

Aszimmetrikus Poisson-tényezővel rendelkező hiperelasztikus konstitutív modell fejlesztése polimer habokhoz

Development of a Hyperelastic Constitutive Model with Asymmetric Poisson's Ratio for Polymer Foams

KAMMERER Márton¹, BSc hallgató, Dr. KOSSA Attila², egyetemi docens

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék,
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.
www.mm.bme.hu

¹kammerer.marton@edu.bme.hu, ²kossa@mm.bme.hu

Abstract

This paper introduces a hyperelastic model for open-cell polymer foams, asymmetric in the Poisson's ratio to capture the distinct transverse deformations under uniaxial tension and compression. Built upon the compressible Ogden–Hill material model (named the Hyperfoam model in Abaqus), it is validated through large-scale bending and uniaxial tests, especially at large strains. The improved accuracy enhances numerical simulations in crash analysis and seat design.

Keywords: Poisson's ratio, hyperelastic material modeling, open cell foam

Kivonat

A cikk új hiperelasztikus konstitutív modellt mutat be nyílt cellás polimer habokra, amely a Poisson-tényezőjében aszimmetrikusan írja le az egytengelyű húzás és nyomás között tapasztalható eltérő keresztirányú alakváltozásokat. Az összenyomható Ogden–Hill-féle anyagmodell (amit az Abaqus-ban Hyperfoam modellnek neveznek) kiterjesztését nagyméretű hajlítókísérletek és egytengelyű vizsgálatok igazolták, különösen nagy alakváltozásoknál. Ezzel javult a numerikus szimulációk pontossága, ami kiemelten fontos például ütközésanalízisnél és ülések tervezésénél.

Kulcsszavak: Poisson-tényező, hiperelasztikus anyagmodellezés, nyílt cellás hab

1. BEVEZETÉS

A nyílt cellás polimer habok viselkedése egytengelyű húzás és nyomás esetén rendkívül nagy eltérést mutat. Ez nem csupán a feszültség-alakváltozás kapcsolatban mutatkozik meg, hanem drasztikus különbség tapasztalható a keresztirányú alakváltozásokban is. Egytengelyű húzás és nyomás esetén a keresztirányú alakváltozások eltérését alapvetően a cellaélek kihajlás-mechanizmusa indukálja [1], így alapvető dualitást állapíthatunk meg. A keresztirányú alakváltozásokat kis deformációk esetén a ν Poisson-tényezővel, míg véges alakváltozásoknál a Poisson-függvénnyel szokás jellemezni.

A nyílt cellás polimer habok mechanikai anyagmodellezésére legtöbb esetben az ide vonatkozó hiperelasztikus anyagmodellek családját alkalmazzuk. Ezek közül legelterjedtebben az Ogden–Hill-féle hiperelasztikus konstitutív modellt [2, 3] használják polimer habok modellezésénél. A modell elnevezése nem egységes, az ABAQUS kereskedelmi végelem szoftver "hyperfoam" néven tartalmazza. A W energiasűrűség-függvényt a következőképpen adja meg:

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} \left(\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3 + \frac{1}{\beta_i} \left(J^{-\alpha_i \beta_i} - 1 \right) \right), \quad (1)$$

ahol $\lambda_j = \varepsilon_j + 1$, ($j = 1, 2, 3$) jelöli a főnyúlást (principal stretch), J a térfogati hányadost, N pedig az illesztés rendjét. A modellben szereplő paraméterek: α_i, μ_i, β_i . Az ABAQUS a β_i paraméterek mellett bevezeti a ν_i

paramétereket is az alábbiak szerint:

$$\nu_i = \frac{\beta_i}{1 + 2\beta_i}, \quad \beta_i = \frac{\nu_i}{1 - 2\nu_i}, \quad (2)$$

A modell az egytengelyű húzó- és nyomóvizsgálatok során tapasztalható dualitást a keresztirányú alakváltozásokban tetszőlegesen magas N esetén sem képes pontosan leírni. Természetesen adódik az igény ennek a jelenségnek a leírására, amelyre a Poisson-tényezőben aszimmetrikus anyagmodellt alkothatunk meg, és végső soron a nyílt cellás polimer habok viselkedésének pontosabb leírását várhatjuk általános feladatok esetére is.

2. ASZIMMETRIKUS MODELL BEVEZETÉSE

A problémát jelen kutatásban úgy kívánjuk megközelíteni, hogy a ν Poisson-tényezőt keresztül a hyperfoam modellbe egy "kapcsolót" építünk be, úgy, hogy az a húzás és nyomás esetén tapasztalható különböző viselkedést képes legyen leírni. Ennek matematikai megfogalmazására részekben definiált függvényt hozunk létre, ahol a W alakváltozási energiasűrűség függvényt különbözőképpen írjuk le, és közöttük állapotjelző segítségével váltunk:

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{cases} W^c(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), & \psi < \psi_{\text{crit}}, \\ W^t(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), & \psi > \psi_{\text{crit}}, \\ \frac{1}{2} (W^c(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + W^t(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)), & \psi = \psi_{\text{crit}}, \end{cases} \quad (3)$$

ahol a „c” index a nyomásra (compression), míg a „t” index a húzásra (tension) utal. A feladat jellegének eldöntésére szolgál ψ skalárértékű állapotjelző. Az energiasűrűség függvény $\psi = \psi_{\text{crit}}$ helyen felvett értéke az átmenet simítása érdekében lett ilyen formában megválasztva. A ψ állapotjelzőre egy lehetséges és célszerű választás a $J = \det(\mathbf{F})$ térfogati hányados alkalmazása.

Fontos gyakorlati tapasztalat, hogy nyomás esetére magasabb rendű modellre van szükség ($N > 1$), míg húzásra az elsőrendű modell is legtöbbször megfelelő a csekély nemlinearitások miatt. Élve a szakirodalomban elterjedten és elfogadottan alkalmazott közelítéssel [4], nyomás esetére válasszuk meg a Poisson-tényezőt azonosan zérusnak, $\nu_i \equiv 0$. Ekkor (2) egyenlet szerint $\beta_i \equiv 0$, és így a hyperfoam modell térfogati részének határértéke

$$\lim_{\beta_i \rightarrow 0} \frac{1}{\beta_i} (J^{-\alpha_i \beta_i} - 1) = -\alpha_i \ln(J). \quad (4)$$

Ezzel az energiasűrűség függvény nyomás jellegű feladat esetére:

$$W^c(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3 - \alpha_i \ln(J)). \quad (5)$$

Húzás jellegű feladat esetére, mivel elsőrendű modellt használunk, a $\nu_i \equiv \nu$ feltétel automatikusan teljesül és a β paraméter kapcsolatba hozható a Poisson-tényezővel:

$$W^t(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{2\mu}{\alpha^2} \left(\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha + \lambda_3^\alpha - 3 + \frac{1}{\beta} (J^{-\alpha\beta} - 1) \right). \quad (6)$$

A húzásra (t) és nyomásra (c) felírt modellek paraméterei eltérnek, és illesztésük is külön történik egymástól. Végezetül az újonnan bevezetett modell általános megadása:

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3 - \alpha_i \ln(J)), & J < 1, \\ \frac{2\mu}{\alpha^2} \left(\lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha + \lambda_3^\alpha - 3 + \frac{1}{\beta} (J^{-\alpha\beta} - 1) \right), & J > 1, \\ \frac{1}{2} (W^c(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + W^t(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)), & J = 1. \end{cases} \quad (7)$$

3. FESZÜLTSGMEGOLDÁSOK EGYTENGELYŰ ESETRE

Az anyagmodellek illesztésének alapvető módszere az egytengelyű húzó- és nyomóvizsgálat, ezért célszerű meghatározni a modell által adott feszültségi választ ezekre az esetekre. Ilyen vizsgálatoknál általánosan a mérnöki feszültséget használjuk, melynek nagy alakváltozásokra használt kontinuummechanikai megfelelője a P első Piola–Kirchhoff-féle feszültség [5]. A k -adik főfeszültség a hyperfoam modell esetén [6]:

$$P_k = \frac{\partial W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}{\partial \lambda_k} = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\lambda_k \alpha_i} \left(\lambda_k^{\alpha_i} - J^{-\alpha_i \beta_i} \right), \quad (k = 1, 2, 3). \quad (8)$$

Nyomás esetére, amennyiben alkalmazzuk a kikötést, hogy $\beta_i \equiv 0$, akkor az alábbi megoldást kapjuk:

$$P_1^c = \sum_{i=1}^N \frac{2}{\lambda_1} \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} - 1). \quad (9)$$

Egytengelyű húzásra, ha a keresztirányú alakváltozásra a logaritmus alakváltozást használjuk, akkor a J térfogati hányados:

$$J = \lambda_1 \lambda_T^2, \quad \lambda_T = \lambda_1^{-\nu}, \quad (10)$$

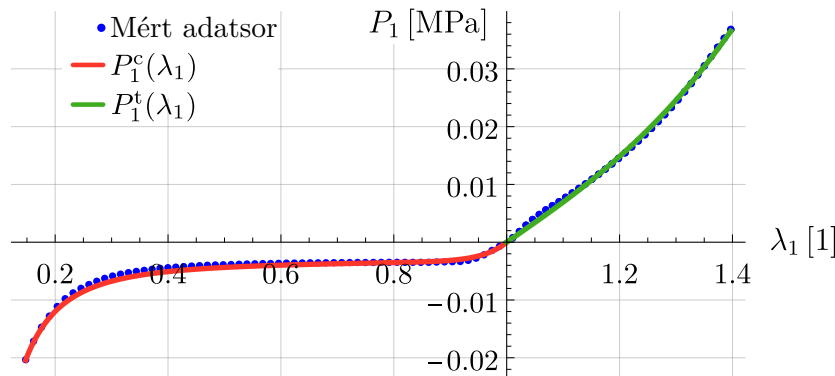
ahol λ_T a keresztirányú vagy transzverzális nyúlás. Mindezek figyelembe vételével kapjuk, hogy

$$P_1^t = \frac{2}{\lambda_1} \frac{\mu}{\alpha} (\lambda_1^\alpha - \lambda_1^{-\alpha\nu}). \quad (11)$$

Fontos megjegyezni, hogy mindkét esetben automatikusan teljesül a peremfeltétel, hogy a keresztirányú feszültségek zérusak.

4. MÉRÉSEK

A modell értékelésére hajlítókísérletet végeztünk nagyméretű próbatesten és ezt végelem szimulációkkal hasonlítottuk össze. A mérések egy egyedileg épített, 2 m hosszú polimer hab gerenda (20×20 cm négyzet keresztmetszetű) rögzítésére alkalmas gépen lettek elvégezve. Az egytengelyű húzó- és nyomóvizsgálatokat egy INSTRON 3345 egyoszlopos szakítógépen végeztük el. A kapott mérési adatok felhasználásával végeztük el a paraméter-illesztéseket. Az egytengelyű mérés adatsorát az illesztett modellel az (1) ábra mutatja, ahol jól megfigyelhető a nyílt cellás habokra jellemző nemlineáris feszültség-alakváltozás kapcsolat. A modell "húzott" és "nyomott" tagjára külön-külön lett elvégezve az illesztés, Wolfram Mathematica program segítségével [6, 7]. Az így kapott paraméterek az (1) táblázatban találhatók.



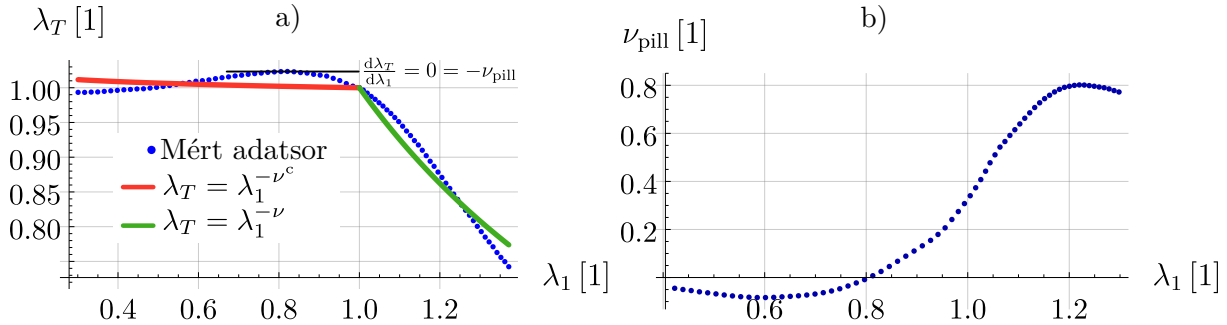
1. ábra. A mérés alapján meghatározott $P_1(\lambda_1)$ kapcsolat és az erre illesztett aszimmetrikus modell.

Aszimmetrikus modell illesztett paraméterei a vizsgált nyílt cellás habra.

1. táblázat

$J > 1$ ("húzás")		$J < 1$ ("nyomás")			
α [–]	5.77745	α_i [–]	25.0357	–0.19622	–0.217785
μ [MPa]	0.022607	μ_i [MPa]	0.0411286	–0.0481767	0.047072
ν [–]	0.499	ν_i [–]		0	
β [–]	249.5	β_i [–]		0	
R_t^2	0.9973	R_c^2		0.9995	

A Poisson-tényező meghatározására az egytengelyű mérések során készített binarizált videófelvételek kiértékelésével került sor. A mért adatsort és az illesztett $\lambda_T = \lambda_1^{-\nu}$ függvényt a (2) ábra mutatja. Az illesztett érték húzásra nem elfogadható ($\nu = 0.812$) egy izotrop kontinuum modell esetén [5]. Fizikai követelmény, hogy $\nu \leq 0.5$, így $\nu = 0.499$ lett alkalmazva húzás esetére, elkerülve az összenyomhatatlanságból adódó szingularitásokat.

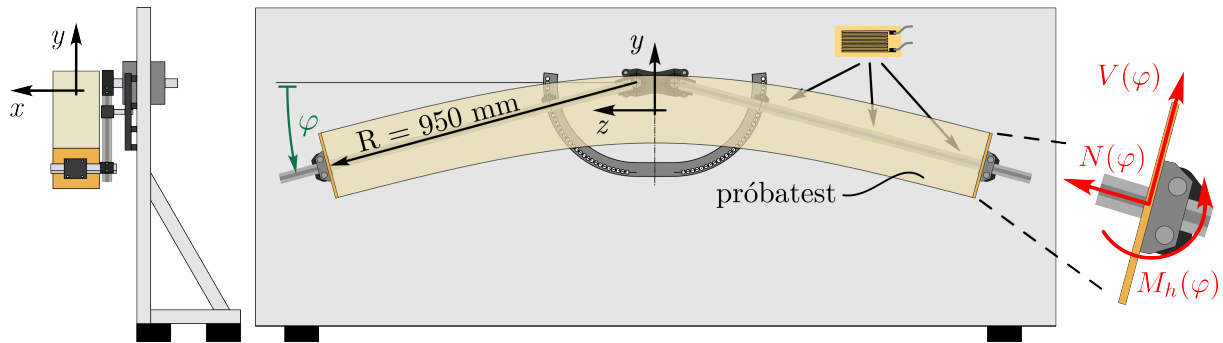


2. ábra. a) Keresztirányú nyúlás az axiális nyúlás függvényében, binarizált videófelvétel alapján. b) A mért adatsor numerikus deriválásával kapott pillanatnyi Poisson-tényező.

Fontos szempont volt, hogy a hajlítókísérletet nagy méretben vitelezzük ki, a cellahatás és a mérési pontatlanságok minimalizálása céljából. A hajlítókísérletet a modell értékelésére végeztük és keresztmetszeti jellemzők (a_K , a négyzet keresztmetszet felső oldalhossza és b_K alsó oldalhossza, lásd (6) ábra) továbbá reakció komponensek (N , V , M_h) lettek mérve. Előbbi a szakaszos felterhelés lépései között hosszmeréssel, utóbbi nyúlásmérés segítségével. A nyúlásmérés három különböző ponton történt a (3) ábra szerint, teljes hidakat alkalmazva. Ebből a három, egymástól nem teljesen független mennyiségből egy – kalibráció útján meghatározott – $\mathbf{X}$ konstans mátrixszal lett számítva az egyes reakció komponens:

$$\underbrace{\mathbf{F}(\varphi)}_{=[N(\varphi) \ V(\varphi) \ M_h(\varphi)]} = \mathbf{X} \underbrace{\mathbf{S}(\varphi)}_{=[S_1(\varphi) \ S_2(\varphi) \ S_3(\varphi)]}, \quad (12)$$

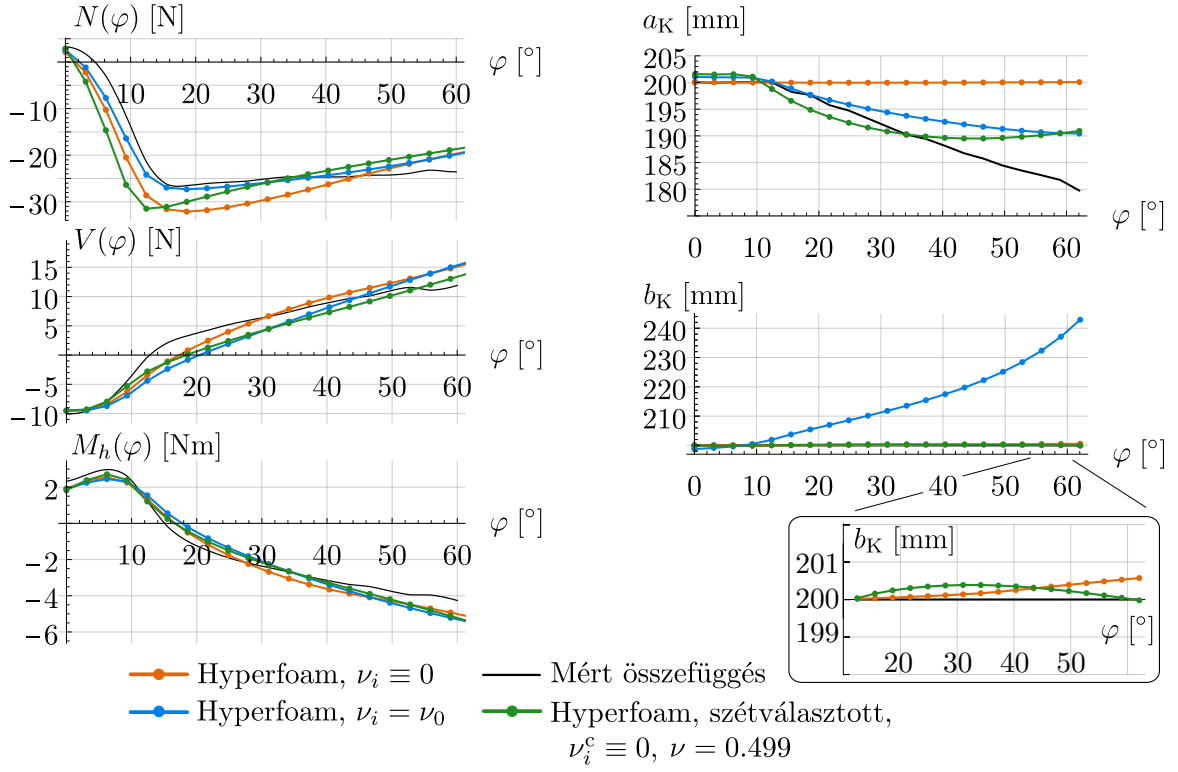
ahol $\mathbf{F}(\varphi)$ az egyes reakció komponens tartalmazó vektor, míg $\mathbf{S}(\varphi)$ a nyúlásmérés feszültség-jeleit tartalmazó vektor. A mérés során a mérőberendezés karjainak és a próbatest önsúlyának hatása nem lett kiküszöbölve, ezek rendre az adatfeldolgozás vagy a VEM szimulációk során lettek figyelembe véve. A mérőgép konstrukcióját a (3) ábra mutatja, és a mérések kiértékelt eredménye a (4) ábrán látható.



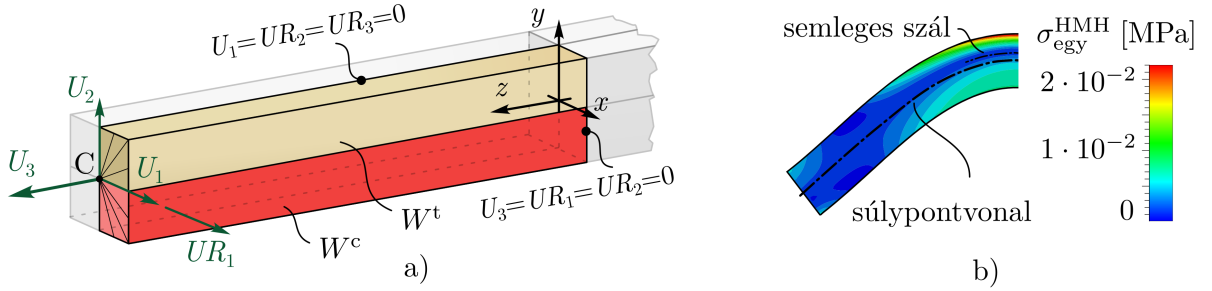
3. ábra. A hab gerenda hajlítására alkalmas mérőgép konstrukciója és az alkalmazott jelölések.

5. VEM SZIMULÁCIÓK

A mérőberendezést azzal a szemlélettel terveztük meg, hogy az alkalmazott peremfeltételek kézenfekvően szimulálhatók legyenek. A szimulációk ABAQUS 2022 kereskedelmi végeelem szoftverben lettek elvégezve [8]. A bevezetett anyagmodell az (5) ábrán látható végeelem modellel lett közelítve, a kezdeti semleges felületet használva a szétválasztásra. A szétválasztott modellhez két különböző (W^c és W^t), az illesztés során meghatározott paraméterű hyperfoam anyagmodell lett hozzárendelve. Fontos, hogy a semleges szál eltolódása miatt a szétválasztott végeelem modell csak közelítés a bevezetett konstitutív modellre, azonban amennyiben így előrelépés tapasztalható, akkor a további kutatás megalapozottnak tekinthető.



4. ábra. A hajlítómérés eredményei (folytonos) és a VEM szimulált modellek eredményei a reakciókra és a keresztmetszeti jellemzőkre.



5. ábra. a) A szétválasztott végelem modell W^c és W^t anyagtulajdonságokkal, kihasználva a lehetséges szimmetriafeltételeket. U_i és UR_i az x, y, z tengelyekhez tartozó elmozdulások, illetve szögelfordulások. b) Feszültségeloszlás a hajlított hab gerendában, jelölve a semleges szál eltolódását.

6. KIÉRTÉKELÉS

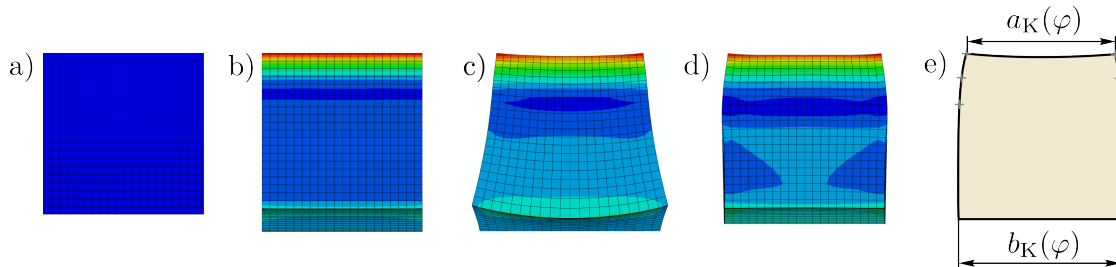
A szimulált adatok eltérését a mért értékektől a gyökös középérték (RMSE) segítségével számszerűsíthetjük:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2}, \quad (13)$$

ahol Y_i az egyes mért érték, míg y_i valamely modell által adott érték és n a mért adatsor elemszáma. Kisebb RMSE kisebb eltérést jelent. A (4) ábrán látható eredmények gyökös eltérését a (2) táblázat tartalmazza.

Megállapítható, hogy amíg a reakció leírásában hasonlóképpen jól teljesít a bevezetett konstitutív modellt közelítő szétválasztott végeselemes modell, addig a keresztmetszeti jellemzőket sokkal pontosabban írja le, ahogy az a (6) ábrán érzékelhető.

	$\nu \equiv 0$ (hyperfoam)	$\nu_i = \nu_0$ (hyperfoam)	szétválasztott modell
RMSE, $N(\varphi)$	4.99422	3.26705	5.90627
RMSE, $V(\varphi)$	1.99231	2.63612	1.8595
RMSE, $M_h(\varphi)$	0.484008	0.627002	0.544303
RMSE, $a_K(\varphi)$	10.813	4.81093	4.26205
RMSE, $b_K(\varphi)$	0.274138	19.1843	0.249382



6. ábra. Keresztszettek, a) deformálatlan, b) hyperfoam, $\nu_i \equiv 0$, c) hyperfoam, $\nu_i = \nu_0$, d) szétválasztott végelem modell, e) méréssel megállapított deformált keresztmetszet jelleghelyes ábrája.

7. ÖSSZEGZÉS

Nyílt cellás polimer habok esetén megfigyelhető, hogy húzás és nyomás esetén a keresztirányú alakváltozások jelentősen eltérnek. A cikkben bemutatott kutatás célja egy olyan hiperelasztikus anyagmodell kifejlesztése, amely képes külön kezelni a húzás és a nyomás során fellépő keresztirányú alakváltozásokat, azaz aszimmetrikus Poisson-tényezőt alkalmaz. Ennek érdekében az általánosan alkalmazott összenyomható Ogden–Hill (hyperfoam) konstitutív modellt módosítottuk: a térfogati hányados (J) alapján eltérő paraméterű anyagmodelleket alkalmazunk.

A modell paramétereit egytengelyű húzó- és nyomóvizsgálatok kísérleti adatai alapján illesztettük. A kapott aszimmetrikus anyagmodellt egy nagyméretű polimerhab-gerenda hajlítókísérletével értékeltük egyedi mérőberendezésen. A végeselemes (ABAQUS) szimulációk során külön-külön rendeltünk húzott és nyomott zónát a gerendához, így közelítve a bevezetett anyagmodellt. Az eredmények azt mutatják, hogy az aszimmetrikus modell a reakciók leírásában a hagyományos hyperfoam modellel azonos pontosságot ér el, ugyanakkor a keresztirányú deformáció és a keresztmetszeti jellemzők alakulását – a standard illesztési stratégiákhoz képest – jóval pontosabban képes előre jelezni.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Jelen kutatás a Kulturális és Innovációs Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával valósult meg. Pályázati azonosító: FK142457. A jelen cikkben bemutatott tudományos eredmények az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíj támogatásával készültek.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Gibson, L. J. és Ashby, M. F. *Cellular Solids: Structure and Properties*. Cambridge University Press. 1997.
- [2] Ogden, R. W. *Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids*. Proc. R. Soc. Lond. The Royal Society. 1972. 1575. 567–583. old.
- [3] Storåkers, B. *On material representation and constitutive branching in finite compressible elasticity*. J. Mech. Phys. Solids. Elsevier BV. 1986. 2. 125–145. old.
- [4] Mills, N. J. *Polymer Foams Handbook*. Butterworth-Heinemann. 2007.
- [5] Holzapfel, A. G. *Nonlinear solid mechanics II*. John Wiley & Sons, Inc. 2000.
- [6] Kossa, A. és Berezvai, S. *Novel strategy for the hyperelastic parameter fitting procedure of polymer foam materials*. Polymer Testing. Elsevier BV. 2016. 149–155. old.
- [7] Yan, S. és tsai. *Novel strategies for parameter fitting procedure of the Ogden hyperfoam model under shear condition*. European Journal of Mechanics - A/Solids. Elsevier BV. 2021. 104154. old.
- [8] *ABAQUS Documentation, Version 2022*. Dassault Systèmes Simulia Corp, United States.