmazták sikeresen, bár a csillagászatban erre relatív kevés példa létezik. Többek között léteznek kutatások a genetikus algoritmusok alkalmazásáról egyes égi objektumok pályameghatározására, bár ezek többsége távoli ismeretlen mélyégobjektumok tanulmányozása céljából készült. E dolgozatban elemzett módszer nem céloz meg adott égi objektumot, célunk a genetikus algoritmusok alkalmasságának vizsgálata általános pályabecslésre.

Dolgozatom célja genetikus algoritmusok alkalmazása égitestek pályaelemeinek megközelítésére, ezek tág keresési tartományának hatékony bejárása által. Az 1. fejezetben rövid betekintést nyerünk az égi mechanikai pályaszámítás és efemerisz-számítás elméleti háttérébe. A 2. fejezetben bemutatjuk a klasszikus pályameghatározási módszereket, majd pedig az eddigi pályaszámításra alkalmazott genetikus algoritmusokat. Az észlelési adatok forrásáról és hozzáférési módjáról a 4. fejezetben lesz szó, majd a 3. fejezetben az adatok feldolgozására használt koordináta-transzformációkat mutatjuk be. Az 5. fejezetben a genetikus algoritmusok elméleti háttérét vezetjük be és bemutatjuk a pályameghatározásra alkalmazott algoritmusunkat. A módszer elemzését és tesztelését a 6. Dolgozatunkat következtetéseink és továbbfejlesztési javaslataink összefoglalásával zárjuk.

Köszönetet szeretnék itt mondani vezető tanáromnak, Dr. Szenkovits Ferencnek, akinek támogatása és segítsége nélkül e dolgozat nem jöhetett volna létre. A dolgozatban tárgyalt eredmények az ő szaktudásának és rám fordított idejének köszönhetőek. Mindezek mellett közös munkánk szakmai fejlődésemhez is nagymértékben hozzájárult.

1. Égi mechanika

Összefoglaló: Mivel a dolgozatban bemutatott módszer eljárásai az égi mechanikára épülnek, fontos megismerkedni e tudományág alapjaival. Ezen fejezet nagy vonalakban leírja az égi mechanika alapjául szolgáló fogalmakat és ezek közti összefüggéseket. Az itt bemutatott klasszikus összefüggések szintézise a következő könyvek megfelelő részei alapján készült: [17], [8].

A dinamikus csillagászat az asztronómia azon ága, amely a következő három kutatási területet foglalja magába:

1. égi mechanika - természetes égitestek mozgásának vizsgálata;
2. asztrodinamika - mesterséges égitestek mozgásával foglalkozik;
3. sztellárdinamika - tárgya a csillagok mozgása.

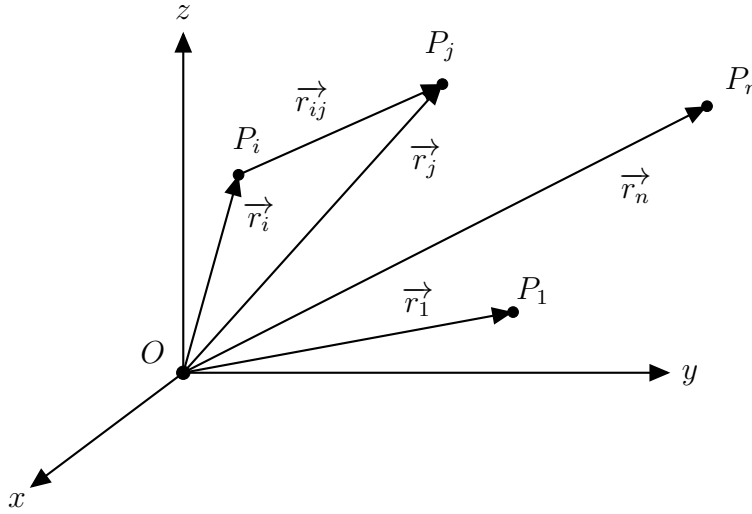
Az égi mechanika alakult ki elsőként ezen kutatási területek közül. Az ide tartozó általános problémák vizsgálatával foglalkozó módszerek a többi területen is alkalmazhatók. A tudományág kezdetét Isaac Newton: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica című munkájának kezdetétől (1687) számítjuk. Többek között Newton ebben fogalmazta meg az általános tömegvonzás törvényét, a mechanika axiómáit, valamint felállította az égi mechanika alapfeladataként az n -test problémát.

1.1. Az n -test probléma

Az égi mechanika alapfeladata égitestek mozgásának megértése céljából fogalmazódott meg. Az n -test probléma megfogalmazható mint az n számú ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$) pontszerű test mozgásának meghatározása, ha rájuk csak a Newton-féle kölcsönös gravitációs vonzóerők hatnak.

Legyenek az $m_1, m_2, \dots, m_n$ tömegű $P_1, P_2, \dots, P_n$ tömegpontok az n -test problémában. Jelölje a P_i tömegpont helyvektorát az $Oxyz$ inerciarendszerben $\vec{r}_i$, melynek koordinátái $(x_i, y_i, z_i), i \in \{1, 2, \dots, n\}$. A Newton-féle általános tömegvonzási törvény alapján a rendszer minden $P_j, j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$ tömegpontja a P_i -re az

$$\vec{F}_{ij} = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$$



1. ábra. Az n -test problémát meghatározó vázlat egy derékszögű jobbsodrású koordináta-rendszerben n tömegpontra.

gravitációs vonzóerőt fejt ki, ahol $G = 6,674 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ a Newton-féle gravitációs állandó,

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i,$$

$$r_{ij} = \|\vec{r}_{ij}\| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2},$$

és az erő irányát az $\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$ egységvektor adja, mely P_i -ből P_j -be mutat.

Az $\vec{F}_{ij}$ gravitációs vonzóerőket összegezve, az probléma Newton-féle mozgásegyenletei felírhatók az

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = k^2 \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}, i = 1, 2, \dots, n,$$

alakban, ahol az $\ddot{\vec{r}}_i$ gyorsulásvektorok az időben változó $\vec{r}_i : [t_0, t_v] \rightarrow \mathbb{R}^3$ helyzetvektorok t idő szerinti másodrendű deriváltjai, k pedig a Gauss-féle gravitációs állandó, melynek értéke:

$$k = 0,01720209895$$

abban a mértékrendszerben, melyben a tömeg egység a Nap tömege, a hosszúság egység a csillagászati egység, az idő egység pedig a középnap.

Az égi mechanikában szokásos potenciális energiát bevezetve és a rendszert komponensekre bontva, az n -test probléma $3n$ számú közönséges másodrendű differenciálegyenlet

megoldásaként fogható fel. A meghatározandó $x_i(t), y_i(t), z_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ függvények független változójaként megjelenő t idő határait a $0 \leq t_0 \leq t \leq t_v \leq \infty$ összefüggés írja le. A megoldandó differenciálegyenlet-rendszer rendje $6n$.

1.1.1. Az n -test probléma első integráljai

Az első lépés az n -test probléma mozgásegyenleteiből álló differenciálegyenletek megoldásához az első integrálok keresése.

Definíció: Valamely $f : M \times \mathbb{R}^{3n} \times [t_0, t_v] \rightarrow \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}^{3n}$ függvényt az n -test probléma mozgásállandójának nevezzük, ha Newton-féle mozgásegyenletek bármely $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ megoldásához létezik olyan $c \in \mathbb{R}$ állandó, amelyre

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, \ddot{\vec{r}}_1, \ddot{\vec{r}}_2, \dots, \ddot{\vec{r}}_n, t) = c, \forall t \in [t_0, t_v].$$

Ezt az összefüggést nevezzük a mozgásegyenletek első integráljának.

A mozgásegyenletek integrálásához $6n$ tetszőleges állandóra lenne szükség. Az n -test probléma általános megoldása ezen állandók és a t idő függvényeként lenne kifejezhető. Hosszú időn keresztül az n -test problémára irányuló kutatások középpontjában ezen első integrálok keresése állt. A jelenleg ismert első integrálok a következők:

1. A tömegközéppont-integrálok: Az n -test probléma bármely megoldása esetén léteznek az $\vec{a}, \vec{b}$ állandó vektorok, amelyekre

$$m\ddot{\vec{r}}_C = \vec{a}, m\vec{r}_C = \vec{a}t + \vec{b}, \forall t \in [t_0, t_v],$$

ahol

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

a pontrendszer össztömege és

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

a rendszer C tömegközéppontjának helyzetvektora. A tömegközéppont integrálok komponensekben felírva a differenciálegyenlet-rendszer hat első integrálját jelentik.

2. Az impulzusmomentum-integrálok: Az n -test probléma bármely megoldása esetén

létezik olyan c állandó vektor, amelyre

$$\sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i) = \vec{c}, \forall t \in [t_0, t_v].$$

Mivel az impulzusmomentum-integrál bal oldalán a pontrendszer impulzusmomentuma szerepel, ez a rendszer perdületének állandóságát fejezi ki. Ez komponensekben felírva az n -test probléma további három első integrálját adja.

3. Az energiaintegrál: Az n -test probléma bármely megoldása esetén létezik olyan $h \in \mathbb{R}$ állandó, amelyre

$$T + V = h, \forall t \in [t_0, t_v],$$

ahol

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i^2$$

a rendszer kinetikus energiája, V pedig a

$$V = -k^2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

potenciális energia. Az energiaintegrál az energia állandóságát, megmaradásának elvét fejezi ki.

A felsorolt egyenletek az n -test probléma mozgásegyenletei tíz ($6 + 3 + 1$) első integrálját jelentik. Ezeket klasszikus első integráloknak nevezik. Segítségükkel a $6n$ -ed rendű differenciálegyenlet-rendszer egy $(6n - 10)$ -ed rendű rendszerré redukálható. Ha $n = 2$, akkor a kapott rendszer másodrendű, ami egyszerűen integrálható. Ha viszont $n \geq 3$, az n -test probléma megoldását numerikus integrálással határozzák meg kellő pontossággal. A dolgozatban bemutatott genetikus algoritmus ezen numerikus eljárások egy gyorsabb alternatíváját képezi.

1.2. Relatív mozgás és az egycentrum-probléma

A tömegközéppont integrálok értelmében a C tömegközéppont vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, vagy nyugalomban van. Ezen tulajdonságától függetlenül, a C középpont egy inerciarendszer kezdőpontjának tekinthető a Galilei-féle relativitási elv

értelmében. A relatív mozgás ismertetése végett a P_1 és P_2 pontok mozgása vizsgálandó ebben a C kezdőpontú inerciarendszerben.

Legyen $\vec{s}_1$ és $\vec{s}_2$ a P_1 , illetve P_2 helyvektora a C -re vonatkoztatva. Mivel

$$\vec{r}_C = \vec{0}, \vec{s}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_C, \vec{s}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_C,$$

így

$$\ddot{\vec{s}}_1 = \ddot{\vec{r}}_1, \ddot{\vec{s}}_2 = \ddot{\vec{r}}_2$$

Ezen összefüggések alapján az n -test probléma mozgásegyenletei $n = 2$ esetben (ún. kéttest probléma) az

$$m_1 \ddot{\vec{s}}_1 = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, m_2 \ddot{\vec{s}}_2 = -k^2 \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

alakban is felírhatók.

A tömegközéppont értelmezéséből azonnal adódik, hogy ezen mozgásegyenletek az

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}$$

mozgásegyenlettel ekvivalensek, ahol

$$\mu = k^2(m_1 + m_2).$$

Ez a mozgásegyenlet a P_2 pont P_1 körüli relatív mozgását írja le.

Egy m tömegű tömegpont egy rögzített helyzetű m' tömegű pontszerű test körüli mozgásának meghatározása a Newton-féle kölcsönös gravitációs vonzóerő hatására a mechanikában egy klasszikus feladatnak számít. Ez az ún. Newton-probléma, vagy egycentrum-probléma. A feladat az

$$\ddot{\vec{r}} = -k^2 \frac{m'}{r^3} \vec{r}$$

mozgásegyenlettel írható le, ahol $\vec{r} = \overrightarrow{P_1 P_2}$. Megfigyelhető, hogy az $m' = m_1 + m_2$ megfeleltetéssel a P_2 pont P_1 körüli relatív mozgását leíró egyenlet formailag megegyezik a rögzített centrum körüli mozgást leíró egyenlettel. A P_2 pont úgy mozog a P_1 körül, mint ahogy egy tetszőleges tömegű pontszerű test kering egy rögzített helyzetű $m_1 + m_2$ tömegű vonzó centrum körül.

Mivel a relatív mozgás ekvivalens az egycentrum-problémával, a relatív mozgás kielégíti a centrális mozgás tulajdonságait. Következésképp felírható a relatív mozgás esetében az impulzusmomentum-integrál tétele, mely szerint a relatív mozgást leíró egyenlet bármely $\vec{r} : [t_0, t_v] \rightarrow \mathbb{R}^3$ megoldása esetén létezik olyan $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ állandó vektor, amelyre

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c}, \forall t \in [t_0, t_v].$$

A $\vec{c}$ impulzusmomentum-állandó értéke a

$$\vec{r}_1(t_0) = \vec{r}_{10}, \vec{r}_2(t_0) = \vec{r}_{20}, \dot{\vec{r}}_1(t_0) = \vec{v}_{10}, \dot{\vec{r}}_2(t_0) = \vec{v}_{20}$$

kezdeti feltételek alapján

$$\vec{c} = \vec{r}_0 \times \vec{v}_0,$$

ahol

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_{20} - \vec{r}_{10}, \vec{v}_0 = \vec{v}_{20} - \vec{v}_{10}.$$

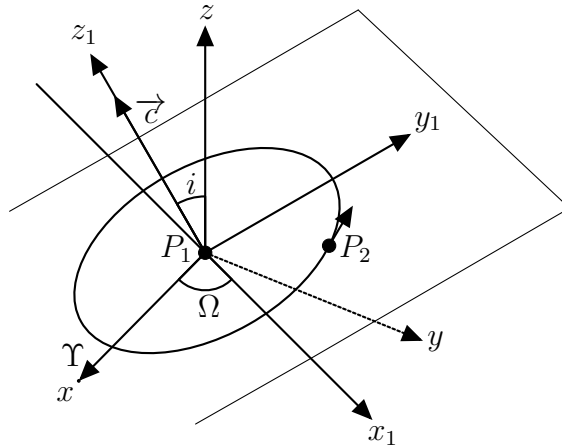
Ez azt jelenti, hogy a relatív mozgás:

1. egyenes vonalú mozgás, ha $\vec{c} = \vec{0}$, vagyis $(\vec{r}_0 = \vec{0} \vee \vec{v}_0 = \vec{0} \vee \vec{r}_0 \parallel \vec{v}_0)$;
2. síkmozgás, ha $\vec{c} \neq \vec{0}$, vagyis $(\vec{r}_0 \neq \vec{0} \wedge \vec{v}_0 \neq \vec{0} \wedge \vec{r}_0 \nparallel \vec{v}_0)$;

1.3. A pályasík helyzetének meghatározása

Ha a $\vec{c}$ impulzusmomentum nem zérus, akkor a P_2 tömegpont P_1 körüli mozgása egy $\vec{c}$ -re merőleges pályasíkú síkmozgás. Meghatározandó ezen pályasíknak az inerciarendszerként választott P_1xyz derékszögű jobbsodrású koordináta-rendszerhez viszonyított helyzete. Ebben a rendszerben a $P_1x_1y_1$ pályasík helyzete két szög segítségével határozható meg egyértelműen:

1. az $i \in [0^\circ, 180^\circ]$ pályahajlás vagy inklináció, amely a $P_1x_1y_1$ pályasíknak a P_1xy síkkal bezárt szöge. Abban az esetben, ha $i < 90^\circ$ direkt mozgásról, ellenkező esetben pedig retrográd mozgásról van szó. Az i inklináció megegyezik a $\vec{c}$ vektornak a P_1z tengellyel bezárt szögével.
2. az $\Omega \in [0^\circ, 360^\circ)$ felszálló csomó hossza. A pályasík közös egyenesét a P_1xy síkkal csomóvonalnak nevezik. A P_2 pont pályája a csomóvonalat két pontban metszi.



2. ábra. A P_2 tömegpont P_1 körüli mozgás pályasíkjának térbeli helyzete. A pályasík helyzetét egyértelműen meghatározzák az i és Ω szögek.

A felszálló csomó az a pont, amelyen a csomón áthaladó P_2 pont z koordinátája negatívból pozitívvá változik. A felszálló csomó hossza értelmezés szerint a felszálló csomó szögtávolsága a P_1x tengelytől, melyet a P_1z tengely irányából nézve direkt trigonometriai irányban mérik.

Kepler I. általánosított tétele alapján, a kéttest-probléma esetén a P_2 tömegpontnak a P_1 körüli relatív pályája egy P_1 fókuszú kúpszelet. A pálya típusa az

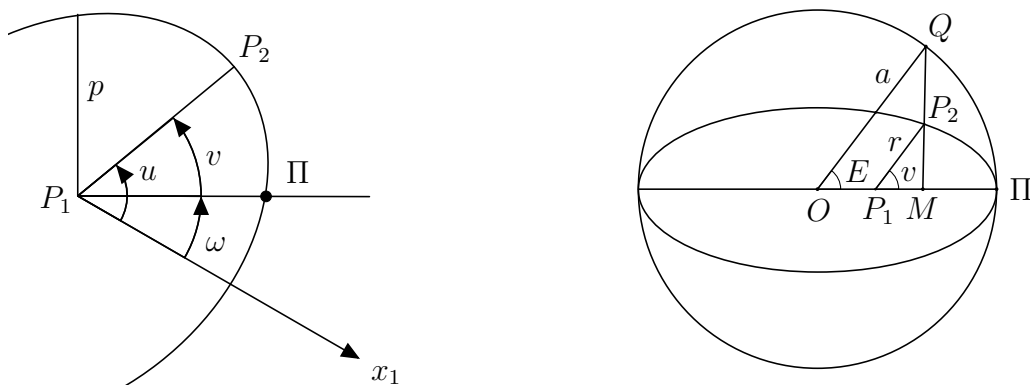
$$e = \sqrt{1 + 2h \frac{c^2}{\mu^2}}$$

numerikus excentricitás vizsgálatával határozható meg:

1. ellipszis, ha $e \in [0, 1]$;
2. parabola, ha $e = 1$;
3. hiperbola, ha $e > 1$.

1.4. Az elliptikus mozgás

Ismerve az általában kúpszelet alakú pályát a kéttest-probléma esetében, felmerül a pályán mozgó tömegpont helyzetének meghatározása az idő függvényében. Az elliptikus mozgás gyakorlati szempontból talán a legfontosabb a kúpszelet alakú mozgások közül.



3. ábra. Bal oldalt látható a relatív pálya elemeinek értelmezése, jobb oldalt pedig az E excentrikus anomália értelmezése.

Az elliptikus mozgás vizsgálatához szükség van a v valódi anomáliának meghatározásához. A valódi anomália egy r rádiusznak az ellipszis $P_1\Pi$ szimmetriatengelyével bezárt szöge, amit a Π pericentrum irányától direkt csillagászati irányba mérnek. Az r poláris sugár hossza minimális, ha $v = 0$, vagy $u = \omega$, ahol ω integrációs állandó a Π pericentrum szögtávolsága a P_1x_1 tengelytől, az ún. pericentrum argumentuma.

Az elliptikus mozgás leírásához, vagyis a v valódi anomáliát az idő függvényében leíró differenciálegyenlet integrálásához, a mozgás síkjában felvett pályaellipszis és a köré írt O középpontú a sugarú kört lehet tekinteni. Legyen P_1 az egyik tömegponttal egybeeső fókusz a pályaellipszisnek, míg a P_2 pont e pont körül halad az ellipszisen. Ha Π az ellipszispálya pericentrum pontja, akkor $P_1P_2 = r$ és $m(\widehat{P_2P_1\Pi}) = v$. Legyen P_2M merőleges az ellipszis nagytengelyére és Q a P_2M merőlegesnek az ellipszis köré írt körrel való metszéspontja a nagytengelyhez viszonyítva P_2 -vel azonos félsíkban. A $\widehat{QO\Pi}$ szög mértéke az E excentrikus anomália.

A v valódi anomália és az E excentrikus anomália közötti kapcsolat csak az e excentricitástól függ. Az excentrikus anomália a t időpillanat ismeretében az

$$E - e \sin E = n(t - \tau)$$

ún. Kepler-egyenletből határozható meg, ahol az

$$n = \mu^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}}$$

állandót középmozgásnak nevezik és a τ a pericentrum-átmenet időpontja. Az n középmozgás fizikai jelentése a közepes szögsebesség.

1.5. Efemerisz-számítás

Az egycentrum-probléma megoldását $c \neq 0$ esetén összefoglalva, a következő feladathoz jutunk: adott az m_1 és m_2 tömegű P_1 és P_2 tömegpontok a P_1xyz koordináta-rendszerben, illetve a P_2 tömegpont $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ hely- és $\vec{v}'_0(x'_0, y'_0, z'_0)$ sebességvektora egy t_0 időpontban. Cél meghatározni a P_2 $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{r}'_0(x'_0, y'_0, z'_0)$ hely- és sebességvektorát egy $t \neq t_0$ időpontban.

Ezen vektorokat megadó összefüggések alkalmazásához szükséges bevezetni az ezekben szereplő paramétereket:

1. a fél nagytengely
2. e excentricitás
3. i pályahajlás
4. Ω felszálló csomó hossza
5. ω pericentrum argumentuma
6. τ pericentrum-átmenet időpontja

Ezeket a mennyiségeket nevezik pályaelemeknek. A mozgás pályája leírásához pontosan hat pályaelem szükséges, mivel az egycentrum-probléma differenciálegyenlet-rendszere hatodrendű.

A hat pályaelem ismeretében kiszámíthatók a hely- és sebességvektorok néhány összefüggés segítségével úgy elliptikus, mint parabolikus vagy hiperbolikus mozgásra. Égitestek koordinátáinak adott időpontokra történő kiszámítását efemerisz-számításnak nevezik. A dolgozatban bemutatott algoritmus a helykoordináták kiszámítását elliptikus

mozgásra a következő összefüggések segítségével végzi:

$$n = \mu^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}}, \text{ ahol } \mu = h^2(m_1 + m_2)$$

A τ pericentrum-átmenet időpontja helyett célszerű az M középanomáliát alkalmazni. A két pályaelem közti összefüggés a következő:

$$M = n(t - \tau)$$

A helyvektor kiszámításához szükséges következő mennyiség az E excentrikus anomália, amely az

$$E - e \sin E = M$$

összefüggésből (Kepler-egyenlet) határozható meg, amelyre egy lehetséges módszer a [1] dolgozatban leírt iterációs numerikus algoritmus. Az excentrikus anomália ismeretében, meghatározandó a

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$$

összefüggésből a v valódi anomália, illetve az

$$r = a(1 - e \cos E)$$

összefüggésből a tömegpontok közti r távolság.

Ezen mennyiségek ismeretében a helyvektor (x, y, z) derékszögű koordinátái a pálya síkjában a következőképpen számíthatók ki:

$$\zeta = r \cos v, \eta = r \sin v.$$

$$P_x = \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i$$

$$P_y = \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i$$

$$P_z = \sin \omega \sin i$$

$$Q_x = -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i$$

$$Q_y = -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i$$

$$Q_z = \cos \omega \sin i$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \\ P_z & Q_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}$$

Fontos megjegyezni, hogy a pályaelemek csak a kéttest-problémában állandók. A valóságban a bolygók kölcsönös perturbációi következtében az égitestek pályaelemei időben változnak. Egy adott időpontban ismert perturbált pályaelemek esetén viszont, az ismertetett összefüggésekből kiszámítható az égitest hely- és sebességvektora ugyanezen időpontra.

A dolgozatban bemutatott algoritmus Nap körül keringő, Földről észlelhető égitesteket vizsgál. Ezért a Nap-középpontú koordináta-rendszerben kiszámított pályaelemekből kapott helyvektort szükséges átvinni egy Föld-középpontú rendszerbe. A heliocentrikus ekvatoriális koordináták geocentrikus ekvatoriális koordinátákká való átalakításához a következő összefüggéseket használjuk:

$$\rho \cos \alpha \cos \delta = x + X$$

$$\rho \sin \alpha \cos \delta = y + Y$$

$$\rho \sin \delta = z + Z.$$

X, Y, Z a Nap geocentrikus ekvatoriális koordinátái a megfelelő időpontban, melyeket a Horizons adatbázis tartalmaz. A megfigyelt égitest heliocentrikus ekvatoriális koordinátái: x, y, z a már ismert módon kiszámíthatóak.

A ρ égitestek közti távolság kifejezhető mint

$$\rho = \sqrt{(x + X)^2 + (y + Y)^2 + (z + Z)^2},$$

majd a $\delta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ deklináció mint

$$\delta = \arccos \frac{z + Z}{\rho}.$$

Az $\alpha \in [0, 2\pi]$ rektaszcenzió kiszámításához szükség van a következő két összefüggésre:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{x + X}{\rho \cos \delta} \\ \sin \alpha &= \frac{y + Y}{\rho \cos \delta},\end{aligned}$$

ahonnan

$$\alpha = \begin{cases} \arccos(\cos \alpha), & \text{ha } \sin \alpha \geq 0 \\ 2\pi - \arccos(\cos \alpha), & \text{ha } \sin \alpha < 0. \end{cases}$$

2. A téma rövid története

Összefoglaló: Annak érdekében, hogy genetikus algoritmusokat tudjunk kialakítani égitestek pályaelemeinek meghatározására, fontos megismerkedni e feladat megoldására jelenleg használt módszerekkel. Ennek a fejezetnek a célja ezen módszerek alapszintű bemutatása, majd pedig a hasonló célból használt genetikus algoritmusok ismertetése és rövid elemzése.

Az égitestek pályaelemeinek meghatározására manapság numerikus módszereket alkalmaznak, amelyek olyan tudósok neveihez fűződnek, mint Kepler, Laplace, vagy Gauss. Ugyan ezen módszerek a mai napig elterjedtek maradtak, készültek kutatások genetikus algoritmusok alkalmazásáról különböző égi objektumok pályaelemeinek meghatározására. E dolgozatban szereplő általános pályabecsléssel ellentétben, ezek konkrét ismeretlen mélyégobjektumok pályameghatározására alkalmaznak genetikus módszereket. Ezen kutatások eredményei hasznos információkkal szolgálnak az itt bemutatott módszer fejlesztésében és alkalmasak az eredmények összehasonlítására is.

2.1. Jelenleg használt módszerek

A bemutatott égi mechanikai módszerekkel meg lehet határozni egy égitest pályaelemei segítségével annak pontos helyzetét egy adott időpontban. Ez viszont az égi mechanika alapfeladatának felét oldja meg. A feladat másik fele az, hogy valamely észlelési információból a mozgást megadó pályaelemeket meghatározzuk. A mai napig alkalmazott pályaelem meghatározási módszerekről a [6] könyvben lehet bővebben olvasni.

Nap körül keringő égi objektumok pályáját, amint azt a 1. fejezetben láttuk, hat független pályaelem képes meghatározni. A pályaelemek kiszámításához emiatt ugyancsak hat független információra van szükségünk. Ezek ölthetnek többféle alakot, bár a csillagászok általában a számukra legkézenfekvőbb adatokat használják. Leggyakrabban egy égitest éggömbi helyzetét megadó szögkoordináták mérhetők a legegyszerűbben. Ezen koordináták egy adott időpontban két független értéket jelentenek, tehát legalább három ilyen koordinátapár szükségeltetik az ismeretlen pályaelemek becslésére. Az észlelési hibák miatt viszont, a gyakorlatban ilyen kevés adat relatív nagy hibaértékeket eredményez a kiszámított pályaelemekben. Pontos meghatározásokhoz nagy mennyiségű észlelési adatot használnak annak érdekében, hogy a végeredmény hibaértékét minél jobban csökkentsék.

Egy égitest pályaelemei lineáris időben kiszámíthatók egy adott időpontbeli hely és sebességvektorainak ismeretében. A pontos számítások részletes leírása megtalálható a [6] 7.1-es fejezetében. Mivel nagyon ritka az, hogy a csillagászok egy égi objektum hely és sebességvektorait adott időpontokra meghatározzák, a legtöbb pályameghatározási módszer ezen vektorok becslését végzi el az elérhető észlelési információ segítségével. Gyakran a módszerek által felhasznált adat a már említett három észlelt koordináta-pár alkalmazását jelenti.

A történelem során számos módszert dolgoztak ki pályaelemek meghatározására. Talán a legelső és legprimitívebb módszert Johannes Kepler dolgozta ki a Kepler-törvények felfedezése során. Érdekes lehet, hogy Kepler pályaelem számításai során nem használja fel a korábbi észrevételeket, mint a minimális hat megfigyelési adat, vagy a hely és sebességvektorok átszámítása. A módszer a vizsgált égi objektum szinodikus keringési periódusának megfigyelésére épül. A szinodikus keringési periódus az égitest két egymást követő azonos éggömbi helyzete közötti időtartam. A szinodikus periódus ismeretében kiszámítható a sziderikus periódus, ami az az időtartam, ami alatt egy bolygó befutja pályáját. Ennek és az égitest éggömbi koordinátáinak segítségével, meghatározható ennek égi helyzete egy adott időpontra. Ezt elvégezve egy teljes sziderikus periódusra, megkapjuk az égitest teljes pályáját. A leírásból látszik, hogy Kepler módszere rendkívül sok észlelési információt igényel, amely egy teljes keringési periódus megfigyelésével kapható meg.

Később Pierre-Simon Laplace volt az, aki egy hatékonyabb pályaelemmeghatározási módszert dolgozott ki. Laplace módszere éggömbi koordinátákat használ a hely és sebességvektorok becslésére, amelyekből a pályaelemek egyszerűen meghatározhatók. A módszer magja egy Taylor-sorfejtés alkalmazása, melynek felépítésére szükség van egy zárt egyenletrendszer megoldására. Az egyenletrendszer megoldása csupán numerikus iterációs módszerekkel közelíthető meg, ugyanis ez nem lineáris egyenletekből áll. Ezen numerikusan számított megoldások nagy hibákat vezethetnek be a végeredményként kapott pályaelemek értékeibe a bemeneti észlelési adatok természete függvényében. Probléma lehet az is, ha a koordináták észlelési ideje túl közel van egymáshoz, de az is ha túl távol. Gyakorlatban több adat és hosszabb Taylor-sor használata segít a pontosság növelésében, ezek viszont rontanak a hatékonyságon.

A pályaelemek meghatározására a mai napig elterjedt módszer Carl Friedrich Gauss nevéhez fűződik. Gauss kidolgozott egy elegáns módszert, amely nem rendelkezik Laplace módszerének hátrányaival és ennél pontosabb eredményeket nyújt. Gauss módszere felhasználja

a vizsgált égitestek Nap körüli síkmozgását ahhoz, hogy észlelési koordinátákból három heliocentrikus rádiuszvektor meghatározzon. A rádiuszvektorok ismeretében Gauss kidolgozott egy igen érdekes módszert a pályaelemek meghatározására. A meghatározott rádiuszvektorok vektoriális szorzata tartalmaz egy olyan normálvektort, amely a vizsgált égitest pályája felé mutat és segítségével meghatározhatóak a pályaelemek. E normálvektor skaláris együtthatóit a rádiuszvektorok által alkotott háromszögek területei határozzák meg. A háromszögek területének becslése a legbonyolultabb része Gauss módszerének, de emiatt képes Gauss Laplace módszerénél pontosabb értékek meghatározására. Ez abból látszik, hogy Laplace Taylor-sorfejtésből kapott hibái közvetlenül hozzájárulnak a pályaelemek meghatározásához, Gauss terület becslési hibái viszont csupán a feladat mértani ábrázolásában tükröződnek.

2.2. Hasonló kutatási eredmények

Bár a genetikus algoritmusok nem túlságosan elterjedtek a csillagászatban, megtalálható ezeknek különféle alkalmazása az asztrodinamika területén belül. Égi objektumok pályaelemeinek meghatározására is történt néhány kutatás genetikus algoritmusok kifejlesztésére. Ezekről bővebben a következőkben bemutatott tudományos cikkekben olvashatunk.

A 2001-ben publikált [18] cikkben Wahde és Donner egy genetikus algoritmuson alapuló módszert ír le, amelynek segítségével az NGC 5194 és NGC 5195 galaxisok egymáshoz viszonyított pályaelemeit vizsgálták. Eredményeiket és megfigyeléseiket szimulációkkal támasztották alá. Módszerükkel sikerült az NGC 5194 galaxis H1 karjának sűrűségeloszlását pontosan meghatározni, egy pontos sebességmezőt viszont nem sikerült előállítaniuk. Észrevételeik szerint a felhasznált NGC 5194 galaxiskorong modell okozta ezt és nem a keresési algoritmusuk. Véleményük szerint a genetikus algoritmusok ideálisak galaxisok tanulmányozására, főképp olyan feladatok esetekben, ahol magas számú ismeretlen paramétert kell meghatározni és amelyek számos lokális optimumot tartalmaznak.

Attia, Mahmoud, Shahin és Osman az [1] cikkben leírják egy adaptív populációjú genetikus algoritmust, amely képes bináris csillagok pályaelemeinek pontos meghatározására. Az általuk fejlesztett algoritmust az η Bootis nevű csillag optimális pályaelemeinek kiszámítására alkalmazták. Az algoritmus célja a lehető legjobb illeszkedésű Kepler-görbék előállítása a pályaelemek által. Nagy hangsúlyt fektettek a genetikus algoritmus adaptív tulajdonságaira és összehasonlították annak teljesítményét klasszikus genetikus algoritmusok teljesítményeivel az

adott feladat megoldására. Szimulációs eredményeik bizonyítják módszerük hatékonyságát és pontosságát. Munkájuk a genetikus algoritmusok csillagászati alkalmazhatóságának egy újabb bizonyítéka.

A [4] cikk bemutatja Cantó, Curiel és Martínez-Gómez genetikus algoritmusát és annak felhasználási területeit. A céljuk egy hatékony és egyszerű optimalizációs algoritmus kifejlesztése volt, amely képes számos matematikai optimalizáció feladat megoldására. Ugyan a kutatás elsődleges célja nem konkrétan csillagászati jellegű volt, az algoritmus hatékonyságát és pontosságát pályaelemek meghatározására is tesztelték. Többek között módszerüket az 55 Cancri csillag körül keringő exobolygók pályameghatározására, pontosabban a χ^2 érték minimalizálására is felhasználták. Eredményeik ezen a téren azt mutatják, hogy algoritmusuk összehasonlítható értékeket értek el korábbi hasonló kutatásokhoz, bár ez nem vezetett a χ^2 jelentős javulásához.

A bemutatott kutatási eredmények a genetikus algoritmusok alkalmasságát bizonyítják pályaelemek optimalizálása szempontjából. Ugyan történtek előzetes alkalmazásai a genetikus algoritmusoknak ezen téren, számos lehetőség van további kutatás elvégzésére. A felsorolt eredmények és megfigyelések hasznos információként és támpontként szolgálnak e kutatás szempontjából.

3. Koordináta-transzformációk

Összefoglaló: Ebben a fejezetben megtalálható annak okfejtése, hogy miért érdemes nyers mérési adatokat bemeneti paraméterként használni és az ezeket feldolgozó koordináta-transzformáció függvények leírása. Végül megemlítsre kerül a függvények helyes működésének ellenőrzési folyamata is.

A legegyszerűbben hozzáférhető csillagászati koordináták az egyszerű megfigyelésekből kapott nyers mérésekből származnak. Ezen adatok a mérés befejeztével használatra készen állnak, mert nem kell szűrési vagy feldolgozási műveleteken átessenek. Ez kizárja számtalan hibaforrás lehetőségét is, mivel nyers észlelési adatok esetében csak a mérési hibákra kell figyelmet fordítani. Efféle hibák kiszűrése végett fontos az, hogy a rendelkezésre álló lehető legmegbízhatóbb adatbázist válasszuk adatforrásként.

A különböző mértékegységek mennyisége problémákat okozhat implementálás során. Mértékegységekkel kapcsolatos gondok elkerülése végett célszerű az égi mechanika klasszikus mértékegységeit használni. Ezek a következők: tömeg egység a Nap tömege, hosszúság egység a csillagászati egység, idő egység pedig a középnap.

A dolgozatban bemutatott módszer által megbecsült pályaelemeket szükséges adott időpontban mért koordinátákkal összevetni. Mivel a geocentrikus második egyenlítői koordináták kerülnek a későbbiekben felhasználásra, a fő koordináta-transzformációs feladat a pályaelemek ezen koordinátákká való átalakítása volt. Ez két lépésben került megvalósításra:

1. a becsült heliocentrikus pályaelemek átszámítása egy adott időpont és a megfigyelt égitest tömege alapján geocentrikus helyvektorokká,
2. az így kapott helyvektorok geocentrikus egyenes emelkedés és deklinációból transzformálása.

Mindkét függvényt implementációja a 1.5. fejezetben bemutatott efemerisz-számítási összefüggések alapján készült.

Az ekliptika az égi egyenlítővel egy $\epsilon \approx 23.5^\circ$ szöget zár be. A koordináta-rendszerek ϵ szöggel való elforgatási műveletének elkerülése érdekében, mind a kezdeti heliocentrikus, mind az eredményként kapott geocentrikus koordináta-rendszer alapsíkjaként a Földi egyenlítő síkját tekintjük. Ezzel egy relatív költséges művelettel hatékonyabbá vált az implementált eljárás.

A koordináta-transzformációs függvények helyes működése létfontosságú az előrehaladás szempontjából, ugyanis ezek szerves részét képezik majd a pályaelemek becslésének. Jövőbeli

összetett hibák elkerülése végett, a függvények helyes működését célszerű a továbbhaladás előtt biztosítani. Az ellenőrzés végrehajtásához a már rendelkezésre álló Horizons adatbázist használjuk. Égitestek különböző időpontokra becsült pályaelemeit használva a transzformációs függvények bemeneteként, ellenőrizni lehet az általunk kiszámított koordináták és a NASA adatbázisában szereplő adatok közti különbséget. Néhány ellenőrzésre használt adatot az alábbi táblázat foglal össze.

1. táblázat. Az efemerisz-számításokat végző program tesztelésének eredményei.

Égitest neve	Mérési időpont	Horizons értékek (α - óra, δ - ívfok)	Számított értékek (α - óra, δ - ívfok)	Abszolút hiba (α - óra, δ - ívfok)
Merkúr	2019.07.07 12:00 UTC	8.3929194444 16.7404444444	8.392554923 16.740857816	0.0003645212 0.0004133718
Mars	2020.03.05 12:00 UTC	18.8838444444 -23.3639444444	18.884095703 -23.363739544	0.0002512581 0.0002049004
Jupiter	1999.02.09 12:00 UTC	23.9841222222 -1.3399722222	23.984270233 -1.339014771	0.0001480111 0.0009574508
Ceres	2014.03.15 12:00 UTC	14.234338889 1.5056944444	14.234548637 1.5039715546	0.0002097482 0.0017228898
Bennu	1973.06.25 12:00 UTC	8.0735305556 22.541888889	8.0738915259 22.540512693	0.0003609704 0.001376196
Vesta	2021.04.02 12:00 UTC	10.905008333 18.641222222	10.905255738 18.640153383	0.0002474048 0.0010688394
Ida	2012.01.24 12:00 UTC	10.254933333 10.882611111	10.255151725 10.881298783	0.0002183921 0.0013123282

A táblázat a transzformáció függvények helyes működésének bizonyítékául szolgál. A vizsgált égitestek pályaelemein alkalmazott koordináta-transzformációk egy esetben sem haladták meg a 0.002 ívfokos abszolút hibaértéket, amely egy 7.2 ívmásodperces eltérést jelent a Horizons adatbázisban lévő adatoktól. Látszólag az α egyenes emelkedés hibaértékei alacsonyabbak a δ deklináció hibaértékeinél, azonban fontos észrevenni, hogy a deklinációval ellentétben, az egyenes emelkedés órában van kifejezve. Átlagosan a két koordináta hibái közötti különbségek azonos intervallum korlátai közé szorúlnak.

4. Felhasznált adatok

Összefoglaló: *A pályaelemeket számoló program tesztelése fontos feladat, aminek kritikus része a megfelelő bemeneti adatok megválasztása. A pályaelemek becslésére kritikus feladat a bemeneti és tesztelésre használt adatok megfelelő megválasztása. Ebben a fejezetben megtalálható a bemutatott módszer használatához és teszteléséhez elengedhetetlen nagy mennyiségű pontos adathalmaz forrása, az ezzel történő kommunikáció módja, valamint egy, a nyers adatok feldolgozására készített, eszköz leírása.*

A kidolgozandó módszer alkalmazásának egyik alapfeltétele a nagy mennyiségű és pontos adat a vizsgált égitestek efemeriszeiről. Mivel célunk az algoritmus számos különféle égitestre való alkalmazása és tesztelése, szükség van egy olyan adatbázisra, amely minél több különböző égitest információit tartalmazza. Továbbá az adatok pontossága is elsődleges szempont, ugyanis ez nagyban meghatározza a módszer által becsült pályaelemek és ezek valódi értékei közti különbséget.

A saját koordináta transzformációk implementálása és tesztelése végett fontos az is, hogy hozzáférésünk legyen különböző alapsíkú különböző koordináta-rendszerek különböző koordinátáihoz. A minimális követelményeket a heliocentrikus és geocentrikus egyenlítői koordináta-rendszerek látszó koordinátái, helyvektorai és pályaelemei jelentik. A különböző koordinátákra szükség van úgy bemenetként, mint összehasonlítási alapként a pontosság teszteléséhez.

Mindezek figyelembevételével a szükséges adatok forrásaként legkézenfekvőbb és megbízhatóbb szolgáltatás a NASA Horizons rendszere. Ezen rendszer minden felsorolt követelményt teljesít és kutatás céljából ingyenesen hozzáférhető. További előnyei a felhasználóbarátság és a rendkívül részletes [10] felhasználói kézikönyve.

A Horizons három különböző hozzáférési interfészt biztosít a felhasználók számára: Email, Telnet és Web interfészek. A gyors hozzáférésre és az adatelérés automatizálására törekedve a Telnet interfészre esett a választás. A Telnet kommunikációs protokoll kezelésére a Python programozási nyelv nyújt egy beépített *telnetlib* nevű könyvtárat, mely segítségével egyszerűen automatizálható a Horizons rendszertől való adat lekérés folyamata.

Ahhoz, hogy indokolt legyen a választott adatforrás alkalmassága, célszerű megismerkedni a NASA rendszerének néhány funkcionalitásával és az ezzel történő kommunikációt biztosító protokollal.

4.1. Telnet

A Telnet egy távoli bejelentkezésre használt alkalmazási-réteg protokoll, amely TCP alapon működik. Felépítése végett képes bármely két tetszőleges típusú adattovábbítási végpont közötti kommunikáció megvalósítására. Manapság a legtöbb felhasználó az SSH protokollt részesíti előnyben a Telnet-el szemben, mivel az utóbbin keresztül történő kommunikáció nem titkosított. Emiatt sebezhetőnek minősül a Telnet protokoll, ez viszont nem jelent hátrányt egy a Horizons-hoz hasonló publikus adatbázisról történő adat lekérés során.

A Horizons adatbázis ezen protokollon keresztül is nyújt egy hozzáférési interfészt, amely egy parancssor alkalmazásként valósul meg. A *telnetlib* Python könyvtárat használjuk a Horizons Telnet interfészével történő kommunikáció megteremtésére.

Bővebb információ a protokoll működési elvéről megtalálható a [11] harmadik fejezetében.

4.2. Horizons

A Nemzeti Repülési és Űrhajózási Hivatal, röviden NASA, az Amerikai Egyesült Államok űrkutatási és űrrepülési intézete. széles körű tevékenységei mellett, a NASA egyre több asztronómiai adatokat tartalmazó adatbázisát teszi szabadon elérhetővé, elősegítve ezzel számos kutató munkáját.

A Horizons rendszer egy ilyen adatbázis, amely számos égi objektum különböző paramétereit tartalmazza. A rendszer 1996 októbere óta publikusan elérhető, így számos csillagászati kutatásnak szolgált megbízható adatforrásként.

Megvalósítása után a mai napig bővül adatbázisa frissen felfedezett égitesttel és Nap körüli pályára állított mesterséges égi objektummal. Publikusan elérhető funkcionalitásainak listája is egyre növekszik az évek során. A friss felfedezések a csillagászat terén a rendszer hatékonysága és pontossága fejlesztésére szolgálnak. A Horizons bővítéséről szóló hírek megtalálhatók a [9] oldalon.

A [10] online felhasználói kézikönyv szerint a frissítés időpontjáig a rendszer több mint 856,000 aszteroida, 3598 üstökös, 209 természetes szatellit, naprendszerünk minden bolygója, Napunk, 163 űrjármű és számos más mozgó pont efemeriszeit tartalmazza. Ezek magukban foglalják az égitestek látszó koordinátáit, pályaelemeit, helyzetvektorait és rengeteg más paramétert számos koordináta-rendszerben. A Horizons adatbázisa ugyanazt az információt tartalmazza, amelyet a NASA Jet Propulsion Laboratory űrközpontja radarmegfigyelésre, küldetéstervezésre és űrhajónavigációra használ.

Fontos megjegyezni, hogy az adatbázisban tárolt pályaelemek egy adott időpontra valójában egy rendkívül pontos közelítései a valódi pályaelemeknek. A pontosság olyan numerikus integrálási módszerek alkalmazásából adódik, amelyek figyelembe veszik naprendszerünk bolygói és nagyobb aszteroidái által okozott perturbációkat a pályaelemek közelítése során.

A Horizons rendszer három különféle módon is hozzáférhető:

1. Email interfész
2. Telnet interfész
3. Web interfész

Ezek mindegyike egyszerű használatra van kialakítva és a részletes használati utasításaik miatt a rendszer minden funkcionálitása könnyedén és gyorsan elérhető.

4.3. Automatikus adatelérési rendszer

Úgy tesztelés, mint a program használata során szükség van a tesztelési és bemeneti adatok azonnali hozzáférésére. Mivel rendkívül időigényes feladat manuálisan lekérni, feldolgozni és menteni egy adott futtatáshoz szükséges adatokat a Horizons bármely interfészén keresztül, egyértelművé vált egy ezt megvalósító rendszer szükségessége.

Az eszköz egy *telnetlib* könyvtárra épülő Python program formájában valósult meg és a következő feladatokat képes ellátni:

1. tetszőleges égitest látszó koordinátái, helyvektorai és pályaelemei lekérdezése a Horizons rendszertől egy megadott időintervallumban, választható időközökkel;
2. lekért efemeriszek szűrése és feldolgozása;
3. feldolgozott koordináták mentése fájlba és beolvasása fájlból;
4. az előbbiek egyszeri végrehajtása tetszőleges számú parancsra.

Az adatelérési rendszer megvalósításával és későbbi integrálásával nagymértékben felgyorsult a tesztelés és futtatás folyamata. Az adatok fájlból való betöltése lehetővé teszi az azonnali futtatást, ugyanis a Horizons rendszerről való adat lekérési folyamat még automatizálva is relatív sok időt vesz igénybe. Mivel a fájlból történő olvasás jelentősen kevesebb időbe kerül mint maga az adathoz való hozzáférés, a szükséges adatokat célszerű futtatás előtt menteni.

5. Genetikus algoritmus

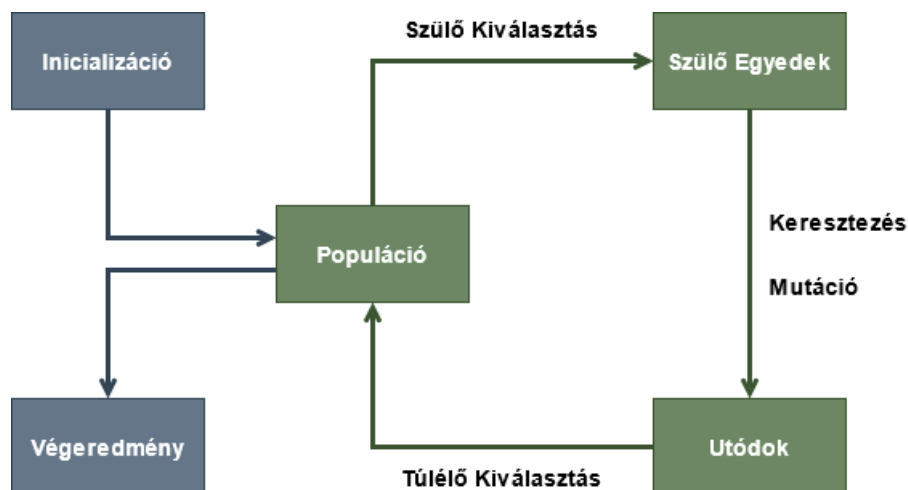
Összefoglaló: Ebben a fejezetben röviden összefoglaljuk a genetikus algoritmusok elméleti hátterét, megemlítjük néhány használati esetüket a csillagászat tudományterületén belül, majd bemutatjuk az égitestek pályaelemeinek megközelítésére kidolgozott algoritmusunkat. A saját algoritmus implementációs részletei mellett, az egyes alkotóelemek evolúciós folyamatra való hatásáról is szó kerül. Az evolúciós és genetikus algoritmusokról szóló összefoglaló az [7] könyv alapján készült.

Egy égitest hat pályaelemének meghatározása egy igen nehéz optimalizációs feladat. A hat meghatározandó paraméter tág tartományokból veheti fel értékeit és ráadásul az elvárt pályaelemek mellett számos olyan pályaelem kombináció létezik egy adott égitestre, amely a feladat lokális minimumaként szolgál. Emiatt egy égi objektum valódi pályaelemeinek megközelítésére szükség van egy olyan algoritmusra, amely képes egy tág értelmezési tartományban a globális minimum megtalálására. Az eljárásnak képesnek kell lennie a feladat számos lokális minimumának elkerülésére, ezek ugyanis a valódiaktól teljesen eltérő pályákat szolgáltatnak. Ezen összetett feladat megoldására az evolúciós algoritmus család legközismertebb tagját, a genetikus algoritmust választottuk.

5.1. Evolúciós algoritmusok

Történelem szempontjából rengeteg különböző típusú evolúciós algoritmus ismert. Bár ezek egymástól számos aspektusban különböznek, az őket alkotó váz mégis ugyanaz: adott egy egyedekből álló populáció egy korlátozott erőforrásokkal rendelkező környezetben. Az erőforrásokért való versengés egy érdekes jelenséget okoz, amit a legalkalmasabb fennmaradásának neveznek (angol nyelven *survival of the fittest*). Ennek következtében a populáció erőforráselérési hatékonysága folyamatosan nő.

Ezt az általános ötletet konkretizálva, tegyük fel, hogy a populáció hatékonyságfüggvényét kell maximalizálni. Kezdetben egy adott méretű esetleges megoldást állítunk elő véletlenszerűen. Ez a kezdeti populáció, amelynek minden egyede a felvetett környezethez, értelmezési tartományhoz tartozik. Hatékonyságuk alapján, minden egyedhez hozzárendelünk egy absztrakt ún. fitness értéket - minél magasabb, annál jobb. Ezen értékek alapján, a hatékonyabb egyedek kiválasztásra kerülnek a következő generáció létrehozására. A következő



4. ábra. Az evolúciós algoritmus általános működésének folyamatábrája.

generáció a kiválasztott egyedeken való keresztezés és mutáció műveletek alkalmazásával áll elő. A keresztezés, vagy kombináció egy kétoperandusú operátor, mely két alanyból (ún. szülők) egy vagy több leszármazottat hoz létre. A mutáció egy alany valamely mértékű változtatását jelenti. A két művelet többszöri alkalmazása a kiválasztott egyedekre tehát, egy teljesen új alanyhalmazt hoz létre. Ezek hatékonysága a következőkben kiértékelődik, majd versenybe szállnak az előbbi generációval a következő generációba való bekerülésért. Ez a folyamat iterálható egészen addig, ameddig egy megfelelő hatékonyságú egyed előáll, vagyis egy megoldás születik, vagy egy kezdetben beállított számítási határt elérünk.

Közelebbről megvizsgálva az evolúciós rendszereket, észlelhető a két fő folyamat, amely működésük alapját képezi:

1. a keresztezés és mutáció, mint variációs operátorok, egy bizonyos diverzitást, sokszínűséget adnak a rendszerhez, elősegítve ezzel az új megoldások megjelenését,
2. a kiválasztás a populáció átlagos minőségének folyamatos növekedését okozza.

A variáció és kiválasztás együttes alkalmazása általában az egymást követő populációk hatékonyságának növekedéséhez vezet. Az evolúciós folyamatot fel lehet fogni úgy, mint a fitnessfüggvény optimalizálásának folyamata az optimális értékhez időben történő konvergálás által. Egy különböző szemlélet az lenne, hogy az evolúció egy alkalmazkodási folyamat, mely alatt egy populáció egyre jobban alkalmazkodik környezetéhez.

Fontos megjegyezni, hogy az evolúciós folyamat legtöbb komponense stochasztikus. Az egyedek kiválasztása nem determinisztikus módon történik, még a leggyengébb egyed is esélyes

a kiválasztásra. Emellett a keresztezés és mutáció műveletek is véletlenszerűen működnek. Emiatt az optimum irányába történő konvergencia sok esetben folyamatról folyamatra változik.

Minden különböző evolúciós algoritmus a (4)-es ábrán látható vázra épít, ezek csupán megvalósítási részletekben különböznek egymástól. A köztük lévő különbség legtöbbször az egyedek kódolására használt adatstruktúrában nyilvánul meg. Az adatok ábrázolása általában a megoldandó feladattól függ.

5.2. Genetikus algoritmusok

A történelem során az evolúciós algoritmusok halmaza egyre csak bővült. Létrejöttek olyan új manapság széles körben ismert módszerek, mint evolúciós stratégiák, tanuló osztályozási rendszerek, genetikus programozás, differenciálevolúció és társaik. Ezek alapjaikban az evolúciós algoritmusok általános vázára építenek, viszont ezen túlmenően egymástól nagymértékben különböző alakot öltenek.

A genetikus algoritmus az evolúciós algoritmus család legismertebb tagjának számít. Ennek a klasszikus változata az adatok bináris ábrázolására épül, a kiválasztás az egyes egyedek fitnessfüggvény értékeivel arányos, a mutáció valószínűsége alacsony és nagy hangsúlyt fektet a keresztezés operátorra. Mivel gyakran ez az első evolúciós algoritmus, amellyel a legtöbb ember megismerkedik, felfedezhető egyszerűsége mellett számos hiányossága társaival szemben. Ezek közül talán az egyik legszembetűnőbb az elitizmus teljes hiánya.

A továbbiakban a klasszikus genetikus algoritmus működési mechanizmusát tárgyaljuk. Adott egy μ egyedből álló populáció. A kiválasztási művelet többszöri alkalmazásával előáll egy ugyancsak μ egyedből álló ideiglenes populáció, amely a kezdeti egyedeket tartalmazza, megengedve a duplikátumokat. Az ideiglenes populáció tagjai párba rendeződnek, majd egy előre meghatározott p_c valószínűséggel kereszteződnek. A keresztezésből előállt egyedek helyettesítik elődeiket és ezáltal keletkezik egy második ideiglenes populáció. Az új egyedek mutáción esnek át, amely ezek bitjeit egy független p_m valószínűséggel megváltoztatja. Az így kapott populáció alkotja a következő generációt, helyettesítve az előzőt. Fontos megjegyezni, hogy ez a generáció tartalmazhatja a forráspopuláció egyedeinek részeit, vagy akár teljes egyedeket is, ha ezek változás nélkül átvészelték a keresztezést és mutációt. Ennek valószínűsége klasszikus genetikus algoritmusok esetén általában igen csekély és nagyban függ a μ , p_c és p_m paraméterektől.

A kezdetekben nagy hangsúlyt fektettek a genetikus algoritmusokat jellemző paraméterek

optimális értékeinek meghatározására. Ajánlott volt $1/l$ és $1/\mu$ a mutáció valószínűségére, ahol l a populáció egyedeit alkotó bitek számát jelképezi. Keresztezési rátának 0.1 és 0.8 közötti értékeket használtak és a populáció mérete gyakran 50 és 200 közötti szám volt. Ezek az értékek igazából a nyolcvanas és kilencvenes évek számítási kapacitását tükrözik.

Manapság egyértelmű tény, hogy a klasszikus genetikai algoritmusnak megvannak a maga hibái. Gyorsabb konvergencia elérése végett, a genetikai algoritmusok olyan módszerekkel gyarapodtak, mint az elitizmus, vagy a generáció független modellek. Újabban a rang és versenyszelekció váltotta le a rátermettségarányos kiválasztást az egyszerűség és gyorsaság érdekében és a bináris adatábrázolást is szokásos lecserélni, ha a megoldandó feladat megköveteli. Az egyponthoz keresztezés helyett az egyenletes keresztezés vette át és az optimális mutációrata beállítása helyett, ezt általában a populációba belefoglalták, megengedve ezzel az érték fejlődését a generációkkal együtt.

Egyszerűségük ellenére, a genetikai algoritmusok a mai napig széles körű használatot élveznek. Ezek nem csupán tanítás céljából, vagy más algoritmusok teljesítménytesztelésére alkalmasak, hanem számtalan olyan feladat megoldására, amelyekre a bináris ábrázolás alkalmazható.

5.3. Genetikai algoritmusok alkalmazásai a csillagászatban

A genetikai algoritmusokat számos tudományterületen alkalmazzák különböző optimalizációs feladatok megoldására. A csillagászatban ezek többnyire az égi mechanika területein belül játszanak fontos szerepet, bár felhasználásuk száma más tudományterületekhez képest relatív csekély. A következőkben vázolt példák a [5] és [16] cikkekben részletesen leírt alkalmazási esetek rövid bemutatására szolgálnak.

Az asztrodinamika területén belül alkalmaztak genetikai algoritmusokat egymással kölcsönhatásban lévő galaxisok pályaelemeinek meghatározására. Továbbá készültek genetikai algoritmusok bináris csillagok és az 55 Cancri körüli bolygók pályaelemeinek meghatározására is. Ezen kutatásokat leíró cikkek inspirációként és viszonyítási alapként szolgálnak e dolgozat számára: [18], [4], [1].

Annak ellenére, hogy a kozmológiában a domináns módszerek a Monte Carlo algoritmusokra épülnek, a genetikai algoritmusok megtalálták a helyüket ezen tudományterületen is. Alkalmaztak genetikai módszereket az univerzum tágulásának rekonstrukciójára, [15] és a sötét energia tanulmányozására is ([3]).

A gravitációs mikrolencse alacsony fényességű mélyégobjektumok megfigyelésére alkalmazott módszer. Mivel az itt alkalmazott modellek rendkívül összetettek, az ezekkel kapcsolatos inverz modellezési feladatok megoldása rengeteg erőforrást igényel. Genetikus algoritmusra épülő módszerekkel sikerült ezen feladatok megoldási idejét hetekről és hónapokról percekre csökkenteni. A módszer részletes leírása megtalálható a [12] cikkben.

További példák csillagászatban alkalmazott genetikus algoritmusokra megtalálhatók csillagok spektrumillesztésében, ezek struktúráinak modellezésében és teleszkópok ütemezése terén is. Ezek általában genetikus algoritmusokon alapuló optimalizációs megoldásokat jelentenek, amelyek az evolúciós algoritmusokat lokális optimalizációs módszerekkel egyesítik. Ezen területeken konkrét példának a [13], [2], [14] cikkek szolgálnak.

5.4. A fejlesztés folyamata

A genetikus algoritmus fejlesztésének célja különböző evolúciós operátorok alkalmazása és elemzése volt égitestek pályaelemeinek meghatározására. Az első lépés a feladatrepresentáció megvalósítása és a megfelelő fitness függvény meghatározása volt. Ezekre építve került majd implementálásra a genetikus algoritmus evolúciós aspektusa, amely a kiválasztási és variációs operátorok által valósul meg. Mivel számtalan megközelítés létezik kiválasztási, keresztezési és mutációs operátorok megvalósítására, fontos volt különböző változatok hatásainak elemzésére a feladat megoldása szempontjából. Végül a kezdeti populáció inicializálása és a folyamat leállási feltételének megállapításával záródott a az implementációs folyamat.

5.4.1. A feladatrepresentáció

A feladatrepresentáció megválasztása az egyik legfontosabb lépése egy evolúciós algoritmus fejlesztésének, hiszen ez teremti meg a kapcsolatot a való világ és az algoritmus belső világa között. A feladat representációja egyfajta absztrakcióját jelképezi a konkrét feladatnak, általa alakul egy általános ötlet egy optimalizációs feladattá, amit később a genetikus algoritmus képes feldolgozni.

A klasszikus genetikus algoritmus bináris adatrepresentációjától elrugaszkodva, a megoldandó feladatot valós számok segítségével kódoljuk. Ez azt jelenti, hogy az algoritmusban szereplő populáció egyedei egy hat dimenziójú valós számokból álló vektorba csoportosulnak. Minden egyed tehát egy $(a, e, i, \Omega, \omega, \tau)$ vektor, amely a feladat egy lehetséges megoldásaként szolgáló pályaelemeket tartalmazza.

A feladatrepresentáció megválasztása során fontos szempont volt a hatékonyság, a bináris representáció elkerülésének tehát nyomós oka van. A koordináta-transzformációs függvények, amelyek nagy szerepet játszanak majd a fitness értékek kiértékelésében, a pályaelemek valós alakját várják el bemenetként. Bináris adatrepresentáció esetén a fitnessfüggvény minden egyed kiértékelése során hat fölösleges bináris és valós számok közti konverzióval bővülne. Ezen műveletek hatása nem elhanyagolható az algoritmus futási idejét tekintve, ezért célszerű volt megelőzni őket. A valós számok használata viszont azzal a következménnyel jár, hogy a későbbiekben megválasztott keresztezés és mutációs operátorok ezek feldolgozására képesek kell legyenek.

5.4.2. A fitnessfüggvény

Evolúciós algoritmusok terén, a kiértékelési függvényt általában fitnessfüggvénynek, vagy rátermettségfüggvénynek nevezik. Ez a megnevezés összezavaró lehet olyan esetekben, amikor a megoldandó feladat minimalizálást igényel. Ez a helyzet áll fenn az égitestek pályaelemeinek meghatározása esetén is, viszont matematikailag gyakran egyszerű egy átmenetet találni minimalizáció és maximalizáció között.

A fitnessfüggvény jelenti minden evolúciós algoritmus magját. Azon túl, hogy a populáció alkalmazkodásának követelményét foglalja magában, a fitnessfüggvény által válik valóra a megoldandó feladat az evolúciós kontextusban. A szelekció alapját alkotva, a kiértékelési függvény előírja a populációk folyamatos fejlődését és ezek minőségi mércéjeként is szolgál.

Ahhoz, hogy naprendszerbeli pontokra egy adott pályát tudjunk illeszteni, számszerűsíteni kellene az adott pontok illeszkedését egy adott pályára. Legyen n a rendelkezésre álló észlelési adatok száma és t_i az i -edik adat mérésének időpontja, ahol $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Továbbá jelölje α_i és δ_i a vizsgált égitest második egyenlítői koordinátáit a t_i időpillanatban.

A koordináta-transzformációs függvények segítségével lehetőségünk van egy égitest meghatározott pályaelemei alapján az adott égitest Földről észlelhető koordinátáinak kiszámítására. Legyenek α'_i és δ'_i azon pontnak a koordinátái, amelyben a vizsgált égitest a genetikusan generált pályaelemei szerint a t_i időpillanatban található. Ekkor az

$$(\alpha_i - \alpha'_i)^2 + (\delta_i - \delta'_i)^2, i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

képlet az égitest generált pályaelemei szerinti és a bemeneti adatok szerint elvárt helyzete közti

távolságnak négyzetét adja meg a t_i időpontra, ez a négyzetes abszolút eltérés.

Mivel a generált pályák illeszkedését a teljes adathalmazra nézve tekintjük, fitnessfüggvényként használhatjuk egyszerűen az

$$f = \sum_{i=1}^n [(\alpha_i - \alpha'_i)^2 + (\delta_i - \delta'_i)^2]$$

generált és valódi pontok távolságának négyzetösszegét. Minél jobban illeszkedik tehát a generált pálya a bemeneti adathalmaz pontjaira, annál alacsonyabb a fitnessfüggvény értéke. A genetikusan algoritmus feladata így a megfigyelési pontokra legjobban illeszkedő pályaelemek felkutatása, ami az f fitnessfüggvény természete miatt egy minimalizációs problémává redukálódott.

A fitnessfüggvény tulajdonságainak ellenőrzésére több különféle típusú tesztet végeztünk. Az ellenőrző módszer alapjául az a feltételezés szolgál, hogy egy adott időintervallumban mért koordinátahalmazra egy relatív jól illeszkedő pályát az intervallum közepén számított pályaelemek szolgáltatnak. Emiatt különböző méretű égitestekre, változó periódusú időintervallumokban a Horizons adatbázistól lekért ekvatoriális koordinátákra és az intervallum közepére vonatkozó pályaelemekre kiértékeljük az f függvényt. Az így kapott értékeket az alábbi táblázat mutatja be:

2. táblázat. A fitnessfüggvény tesztelési eredményei.

Égitest neve	Mérési adatok időpontja (déli 12:00 óra)	Mérési periódus	Pályaelemek időpontja	Kiszámított f fitness érték
Merkúr	1999.01.01 - 2021.01.01	1 év	2010.01.01	0.00002629028
Mars	2021.01.01 - 2021.01.05	1 nap	2021.01.03	0.00001037191
Jupiter	2021.01.02 - 2021.01.02	1 hónap	2021.02.01	0.00000113386
Bennu	2020.01.02 - 2021.03.02	1 hónap	2020.08.01	0.00002412439
Ceres	2017.01.02 - 2021.03.02	1 év	2019.02.01	0.00539404796
Ida	2017.01.01 - 2021.01.01	1 év	2019.01.01	0.00323245617
Vesta	2021.01.01 - 2021.01.02	1 óra	2021.01.02	0.00003884859

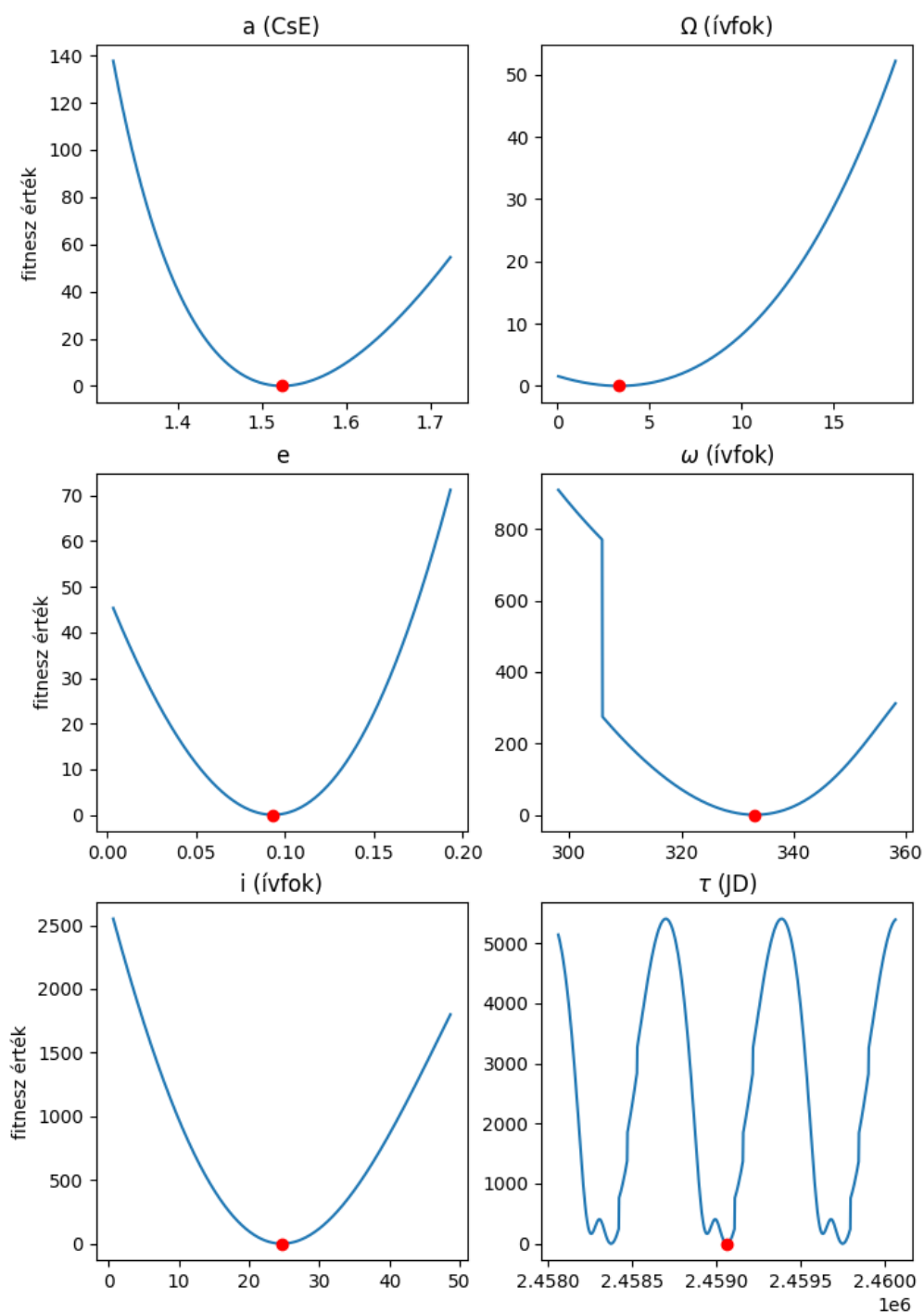
A táblázatban szereplő értékeket elemezve, több különböző következtetést is le lehet vonni. Figyelembe véve a koordináta-transzformációs függvények pontosságát és azt a tényt, hogy az adatok mérési intervallumának közepét tekintjük a bemeneti pályaelemek időpontjának, a fitnessfüggvény az elvártaknak megfelelően viselkedik. A legmagasabb kiszámított értékek is két tizedes pontossággal közelítik a zero értéket, több érték viszont a négy tizedes pontosságot is eléri.

A mért fitness értékek közti különbség nem véletlenszerű, ezt két egyszerű észrevétellel magyarázni lehet. Egyrészt az adott pályaelemek fitness értékét nagyban befolyásolja a megfigyelt égitest tömege. Megfigyelhető a táblázatban, hogy naprendszerünk legnagyobb bolygóját, a Jupitert vizsgálva, a kiszámított fitness érték a többi égitesthez képest rendkívül alacsony. Ha az olyan kisbolygók pályaelemeinek fitness értékét tekintjük, mint a Ceres, vagy Ida, relatív magas értékeket vélhetünk felfedezni. Ez a jelenség azzal magyarázható, hogy az égitestek pályaelemei, a többi égi objektum Newton-féle gravitációs vonzóerős hatása miatt, időben változnak. A változás mértéke, vagyis a ható erők hatásának mértéke pedig fordítottan arányos az égitest tömegével.

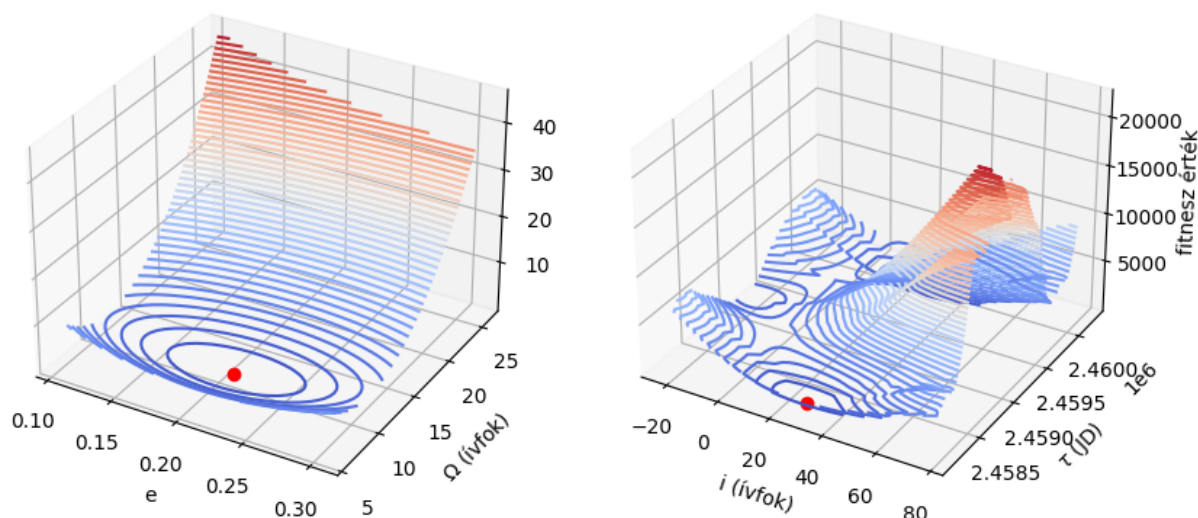
Másrészt az adatok mérési intervallumának hossza is befolyásolhatja a kiszámított fitness értékeket. Ugyan a Ceres tömege majdnem négyszerese a Vesta tömegének, az utóbbi pályaelemeinek fitness értéke mégis sokkal alacsonyabb. Ez annak köszönhető, hogy az öt éves időintervallum a Ceres mérési adatai esetében számottevően tágabb, mint a Vesta adatainak egy napos mérési intervalluma. A Bennu és Merkúr pályaelemeinek fitness értéke relatív közeliek egymáshoz, annak ellenére, hogy a Merkúr tömege nagyságrendekkel magasabb. Ez esetben is a mérési időintervallumok közti hosszkülönbség eredményezi a kapott értékek hasonlóságát.

A (5). ábra az f függvény további tulajdonságaiba nyújt betekintést. Az elvártaknak megfelelően mind a hat helyes pályát leíró pályaelem minimális fitness értéket eredményez a fennmaradó öt rögzítése esetén. Ezen pályaelemeket változtatva magasabb értékeket kapunk, tehát a fitnessfüggvény minimuma a valódi pálya esetén érhető el. A τ -ra vonatkozó alábbiakat tekintve megfigyelhető a pericentrum-átmenet időpontjának periodikus viselkedése. A vizsgált égitestek Nap körüli keringése miatt valóban fennáll a periodicitás a τ esetben, tehát elvárt, hogy a fitnessfüggvény ezt a jelenséget is tükrözze.

A (6). ábra bal oldala a fitnessfüggvény minimum tulajdonságát tovább szemlélteti. Két pályaelem változtatása esetén ugyanaz érzékelhető, mint a (5). ábra esetén. A háromdimenziós rajzok a pályaelemek fitness értékekre gyakorolt hatása egymással párban is összehasonlítható. A jobb oldali ábra elemzése által fény derül a megoldandó feladat komplexitására. Észrevehető, hogy az elvárt pályaelemek mellett, számos lokális minimum található meg a feladat értelmezési tartományában. Az ábra csupán tájékoztató jellegű, ugyanis két pályaelem helyett hattal kell megbirkózni és a bejárando intervallumok az ábrázoltaknál jóval nagyobbak.



5. ábra. A Mars 2021.02.01 12:00 időpontra NASA-tól lekért pályaelemeinek fitness értékei változása az egyedüli elemek függvényében. A fitness függvény 2021.01.02 12:00 és 2021.03.02 12:00 dátumok közötti 1 hónapos periódusú második egyenlítői koordinátákra lett kiértékelve. Az ábrák minden pályaelem egy intervallumban való változásainak fitness értéke, a maradék öt elemet rögzítve az eredeti értékeikre. A piros pontok jelölik a pályaelemek optimális értékét.



6. ábra. A Merkúr (bal oldal) és Ceres (jobb oldal) egyes pályaelemeinek fitness érték változásai. Ezen ábrák a 5. ábrához hasonlóan készültek, itt viszont két érték változik megadott intervallumokban és a maradék négy van rögzítve.

5.4.3. Kiválasztás

A kiválasztási művelet, vagy szelekció felelős a genetikus algoritmusban szereplő populációk javulásának biztosításáért. Ez az operátor felelős a populáció egyedei fitness érték szerinti megkülönböztetésére. A kiválasztás általános célja a magas minőségű egyedek előnyben részesítése, bár általában a kevésbé minőségieknek is marad esélyük a túlélésre. A gyengébb létező túlélési esélye egy a természetben is fellelhető jelenség, melynek célja a lokális optimumok elkerülése.

Sok esetben a genetikus algoritmusok implementálása során két fázisban is alkalmaznak kiválasztást. Az egyik ilyen fázis az utódok előállítására alkalmas szülő egyedek kiválasztása, a másik pedig az utódok és előző generáció egyedei közül a következő generációba kerülő egyedek kiválasztása. A teljes populáció lecserélése érdekében, az említett második fázist teljesen kihagyjuk, az utódok generációja teljesen helyettesíti a szülőket.

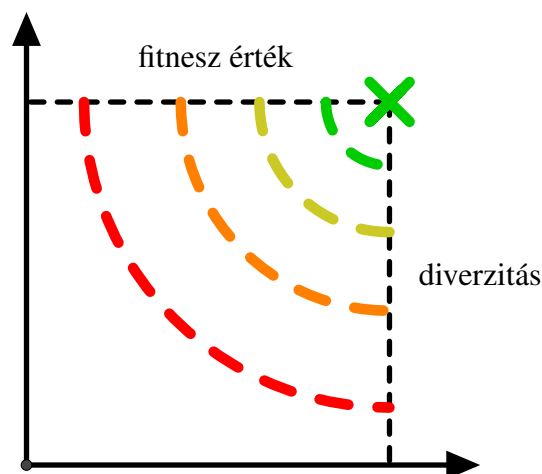
Annak érdekében, hogy a populációk legjobb egyedeit ne veszítsük el, bevezethetjük algoritmusunkba az elitizmust. Ez azt jelenti, hogy minden populáció legjobbjai közül egy adott mennyiséget megtartunk és később annyival kevesebb új egyedet hozunk létre. A megtartott egyedek száma szabadon választható mennyiség, bár érdemes figyelembe venni a populáció méretét megválasztásakor. Az elitizmus helyes használata elősegíti a populációk javulását a legfittebb egyedek megtartása által.

A szelekciónak létezik számtalan változata, célunk több ilyen módszer implementálása és alkalmazása volt. A legegyszerűbb kiválasztási módszer a verseny szelekció, amely adott számú egyedhalmazból egy verseny szimulálása által szolgáltatja a kiválasztott egyedet. A versenyre küldött egyedek teljesen véletlenszerűen lesznek kisorsolva, majd ezek közül a legerősebb egyed kerül kiválasztásra. Az egyedek erőssége legtöbbször a fitness értékével arányos. A versenyzők száma is egy szabadon megválasztható mennyiség.

Egy ennél bonyolultabb kiválasztási módszer a rulett kerék szelekció, amely minden egyedhez hozzárendelt valószínűség szerint választ ki egyet. Valószínűség értékek több módon hozzárendelhetők a populáció tagjaihoz, talán a legegyszerűbb a rátermettség arányos módszer, amely az egyedek fitness értékeit arányosan valószínűségek képezi. Ennek hátulütője, hogy a magas fitness értékű egyedeknek nagyságrenddel több esélye van a kiválasztásra, ez legtöbbször egy lokális optimumhoz való konvergáláshoz vezet.

Az úgynevezett rang szelekció részben megoldja a rátermettség arányos kiválasztásnál felmerülő problémát. Ez a módszer az egyedek rangsorolásán alapul, majd a rangsoroltak sorrendje alapján kiválasztási valószínűségeket rendel ezekhez. Ez konkrétan azt jelenti, hogy az első rangú egyed kiválasztási valószínűsége $P_1 = c$, ahol c egy tetszőlegesen megválasztható konstans, majd az utolsót kivéve az i -edik kiválasztásának valószínűsége $P_i = (1 - c)^{i-1}c$, az utolsóé pedig $P_n = (1 - c)^{n-1}$, feltételezve, hogy n a populáció mérete. Így a c konstans függvényeként van minden egyednek esélye a kiválasztásra, ez a fitness értékeknél egyenletesebb szelekciót eredményez. Ezáltal a módszer javít a lokális konvergálás problémáján, bár sok esetben ez sem biztosít kellően változatos populációt a feladat globális optimumának megtalálásához.

Egy sokat ígérő kiválasztási módszerre a [19] könyv genetikus algoritmusokról szóló 25. fejezetében bukkanhatunk. A felvetett ötlet az, hogy a szelekció során a rangsor mellett az egyedek diverzitását is figyelembe vesszük. Mint azt az (7) ábra mutatja, a kiválasztást a rangsor és az egyedek különbsége a már kiválasztottaktól egyaránt befolyásolja. Ezáltal a kiválasztási művelet egy változatos populációt eredményez, amely nagyban növeli a globális optimum megtalálásának esélyét. A diverzitásnak viszont ára is van, ugyanis ez a módszer előírja a kiválasztott egyedek tárolását és ezek bejárását minden egyes kiválasztási körben a különbségértékek kiszámításához. Emiatt ez a módszer az előbbieknél mind tárhely, mind futási idő szempontjából hátrányosabb. Az egyedek közti különbséget lehet többféleképpen implementálni, esetünkben ez a hat elemű vektorok közti távolság négyzetét, vagyis a



7. ábra. A populáció egyedeinek változatosságát felhasználó szelekció működési elve. A két tengely a vizsgált egyedek fitnesz értékét illetve diverzitásának mértékét jelöli. Ideális esetben a kiválasztandó egyed az ábra jobb felső sarkában helyezkedik el, vagyis maximális a fitnesz értéke és teljesen különbözik a többi kiválasztott egyedtől. A valóságban ez nem lehetséges, ezért egy egyed kiválasztási valószínűsége fordítottan arányos az elvárt ponthoz lévő távolságától.

pályaelemek négyzetösszegét jelenti.

5.4.4. Variációs operátorok – mutáció és keresztezés

A variációs operátorok szerepe az evolúciós algoritmusokban új egyedek létrehozása egy már létező populációból, ezáltal a megoldandó feladat új lehetséges megoldásai jönnek létre. A genetikus algoritmusok terén a variációs operátorokat két kategóriába soroljuk a felhasznált egyedek száma alapján. Ezek az unáris mutáció és az általában bináris keresztezés, vagy rekombináció.

Egy unáris variációs operátor, a mutáció, egy olyan operátor, amelyet a meglévő populáció egyetlen egy tagjára alkalmazunk és ezáltal egy módosított egyed jön létre. A mutációs operátor mindig stochasztikus, a létrehozott utód véletlenszerű döntéseknek az eredménye. Az unáris variáció elméleti szerepe az evolúciós algoritmusok terén a keresési tér összeköttetésének megteremtése. Elméletben e véletlenszerű művelet alkalmazása garantálja azt, hogy az adott feladat értelmezési tartományának minden lehetséges eleme létrehozható legyen. A teljesen véletlenszerű működés elkerülése végett, a mutációt nem alkalmazzuk minden egyes kiválasztott egyedre. Bekövetkeztének esélyéhez hozzárendelünk egy valószínűség értéket, amely algoritmusunk egy következő szabadon megválasztható paraméterét jelenti.

A dolgozatban bemutatott algoritmus fejlesztése során két különböző megközelítésű mutációs operátor hatásait teszteltük. Az első megközelítés az, hogy a mutáció a kiválasztott egyedek egy adott pályaelemét egyenletesen újragenerálja annak értelmezési tartományában. A másik mutációs módszer nem változtatja meg teljesen az egyedek egy kiválasztott pályaelemét, csak eltolja azt a közvetlen környezetében. Ez az előzőnél egy sokkal kisebb változást jelent a kiválasztott egyedben, egy precízebb változást szolgáltatva. Ez hasznosabb lehet egy optimum felé való konvergálásban, bár a globális optimum környezetének megtalálására érdemesebb lehet az első módszert alkalmazni.

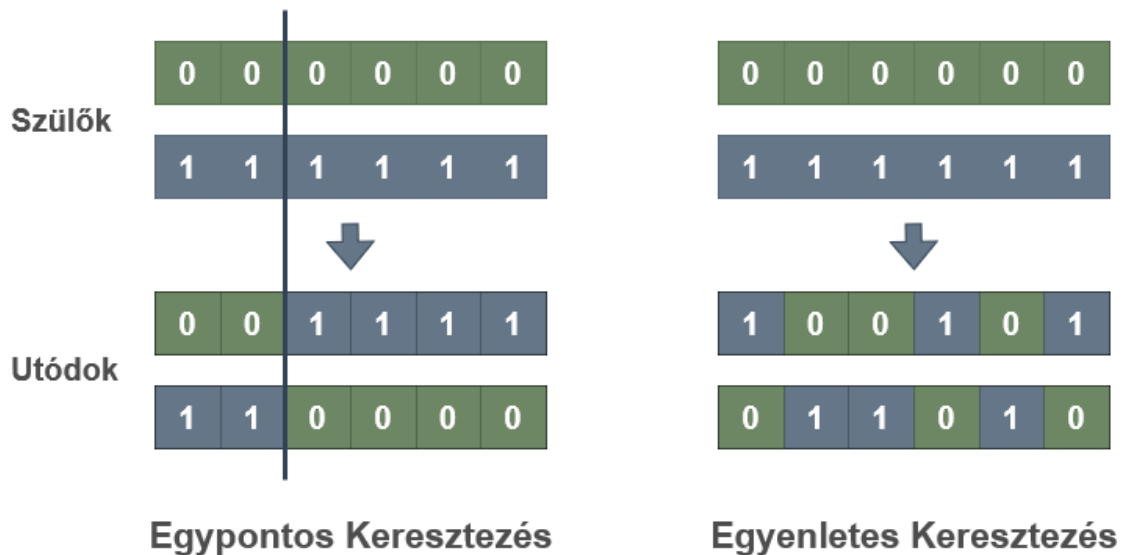
A keresztezés egy olyan bináris variációs művelet, amely két kiválasztott egyedben tárolt információt összeolvaszt. A mutációhoz hasonlóan a rekombináció is stochasztikus elv alapján működik. A genetikus algoritmusok körében a keresztezés fő keresési operátorként tekinthető, mivel általa valósul meg a populációk fejlődése. Ami a működési elvét illeti, a rekombináció két különböző és rátermett egyed egyesítése által egy olyan utódot hoz létre, amely az elődei jellemzőit kombinálja. A mutációhoz hasonlóan a keresztezés sem megy végbe minden esetben, csak egy adott valószínűséggel alkalmazzuk.

Az algoritmusunkban felhasznált keresztezési művelet két különböző módszer elemzéseként áll össze. Az alkalmazott rekombinációs operátorok egyike az egyponthos keresztezés. Eszerint generálunk egy keresztezési pontot, ami egy véletlenszerű pozíció az egyedek génjeinek száma alapján. A két utód úgy jön létre, hogy a keresztezési ponttól kezdve felcseréljük a két szülő génjeit. A második elemzett módszer az egyenletes keresztezés, amely által az egyedek több kiválasztott pontban géneket cserélnek. Ezt úgy is fel lehet fogni, mint az egyponthos keresztezés többszöri alkalmazása a kiválasztott egyedekre. Az egyenletes keresztezés az egyponthosnál általában több változást és ezáltal nagyobb variációt eredményez.

5.4.5. Inicializáció és leállás

A genetikus algoritmusok kezdeti populációja általában egyszerűen jön létre, mégpedig véletlenszerűen generált egyedek által. Néhány esetben alkalmaznak feladat specifikus heurisztikákat magasabb fitness értékű kezdeti egyedek létrehozására, bár ez plusz számítási erőfeszítést igényel. Esetünkben a kezdeti populáció tagjait teljesen véletlenszerűen generáljuk, minden pályaelemet a maga értelmezési tartományán belül.

Ami a leállási feltételt illeti, több megközelítés is létezik ennek végrehajtásáról. Ha egy adott feladatnak ismert az optimális fitness értéke, lehet ennek elérését használni leállási feltételként,



8. ábra. Az egypontos és egyenletes kiválasztás működésének szemléltetése.

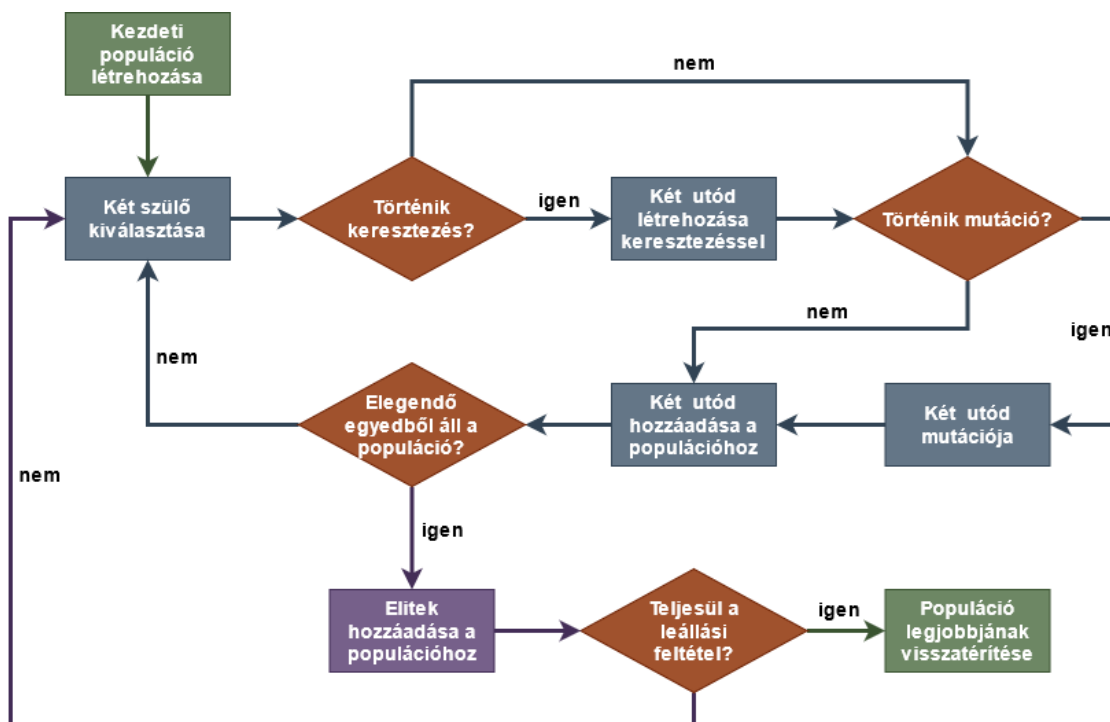
bár ez esetünkben nem áll fenn. A genetikus algoritmusok stochasztikus mivolta miatt olyan leállási feltételt kell alkalmaznunk, amely nem függ az egyedek fitness értékeitől és biztosan megállítja az algoritmust. Több ilyen feltétel létezik:

1. Eltelik egy előre meghatározott idő;
2. A generációk száma elér egy előre meghatározott határt;
3. A fitness érték kiértékelésének száma elér egy adott határt;
4. Az egyedek fitness értékei nem javulnak meghatározott időn át;
5. A populáció diverzitása egy adott határ alá esik.

A dolgozatban bemutatott algoritmus tesztelésére a generációk számát használtuk leállási feltételnek, mivel ez a különféle paramétereknek egy egységes tesztteret biztosított. A módszer alkalmazása során érdekesebb lehet az egyedek javulását vagy a populáció diverzitását figyelembe venni, ugyanis ezáltal időt spórolhatunk, vagy esetlegesen adott generációs számot meghaladva jobb eredményt kaphatunk.

5.4.6. A teljes folyamat

A (9) ábra bemutatja a végleges algoritmus működési elvét. A genetikus algoritmust három részre osztottuk, ezeket a zöld, kék és lila színekkel jelöltük. A zöld színű események a kezdeti



9. ábra. A dolgozatban bemutatott genetikus algoritmus működésének folyamatábrája.

és végállapotokat jelölik, az algoritmus tehát a kezdeti populáció létrehozásával kezdődik és az eredmény visszatérítésével végződik. Kék színnel jelöltük a populációk keletkezési ciklusát. Az egyedek kettesével történő kiválasztása, keresztezése és mutálása által gyarapodik a populáció egy megadott méret eléréséig. A lila szín a genetikus algoritmus evolúciós ciklusát jelöli, amely a leállási feltétel teljesülésével fejeződik be. Az új populáció létrehozása után előre meghatározott mennyiségű egyedet adunk hozzá az előző populációhoz, majd a leállási feltétel kiértékelése után megkezdjük a következő populáció generálását.

6. Szimuláció és teszteredmények

Összefoglaló: Ebben a fejezetben a pályaelemeket számító algoritmus működésének tesztelését mutatjuk be. A tesztelésre a Jupiter pályaelemeinek meghatározását kíséreljük meg és megvizsgáljuk a 5.4.6. fejezetben bemutatott kiválasztási és variációs operátorok hatását a konvergenciára és a futási időre egyaránt. Az eljárás által meghatározott pályaelemeket végül összevetjük az elvárt értékekkel és elemezzük a genetikus algoritmus alkalmasságát e feladat megoldására.

Láthattuk, hogy a genetikus algoritmus rengeteg paramétere szabadon választható és a különféle operátorokból is nagy választék áll rendelkezésünkre. A kutatás célja részben ezen paraméterek és operátor típusok alkalmasságának ellenőrzése a pályameghatározási feladat terén. Ezek magas száma miatt nem lehetséges beszámítható idő alatt minden kombináció részletes tesztelése. Bizonyos értékek vizsgálatával viszont, kialakul egy képünk arról, hogy ezek milyen hatással vannak a teljes folyamatra, milyen kapcsolatban vannak egymással és mit is érdemes használni a genetikus algoritmusunkban.

Legelső lépésként fontos megjegyezni, hogy a pályaelemek keresését nem szükséges ezek teljes értelmezési tartományán futtatni. Csillagászati észlelésekből gyakran sikerül olyan adatokat elérni, amelyek segítségével a pályaelemek keresési intervallumát nagymértékben szűkíteni tudjuk. Például ha egy olyan kisbolygó pályáját szeretnénk meghatározni, amelyről tudjuk, hogy az a belső aszteroida-övben helyezkedik el, az a fél nagytengelyét behatárolhatjuk a Mars és a Jupiter fél nagytengelye közé. Általában a megfigyelési adatok által az égitest elliptikus pályájának nyúltságát is megközelítőleg ismerhetjük, így az e excentricitásra is kellően szűk keresési intervallumot állíthatunk elő. Hasonlóképpen lehetőség van az i inklináció keresési intervallumának szűkítésére, nagymértékben megkönnyítve ezzel algoritmusunk dolgát.

Elméletben három ellipszisen lévő pont ismerete elegendő a teljes ellipszis alakjának meghatározásához. Gyakorlatban viszont, az algoritmusunknak szüksége lehet nagyobb mennyiségű adatpontra egy égitest pályájának meghatározásához. Azonban arra is figyelemmel kell lenni, hogy a túl nagy mennyiségű adat nem csak a fitness függvény kiértékelésének idején ront, hanem magát az evolúciós folyamatot teljesen helytelen irányba terelheti. Egy középút megállapítását célozva, tesztjeinket öt különböző adatponton végeztük el.

Mivel a kölcsönös perturbációk miatt naprendszerünk égitestjei pályájukkal nem egy

szabályos ellipszist írnak le, tekintettel kell lennünk az efféle rendetlenségek jelenlétére is. A pályaperturbációk mértéke az egymásra hatással lévő égitestek tömegétől függ, ezért az algoritmus tesztelése szempontjából célszerű egy magas tömeggel rendelkező égitest pályájának elemzése. Ezen okból kifolyólag esett a választás naprendszerünk legnagyobb óriásbolygójára, a Jupiterre, amelynek tömege két és félszerese az összes többi bolygó együttes tömegének, pontosan $1.899 \cdot 10^{27}$ kg.

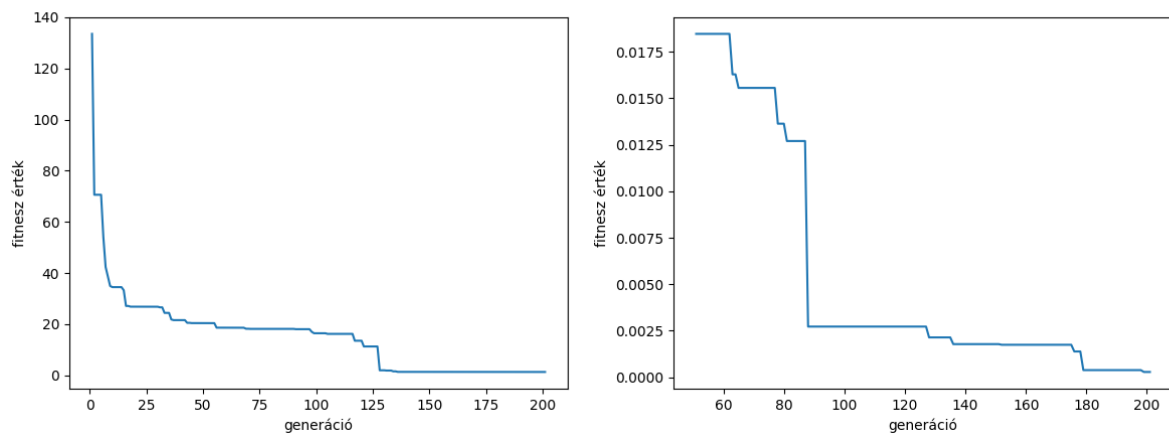
Az észlelési adatpontok leszögezése során figyelembe kell venni ezek egymáshoz viszonyított relatív helyzetét. Ha a két pont észlelése között eltelt idő megegyezik a vizsgált égitest keringési idejével, a két pont helyzete a meghatározandó pályán megegyezik. Abban az esetben is problémák merülhetnek fel, ha az észlelések időben olyan közel vannak egymáshoz, hogy a kapott koordináták egymáshoz nagyon közel vannak. Mindkét esetben redundáns információt használnánk a pályaelemek meghatározására, ami az algoritmus teljesítménye rovására megy. Esetenként azonos észlelési pontok használata a populációk fejlődését teljesen lehetetlenné teszi. A Jupiter pályájának meghatározásához tehát tekintettel kell lennünk annak keringési idejére az észlelési adatok megválasztása során. Az óriásbolygó megközelítőleg 11.86 év alatt kerüli meg teljesen a napot. Emiatt a megválasztott öt pont észlelési idejét egy éves távolsággal vettük fel egymástól. A módszer teszteléséhez felhasznált észlelési adatokat a következő táblázat foglalja össze:

3. táblázat. Tesztelésre használt észlelési adatok.

Észlelési időpont (déli 12:00 óra)	α egyenes emelkedés	δ deklináció
2017.01.02	$13^h 19^m 48.14^s$	$-7^h 1^m 32.9^s$
2018.01.02	$14^h 59^m 8.85^s$	$-15^h 53^m 6.3^s$
2019.01.02	$16^h 41^m 37.11^s$	$-21^h 34^m 53.6^s$
2020.01.02	$18^h 29^m 22.17^s$	$-23^h 10^m 43.2^s$
2021.01.02	$20^h 20^m 59.47^s$	$-20^h 0^m 0^s$

Az algoritmus helyes működésének ellenőrzésére szükségünk van egy összehasonlítási alapra a kapott értékeknek. Az észlelési adatok öt éves időintervallumra számolt pályájának legjobb közelítése megközelítőleg az intervallum felezőpontján számolt pályaelemek által leírt pálya. Ezért elvárt értékeknek a 2019 január másodikai időpontban számított pályaelemeket tekintjük, amelyeket a Horizons adatbázisból érünk el. A várt értékek tehát a következők:

1. $a = 5.202510912365554 AU$;
2. $e = 0.04849636843383619$;



10. ábra. A populációk legrátermettebb egyedeinek fitness értéke a generációk során.

3. $i = 23.23454312085573^\circ$;
4. $\Omega = 3.251091591563741^\circ$;
5. $\omega = 11.17073184555018^\circ$;
6. $\tau = 2459966.8980764262JD$.

A fejlődő populáció mérete megválasztásához figyelembe kell vennünk, hogy az kellően magas legyen a megfelelő egyedek közti diverzitás biztosításához, de kellően alacsony az algoritmus futási ideje érdekében. Különböző értékek tesztelése eredményeképp a tovább elemzett algoritmus populációi 100 egyedből állnak. Ez az érték egy megfelelő középutat biztosít mind az egyedek változatossága, mind az algoritmus futási ideje szempontjából.

A különböző operátorok esetén használt paraméterek értékei az [7] könyvben szereplő gyakran használt értékeket alkalmaztuk. A tesztelés során használt paraméterértékek tehát a következők:

4. táblázat. Tesztelésre használt paraméterértékek.

Paraméter	Paraméterérték
Mutáció valószínűsége	0.3
Maximum mutáció szám	30
Kersztezés valószínűsége	0.8
Verseny szelekció egyedek száma	4
Rang szelekció c konstans értéke	0.15
Elit egyedek száma	2

Tesztelésre az algoritmus leállási feltételeként a generációk számát választottuk. Az eljárás generációk szerinti konvergenciájának megfigyelése során meghatároztunk egy olyan értéket, amelyet meghaladva a populációk fitness értéke nagy eséllyel nem változik jelentős mértékben. Emellett figyelemmel voltunk az algoritmus futási idejére, ugyanis a leállási feltétel ezt közvetlenül befolyásolja. Így a tesztelés során használt generáció határnak a 200 értéket használtuk, amelynek teljesítményét a 10. ábra illusztrálja. Az ábrán észrevehető, hogy a fitness értékek változása megközelítőleg exponenciális trendet követ és a kétszázadik generáció környezetében már nagyon kismértékben változik.

A kiválasztás, keresztezés és mutáció operátorokat két csoportba különítve teszteltük. Az algoritmus futási idejét előtérbe helyezve a rang szelekciót alkalmaztuk együttesen az egyponos keresztezéssel és a kis lépésű mutációval. A generációk számát tekintve egy gyorsabb konverzió elérésének érdekében a diverzitást alkalmazó kiválasztást teszteltük az egyenletes keresztezéssel és a pályaelemeket újrageneráló mutációval.

A pályaelemek meghatározását két különböző méretű keresési intervallumon teszteljük. Mivel észlelések függvényében különböző előzetes információnk lehet egy adott égitest pályájáról, az algoritmust egy relatív szűk és egy relatív tág keresési intervallumra egyaránt alkalmaztuk. A tesztelés során használt határokat a következő táblázatok foglalják össze:

5. táblázat. Tesztelésre használt tág pályaelem keresési intervallum.

Pályaelem	Alsó korlát	Felső korlát
a	$0AU$	$20AU$
e	0	1
i	0°	90°
Ω	0°	360°
ω	0°	360°
τ	$2444000JD$	$2460000JD$

6. táblázat. Tesztelésre használt szűk pályaelem keresési intervallum.

Pályaelem	Alsó korlát	Felső korlát
a	$5AU$	$5.5AU$
e	0	0.1
i	15°	30°
Ω	0°	5°
ω	5°	15°
τ	$2449966JD$	$2460066JD$

Többszöri teszt futtatás elvégzése után a diverzitásos kiválasztást alkalmazó megközelítés

futási időben átlagosan 24 százalékkal több időt vesz igénybe az egyszerűbb rang szelekciós módszernél. Ez konkrétan a 200 szimulált generáció esetében az előbbi esetében 23 másodpercet, míg az utóbbi esetében 17.5 másodpercet jelent.

Ami a kiszámított pályaelemek pontosságát tekinti, az eredmények betekintést nyújtanak az alkalmazott operátorok és paraméterek alkalmasságára. A szűkebb intervallumra alkalmazva a genetikusan algoritmust, az esetek túlnyomó többségében a meghatározott értékek az elvártakhoz relatív közeliek. Ez amiatt van, mert az elvárt értékeknek ebben a szűk környezetében a felhasznált fitnessfüggvénynek nincs a globális minimumot nagymértékben közelítő más optimumpontja. A tágabb intervallum esetén viszont egész más a helyzet. A magas számú lokális minimumpontok miatt, az algoritmus sok esetben nem képes az elvárt értékeket elvárt pontossággal megközelíteni. A szűk intervallumhoz hasonló értékeket az esetek 10 százalékában kaptunk meg a rang szelekciót alkalmazó algoritmus esetén. Meglepő módon a diverzitást tekintő kiválasztás átlagosan csak fele annyi megfelelő pontosságú eredményt biztosított, mint a gyorsabb és egyszerűbb megközelítés.

A tesztelés eredményeként kijelenthetjük, hogy a genetikusan algoritmus képes megközelíteni a pályaelemek optimális értékeit, ez viszont az esetek többségében nem történik meg. Ennek oka az, hogy az algoritmus stochasztikus mivolta miatt a kapott értékek nagyban függenek a futás során generált véletlen értékektől. A helyes működés garantálása érdekében érdemes lehet más stratégiákat alkalmazni, esetleg a paraméterek finomhangolásával javítani az eljárás.

Következtetések és továbbfejlesztési lehetőségek

A leírtak bizonyítékul szolgálnak a genetikus algoritmusok alkalmasságának égitestek pályaelemeinek meghatározására. A bemutatott módszer képes észlelési adatok segítségével az elvárt pályaelemek megközelítésére. A genetikus algoritmusokra jellemző véletlenszerű bolyongás miatt, a kapott közelítési értékek precizitása javításra szorul. A meghatározott pályaelemek így felhasználhatóak egy determinisztikus eljárás kiindulópontjaként, amely képes az elvárt értékek precíz meghatározására. A genetikus algoritmus által szolgáltatott értékek segítségével, meghatározható az elvárt értékeknek egy környezete, amely a 2.1. fejezetben ismertetett numerikus eljárások keresési terének egy nagymértékben leszűkített alternatívája lehet.

A keresési algoritmus optimalizálása és a kapott értékek javítása szempontjából a következő továbbfejlesztési lehetőségek merülnek fel:

1. az algoritmus hatékonyságának vizsgálata és esetleges optimalizálása a műveletek nagyságrendje szempontjából;
2. az evolúciós operátorok további bővítése új módszerekkel;
3. a genetikus algoritmus paramétereinek további finomhangolása;
4. a bemeneti észlelési adatok hatásának elemzése azok mennyisége és időbeli periódusa szempontjából;
5. egy létező determinisztikus módszer alkalmazása a kiszámolt pályaelemekre;
6. egy determinisztikus módszer kidolgozása a kapott pályaelemek precíz meghatározására.

Hivatkozások

- [1] Eman Mahmoud Habeeb Abdel-Fattah Attia. „A modified genetic algorithm for precise determination the geometrical orbital elements of binary stars”. *New Astronomy* (2009).
- [2] A Baier, F Kerschbaum és T Lebzelter. „Fitting of dust spectra with genetic algorithms-I. Perspectives and limitations”. *Astronomy & Astrophysics* 516 (2010), A45.
- [3] Charalampos Bogdanos és Savvas Nesseris. „Genetic Algorithms and Supernovae Type Ia Analysis, Constraints on Dark Energy”. *AIP Conference Proceedings*. 1241. kötet. American Institute of Physics. 2010, 200–208. oldal.
- [4] J Cantó, S Curiel és E Martinez-Gómez. „A simple algorithm for optimization and model fitting: AGA (asexual genetic algorithm)”. *Astronomy & Astrophysics* 501.3 (2009), 1259–1268. oldal.
- [5] Paul Charbonneau. „Genetic algorithms in astronomy and astrophysics”. *The Astrophysical Journal Supplement Series* 101 (1995), 309. oldal.
- [6] George W Collins és mások. „The foundations of celestial mechanics”. *The Foundations of Celestial Mechanics, by George W. Collins, II. Tucson, AZ, Pachart Publishing House (Pachart Astronomy and Astrophysics Series. Volume 16), 1989, 158 p.* (1989).
- [7] Agoston E Eiben, James E Smith és mások. *Introduction to evolutionary computing*. 53. kötet. Springer, 2003.
- [8] Bálint Érdi. *Égi mechanika*. Budapest: Magyar Nemzeti Tankönyvkiadó, 1996.
- [9] NASA Jet Propulsion Laboratory. *HORIZONS System News*. 1996. URL: https://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons_news (elérés dátuma: 2021. ápr. 8.)
- [10] NASA Jet Propulsion Laboratory. *HORIZONS User Manual*. 2019. URL: https://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons_doc (elérés dátuma: 2021. ápr. 8.)
- [11] James F Kurose és Keith W Ross. „A top-down approach featuring the internet”. *The Computer Networking* (2000).
- [12] Jori Liesenborgs, Sven De Rijcke és Herwig Dejonghe. „A genetic algorithm for the non-parametric inversion of strong lensing systems”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 367.3 (2006), 1209–1216. oldal.
- [13] Jori Liesenborgs, Sven De Rijcke és Herwig Dejonghe. „A genetic algorithm for the non-parametric inversion of strong lensing systems”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 367.3 (2006), 1209–1216. oldal.

- [14] TS Metcalfe, RE Nather és DE Winget. „Genetic-algorithm-based asteroseismological analysis of the DBV white dwarf GD 358”. *The Astrophysical Journal* 545.2 (2000), 974. oldal.
- [15] Savvas Nesseris és Arman Shafieloo. „A model-independent null test on the cosmological constant”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 408.3 (2010), 1879–1885. oldal.
- [16] Vinesh Rajpaul. „Genetic algorithms in astronomy and astrophysics”. *arXiv preprint arXiv:1202.1643* (2012).
- [17] Ferenc Szenkovits. *Bevezetés a csillagászatba*. Cluj-Napoca: Presa Universitară Clujeană, 2007.
- [18] M Wahde és KJ Donner. „Determination of the orbital parameters of the M 51 system using a genetic algorithm”. *Astronomy & Astrophysics* 379.1 (2001), 115–124. oldal.
- [19] Patrick Henry Winston. *Artificial Intelligence (3rd Ed.)* USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1992. ISBN: 0201533774.