

Konvex testek metszeteinek vizsgálata

Gárgyán Barnabás

SZTE TTIK, Matematika MSc 2. évf.

Témavezető: Dr. Ambrus Gergely

SZTE TTIK Bolyai Intézet

ÚNKP konferencia
2024. június 20.

A Kulturális és Innovációs Minisztérium
ÚNKP-23-2-SZTE-584 kódszámú új
Nemzeti Kiválóság Programjának a
Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és
Innovációs Alapból finanszírozott szakmai
támogatásával készült.



$Q_n = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ centrális hipersíkmetszetének térfogata a hipersík $v \in S^{n-1}$ normálvektorának függvényében:

$$\sigma(v) = \text{Vol}_{n-1} \left(Q_n \cap v^\perp \right).$$

Ismert eredmények:

- Pólya (1913) integrálformulájával $\sigma(v)$ kiszámolható.
- A minimális metszetek párhuzamosak Q_n hiperlapjával, térfogatuk 1 (Hadwiger (1972)).
- A maximális metszetek merőlegesek Q_n 2-dimenziós lapjának főátlójára, térfogatuk $\sqrt{2}$ (Ball (1986)).

Definíció

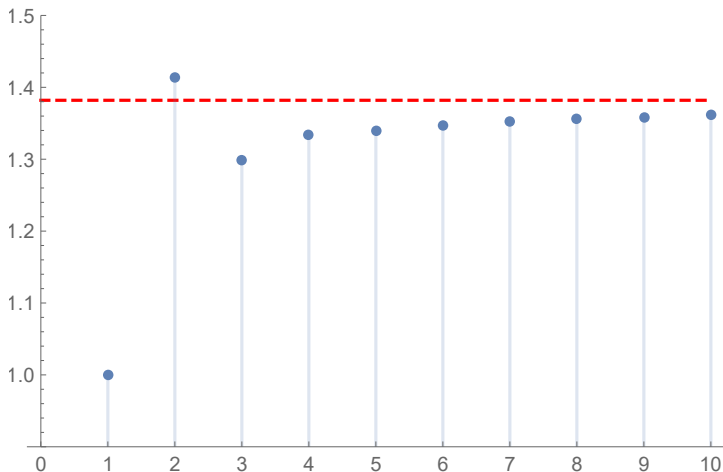
Q_n k -dimenziós lapjának főátlójával párhuzamos egységvektorokat *diagonális irányoknak* nevezzük.

A koordináták permutációjától és előjelétől eltekintve

$$d_{n,k} := \frac{1}{\sqrt{k}}(1_k, 0_{n-k}).$$

Definíció

Q_n k -dimenziós lapjának főátlójával párhuzamos egységvektorokat *diagonális irányoknak* nevezzük.



Tétel (Pournin (2023))

Minden $k \geq 3$ esetén a k -diagonális metszetek szigorúan lokálisan maximálisak Q_n centrális metszetei között, ha $n \geq 4$.

Diagonális metszetek maximalitása

Tétel (Pournin (2023))

Minden $k \geq 3$ esetén a k -diagonális metszetek szigorúan lokálisan maximálisak Q_n centrális metszetei között, ha $n \geq 4$.

Tétel

A $Q_n \cap 1_n^\perp$ fődiagonális metszetek szigorúan lokálisan maximális térfogatúak Q_n centrális metszetei között, ha $n \geq 4$.

A bizonyítás Lagrange-féle multiplikátor módszerrel történik.

Diagonális metszetek maximalitása

Tétel (Pournin (2023))

Minden $k \geq 3$ esetén a k -diagonális metszetek szigorúan lokálisan maximálisak Q_n centrális metszetei között, ha $n \geq 4$.

Tétel

A $Q_n \cap 1_n^\perp$ fődiagonális metszetek szigorúan lokálisan maximális térfogatúak Q_n centrális metszetei között, ha $n \geq 4$.

A bizonyítás Lagrange-féle multiplikátor módszerrel történik. A Lagrange-függvény Hesse-mátrixának a d_n helyen vett főminorjainak előjelét kell meghatároznunk.

Jelölje H_m az m -edik főminort ($m = 3, \dots, n$).

Tétel (Pournin (2023))

Minden $k \geq 3$ esetén a k -diagonális metszetek szigorúan lokálisan maximálisak Q_n centrális metszetei között, ha $n \geq 4$.

Tétel

A $Q_n \cap 1_n^\perp$ fődiagonális metszetek szigorúan lokálisan maximális térfogatúak Q_n centrális metszetei között, ha $n \geq 4$.

A bizonyítás Lagrange-féle multiplikátor módszerrel történik. A Lagrange-függvény Hesse-mátrixának a d_n helyen vett főminorjainak előjelét kell meghatároznunk.

Jelölje H_m az m -edik főminort ($m = 3, \dots, n$). Ha

$$\forall m \quad (-1)^{m-1} H_m > 0,$$

akkor $\sigma(v)$ -nek szigorú lokális maximuma van a d_n helyen.

Laplace-Pólya integrál

$$J_n(r) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n \cos(rx) \, dx$$

Laplace-Pólya integrál

$$J_n(r) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n \cos(rx) \, dx$$

Tétel (Ambrus, Gárgyán (2024, Adv. Math.))

Legyen $n \geq 4$ és r olyan egészek, hogy $-1 \leq r \leq n-2$. Ekkor

$$\frac{J_n(r+2)}{J_n(r)} \leq \frac{n-r}{n+r+2} \cdot \frac{(n-r-2)(n-r+2)}{(n+r)(n+r+4)}.$$

Laplace-Pólya integrál

$$J_n(r) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n \cos(rx) dx$$

Tétel (Ambrus, Gárgyán (2024, Adv. Math.))

Legyen $n \geq 4$ és r olyan egészek, hogy $-1 \leq r \leq n-2$. Ekkor

$$\frac{J_n(r+2)}{J_n(r)} \leq \frac{n-r}{n+r+2} \cdot \frac{(n-r-2)(n-r+2)}{(n+r)(n+r+4)}.$$

Tétel

Legyen $n \geq 4$ és r olyan egészek, hogy $-1 \leq r \leq \left\lceil \frac{4n-8}{7} \right\rceil$. Ekkor

$$\frac{(n-r)^2}{(n+r+2)^2} \cdot \frac{(4n-7r-8)(4n+3r+6)}{(4n+7r+6)(4n-3r)} \leq \frac{J_n(r+2)}{J_n(r)}$$

Euler-szám

$A(m, l)$ az $\{1, \dots, m\}$ halmaz azon σ permutációinak a száma, melyekre pontosan $l - 1$ darab olyan i elem van, amire $\sigma(i + 1) > \sigma(i)$.

Az explicit formulákból adódik az alábbi összefüggés:

$$A(m, l) = m! J_{m+1}(2l - m - 1).$$

Így a szomszédos Euler-számok hányadását tudjuk becsülni:

Következmény

Tetszőleges $m \geq 3$ és $\frac{m}{2} \leq l \leq \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{11m + 3}{7} \right\rfloor$ egészekre

$$c_{m+1, 2l-m-1} \leq \frac{A(m, l+1)}{A(m, l)} \leq d_{m+1, 2l-m-1}.$$

$$M_m := \max_{l=1, \dots, m} A(m, l) = A\left(m, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1\right).$$

Laplace-Pólya integrálra átírva:

$$M_m = \begin{cases} m! J_{m+1}(1), & \text{ha } m \text{ páros} \\ m! J_{m+1}(0), & \text{ha } m \text{ páratlan} \end{cases}$$

$$M_m := \max_{l=1, \dots, m} A(m, l) = A\left(m, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1\right).$$

Laplace-Pólya integrálra átírva:

$$f(m) := \frac{M_m}{m!} = \begin{cases} J_{m+1}(1), & \text{ha } m \text{ páros,} \\ J_{m+1}(0), & \text{ha } m \text{ páratlan.} \end{cases}$$

$$M_m := \max_{l=1, \dots, m} A(m, l) = A\left(m, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1\right).$$

Laplace-Pólya integrálra átírva:

$$f(m) := \frac{M_m}{m!} = \begin{cases} J_{m+1}(1), & \text{ha } m \text{ páros,} \\ J_{m+1}(0), & \text{ha } m \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Tétel (Lesieur és Nicolas (1992, Eur. J. Comb.))

Minden $p \geq 1$ -re

$$\frac{2p}{2p+1} < \frac{f(2p+1)}{f(2p-1)} < \frac{2p+1}{2p+2}.$$

A rekurziós összefüggés alkalmazva

$$\frac{J_{n+2}(0)}{J_n(0)} = \frac{(n+2)^2}{2n(n+1)} \cdot \left(\frac{J_n(2)}{J_n(0)} + \frac{n}{n+2} \right).$$

A bizonyított becslések alapján

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{J_{n+2}(0)}{J_n(0)} \leq \frac{(n+2)(n^2+2n-2)}{n(n+1)(n+4)}.$$

A rekurziós összefüggés alkalmazva

$$\frac{J_{n+2}(0)}{J_n(0)} = \frac{(n+2)^2}{2n(n+1)} \cdot \left(\frac{J_n(2)}{J_n(0)} + \frac{n}{n+2} \right).$$

A bizonyított becslések alapján

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{J_{n+2}(0)}{J_n(0)} \leq \frac{(n+2)(n^2+2n-2)}{n(n+1)(n+4)}.$$

Átírva az f sorozatra az alábbi állítást kapjuk:

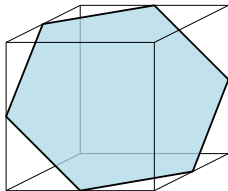
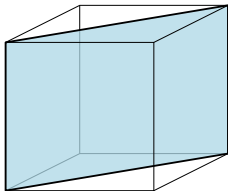
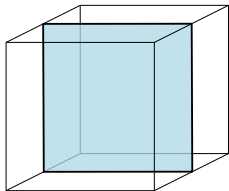
Következmény

Minden $p \geq 2$ -re

$$\frac{2p}{2p+1} \leq \frac{f(2p+1)}{f(2p-1)} \leq \frac{(p+1)(2p^2+2p-1)}{p(p+2)(2p+1)}.$$

Tehát az alsó korlátra sikerült egy tisztán kombinatorikus, egyszerűbb bizonyítást adnunk.

Köszönöm a figyelmet!



- Kritikus kockametszetekről szóló cikk elkészítése 2023. augusztus G. Ambrus and B. Gárgyán, *Non-diagonal critical central sections of the cube*, Adv. Math. **441** (2024), 109524.
- Tudományos Diákköri dolgozat és az arról szóló előadás a Szegedi Tudományegyetem helyi Tudományos Diákköri Konferenciáján 2024. május 7.
- Convex Geometry in Florence konferencián előadás 2024. június 12-14.

- Kritikus kockametszetekről szóló cikk elkészítése 2023. augusztus G. Ambrus and B. Gárgyán, *Non-diagonal critical central sections of the cube*, Adv. Math. **441** (2024), 109524.
- Tudományos Diákköri dolgozat és az arról szóló előadás a Szegedi Tudományegyetem helyi Tudományos Diákköri Konferenciáján 2024. május 7.
- Convex Geometry in Florence konferencián előadás 2024. június 12-14.
- Discrete Geometry Days³ 2024. július 2-5.
- The 7th Conference of PhD Students in Mathematics konferencián előadás 2024. július 5.
- Laplace-Pólya integrál kombinatorikai alkalmazásairól szóló cikk elkészítése 2024. nyár-ősz
- Országos Tudományos Diákköri Konferencián előadás 2025. tavaszán