

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

Magas dimenziós kockák kritikus centrális metszetei

TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI DOLGOZAT

Készítette:
Gárgyán Barnabás
Matematikus MSc hallgató

Témavezető:
Dr. Ambrus Gergely
egyetemi docens

Szeged
2022

Kivonat

A dolgozatban az n -dimenziós kocka centrális (azaz a kocka középpontjára illeszkedő) metszeteinek térfogatát vizsgáljuk. Az $n \geq 4$ esetben cáfoljuk azt a régóta feltételezett hipotézist, miszerint a kritikus metszetek mind diagonálisak, azaz merőlegesek a kocka valamely legalább 1-dimenziós lapjának főátlójára. A bizonyításban egy speciális alakú, teljes dimenziós, nemdiagonális normálvektorról mutatjuk meg, hogy a rá merőleges hipersíkmetszet térfogata kritikus.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
2. Fourier-analízisbeli és valószínűségszámítási eszközök	6
3. Diagonális metszetek összehasonlítása	8
4. Nemdiagonális kritikus irányok	12
5. A diagonális irányok valóban kritikusak	14
6. $F_{n,k}(a)$ deriváltja	15
7. A $J_n(r+2)/J_n(r)$ arány felső becslése és következményei	17
8. $F_{n,2}(a)$ az I_2 intervallum jobb végpontjában	22
9. A kockán vett integrálegyenlőtlenség	26
10. Összefoglalás	27
Hivatkozások	28

Ábrák jegyzéke

1.	A $V_n(\mathbf{d}_{n,k})/2^{n-1}$ sorozat $1 \leq k \leq 10$ esetén.	5
2.	Q_2 és a $ \langle \mathbf{q}, \mathbf{v} \rangle - r \leq \varepsilon$ sáv metszete.	7
3.	Az $\ln(J_n(0))$ sorozat ábrázolása $1 \leq n \leq 10$ esetén.	11
4.	$F_{6,2}(a)$ illetve $F_{6,3}(a)$ függvények grafikonja.	13
5.	A felszín változása egy hipersíkra való vetítés során.	22
6.	$S_2(a)$ és $\mathbf{y} + L_1$ metszete a kockában illetve F_2 -ben.	24
7.	Az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{1}_2 \rangle = \sqrt{2}\delta$ egyenletű egyeneshez tartozó metszet hossza $2\sqrt{2} - 2\delta$.	24
8.	Q_2 partíciója B , C és $-C$ halmazokra.	26

Táblázatok jegyzéke

1.	$J_n(0)$ értéke $2 \leq n \leq 8$ esetekben.	10
2.	ξ_n zérushely numerikus értékei $4 \leq n \leq 10$ dimenziók esetében.	14
3.	A $J_5(r+2) < c_{5,r}J_5(r)$ egyenlőtlenség ellenőrzése az $r = 0, 1, 2$ esetekben.	18

1. Bevezetés

Jelölje $Q_n = [-1, 1]^n$ az n -dimenziós kockát, vagyis az ℓ_∞ norma szerint vett egységgömböt $\mathbb{R}^n$ -ben. A XIX. században merült fel először Q_n egy, az origóra illeszkedő (azaz centrális) hipersíkkal vett metszetének a térfogatának tanulmányozása Laplace [22] munkája kapcsán. Pólya [28] egy évszázaddal később bizonyított integrálformulája segítségével explicite ki lehet számolni adott normálvektorú centrális hipersíkmetszet térfogatát.

Q_n minimális térfogatú centrális metszeteinek vizsgálata csak a XX. század második felében kezdődött el A. Good lineáris formákra vonatkozó sejtése [17, 174. o.] apropójából, ami számelméleti alkalmazások során vetődött fel. Ahogy Good megjegyezte a cikkében, a sejtés geometriailag is megfogalmazható, mégpedig a következőképpen: bármely $m \leq n$ esetén Q_n m -dimenziós centrális metszeteinek térfogata legalább 2^m . Az $m = n - 1$ esetet Hadwiger [14] bizonyította be, egyúttal megmutatta, hogy az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a hipersík párhuzamos Q_n valamely hiperlapjával. Néhány évvel később Vaaler [30] igazolta tetszőleges m esetén Good sejtését, ezenfelül Hadwigerhez hasonlóan az egyenlőség esetét is vizsgálta: a minimális térfogatú m -dimenziós kockametszetek pontosan azok, amelyek párhuzamosak Q_n valamely m -dimenziós lapjával.

Ezek az eredmények ösztöklítették Q_n metszeteinek részletesebb vizsgálatát, különös tekintettel az extrémális metszetek meghatározását. Hensley 1979-es cikkében [15] valószínűségi módszerekkel egy újabb bizonyítást adott Hadwiger eredményére, ezenkívül megmutatta, hogy a hipersíkmetszetek térfogata legfeljebb $5 \cdot 2^{n-1}$. Továbbá azt sejtette, hogy $\sqrt{2} \cdot 2^{n-1}$ az éles felső korlát. Ezt Ballnak sikerült bebizonyítania 1986-os áttörő cikkében [3], amelyben azt is belátta, hogy a maximális hipersíkmetszetek merőlegesek Q_n valamely 2-dimenziós lapjának főátlójára. A hipersíkmetszetekre vonatkozó felső korlátok alacsonyabb dimenziójú metszetekre való kiterjesztése kevésbé kézenfekvő, ezzel kapcsolatban kiemeljük Ball [4] illetve Ivanov és Tsiutsiurupa [16] munkáját.

Az alacsonyabb dimenziós hipersíkmetszetek becslésén túlmenőleg, több szempontból általánosítható a metszetek vizsgálata. A nemcentrális metszetek térfogatára Moody, Stone, Zach és Zvavitch [26] valamint König [20] adtak becsléseket. Ezenfelül más konvex testek esetében is aktívan kutatott a metszetek elemzése. A szabályos szimplex centrális metszeteit Dirksen [11] és Webb [31] tanulmányozták, munkáik a doktori dolgozataikon [10, 32] alapulnak. Az ℓ_p normájú egységgömb metszeteit Meyer és Pajor [25] valamint Chasapis, Nayar és Tkocz [8], míg a Gauss-mértékekre vett általánosítását König [20] illetve Zvavitch [33] vizsgálták. A vonatkozó eredmények részletes ismertetése megtalálható a [19, 27] munkákban.

Visszatérve a centrális hipersíkmetszetekhez, bevezetjük a következő jelöléseket: tetszőleges m dimenzióban jelölje S^{m-1} az m -dimenziós egységvektorok halmazát; $\text{Vol}_m(K)$ az m -dimenziós K test térfogatát, azaz Lebesgue-mértékét; $\mathbf{v}^\perp$ pedig a $\{\mathbf{v}\}$ halmaz ortogonális komplementerét $\mathbb{R}^m$ -ben, vagyis a $\mathbf{v}$ normálvektorú centrális hipersíkot. Rögzített n esetén tekintsük Q_n hipersíkmetszetének térfogatát a hipersík normálvektorának függvényeként: $V_n : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^+$,

$$V_n(\mathbf{v}) = \text{Vol}_{n-1}(Q_n \cap \mathbf{v}^\perp). \quad (1.1)$$

Hensley [15] és Ball [3] eredményéből tudjuk, hogy mely vektorokra lesz V_n -nek globális minimuma, illetve maximuma. Felmerül a természetes kérdés, hogy V_n lokális szélső-

értékeiről mit állíthatunk. Ehhez elsősorban V_n kritikus helyeinek vizsgálata szükséges, amiket a továbbiakban *kritikus irányoknak* fogunk nevezni. Ezek között speciális osztályt alkotnak az úgynevezett *diagonális irányok*, először ezeket tárgyaljuk röviden.

Azokat az egységvektorokat, amelyek párhuzamosak Q_n valamely k -dimenziós lapjának főátlójával, *k-diagonális irányoknak* hívjuk, a rá merőleges hipersíkkal vett metszetet pedig *k-diagonális metszeteknek*. A koordináták permutációjától és előjelétől eltekintve, a k -diagonális irányok a következő alakban írhatók fel:

$$\mathbf{d}_{n,k} := \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{k}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{k}}}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k} \right).$$

Ha nem szeretnénk megjelölni $\mathbf{d}_{n,k}$ dimenzióját, akkor egyszerűen *diagonális irányként*, illetve a rá merőleges hipersíkkal vett metszetre *diagonális metszetként* fogunk hivatkozni. Most sorra vesszük a diagonális irányokkal kapcsolatos eddigi eredményeket. Hensley [15] valószínűségi módszereken alapuló munkájából tudjuk, hogy ha $k \approx n$, akkor

$$V_n(\mathbf{d}_{n,k}) \approx \sqrt{\frac{6}{\pi}} \cdot 2^{n-1},$$

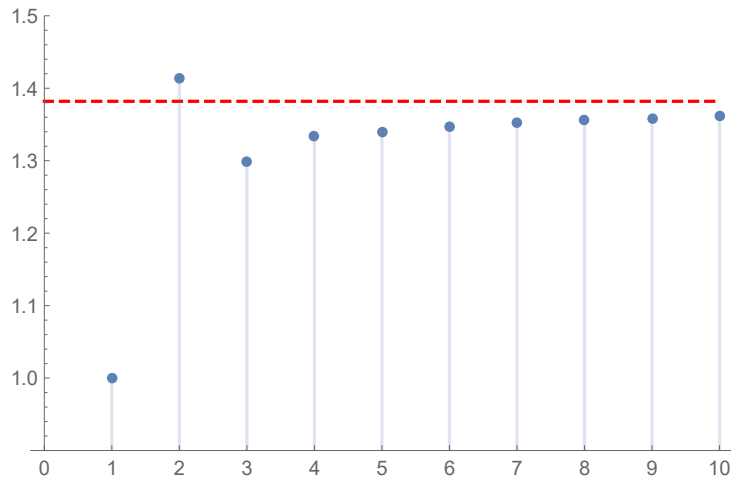
ami alig kisebb, mint $\sqrt{2} \cdot 2^{n-1}$:

$$1.38198 \approx \sqrt{\frac{6}{\pi}} < \sqrt{2} \approx 1.41421.$$

Bartha, Fodor és González Merino [5] megmutatták, hogy rögzített n esetén a k -diagonális metszetek sorozata szigorúan monoton növekvő, amennyiben $k \geq 3$, vagyis

$$V_n(\mathbf{d}_{n,1}) < V_n(\mathbf{d}_{n,3}) < V_n(\mathbf{d}_{n,4}) < \dots < V_n(\mathbf{d}_{n,n}) < \sqrt{\frac{6}{\pi}} \cdot 2^{n-1} < V_n(\mathbf{d}_{n,2}),$$

lásd 1. ábra.



1. ábra. A $V_n(\mathbf{d}_{n,k})/2^{n-1}$ sorozat $1 \leq k \leq 10$ esetén.

Sokáig feltételezték azt a kézenfekvő hipotézist, miszerint a kritikus centrális hipersík-metszetek mind diagonálisak. Ezt a sejtést Ambrus [2, Theorem 2.] az $n = 2, 3$ esetben igazolta, a négydimenziós térben pedig megmutatta, hogy a kritikus irányok vagy diagonálisak, vagy a koordináták permutációjától és előjelétől eltekintve $1/\sqrt{10}(1, 1, 2, 2)$ alakúak, lásd [2, Theorem 3.]. Jelen dolgozat fő célja a magasabb dimenziós nemdiagonális kritikus irányok vizsgálata, ebben kulcsszerepet tölt be a kritikus irányokra vonatkozó feltételek megadása. Ambrus [2, Theorem 1.] valamint Ivanov és Tsiutsiurupa [16, Theorem 1.1, Condition 4.] egymástól függetlenül karakterizálták a kritikus irányokat. Megjegyezzük, hogy Ivanov és Tsiutsiurupa tetszőleges alacsonyabb dimenziós síkmetszetekre adtak meg feltételeket, geometriai illetve vázrendszerekkel kapcsolatos módszerekkel. Dolgozatunkban a hipersíkmetszetek vizsgálatában a Fourier-analitikus megközelítés központi szerepet játszik, ennél fogva a [2] cikkből idézzük a kritikus irányokra vonatkozó szükséges feltételt. Legyen $R_i = \{(q_1, \dots, q_n) \in Q_n : q_i = 1\}$, és ahogy korábban megjegyeztük S^{n-1} jelöli az euklideszi egységgömb határát $\mathbb{R}^n$ -ben.

1.1. Tétel ([2], Theorem 1). *A $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in S^{n-1}$ akkor és csak akkor kritikus irány a $V_n(\mathbf{v})$ függvényre nézve, ha a koordináták permutációjától és előjelétől eltekintve $\mathbf{v} = \mathbf{d}_{n,2}$, vagy létezik olyan $\mu > 0$, hogy*

$$\text{Vol}_{n-1}(\text{conv}(\mathbf{0} \cup (R_j \cap \mathbf{v}^\perp))) = \mu(1 - v_j^2) \quad (1.2)$$

minden $j = 1, \dots, n$ esetén.

Ahogy korábban említettük, [2, Theorem 3.] alapján Q_4 -nek létezik nemdiagonális kritikus iránya. Vegyük észre, hogy ha ezt a vektort kiegészítjük 0 koordinátákkal, akkor magasabb dimenziós kockáknak is kritikus iránya lesz. A dolgozat fő eredménye az, hogy létezik olyan nemdiagonális kritikus irány is, amely *teljes dimenziós*, azaz mindegyik koordinátája nemnulla.

1.2. Tétel. *Tetszőleges $n \geq 4$ esetén Q_n -nek létezik olyan nemdiagonális kritikus centrális metszete, ami nem párhuzamos egyik koordináta-tengellyel sem, azaz normálvektora teljes dimenziós.*

Az 1.2. Tétel bizonyítása nagyban támaszkodik az 1.1. Tételben alkalmazott eszközökre, ezeket a következő fejezetben foglaljuk össze. A 3. Fejezetben egy fontos függvényről foglalkozunk részletesebben, melynek tulajdonságait a bizonyítás során felhasználjuk. A 4. Fejezetben írjuk le a bizonyítás vázát, majd a szükséges technikai lépéseket a következő öt fejezetben dolgozzuk ki. A dolgozat zárásaként, a 10. Fejezetben összefoglaljuk a témával kapcsolatos további kérdéseket illetve sejtéseket.

2. Fourier-analízisbeli és valószínűségyszámítási eszközök

Ebben a fejezetben ismertetjük a bizonyításhoz szükséges, korábbi munkákban [2, 19] kidolgozott elméleti hátteret. Ahogy a bevezetésben említettük, egy Pólyától [28] származó klasszikus integrálformulával V_n kiszámítható tetszőleges $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in S^{n-1}$ vektor esetén:

$$V_n(\mathbf{v}) = \frac{2^{n-1}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \text{sinc } v_i t \, dt, \quad (2.1)$$

ahol sinc a normálatlan kardinális szinuszfüggvényt jelöli, azaz

$$\text{sinc } x := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{ha } x \neq 0, \\ 1 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Legyen $S(\mathbf{v}; r) \subset Q_n$ és egy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ irányú, az origótól $\frac{r}{|\mathbf{v}|}$ távolságra lévő hipersík metszete, azaz

$$S(\mathbf{v}; r) := \{\mathbf{q} \in Q_n : \langle \mathbf{q}, \mathbf{v} \rangle = r\}, \quad (2.2)$$

ennek térfogata pedig

$$s(\mathbf{v}; r) := \text{Vol}_{n-1}(S(\mathbf{v}; r)). \quad (2.3)$$

A centrális hipersíkmetszet térfogatának tetszőleges $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ vektorra értelmezett normalizáltja legyen

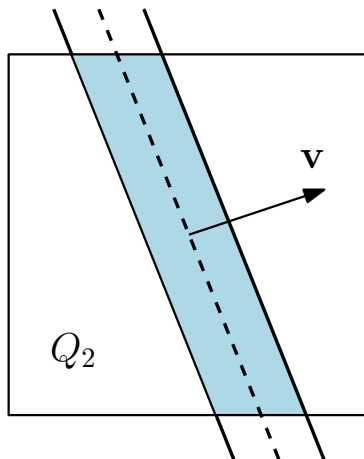
$$\sigma(\mathbf{v}) = \frac{\pi}{2^{n-1}} s(\mathbf{v}; 0) = \frac{\pi}{2^{n-1}} V_n(\mathbf{v}). \quad (2.4)$$

A bizonyításhoz szükségünk lesz az $s(\mathbf{v}; r)$ illetve $\sigma(\mathbf{v})$ függvények (2.1)-hez hasonló integrálformulájára, amit [2, 19]-n alapuló Fourier-analízisbeli eszközökkel vezetünk le.

Az X folytonos véletlen változó sűrűségfüggvényét jelölje f_X , az eloszlásfüggvényét F_X , a karakterisztikus függvényét pedig φ_X . Legyenek $X_1, \dots, X_n$ a $[-1, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású, független véletlen változók. Ekkor Q_n normalizált Lebesgue mértéke megegyezik az $(X_1, \dots, X_n)$ véletlen vektorváltozó eloszlásával. Ennek megfelelően tetszőleges $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ és $r \in \mathbb{R}$ esetén, ha $S(\mathbf{v}, r)$ nem hiperlapja Q_n -nek, akkor

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n v_i X_i - r\right| \leq \varepsilon\right) = \frac{1}{2^n} \text{Vol}_n(\mathbf{q} \in Q_n : |\langle \mathbf{q}, \mathbf{v} \rangle - r| \leq \varepsilon) \approx 2\varepsilon \cdot s(\mathbf{v}; r),$$

lásd 2. ábra.



2. ábra. Q_2 és a $|\langle \mathbf{q}, \mathbf{v} \rangle - r| \leq \varepsilon$ sáv metszete.

Ha $\varepsilon \rightarrow 0$, akkor innen adódik, hogy

$$f_{\sum_{i=1}^n v_i X_i}(r) = \frac{1}{2^n |\mathbf{v}|} s(\mathbf{v}; r). \quad (2.5)$$

Ismert, hogy $\sum_{i=1}^n v_i X_i$ karakterisztikus függvénye

$$\varphi_{\sum_{i=1}^n v_i X_i}(t) = \prod_{i=1}^n \text{sinc } v_i t, \quad (2.6)$$

innen inverz Fourier-transzformációval kapjuk:

$$f_{\sum_{i=1}^n v_i X_i}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \text{sinc } v_i t \cdot \cos rt \, dt. \quad (2.7)$$

Ekkor (2.5) és (2.7) alapján $s(\mathbf{v}; r)$ integrálformulával megadott alakja

$$s(\mathbf{v}; r) = \frac{2^{n-1} |\mathbf{v}|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \text{sinc } v_i t \cdot \cos rt \, dt, \quad (2.8)$$

valamint (2.4) szerint

$$\sigma(\mathbf{v}) = |\mathbf{v}| \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \text{sinc } v_i t \, dt. \quad (2.9)$$

A kritikus irányok Fourier-analízisen alapuló vizsgálatát a következő állítás garantálja, ami az 1.1. Tételben szereplő feltételt fogalmazza meg egy integrálformula segítségével.

2.1. Állítás. *A $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in S^{n-1}$ akkor és csak akkor kritikus irány a $V_n(\mathbf{v})$ függvényre nézve, ha a koordináták permutációjától és előjelétől eltekintve $\mathbf{v} = \mathbf{d}_{n,1}$, vagy*

$$\sigma(\mathbf{v}) = \frac{1}{(1 - v_j)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i \neq j} \text{sinc } v_i t \cdot \cos v_j t \, dt \quad (2.10)$$

teljesül minden $j = 1, \dots, n$ esetén.

Megjegyezzük, hogy a $\tilde{\mathbf{v}}_j = (v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ jelölés bevezetésével, (2.8) alapján (2.10) megegyezik azzal, hogy

$$\sigma(\mathbf{v}) = \frac{\pi}{2^{n-2} (1 - v_j^2)^{\frac{3}{2}}} s(\tilde{\mathbf{v}}; v_j). \quad (2.11)$$

A [2, (2.12)] egyenlet biztosítja, hogy az ekvivalencia valóban fennáll az 1.1. Tétel és a 2.1. Állítás között.

3. Diagonális metszetek összehasonlítása

Bevezetjük a

$$J_n(r) := \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^n t \cdot \cos(rt) \, dt \quad (3.1)$$

függvényt, ahol n pozitív egész és $r \in \mathbb{R}$. Tulajdonképpen (3.1) részletesebb vizsgálata adja a munkánk kiindulópontját. Egyrészt ugyanis valószínűségi megfontolásból, (2.7) alapján

$$J_n(r) = 2\pi \cdot f_{\sum_{i=1}^n X_i}(r). \quad (3.2)$$

Ebből könnyen látható, hogy $J_n(r) = 0$ az $r > n$ esetben, ugyanis n darab, a $[-1, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású, független véletlen változó összege nem lehet nagyobb n -nél. Másfelől geometriai szempontból (2.8) miatt

$$J_n(r) = \frac{\pi}{2^{n-1}\sqrt{n}} \cdot s(\mathbf{1}_n; r), \quad (3.3)$$

ahol $\mathbf{1}_n$ a csupa 1-esből álló n -dimenziós vektort jelöli. $J_n(r)$ kiszámítására ismert az alábbi explicit formula:

$$J_n(r) = \frac{\pi}{2^{n-1}(n-1)!} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{n}{i} (n+r-2i)^{n-1}, \quad (3.4)$$

ha $0 \leq r < n$, különben 0, lásd [13, 24]. Mivel $J_n(r)$ páros függvény, ezért joggal feltételezhetjük, hogy $r \geq 0$.

A (3.4) formulának ismert egy kombinatorikai interpretációja abban a speciális esetben, ha r egész és $n+r$ páros. Ehhez először ismertetjük az *elsőfajú Euler-számok* fogalmát, melyeket a továbbiakban az egyszerűség kedvéért csak *Euler-számoknak* fogunk nevezni: az $A(m, l)$ Euler-szám az $\{1, 2, \dots, m\}$ halmaz azon permutációinak száma, melyekre pontosan l darab olyan elem van, ami nagyobb az előtte lévőnél. Az Euler-számok az alábbi rekurziót elégítik ki:

$$\begin{aligned} A(0, 0) &:= 1, \quad A(m, 0) := 0, \text{ ha } m > 0, \\ A(n, l) &= (n-l+1)A(n-1, l-1) + lA(n-1, l), \end{aligned} \quad (3.5)$$

valamint a következő explicit formulával számolhatók ki:

$$A(m, l) = \sum_{i=1}^m (-1)^i \binom{m+1}{i} (l-i)^m. \quad (3.6)$$

Az Euler-számokat továbbá egy szimmetrikus tulajdonsággal is tudjuk jellemezni:

$$A(m, l) = A(m, m-l+1). \quad (3.7)$$

Az Euler-számok részletesebb ismertetéséhez lásd a [7, 23] cikkeket illetve [9, 240-243. o.]. A (3.6) explicit formula alapján a (3.4) formula Euler-számokkal a következőképpen írható fel:

$$J_n(r) = \frac{\pi}{(n-1)!} A\left(n-1, \frac{n+r}{2}\right) \quad (3.8)$$

akkor, ha $n+r$ páros. Ennek fényében nem meglepő, hogy az Euler-számokhoz hasonlóan $J_n(r)$ -re is létezik egyfajta rekurzív formula, melyet Thompson [29] bizonyított:

$$J_n(r) = \frac{n+r}{2(n-1)} J_{n-1}(r+1) + \frac{n-r}{2(n-1)} J_{n-1}(r-1). \quad (3.9)$$

Megjegyezzük, hogy a fenti formula tetszőleges $r \in \mathbb{R}$ számra teljesül, azonban a rekurzió természetéből adódóan az egész számok esetében tudjuk igazán alkalmazni az összefüggést, ahogy azt a későbbiekben látni fogjuk. Speciálisan az $r = 0$ esetben a (3.9) rekurzió a következő alakot ölti:

$$J_n(0) = \frac{n}{n-1} J_{n-1}(1). \quad (3.10)$$

n	2	3	4	5	6	7	8
$J_n(0)$	π	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{115\pi}{192}$	$\frac{11\pi}{20}$	$\frac{5887\pi}{11520}$	$\frac{151\pi}{315}$

1. táblázat. $J_n(0)$ értéke $2 \leq n \leq 8$ esetekben.

Ismert, hogy $J_1(0) = J_1(1) = \pi$, így (3.10) és a (3.9) rekurziós összefüggés alapján $J_n(0)$ könnyedén kiszámolható kis n -ekre, lásd 1. táblázat.

$J_n(0)$, mint n szerinti sorozat szoros összefüggésben áll a centrális hipersíkmetszetek térfogatának sorozatával, ugyanis

$$\sqrt{n}J_n(0) = \frac{\pi}{2^{n-1}}V_n(\mathbf{1}_n) = \sigma(\mathbf{1}_n)$$

(3.3) valamint (2.4) szerint. Ezen összefüggésből kiindulva a $J_n(0)$ sorozatnak a következő tulajdonságait rögzíthetjük. Ball [3, Lemma 3.] eredménye alapján $J_n(0)$ monoton csökkenő és 0-hoz konvergál, ha $n \rightarrow \infty$. Az $nJ_n(0)$ sorozat pedig monoton növekvő, lásd [1]. Ismert továbbá, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}J_n(0) = \sqrt{6\pi},$$

lásd [22, 28], ráadásul a konvergencia szigorúan monoton növekedve történik, ha $n \geq 3$, ahogy azt Bartha, Fodor és González Merino [5] megmutatták. A bizonyításuk Laplace módszerén alapul, amellyel tulajdonképpen a $\sqrt{n}J_n(0)$ sorozat konkavítását is igazolni lehet, ahogy arra a szerzők is rámutattak. Mindemellett $J_n(0)$ -re aszimptotikus formula is ismert, lásd [18]:

$$J_n(0) = \sqrt{\frac{6\pi}{n}} \left(1 - \frac{3}{20n} - \frac{13}{1120n^2} + \frac{27}{3200n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right). \quad (3.11)$$

Az 1.2. Tétel bizonyításához a $\frac{J_n(2)}{J_n(0)}$ hányados felülről való becslésére lesz szükségünk, melyet a következő tétel biztosít, amit a 7. Fejezetben bizonyítunk.

3.1. Tétel. *Legyen r nemnegatív egész és $n \geq 5$ illetve $0 \leq r \leq n-3$ tetszőlegesen. Ekkor*

$$J_n(r+2) < c_{n,r}J_n(r), \quad (3.12)$$

ahol

$$c_{n,r} = \frac{(n-r-2)(n-r)(n-r+2)}{(n+r)(n+r+2)(n+r+4)}. \quad (3.13)$$

Ismertetjük a fenti tételnek két fontosabb következményét, melyek bizonyítását szintén a 7. Fejezetben közöljük.

3.2. Állítás. *Bármely $n \geq 2$ esetén fennáll az alábbi egyenlőtlenség:*

$$(n+3)J_{n+2}(0) < (n+2)J_n(0). \quad (3.14)$$

Megjegyezzük, hogy páros n -ek esetén a fenti állításnál enyhén erősebb becslést igazolt Lesieur és Nicolas [23].

Korábban láttuk, hogy $J_n(r)$ és az Euler-számok között szoros kapcsolat mutatható fel, így a 3.1. Tétel felhasználásával akár a szomszédos Euler-számokat is becsülhetjük. Erre az alábbi becslés ismert [23]:

3.3. Tétel ([23], Theorem 3.). *Tetszőleges $m \geq 2l - 1$ és $l \geq 2$ esetén*

$$A(m, l - 1) < \left(\frac{m - l}{m - l + 2} \right)^{m - 2l + 2} A(m, l) \quad (3.15)$$

A 3.1. Tétel következményeként kapott becslés ennél erősebb.

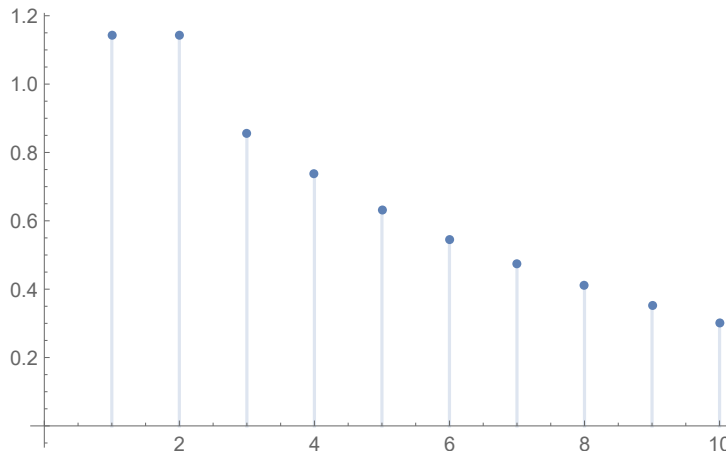
3.4. Állítás. *Tetszőleges $m \geq 2l - 1$ és $l \geq 2$ esetén*

$$A(m, l - 1) < c_{m+1, m-2l+1} A(m, l), \quad (3.16)$$

ahol $c_{n,r}$ -t a (3.13) formula definiálja. Továbbá a fenti egyenlőtlenség a (3.15) egyenlőtlenségnél erősebb.

A fejezet zárásaként a $J_n(0)$ sorozat egy újabb tulajdonságát fogalmazzuk meg, amit numerikus számítások alapján igaznak vélünk, lásd 3. ábra.

3.5. Sejtés. *A $J_n(0)$ sorozat szigorúan log-konvex, ha $n \geq 3$, vagyis az $\ln J_n(0)$ sorozat szigorúan konvex, ha $n \geq 3$.*



3. ábra. Az $\ln(J_n(0))$ sorozat ábrázolása $1 \leq n \leq 10$ esetén.

A log-konvexitás definíciója alapján a 3.5. Sejtés igazolásához elegendő tetszőleges három egymást követő tagot összehasonlítani, nevezetesen

$$J_n(0)^2 \leq J_{n-1}(0) \cdot J_{n+1}(0). \quad (3.17)$$

Megjegyezzük, hogy abban az esetben, amikor a középső tag indexe, n páratlan, akkor (3.17) azonnal adódik a Cauchy-Scwharz-egyenlőtlenségből, ugyanis

$$J_n(0)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}}(t) dt \right)^2 < \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\frac{n-1}{2}}(t) dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\frac{n+1}{2}}(t) dt = J_{n-1}(0) \cdot J_{n+1}(0),$$

ahol $\varphi(t) = \text{sinc } t$. Ez a gondolatmenet azonban nem működik páros n -ek esetén, így a 3.5. Sejtés teljes értékű bizonyításához minden bizonnyal más eszközök szükségesek.

4. Nemdiagonális kritikus irányok

A továbbiakban egy speciális vektorosztállyal foglalkozunk, ami a koordináták permutációjától és előjelétől eltekintve a következő alakban írható föl a függvényében:

$$\mathbf{v}_{n,k}(a) := (\underbrace{a, \dots, a}_k, \underbrace{b, \dots, b}_{n-k}) \in S^{n-1},$$

ahol $1 \leq k \leq n-1$ és $a \in I_k := \left[0, \frac{1}{\sqrt{k}}\right]$, illetve b -t a következő formula definiálja:

$$b := b_{n,k}(a) = \sqrt{\frac{1 - ka^2}{n - k}}. \quad (4.1)$$

Kiemeljük, hogy b -re úgy tekintünk, mint az a változó és az n, k indexek függvényeként, ahogy az a definíciójából is látszik. Azonban a könnyebb olvashatóság kedvéért ezeket nem jelöljük; ha mégis szükséges, ott jelezzük az n, k paraméterek értékét.

Célunk azt belátni, hogy bármely $n \geq 4$ esetén létezik olyan $a \in I_2$, melyre $\mathbf{v}_{n,2}(a)$ nemdiagonális, kritikus, teljes dimenziós irány. Ennek okán a továbbiakban felteszzük, hogy $n \geq 4$. Eleinte tetszőleges k -ra vizsgáljuk a $V_n(\mathbf{v}_{n,k}(a))$ függvényt, majd csak a 8. Fejezetben szorítkozunk a $k = 2$ esetre.

Figyelembe véve, hogy a $\mathbf{v}_{n,k}(a)$ vektor csak két különböző koordinátából áll, a 2.1. Állítás alapján $\mathbf{v}_{n,k}(a)$ akkor és csak akkor kritikus irány, ha

$$\frac{1}{1 - a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^{n-k} bt \cdot \text{sinc}^{k-1} at \cdot \cos at \, dt = \frac{1}{1 - b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^{n-k-1} bt \cdot \text{sinc}^k at \cdot \cos bt \, dt.$$

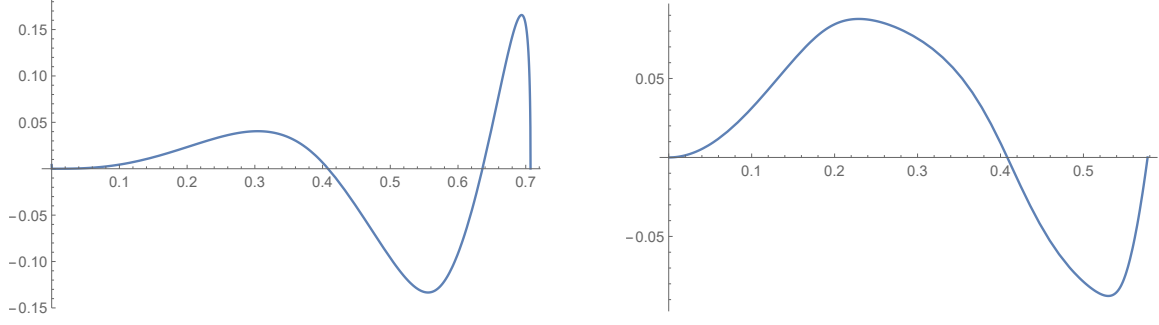
Ez ekvivalens azzal, hogy $F_{n,k}(a) = 0$, ahol

$$\begin{aligned} F_{n,k}(a) := & \frac{1}{1 - a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^{n-k} bt \cdot \text{sinc}^{k-1} at \cdot \cos at \, dt - \\ & - \frac{1}{1 - b^2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^{n-k-1} bt \cdot \text{sinc}^k at \cdot \cos bt \, dt, \end{aligned} \quad (4.2)$$

az I_k intervallumon értelmezett függvény. Kiemeljük, hogy a $k = 1$ esetben nemdefiniált (4.2), így a továbbiakban élünk a $k > 1$ megkötéssel. Vegyük észre azonban, hogy ez teljesen megalapozott, ugyanis a $k = 1$ esethez a $\mathbf{d}_{n,1}$ diagonális tartozik, melyre merőleges hipersíkmetszet térfogata globális minimuma V_n -nek Hensley [15] eredménye alapján.

A fentebbi észrevételünkre alapozva, mostantól $F_{n,k}(a)$ zérushelyeinek részletesebb vizsgálata a célunk, ehhez pedig kiindulásképpen tekintsük az 4. ábrát.

Megjegyezzük, hogy a 4. ábrán szereplő grafikonoknál az $a = \frac{1}{\sqrt{6}}$ érték a 6-diagonális irányhoz tartozik, míg az intervallum bal végpontja a 4-, illetve 3-diagonális iránynak felel meg, a jobb végpontok pedig a 2-, illetve 3-diagonális irányokat takarják. Vegyük észre, hogy a 4. ábra baloldali grafikonján egy ezektől különböző zérushely is látható, melynek létezését kell garantálnunk. Ennek bizonyítása az alábbi három lemmára tagolódik, melyeket a következő fejezetekben igazolunk.



4. ábra. $F_{6,2}(a)$ illetve $F_{6,3}(a)$ függvények grafikonja.

4.1. Lemma. Bármely $1 < k < n$ esetén $\frac{1}{\sqrt{k}}$ és $\frac{1}{\sqrt{n}}$ zérushelyei $F_{n,k}(a)$ -nak.

4.2. Lemma. Tetszőleges $1 < k < n$ esetén $F_{n,k}$ differenciálható int I_k bármely kompakt részintervallumán, valamint

$$F'_{n,k}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) < 0.$$

4.3. Lemma. Minden $n \geq 4$ esetén létezik olyan $\gamma_n > 0$, hogy ha $\frac{1}{\sqrt{2}} - \gamma_n < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor $F_{n,2}(a) > 0$.

Végül szükségünk lesz $F_{n,k}(a)$ integrandusára, ezt az

$$f_{n,k}(a, t) := \frac{1}{1-a^2} \cdot \text{sinc}^{n-k} bt \cdot \text{sinc}^{k-1} at \cdot \cos at - \frac{1}{1-b^2} \cdot \text{sinc}^{n-k-1} bt \cdot \text{sinc}^k at \cdot \cos bt \quad (4.3)$$

függvényként definiáljuk az $I_k \times \mathbb{R}$ halmazon. A fenti lemmák felhasználásával az 1.2. Tétel bizonyítása azonnal adódik.

1.2. Tétel bizonyítása. A 4.1. Lemma alapján

$$F_{n,2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = F_{n,2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0. \quad (4.4)$$

A kardinális szinuszfüggvény tulajdonságai miatt $f_{n,2}(a, t)$ folytonos mindkét változójában, továbbá

$$\psi_{n,2}(t) := \begin{cases} 2 & \text{ha } |t| \leq 1, \\ \frac{2}{t^{n-1}} & \text{ha } |t| \geq 1. \end{cases} \quad (4.5)$$

integrálható majoránsa $f_{n,2}(a, t)$ -nek minden $a \in I_2$ -ra. Ekkor [21, 3.1. Theorem, 286. o.] alapján $F_{n,2}(a)$ is folytonos I_2 -n. A 4.2. Lemma szerint $F_{n,2}(a)$ differenciálható int I_2 bármely kompakt részintervallumán, illetve

$$F'_{n,2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) < 0,$$

ezért $F_{n,2}(a)$ lokálisan szigorúan monoton csökkenő $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -ben, s így (4.4) miatt e zérushely egy jobboldali környezetében negatív. A 4.3. Lemma pedig azt állítja, hogy $\frac{1}{\sqrt{2}}$ egy

baloldali környezetében pozitív $F_{n,2}(a)$. Ekkor Bolzano tétele [6, 31. o.] miatt létezik olyan

$$\xi_n \in \left] \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right[, \quad (4.6)$$

hogy $F_{n,2}(\xi_n) = 0$, s így a 2.1. Állítás miatt $\mathbf{v}_{n,2}(\xi_n)$ kritikus irány. Továbbá (4.6) azt is garantálja, hogy $\mathbf{v}_{n,2}(\xi_n)$ valóban nemdiagonális és teljes dimenziós vektor. $\square$

Bizonyításunk csak a zérushely létezését garantálja, azonban numerikus modellek alapján (lásd 4. ábra) úgy sejtjük, hogy minden n -re pontosan egy ilyen ξ_n zérushely létezik. A 2. táblázat foglalja össze kis dimenziókra ξ_n numerikus értékét.

n	4	5	6	7	8	9	10
ξ_n	0,632455	0,634265	0,636071	0,636935	0,637520	0,637921	0,638219

2. táblázat. ξ_n zérushely numerikus értékei $4 \leq n \leq 10$ dimenziók esetében.

Az, hogy pontosan egy ilyen ξ_n zérushely létezik, csak az $n = 4$ esetben igazolt ([2, Theorem 3.]). Ekkor $\xi_4 = \sqrt{\frac{2}{5}}$, s így a nemdiagonális kritikus irányok a koordináták permutációjától és előjelétől eltekintve $\frac{1}{\sqrt{10}}(1, 1, 2, 2)$ alakúak. Ugyancsak ebben az esetben fellelhető egy geometriai jelentés, miszerint a nemdiagonális kritikus irányok illeszkednek Q_3 megfelelő testátlójával párhuzamos, origón átmenő hipersíkra. Azonban hasonló összefüggést magasabb dimenziókban nem találtunk numerikus számítások alapján.

5. A diagonális irányok valóban kritikusak

A 4.1. Lemma bizonyítása. Ha $a = \frac{1}{\sqrt{n}}$, akkor $a = b$, amiből azonnal következik, hogy $f_{n,k}(a, t)$ azonosan 0, s így $\frac{1}{\sqrt{n}}$ valóban zérushelye $F_{n,k}(a)$ -nak.

Tekintsük az $a = \frac{1}{\sqrt{k}}$ esetet. Ekkor

$$\begin{aligned} F_{n,k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) &= \frac{k}{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^{k-1} \frac{t}{\sqrt{k}} \cdot \cos \frac{t}{\sqrt{k}} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^k \frac{t}{\sqrt{k}} dt = \\ &= \sqrt{k} \left(\frac{k}{k-1} J_{k-1}(1) - J_k(0) \right), \end{aligned} \quad (5.1)$$

ami (3.10) miatt 0, tehát $a = \frac{1}{\sqrt{k}}$ szintén zérushelye $F_{n,k}(a)$ -nak. $\square$

Vegyük észre, hogy mivel $\mathbf{d}_{n,k} = \mathbf{v}_{n,k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$, így a lemmával egyúttal azt is beláttuk, hogy a k -diagonális irányok valóban kritikusak minden $1 < k < n$ -ra.

6. $F_{n,k}(a)$ deriváltja

A 4.2. Lemma bizonyítása. A kardinális szinuszfüggvény tulajdonságai miatt $f_{n,k}(a, t)$ folytonos mindkét változójában, továbbá

$$\psi_{n,k}(t) := \begin{cases} 2 & \text{ha } |t| \leq 1, \\ \frac{2}{t^{n-1}} & \text{ha } |t| \geq 1. \end{cases} \quad (6.1)$$

integrálható majoránsa $f_{n,k}(a, t)$ -nak minden $a \in I_k$ -ra.

Ugyanezeket a tulajdonságokat kell belátnunk $\frac{\partial f_{n,k}(a, t)}{\partial a}$ -ról. Először az $f_{n,k}(a, t)$ függvény a szerinti deriváltját határozzuk meg az I_k intervallumon, amihez az alábbi differenciálási szabályokat fogjuk felhasználni:

$$(\operatorname{sinc} x)' = \frac{1}{x}(\cos x - \operatorname{sinc} x) \quad \text{és} \quad b' = -\frac{2ab}{1 - 2a^2}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n,k}(a, t)}{\partial a} &= \frac{2a}{(1 - a^2)^2} \cdot \operatorname{sinc}^{n-k} bt \cdot \operatorname{sinc}^{k-1} at \cdot \cos at + \\ &+ \frac{ka}{(1 - a^2)} \cdot \operatorname{sinc}^{n-k-1} bt \cdot \frac{\operatorname{sinc} bt - \cos bt}{b^2} \cdot \operatorname{sinc}^{k-1} at \cdot \cos at + \\ &+ \frac{k-1}{(1 - a^2)} \cdot \operatorname{sinc}^{n-k} bt \cdot \operatorname{sinc}^{k-2} at \cdot \frac{\cos at - \operatorname{sinc} at}{a} \cdot \cos at - \\ &- \frac{1}{1 - a^2} \cdot \operatorname{sinc}^{n-k} bt \cdot \operatorname{sinc}^{k-1} at \cdot \sin at \cdot t + \\ &+ \frac{2ka}{(n-k)(1 - b^2)^2} \cdot \operatorname{sinc}^{n-k-1} bt \cdot \operatorname{sinc}^k at \cdot \cos bt - \\ &- \frac{(n-k-1)ka}{(n-k)(1 - b^2)} \cdot \operatorname{sinc}^{n-k-2} bt \cdot \frac{\operatorname{sinc} bt - \cos bt}{b^2} \cdot \operatorname{sinc}^k at \cdot \cos bt - \\ &- \frac{k}{1 - b^2} \cdot \operatorname{sinc}^{n-k-1} bt \cdot \operatorname{sinc}^{k-1} at \cdot \frac{\operatorname{sinc} at - \cos at}{a} \cdot \cos bt - \\ &- \frac{ka}{(1 - ka^2)(1 - b^2)} \cdot \operatorname{sinc}^{n-k-2} bt \cdot \operatorname{sinc}^k at \cdot \sin^2 bt. \end{aligned}$$

Ebből az alakból jól látszódik, hogy $\frac{\partial f_{n,k}(a, t)}{\partial a}$ folytonos $I_k \times \mathbb{R}$ -en, hiszen

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\cos at - \operatorname{sinc} at}{a} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{a \rightarrow 1/\sqrt{k}} \frac{\operatorname{sinc} bt - \cos bt}{b^2} = \frac{t^2}{3}.$$

Továbbá adott pozitív egész m -re, az

$$|\operatorname{sinc}^m at| \leq \frac{1}{(at)^m}$$

egyenlőtlenség felhasználásával, (6.1)-hez hasonló módon $\frac{\partial f_{n,k}(a,t)}{\partial a}$ -nak is megadható integrálható majoránsa int I_k bármely kompakt részintervallumán, azonban mivel

$$\lim_{a \rightarrow 1/\sqrt{k}} \frac{ka}{(1-ka^2)(1-b^2)} \cdot \text{sinc}^{n-k-2} bt \cdot \text{sinc}^k at \cdot \sin^2 bt = \infty,$$

ezért a teljes I_k intervallumon nem tudunk integrálható majoránst megadni.

A Leibniz integrálszabály (lásd [21, Theorem 3.2., 287. o.]) szerint $F_{n,k}(a)$ differenciálható int I_k bármely kompakt részintervallumán, és a deriváltja

$$F'_{n,k}(a) = \frac{d}{da} \int_{-\infty}^{\infty} f_{n,k}(a,t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_{n,k}(a,t)}{\partial a} dt. \quad (6.2)$$

Ezenkívül $F'_{n,k}(a)$ is folytonos int I_k bármely kompakt részintervallumán [21, Theorem 3.1., 286. o.] szerint. Mindezek alapján meg tudjuk határozni az

$$F'_{n,k}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

értéket. Annak érdekében, hogy a deriváltba való behelyettesítés egyszerűbben kiszámolható legyen, először $\frac{\partial f_{n,k}(a,t)}{\partial a}$ -t kicsit más formában írjuk fel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n,k}(a,t)}{\partial a} &= \frac{k-2}{2a(1-a^2)} \cdot \text{sinc}^{n-k} bt \cdot \text{sinc}^{k-2} at + \\ &+ \frac{(n-k-2)ka}{2(1-ka^2)(1-b^2)} \cdot \text{sinc}^{n-k-2} bt \cdot \text{sinc}^k at - \\ &- \left(\frac{ka}{2(1-a^2)b^2} + \frac{k}{2a(1-b^2)} \right) \cdot \text{sinc}^{n-k-1} bt \cdot \text{sinc}^{k-1} at \cdot \cos((a-b)t) + \\ &+ \left(\frac{2a}{(1-a^2)^2} + \frac{ka}{(1-a^2)b^2} - \frac{k-1}{a(1-a^2)} \right) \cdot \text{sinc}^{n-k} bt \cdot \text{sinc}^{k-1} at \cdot \cos at + \\ &+ \left(\frac{2ka}{(n-k)(1-b^2)^2} - \frac{(n-k-1)ka}{(1-ka^2)(1-b^2)} + \frac{k}{a(1-b^2)} \right) \cdot \text{sinc}^{n-k-1} bt \cdot \text{sinc}^k at \cdot \cos bt + \\ &+ \frac{k}{2a(1-a^2)} \cdot \text{sinc}^{n-k} bt \cdot \text{sinc}^{k-2} at \cdot \cos 2at + \\ &+ \frac{(n-k)ka}{2(1-ka^2)(1-b^2)} \cdot \text{sinc}^{n-k-2} bt \cdot \text{sinc}^k at \cdot \cos 2bt - \\ &- \left(\frac{ka}{2(1-a^2)b^2} + \frac{k}{2a(1-b^2)} \right) \cdot \text{sinc}^{n-k-1} bt \cdot \text{sinc}^{k-1} at \cdot \cos((a+b)t). \end{aligned}$$

Ha most behelyettesítünk $a = \frac{1}{\sqrt{n}}$ -t, akkor $b = a$ adódik, s így sinc hatványait összevonhatjuk. Ennélfogva az $F'_{n,k}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ integrálformulában minden tag

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha \text{sinc}^m \frac{t}{\sqrt{n}} \cos \frac{\beta t}{\sqrt{n}} dt = \alpha \sqrt{n} J_m(\beta)$$

alakú, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, m pozitív egész, illetve $J_m(\beta)$ a (3.1)-ben definiált integrált jelöli. Tehát a behelyettesítés után az alábbi egyenlőséget kapjuk:

$$\begin{aligned} F'_{n,k}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) &= \frac{(k-2)n^2}{2(n-1)}J_{n-2}(0) + \frac{k(n-k-2)n^2}{2(n-k)(n-1)}J_{n-2}(0) - \frac{kn^2}{1-n}J_{n-2}(0) + \\ &+ \frac{n^2(n+1)}{(n-1)^2}J_{n-1}(1) + \frac{kn^2(n+1)}{(n-1)^2(n-k)}J_{n-1}(1) - \\ &- \frac{kn^2}{n-1}J_{n-2}(2) + \frac{kn^2}{2(n-1)}J_{n-2}(2) + \frac{kn^2}{2(n-1)}J_{n-2}(2). \end{aligned}$$

Ez a következő alakra egyszerűsödik:

$$F'_{n,k}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{n^3}{(n-k)(n-1)}\left(\frac{n+1}{n-1}J_{n-1}(1) - J_{n-2}(0)\right).$$

A (3.10) formula alapján

$$F'_{n,k}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{n^3}{(n-k)(n-1)}\left(\frac{n+1}{n}J_n(0) - J_{n-2}(0)\right). \quad (6.3)$$

A 3.2. Állításból adódik, hogy (6.3) valóban negatív minden $n \geq 4$ és $1 < k < n$ esetén. $\square$

7. A $J_n(r+2)/J_n(r)$ arány felső becslése és következményei

Az előző fejezet végén láthattuk, hogy a 3.2. Állítás kulcsszerepet tölt be a bizonyításban. A (3.14) egyenlőtlenség aszimptotikusan is vizsgálható a (3.11) formula segítségével, ugyanis ha n elég nagy, akkor

$$k_n := \sqrt{\frac{6\pi}{n}}\left(1 - \frac{3}{20n} - \frac{13}{1120n^2}\right)$$

a $J_n(0)$ mennyiség alsó korlátja,

$$K_n := \sqrt{\frac{6\pi}{n}}\left(1 - \frac{3}{20n}\right)$$

pedig felső korlátja. Ha megmutatjuk, hogy az így definiált korlátokra

$$(n+3)K_{n+2} < (n+2)k_n \quad (7.1)$$

fennáll, akkor ebből következik (3.14) elegendően nagy n -re. Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd $n^3(n-2)^5$ -nel megszorozva kapjuk, hogy (7.1) ekvivalens az

$$(n+3)^2\left((n+2) - \frac{3}{20}\right)^2 n^5 < (n+2)^5\left(n^2 - \frac{3}{20}n - \frac{13}{1120}\right)^2.$$

egyenlőtlenséggel. Utóbbi pedig következik abból, hogy a

$$p(x) = \frac{1331}{560}x^7 + \frac{158607}{11200}x^6 + \frac{31615753}{1254400}x^5 + \frac{1013993}{125440}x^4 - \frac{293943}{31360}x^3 + \frac{20893}{78400}x^2 + \frac{9581}{78400}x + \frac{169}{39200}$$

hetedfokú polinom szigorúan pozitív, ha x kellően nagy. Vegyük észre, hogy ha $R = 8$, akkor

$$\frac{1331}{560}R^7 > \frac{158607}{11200}R^6 + \frac{31615753}{1254400}R^5 + \frac{1013993}{125440}R^4 + \frac{293943}{31360}R^3 + \frac{20893}{78400}R^2 + \frac{9581}{78400}R + \frac{169}{39200},$$

így Rouché tétele alapján p összes gyöke az origó középpontú, R sugarú körön belül van, emiatt $p(x)$ pozitív, ha $x \geq 8$. Ebből a gondolatmenetből látszik, hogy a (3.12) egyenlőtlenség valóban teljesül nagy n -ek esetén.

A 3.2. Következmény precíz igazolásához a $\frac{J_n(2)}{J_n(0)}$ hányados becslése szükséges. A (3.9) rekurzív formula jellege indukálja az általánosabb, $\frac{J_n(r+2)}{J_n(r)}$ hányados becslését, amit a 3.1. Tétel fogalmaz meg, ahol r nemnegatív egész. Ezt fogjuk most igazolni.

A 3.1. Tétel bizonyítása. Tegyük fel, hogy r nemnegatív egész, a bizonyítás n szerinti teljes indukcióval történik. Az $n = 5$ esetet a 3. táblázat foglalja össze.

r	0	1	2
$c_{5,r}J_5(k) - J_5(r+2)$	$\frac{\pi}{576}$	$\frac{\pi}{240}$	$\frac{149\pi}{88704}$

3. táblázat. A $J_5(r+2) < c_{5,r}J_5(r)$ egyenlőtlenség ellenőrzése az $r = 0, 1, 2$ esetekben.

Tegyük fel, hogy (3.12) teljesül valamely rögzített n -re bármely $0 \leq r \leq n-3$ esetén. Megmutatjuk, hogy ekkor $(n+1, r)$ párra is teljesül, ahol $0 \leq r \leq n-2$ tetszőleges.

1. eset. Legyen $r = 0$, ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$J_{n+1}(2) < c_{n+1,0}J_{n+1}(0). \quad (7.2)$$

A (3.9) rekurzív formula alapján

$$\begin{aligned} J_{n+1}(2) &= \frac{n+3}{2n}J_n(3) + \frac{n-1}{2n}J_n(1), \\ J_{n+1}(0) &= \frac{n+1}{n}J_n(1). \end{aligned}$$

Az indukciós hipotézist $(n, 1)$ párra alkalmazva a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$J_n(3) < c_{n,1}J_n(1).$$

Ekkor (7.2) következik az alábbi egyenlőtlenségből:

$$\frac{n+3}{2n}c_{n,1} + \frac{n-1}{2n} \leq \frac{n+1}{n}c_{n+1,0}. \quad (7.3)$$

Felhasználva $c_{n,r}$ definícióját, az egyszerűsítések után az

$$(n-3) + (n+5) \leq 2(n+1)$$

egyenlőtlenséghez jutunk, ami nyilván teljesül minden $n \geq 5$ esetén.

2. eset. Legyen $1 \leq r \leq n - 4$. Ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenség :

$$J_{n+1}(r+2) < c_{n+1,r} J_{n+1}(r). \quad (7.4)$$

Ismét a (3.9) rekurzív formula alapján

$$\begin{aligned} J_{n+1}(r+2) &= \frac{n+r+3}{2n} J_n(r+3) + \frac{n-r-1}{2n} J_n(r+1), \\ J_{n+1}(r) &= \frac{n+r+1}{2n} J_n(r+1) + \frac{n-r+1}{2n} J_n(r-1). \end{aligned}$$

Az indukciós hipotézist $(n, r+1)$ illetve $(n, r-1)$ párokra alkalmazva a következő egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$\begin{aligned} J_n(r+3) &< c_{n,r+1} J_n(r+1), \\ \frac{1}{c_{n,r-1}} J_n(r+1) &< J_n(r-1). \end{aligned}$$

Ekkor (7.4) következik az alábbi egyenlőtlenségből:

$$\frac{n+r+3}{2n} c_{n,r+1} + \frac{n-r-1}{2n} \leq c_{n+1,r} \left(\frac{n+r+1}{2n} + \frac{n-r+1}{2n} \cdot \frac{1}{c_{n,r-1}} \right). \quad (7.5)$$

Felhasználva $c_{n,r}$ definícióját, az egyszerűsítések után az

$$\begin{aligned} \frac{(n-r-3)(n-r-1)(n-r+1)}{(n+r+5)(n+r+1)} + (n-r-1) &\leq \\ \frac{(n-r-1)(n-r+1)(n-r+3)}{(n+r+5)(n+r+3)} + \frac{(n-r+1)(n+r-1)}{(n+r+5)} \end{aligned}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ennek mindkét oldalát megszorozva az

$$(n+r+1)(n+r+3)(n+r+5)$$

szorzattal adódik, hogy

$$\begin{aligned} (n-r-3)(n-r-1)(n-r+1)(n+r+3) + (n-r-1)(n+r+5)(n+r+1)(n+r+3) &\leq \\ (n-r-1)(n-r+1)(n-r+3)(n+r+1) + (n-r+1)(n+r-1)(n+r+1)(n+r+3). \end{aligned}$$

Jobb oldalra rendezve és elvégezve a szorzásokat az

$$0 \leq 16r^3 + 48r^2 + 32r$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amely nyilván teljesül minden $1 \leq r \leq n - 4$ esetén.

3. eset. Legyen $r = n - 3$ vagy $r = n - 2$. Ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenség ismét

$$J_{n+1}(r+2) < c_{n+1,r} J_{n+1}(r). \quad (7.6)$$

alakú. Ugyancsak használhatjuk a (3.9) rekurziós formulát, azonban ebben a két esetben $J_n(r+3) = 0$, s így

$$\begin{aligned} J_{n+1}(r+2) &= \frac{n-r-1}{2n} J_n(r+1) \\ J_{n+1}(r) &= \frac{n+r+1}{2n} J_n(r+1) + \frac{n-r+1}{2n} J_n(r-1). \end{aligned}$$

Az indukciós hipotézist a jobb oldal második tagjára $(n, r-1)$ paraméterekkel alkalmazva a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{1}{c_{n,r-1}} J_n(r+1) < J_n(r-1).$$

Ekkor (7.6) következik az alábbi egyenlőtlenségből:

$$\frac{n-r-1}{2n} \leq c_{n+1,r} \left(\frac{n+r+1}{2n} + \frac{n-r+1}{2n} \cdot \frac{1}{c_{n,r-1}} \right), \quad (7.7)$$

amely adódik a (7.5) formulából, hiszen $c_{n,r+1} > 0$. Így ezt az esetet is beláttuk, és ezzel a bizonyításunk teljes. $\square$

A 3.1. Tétel következményeként először a 3.2. Állítást igazoljuk, melyet az előző fejezet végén használtunk fel.

A 3.2. Állítás bizonyítása. A $2 \leq n \leq 4$ esetekben könnyedén leellenőrizhető az egyenlőtlenség az 1. táblázat alapján. A továbbiakban tegyük fel, hogy $n \geq 5$. Alkalmazzuk először a (3.10) képletet, majd a (3.9) rekurziós formulát (3.14) bal oldalára:

$$J_{n+2}(0) = \frac{n+2}{n+1} J_{n+1}(1) = \frac{(n+2)^2}{2n(n+1)} J_n(2) + \frac{n+2}{2(n+1)} J_n(0).$$

Tehát (3.14) ekvivalens azzal, hogy

$$\frac{(n+3)(n+2)^2}{2n(n+1)} J_n(2) + \frac{(n+3)(n+2)}{2(n+1)} J_n(0) < (n+2) J_n(0),$$

amiből átrendezéssel adódik az

$$J_n(2) < \frac{(n-1)n}{(n+2)(n+3)} J_n(0) \quad (7.8)$$

egyenlőtlenség. A 3.1. Tétel alapján

$$J_n(2) < c_{n,0} J_n(0) = \frac{n-2}{n+4} J_n(0),$$

így (7.8) igazolásához elegendő azt megmutatni, hogy minden $n \geq 2$ esetén

$$\frac{n-2}{n+4} < \frac{(n-1)n}{(n+2)(n+3)}.$$

Átszorzással könnyen igazolható ez az egyenlőtlenség, ugyanis

$$(n-2)(n+2)(n+3) = n^3 + 3n^2 - 4n - 12 < n^3 + 3n^2 - 4n = (n-1)n(n+4). \quad \square$$

Végül az Euler-számokkal kapcsolatos 3.4. Állítást igazoljuk.

A 3.4. Állítás bizonyítása. A (3.8) összefüggés valamint az 1.2. Tétel alapján

$$A\left(n-1, \frac{n+r}{2} + 1\right) < c_{n,r} A\left(n-1, \frac{n+r}{2}\right).$$

Felhasználva az Euler-számokra vonatkozó (3.7) szimmetriát kapjuk, hogy

$$A\left(n-1, \frac{n-r}{2} - 1\right) < c_{n,r} A\left(n-1, \frac{n-r}{2}\right).$$

Az $m = n - 1$ és $l = \frac{n-r}{2}$ átindexeléssel kapjuk a (3.16) egyenlőtlenséget.

A bizonyítás második felében megmutatjuk, hogy (3.16) valóban erősebb becslés, mint (3.15), amihez (3.13) egyszerűsítése után azt kell belátni, hogy

$$\frac{(l-1)l(l+1)}{(m-l+1)(m-l+2)(m-l+3)} < \left(\frac{m-l}{m-l+2}\right)^{m-2l+2} \quad (7.9)$$

teljesül minden $m \geq 2l - 1$ és $l \geq 2$ esetén. Vezessük be a $\mu = m - l + 2$ változót (ekkor $\mu \geq l + 1$), a (7.9) egyenlőtlenséget pedig rendezzük át a következőképpen:

$$\frac{(l-1)l(l+1)}{(\mu-1)\mu(\mu+1)} \left(\frac{\mu-2}{\mu}\right)^l < \left(\frac{\mu-2}{\mu}\right)^\mu. \quad (7.10)$$

Vegyük észre, hogy a fenti egyenlőtlenség jobb oldala szigorúan monoton növekvő μ -ben. Megmutatjuk, hogy (7.10) bal oldala viszont szigorúan monoton csökkenő μ -ben.

Legyen $l \geq 2$ tetszőleges, rögzített, és tegyük fel, hogy $\mu \geq l + 2$. Tekintsük a (7.10) egyenlőtlenség bal oldalára μ szerinti függvényként, ennek a deriváltja:

$$-\frac{(l-1)l(l+1)}{(\mu-2)(\mu-1)^2\mu^2(\mu+1)^2} \left(\frac{\mu-2}{\mu}\right)^l (3\mu^3 - 2l\mu^2 - 6\mu^2 - \mu + 2l + 2).$$

Ha $\mu \geq l + 2$, akkor a deriváltban az utolsó tényező pozitív, hiszen

$$3\mu^3 - 2l\mu^2 - 6\mu^2 - \mu + 2l + 2 \geq l^3 + 4l^2 + 5l > 0,$$

s így a derivált negatív minden $\mu \geq l + 2$ esetén. Ennélfogva (7) bal oldala szigorúan monoton csökkenő μ -ben, amennyiben $\mu \geq l + 2$.

Ekkor elegendő a $\mu = l + 1, l + 2$ esetekben igazolni (7.10)-et, ugyanis monotonitás miatt minden más μ -re és l -re teljesülni fog. Ha $\mu = l + 1$, akkor (7.10) a triviális

$$\frac{l-1}{l+2} < \frac{l-1}{l+1}$$

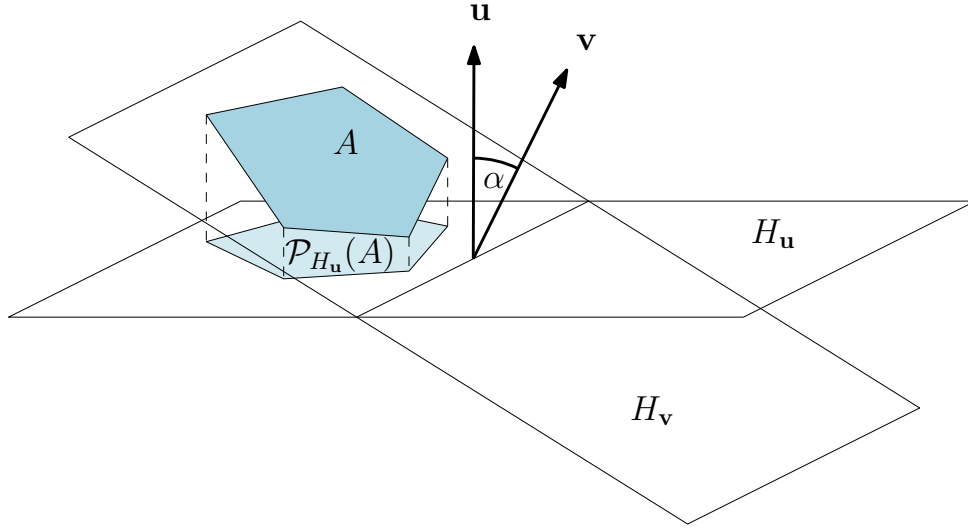
egyenlőtlenséghez vezet. Ha pedig $\mu = l + 2$, akkor (7.10) az egyszerűsítések elvégzése után ahhoz vezet, hogy

$$\frac{l-1}{l+3} < \frac{l}{l+2},$$

ami átszorzással könnyen adódik, és ezzel a bizonyításunk teljes. □

8. $F_{n,2}(a)$ az I_2 intervallum jobb végpontjában

A 4.3. Lemma bizonyításához felidézzük a hipersíkokra való vetítésekhez kapcsolódó térfogatösszefüggést. Adott $H_{\mathbf{u}}$ és $H_{\mathbf{v}}$ hipersíkok $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ egységnormálisokkal. Az $A \subset H_{\mathbf{v}}$ halmaz $H_{\mathbf{u}}$ síkra vett ortogonális vetületét jelölje $\mathcal{P}_{H_{\mathbf{u}}}(A)$, lásd 5. ábra.



5. ábra. A felszín változása egy hipersíkra való vetítés során.

Ekkor a Fubini-tétel miatt A vetületének $(n-1)$ -dimenziós térfogata:

$$\text{Vol}_{n-1}(\mathcal{P}_{H_{\mathbf{u}}}(A)) = |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \cdot \text{Vol}_{n-1}(A). \quad (8.1)$$

A 4.3. Lemma bizonyítása. A második fejezetben látott (2.11) formula alapján

$$\frac{2^{n-2}}{\pi} \cdot F_{n,2}(a) = \frac{1}{(1-a^2)^{\frac{3}{2}}} s(\mathbf{u}_1(a); a) - \frac{1}{(1-b^2)^{\frac{3}{2}}} s(\mathbf{u}_2(a); b), \quad (8.2)$$

ahol $\mathbf{u}_1(a) = \mathbf{v}_{n-1,1}(a)$ és $\mathbf{u}_2(a) = \mathbf{v}_{n-1,2}(a)$. A rájuk merőleges Q_{n-1} -hipersíkmetszetekre (2.2) alapján vezessük be az

$$S_1(a) = S(\mathbf{u}_1(a); a), \quad S_2(a) = S(\mathbf{u}_2(a); b)$$

jelöléseket. Legyen továbbá $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ az $\mathbb{R}^{n-1}$ tér standard bázisának első két eleme.

Az $s(\mathbf{u}_1(a); a)$, $s(\mathbf{u}_2(a); b)$ függvényeket az $S_1(a)$, $S_2(a)$ metszetek ortogonális vetítésével meg tudjuk határozni $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ egy megfelelő baloldali környezetében. A vetületek térfogatának finom becslésével megmutatjuk, hogy létezik olyan $\gamma_n > 0$, melyre ha $\frac{1}{\sqrt{2}} - \gamma_n < a < \frac{1}{\sqrt{2}}$, akkor (8.2) jobb oldalán álló függvény pozitív.

Az $s(\mathbf{u}_1(a); b)$ mennyiség vizsgálatával kezdjük. $\mathbb{R}^{n-1}$ pontjait írjuk $(x, \mathbf{y})$ alakba, ahol $x \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-2}$. Ekkor az $S_1(a)$ metszetre illeszkedő hipersík egyenlete (2.2) alapján

$$a \cdot x + b \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_{n-2} \rangle = a,$$

azaz x -re átrendezve

$$x = 1 - \frac{b}{a} \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_{n-2} \rangle. \quad (8.3)$$

Vegyük észre, hogy $x \leq 1$ csak akkor, ha $\langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_{n-2} \rangle \geq 0$; valamint $x \geq -1$ csak akkor, ha $\langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_{n-2} \rangle \leq \frac{2a}{b}$. Legyen

$$F_1 = \{(1, \mathbf{y}) \in Q_{n-1} : \mathbf{y} \in Q_{n-2}\}$$

Q_{n-1} hiperlapja. Vegyük észre, hogy $\max_{\mathbf{y} \in Q_{n-2}} \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_{n-2} \rangle = n-2$. Ennélfogva, ha $a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ra teljesül a $\frac{b}{a} \leq \frac{2}{n-2}$ egyenlőtlenség, akkor $S_1(a)$ merőleges vetülete F_1 -re:

$$\mathcal{P}_{F_1}(S_1(a)) = \{(1, \mathbf{y}) \in F_1 : \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_{n-2} \rangle \geq 0\},$$

ami éppen az F_1 lap fele. Ebből adódik, hogy

$$\text{Vol}_{n-2}(\mathcal{P}_{F_1}(S_1(a))) = \frac{1}{2} \cdot \text{Vol}_{n-2}(F_1) = 2^{n-3}. \quad (8.4)$$

Másfelől (8.1) alapján

$$\text{Vol}_{n-2}(\mathcal{P}_{F_1}(S_1(a))) = \left| \left\langle \frac{\mathbf{u}_1(a)}{|\mathbf{u}_1(a)|}, \mathbf{e}_1 \right\rangle \right| \cdot \text{Vol}_{n-2}(S_1(a)) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \text{Vol}_{n-2}(S_1(a)), \quad (8.5)$$

így a (8.4) és a (8.5) egyenletekből kapjuk:

$$s(\mathbf{u}_1(a); a) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \cdot 2^{n-3}. \quad (8.6)$$

Tekintsük az $s(\mathbf{u}_2(a); b)$ mennyiséget. Írjuk most $\mathbb{R}^{n-1}$ pontjait az $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ alakba, ahol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ és $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-3}$. Ekkor az $S_2(a)$ metszetre illeszkedő hipersík egyenlete (2.2) alapján

$$a \langle \mathbf{x}, \mathbf{1}_2 \rangle + b \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_{n-3} \rangle = b,$$

azaz $\mathbf{x}$ -re átrendezve

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{1}_2 \rangle = \frac{b}{a} \left(1 - \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_{n-3} \rangle \right). \quad (8.7)$$

Vegyük $S_2(a)$ merőleges vetületét az

$$F_2 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in Q_{n-1} : \langle \mathbf{x}, \mathbf{1}_2 \rangle = 0, \mathbf{y} \in Q_{n-3}\}$$

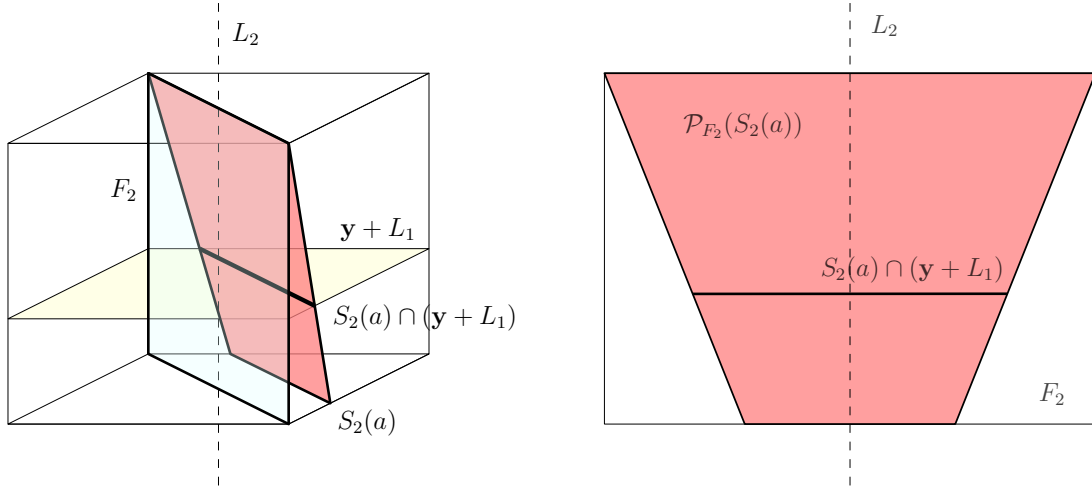
centrális hipersíkmetszetre; ennek térfogata (8.1) alapján

$$\text{Vol}_{n-2}(\mathcal{P}_{F_2}(S_2(a))) = \left| \left\langle \frac{\mathbf{u}_2(a)}{|\mathbf{u}_2(a)|}, \mathbf{d}_{n-1,2} \right\rangle \right| \cdot \text{Vol}_{n-2}(S_2(a)) = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{1-b^2}} \cdot \text{Vol}_{n-2}(S_2(a)). \quad (8.8)$$

Másrészt $\mathcal{P}_{F_2}(S_2(a))$ térfogatát ki tudjuk számítani Fubini-tétel segítségével. Ehhez vezessük be az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ által kifeszített L_1 2-dimenziós lineáris alteret, illetve annak ortogonális komplementerét, L_2 -t. Vegyük észre, hogy ekkor

$$\text{Vol}_{n-2}(\mathcal{P}_{F_2}(S_2(a))) = \int_{L_2 \cap Q_{n-1}} \text{Vol}_1(S_2(a) \cap (\mathbf{y} + L_1)) \, d\mathbf{y}, \quad (8.9)$$

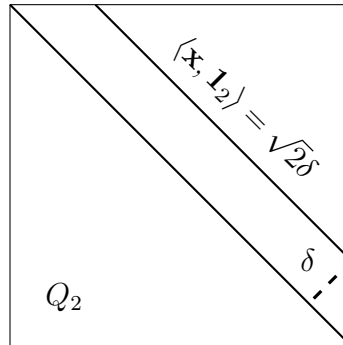
ugyanis $S_2(a)$ vetítése során az $S_2(a) \cap (\mathbf{y} + L_1)$ hosszak nem változnak, lásd 6. ábra.



6. ábra. $S_2(a)$ és $\mathbf{y} + L_1$ metszete a kockában illetve F_2 -ben.

Az $S_2(a)$ hipersík (8.7) szerinti egyenletéből elemi síkgeometriával meghatározható az $S_2(a) \cap (\mathbf{y} + L_1)$ metszet hossza (lásd 7. ábra): ha $\frac{b}{a} \leq \frac{2}{n-2}$, akkor

$$\text{Vol}_1(S_2(a) \cap (\mathbf{y} + L_1)) = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{b}{a} |1 - \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_{n-3} \rangle|.$$



7. ábra. Az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{1}_2 \rangle = \sqrt{2}\delta$ egyenletű egyeneshez tartozó metszet hossza $2\sqrt{2} - 2\delta$.

Ezt visszahelyettesítve (8.9)-be, és figyelembe véve, hogy $L_2 \cap Q_{n-1} = Q_{n-3}$, kapjuk:

$$\text{Vol}_{n-2}(\mathcal{P}_{F_2}(S_2(a))) = \int_{Q_{n-3}} 2\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{b}{a} \cdot |1 - \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_{n-3} \rangle| d\mathbf{y},$$

amiből (8.8) felhasználásával adódik:

$$s(\mathbf{u}_2(a), b) = \frac{\sqrt{1-b^2}}{a} \cdot \left(2^{n-2} - \frac{b}{a} \cdot \int_{Q_{n-3}} |1 - \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_{n-3} \rangle| d\mathbf{y} \right). \quad (8.10)$$

Tehát (8.6)-t és (8.10)-t visszahelyettesítve (8.2)-be kapjuk:

$$\frac{2^{n-2}}{\pi} F_{n,2}(a) = \frac{1}{a(1-a^2)} \cdot 2^{n-3} - \frac{1}{a(1-b^2)} \cdot \left(2^{n-2} - \frac{b}{a} \cdot \int_{Q_{n-3}} |1 - \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_{n-3} \rangle| d\mathbf{y} \right). \quad (8.11)$$

Megjegyezzük, hogy a korábbi észrevételek, illetve (8.3) és (8.7) alapján (8.11) érvényes marad akkor, ha $b(n-2) \leq 2a$, azaz

$$a \geq \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}. \quad (8.12)$$

Az $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ választással az (8.12) egyenlőtlenség valóban teljesül minden $\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon_n < a$ -ra, ugyanis

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}} \geq \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}.$$

A (8.11) kifejezés további becsléséhez az alábbi egyenlőtlenségre lesz szükségünk, melyet a következő fejezetben igazolunk.

8.1. Állítás. *Tetszőleges pozitív egész m -re teljesül az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\int_{Q_m} |1 - \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_m \rangle| d\mathbf{y} \geq 2^m. \quad (8.13)$$

A fenti állítást $m = n - 3$ -ra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{2^{n-3}}{a} \cdot \left(\frac{1}{1-a^2} - \frac{2}{1-b^2} + \frac{b}{a(1-b^2)} \right)$$

alsó becslése (8.11)-nek, így elegendő azt belátni, hogy az $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ egy baloldali környezetében pozitív a

$$g_n(a) := \frac{1}{1-a^2} - \frac{2}{1-b^2} + \frac{b}{a(1-b^2)} \quad (8.14)$$

függvény. Könnyen leellenőrizhető, hogy

$$g_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,$$

továbbá $g_n(a)$ differenciálható int I_2 -n, a deriváltja pedig

$$\begin{aligned} g'_n(a) = & \frac{1}{a^2(1-a^2)^2(n-3+2a^2)^2b} \left(8a^8 + 8(n-1)a^7b - 22a^6 - \right. \\ & \left. - 8(n-1)a^5b - (n-23)a^4 + 2(n-1)^2a^3b + 2(n-6)a^2 - n + 3 \right). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Az $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ helyettesítéssel (8.15) számlálója a $\frac{2-n}{4}$ alakra egyszerűsödik, ami negatív, ha $n \geq 3$. Továbbá (8.15) nevezője pozitív, ha $a < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Mindezekből következik, hogy $n \geq 3$ esetén

$$\lim_{a \rightarrow 1/\sqrt{2}} g'_n(a) = -\infty,$$

ennélfogva létezik olyan $\delta_n > 0$, hogy ha $a > \frac{1}{\sqrt{2}} - \delta_n$, akkor $g_n(a) > 0$. Ekkor a $\gamma_n := \min\{\delta_n, \varepsilon_n\}$ választással teljesül a lemma állítása. $\square$

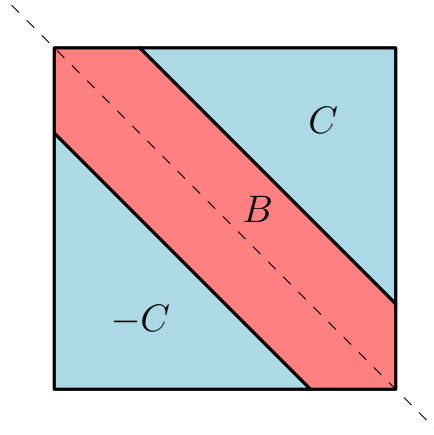
9. A kockán vett integrálegyenlőtlenség

A 8.1. Állítás bizonyítása. Tekintsük Q_m következő partícionálását (lásd 8. ábra):

$$B := \{\mathbf{y} \in Q_m : |\langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_m \rangle| \leq 1\}$$

$$C := \{\mathbf{y} \in Q_m : \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_m \rangle > 1\}, \text{ ekkor}$$

$$-C = \{\mathbf{y} \in Q_m : \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_m \rangle < -1\}.$$



8. ábra. Q_2 partíciója B , C és $-C$ halmazokra.

Ekkor

$$\begin{aligned} \int_{Q_m} |1 - \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_m \rangle| d\mathbf{y} &= \int_{B \cup (-C)} 1 - \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_m \rangle d\mathbf{y} - \int_C 1 - \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_m \rangle d\mathbf{y} = \\ &= \text{Vol}_m(B) - \int_B \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_m \rangle d\mathbf{y} - \int_{-C} \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_m \rangle + \int_C \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_m \rangle d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy

$$\int_B \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_m \rangle d\mathbf{y} = 0,$$

hiszen $\langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_m \rangle$ szimmetrikus az m -diagonális metszetre. Másrészt

$$-\int_{-C} \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_m \rangle d\mathbf{y} = \int_C \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_m \rangle d\mathbf{y},$$

ennélfogva

$$\int_{Q_m} |1 - \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_m \rangle| d\mathbf{y} = \text{Vol}_m(B) + 2 \int_C \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_m \rangle d\mathbf{y}.$$

Mivel a C halmaz definíciója alapján $\langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_m \rangle > 1$ minden $\mathbf{y} \in C$ esetén, ezért

$$\text{Vol}_m(B) + 2 \int_C \langle \mathbf{y}, \mathbf{1}_m \rangle d\mathbf{y} \geq \text{Vol}_m(B) + 2\text{Vol}_m(C) = \text{Vol}_m(Q_m) = 2^m,$$

amiből következik a bizonyítandó állítás. □

10. Összefoglalás

Az $F_{n,k}(a)$ függvény részletes vizsgálatával és a technikai lemmák segítségével beláttuk, hogy minden $n \geq 4$ dimenzióban létezik nemdiagonális kritikus centrális hipersíkmetszet, ami nem párhuzamos egyik koordináta-tengellyel sem. Mindazonáltal a bizonyításunk nem ad semmilyen információt a kritikus irányok számáról. Azonban az ábrázolások alapján (lásd 4. ábra) úgy sejtjük, hogy a koordináták permutációjától és előjelétől eltekintve pontosan egy olyan kritikus normálvektor van, melynek két egymástól különböző, nem-nulla koordinátája van. A zérushelyek sorozatát 5. Fejezetben közzétettük kis dimenziókra, habár a sorozatról többet elárulhat az aszimptotikus viselkedésének tanulmányozása.

Továbbá azt is érdemesnek tartjuk megvizsgálni, hogy a $\mathbf{v}_{n,2}$ típusú kritikus irányokhoz tartozó hipersíkmetszet térfogata lokális szélsőértéke, vagy pedig nyeregponja V_n -nek. Az $n = 4$ esetben az utóbbi teljesül (lásd [2]), úgy sejtjük, hogy magasabb dimenzióban ugyanez érvényesül, azaz habár léteznek teljes dimenziós, nemdiagonális kritikus irányok, ezek nem reprezentálnak lokális szélsőértéket.

A 4. Fejezetben láthattuk, hogy a bizonyításhoz szükséges 4.1. valamint 4.2. Lemma érvényesek bármely $1 < k < n$ esetén; ellentétben a 4.3. Lemmával, amely kizárólag $k = 2$ esetre vonatkozott. Az ábrázolások alapján (lásd 4. ábra) úgy véljük, hogy a $3 \leq k \leq n - 3$ esetben a 4.3. Lemma állítása nem áll fenn, és így nem létezik $\mathbf{v}_{n,k}$ alakú normálisoz tartozó kritikus, nemdiagonális hipersíkmetszet. Ezen esetek részletesebb vizsgálatát a közeljövőben tervezzük.

A 3. Fejezetben betekintést nyújtottunk a diagonális metszetek összehasonlításába, amihez tulajdonképpen a $J_n(0)$ sorozat széleskörű vizsgálatára volt szükség. Figyelembe véve a (3.9) rekurziós formulát, a fenti sorozat mellett célszerű volt az általánosabb $J_n(r)$ függvénysorozattal is foglalkozni. Ebből nyertük ugyanis a 3.1. Tételt, ami kulcsszerepet töltött be a bizonyításban. Emellett röviden kitértünk $J_n(r)$ és az Euler-számok közötti kapcsolatra, amit a (3.8) formula fogalmaz meg. Ennek ismertettük egy alkalmazását is a 3.4. Állítás formájában. Úgy véljük, hogy ehhez hasonló, további összefüggések nyerhetők az Euler-számokra vonatkozóan, amik azonban túlmutatnak a jelenlegi dolgozat keretein.

A fenti kérdések, sejtések vizsgálatával tervezzük folytatni a munkánkat.

Végül szeretnénk köszönetünket kifejezni Dr. Fodor Ferencnek a dolgozattal kapcsolatos tanácsaiért.

Hivatkozások

- [1] I. Aliev, *On the volume of hyperplane sections of a d -cube*, Acta Math. Hungar. **163** (2021), no. 2, 547–551.
- [2] G. Ambrus, *Critical central sections of the cube*, Proc. Amer. Math. Soc. **150** (2022), no. 10, 4463–4474.
- [3] K. Ball, *Cube Slicing in $\mathbb{R}^n$* , Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), no. 3, 465–473.
- [4] K. Ball, *Volumes of sections of cubes and related problems*, Geometric Aspects of Functional Analysis: Israel Seminar (GAFA) 1987–88 (J. Lindenstrauss and V. D. Milman, eds.), Springer, Berlin, Heidelberg, 1989, pp. 251–260.
- [5] F. Á. Bartha, F. Fodor, and B. González Merino, *Central diagonal sections of the n -cube*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2021** (2021), no. 4, 2861–2881.
- [6] B. Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Ostwald’s Klassiker **153** (1817), 29–60.
- [7] L. Carlitz, D. C. Kurtz, R. Scoville, and O. P. Stackelberg, *Asymptotic properties of Eulerian numbers*, Probab. Theory Related Fields **23** (1972), no. 1, 47–54.
- [8] G. Chasapis, P. Nayar, and T. Tkocz, *Slicing ℓ_p -balls reloaded: Stability, planar sections in ℓ_1* , Ann. Probab. **50** (2022), no. 6, 2344–2372.
- [9] L. Comtet, *Advanced Combinatorics*, D. Reidel Publishing Company, 1974.
- [10] H. Dirksen, *Sections of Simplices and Cylinders*, Ph.D. Thesis, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, 2015.
- [11] H. Dirksen, *Sections of the regular simplex—volume formulas and estimates*, Math. Nachr. **290** (2017), no. 16, 2567–2584.
- [12] A. Eskenazis, *On Extremal Sections of Subspaces of L_p* , Discrete Comput. Geom. **65** (2021), no. 2, 489–509.
- [13] R. Frank and H. Riede, *Hyperplane sections of the n -dimensional cube*, Amer. Math. Monthly **119** (2012), no. 10, 868–872.
- [14] H. Hadwiger, *Gitterperiodische Punktmengen und Isoperimetrie*, Monatsh. Math. **76** (1972), no. 5, 410–418.
- [15] D. Hensley, *Slicing the Cube in $\mathbb{R}^n$ and Probability (Bounds for the Measure of a Central Cube Slice in $\mathbb{R}^n$ by Probability Methods)*, Proc. Amer. Math. Soc. **73** (1979), no. 1, 95–100.
- [16] G. Ivanov and I. Tsiutsiurupa, *On the volume of sections of the cube*, Anal. Geom. Metr. Spaces **9** (2021), no. 1, 1–18.
- [17] W. B. Johnson and J. Lindenstrauss, *Handbook of the geometry of Banach spaces*, Elsevier, 2001.
- [18] R. Kerman, R. Ol’hava, and S. Spektor, *An asymptotically sharp form of Ball’s integral inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), no. 9, 3839–3846.
- [19] A. Koldobsky, *Fourier analysis in convex geometry*, Mathematical Surveys and Monographs. Amer. Math. Soc., 2005.
- [20] H. König, *Non-central sections of the simplex, the cross-polytope and the cube*, Adv. Math. **376** (2021), 107458.
- [21] S. Lang, *Undergraduate Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [22] P. S. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, Vol. 7, Courcier, 1812.
- [23] L. Lesieur and J.-L. Nicolas, *On the Eulerian Numbers $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} A(n, k)$* , European J. Combin. **13** (1992), no. 5, 379–399.

- [24] R. G. Medhurst and J. H. Roberts, *Evaluation of $I_n(b) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \cos(bx) dx$* , Math. Comp. **19** (1965), no. 89, 113–117.
- [25] M. Meyer and A. Pajor, *Sections of the unit ball of ℓ_p^n* , J. Funct. Anal. **80** (1988), no. 1, 109–123.
- [26] J. Moody, C. Stone, D. Zach, and A. Zvavitch, *A remark on the extremal non-central sections of the unit cube*, Asymptotic geometric analysis, Springer, Berlin, Heidelberg, 2013, pp. 211–228.
- [27] P. Nayar and T. Tkocz, *Extremal sections and projections of certain convex bodies: a survey*, arXiv preprint arXiv:2210.00885 (2022).
- [28] G. Pólya, *Berechnung eines bestimmten Integrals*, Math. Ann. **74** (1913), no. 2, 204–212.
- [29] R. Thompson, *Evaluation of $I_n(b) = 2\pi^{-1} \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \cos(bx) dx$ and of Similar Integrals*, Math. Comp. **20** (1966), no. 94, 330–332.
- [30] J. Vaaler, *A geometric inequality with applications to linear forms*, Pacific J. Math. **83** (1979), no. 2, 543–553.
- [31] S. Webb, *Central slices of the regular simplex*, Geom. Dedicata **61** (1996), no. 1, 19–28.
- [32] S. Webb, *Central slices of the regular simplex*, Ph.D. Thesis, University College London, 1996.
- [33] A. Zvavitch, *Gaussian measure of sections of dilates and translations of convex bodies*, Adv. in Appl. Math. **41** (2008), no. 2, 247–254.