

Söpört felületek rekonstrukciója mért adatok alapján

Kovács István, Várady Tamás

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Kivonat A digitális alakzatrekonstrukció célja, hogy mért pontfelhők alapján elkészítsük egy tárgy számítógépes modelljét. A mért pontokra egy háromszöghálót kell illeszteni, majd azt szét kell bontani különálló tartományokra. A szegmentált tartományok automatikus osztályozása során minden tartományhoz egy optimális matematikai felülettípust rendelünk; ez alapján lehet az egyes felületeket megilleszteni. Célunk egy speciális felülettípus, az ún. söpört felületek felismerése és rekonstrukciója. Ezek a felületek egy síkbeli profil eltolásával keletkeznek egy ún. gerinc- vagy vezérgörbe mentén. Az általunk fejlesztett algoritmus kiküszöböli a zajos és hiányos adatokból származó problémákat. Először egy feljavított görbületi vektormezőt hozunk létre, amelyre egy görbületi rácsot helyezünk. Ez alapján meghatározható egy söprő síksereg, és az ahhoz tartozó optimális profil- valamint vezérgörbe. A felület létrehozása után a rekonstrukciót akkor minősítjük sikeresnek, ha az illesztés tolerancián belül marad. Az alábbiakban bemutatjuk az algoritmus felépítését, és valós adatokból származó modelleken szemléltetjük a feladat nehézségét és az eredményeket.

1. Bevezető

A digitális alakzatrekonstrukció vagy más néven mérnöki visszafejtés a számítógépes geometriai modellezés egy izgalmas és korszerű területe [8]. Ezt a technológiát olyan esetekben alkalmazzák, amikor egy adott, fizikailag létező és mérhető (leszkennelhető) objektumnak nincs digitális modellje, viszont szükségünk van egy ilyen reprezentációra különböző komplex számítások végrehajtása érdekében. Igen sok mérnöki, orvosi és kultúrtörténeti alkalmazás van: ilyen például a régén gyártott alkatrészek rekonstrukciója, új autómoklek létrehozása gipszminták alapján, vagy egyénre szabott hallókészülékek, fogsorok, protézisek tervezése és gyártása.

A digitális alakzatrekonstrukció folyamata a következő technikai fázisokra tagolható: (1) 3D-s mérés (szkenelés), (2) pontfelhők szűrése és egyesítése, (3) háromszögháló létrehozása, (4) háromszögháló egyszerűsítése és javítása, (5) szegmentálás (tartományokra bontás), (6) tartományok osztályozása, (7) felületek illesztése, (8) összekötő felületek (pl. lekerekítések) illesztése, (9) felületek tökéletesítése (kényszerek alkalmazása, simítás), végül pedig (10) exportálás CAD-CAM rendszerekbe további alkalmazások érdekében.

A *szegmentálás* célja, hogy a háromszöghálót — különböző lokális geometriai jellemzők alapján — különálló tartományokra osszuk. Először le kell választanunk az erős görbülettel bíró *elválasztó* tartományokat, majd a megmaradó részeket — az *elsődleges* tartományokat — osztályoznunk kell aszerint, hogy melyik a legjobb matematikai felületreprezentáció az adott tartomány adatpontjainak illesztésére. Az elsődleges tartományok struktúrája megfelel a lapok struktúrájának a végső CAD modellben. A szakirodalom a szegmentációt az alakzatrekonstrukció legkritikusabb, a végső modell minőségét alapvetően meghatározó fázisnak tekinti [8]. A továbbiakban feltételezzük, hogy a szegmentáció már lezajlott, és adott jelen algoritmus inputja, egy elsődleges tartomány.

A tartományok *osztályozása* szintén fontos lépés, ugyanis célunk az eredeti alkatrész felületeinek lehető legtökéletesebb rekonstrukciója. Ez nem mindig egyszerű, hiszen zajos adataink vannak és csak annyit tudunk, hogy egy ismeretlen matematikai felület bizonyos részalmazza jól közelíti az adatpontjainkat. Az osztályozás általában több lépésben történik: hipotéziseket állítunk fel, és az osztályozást addig folytatjuk, amíg a tartomány ki nem elégíti a hipotézisben kijelölt felülettípus geometriai tulajdonságait. Egyszerű felülettípusokkal indulunk, majd egyre összetettebb felületekkel próbálkozunk:

1. Sík
- 2a. Kihúzott felület (henger; általános profil) [extrusion]
- 2b. Ferdén kihúzott felület (kúp; általános profil) [drafted extrusion]
3. Forgásfelület (gömb; tórusz; általános profil)
4. Általános, állandó profilú söpört felület [sweeping]
5. Változó profilú söpört felület [lofting]
- 6a. Nyílt szabadformájú felület
- 6b. Zárt szabadformájú felület

Feladatunk annak a hipotézisnek az eldöntése, hogy az adott tartomány jól közelíthető-e egy jelenleg még ismeretlen, söpört felülettel. Ha igen, meghatározuk az optimális geometriai paramétereket; ha nem, továbblépünk. Ha a söprő sík tulajdonság érvényben marad, ezt hasznosítani lehet változó profilú felületek rekonstrukciójánál, illetve szabadformájú felületek paraméterezésekor.

A *söpört felületek* egy síkbeli profil eltolásával keletkeznek egy másik görbe, az ún. gerinc- vagy vezérgörbe mentén. Ha a vezérgörbe egy egyenes vagy egy kör, és a profil nem változik, akkor egyszerű kihúzott, illetve forgásfelületeket hozunk létre. Általános söpört felületeknél a vezérgörbe egy általános térgörbe, melyhez egy söprő sík és — egy adott rotációs függvény segítségével definiált — koordináta-rendszer tartozik. A profilgörbe lehet állandó, skálázott vagy változó jellegű.

Legyen $p(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ folytonosan paraméterezett síkbeli ($z = 0$) profilgörbe sereg, $\gamma(u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható, önmagát nem metsző vezérgörbe, $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ rotációs függvény, ami a vezérgörbére merőleges, azaz $\langle \dot{\gamma}(u), r(u) \rangle = 0$. Tehát u a hosszanti paraméter, amely kijelöli a söprő sík pozícióját, v a keresztirányú paraméter, amely az aktuális profilgörbe egy pontját határozza meg az adott síkban. Legyen $M_r(u)$ az a forgatásmátrix, ami az $(1, 0, 0)^T$ vektort

az $r(u)$ irányába, a $(0, 0, 1)^\top$ vektort pedig a $\dot{\gamma}(u)$ irányába forgatja, és jelölje $M_{sc}(u)$ a hosszanti irány szerint értelmezett skálázás mátrixát. Ekkor a söpört felület egyenlete:

$$S(u, v) = \gamma(u) + M_r(u)M_{sc}(u)p(u, v).$$

Állandó profilú felületek esetén az egyenlet leegyszerűsödik:

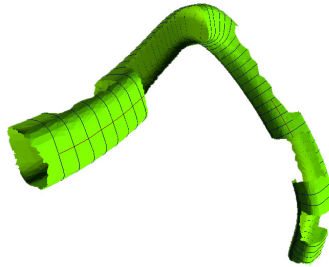
$$S(u, v) = \gamma(u) + M_r(u)p(v).$$

Az ilyen típusú felületek nagy gyakorisággal fordulnak elő a számítógépes tervezés során. Az alábbiakban bemutatásra kerülő algoritmus diszkrét adatokkal dolgozik, a görbéket törtvonalas formában hozzuk létre. A parametrikus görbe approximáció ismert feladat, ezzel itt nem foglalkozunk.

A feladat nehézsége. A „söpört felület” hipotézis eldöntéséhez diszkrét, zajos adatok alapján kell különböző görbületi jellemzőket megbecsülnünk, és egyenlőtlen eloszlású háromszögtartományokon kell optimális görbületi vonalakat meghatározni. Zajos adatok alapján számoljuk a söprő síkokat és a reprezentáció görbéit, így a zaj kiszűrése, illetve az adatok simítása az algoritmus valamennyi lépésénél kritikus kérdés.

A legtöbb mérnöki alkatrésznél az alkotó felületek áthatják egymást, és a különböző felületmetszések eredményeként az alkatrészt részfelületek határolják. Ennek megfelelően gyakran előfordul, hogy a keletkező söpört tartomány is „hiányos”, más szóval lyukas. Arra is számítanunk kell, hogy a söpört felületet a végeinél nem feltétlenül a vezérgörbére merőleges síkkal vágják el, így a söprő síkok itt sem biztos, hogy kimetszik a teljes profilgörbét. Algoritmusunknak tehát hiányos görbületi rácsokat is kezelnie kell, a lyukakat ki kell kerülni, vagy át kell ugrani, és a profilt különböző részmetszetekből kell előállítani. A fentieket szemlélteti az 1. ábra.

Jelen publikáció a következőképpen tagolódik: a 2. fejezetben görbületi jellemzők becslésével, valamint görbületi vektormezők egységesítésével és simításával foglalkozunk. A 3. fejezetben főgörbületi görbék követését és görbületi rácso generálását ismertetjük. A 4. fejezetben az optimális profil- és vezérgörbe meghatározásával foglalkozunk, majd a kapott felületek kiértékelésére kerül sor. Végül további kutatási témákra teszünk javaslatot.



1. ábra. Zajos és lyukas felülettartomány

2. Görbületi vektormezők létrehozása és javítása

A továbbiakban különböző differenciálgeometriai jellemzőkkel számolunk. Ezért röviden összefoglaljuk a legfontosabb alapfogalmakat és összefüggéseket.

2.1. Alapfogalmak

Legyen $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ paraméterezett görbe. Ekkor a görbülete $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\kappa(u) = \frac{|\dot{\gamma}(u) \times \ddot{\gamma}(u)|}{|\dot{\gamma}(u)|^3}.$$

Legyen $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ egy paraméterezett felület, és legyen t_p a felület egy $r(p)$ pontbeli érintővektora, n_p pedig a normálvektora. A t_p érintővektor és az n_p felületi normális által kifeszített sík a felületből egy görbét metsz ki, melynek görbülete $r(p)$ -ben a t_p irányhoz tartozó normálgörbület abszolútértéke.

A normálgörbület definíciójából adódóan elég csak az $r(p)$ -beli érintősíkban egy $r(p)$ középpontú egységgörőről választani a t_p érintővektort. Így a normálgörbületek egy egységgörön értelmezett folytonos függvényt határoznak meg, amely felveszi a minimumát és maximumát is. Ezeket nevezzük $\kappa_{\min}(p)$ és $\kappa_{\max}(p)$ főgörbületeknek, a hozzájuk tartozó $t_{\min}$ és $t_{\max}$ érintővektorokat pedig főgörbületi irányoknak. A felület bármely pontjában van két egymásra merőleges főirány. Kivételt képeznek az ún. umbilikus pontok, amikor a két főgörbület azonos, és a görbület értéke minden irányban ugyanaz, ily módon nincs értelme minimumról és maximumról beszélni. Az umbilikus pontok lokálisan gömb- vagy síkszerű felületeken fordulnak elő [5].

A Gauss-görbület, illetve az átlaggörbület az alábbi összefüggések alapján számolható:

$$G = \kappa_{\min} \kappa_{\max}, \quad H = \frac{\kappa_{\min} + \kappa_{\max}}{2},$$

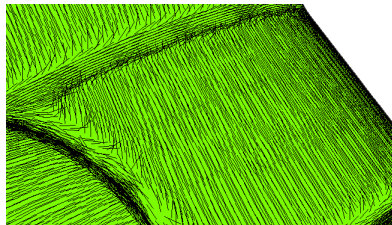
és ezek alapján ki lehet számolni a főgörbületi értékeket is:

$$\kappa_{\min, \max} = H \pm \sqrt{H^2 - G}.$$

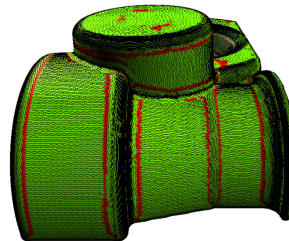
2.2. Görbületi jellemzők becslése

A görbületi jellemzők diszkrét adatok alapján történő becslésére számos algoritmus található a szakirodalomban [2,3]. A *síkszerűség* egy skaláris jellemző, amely megadja, hogy egy adott pont környezete síknak tekinthető-e. A *Gauss-görbület* és az *átlaggörbület* fontos skaláris mennyiségek, melyeket az adott pont körüli háromszöglegyező alapján lehet megbecsülni.

A főgörbületi irányokat — $\kappa_{\min}$ és $\kappa_{\max}$ — lokális hengerillesztés alapján határozzuk meg, ez egy sajátérték-probléma megoldására vezethető vissza. Elegendő csak a $\kappa_{\min}$ főirány meghatározása, hiszen a $\kappa_{\max}$ erre merőleges. Egy háromszögtartomány főgörbületi irányait szemlélteti a 2. ábra; a pontokhoz rendelt vektorok az erősebb görbület irányába állnak be.



2. ábra. Főgörbületi irányok becslése



3. ábra. Görbület-stabilitás térkép

2.3. Vektormezők egységesítése és simítása

Egy konzisztens görbületi rácsstruktúra létrehozásához szükség van egy egységes vektormezőre, amely stabil a vonalkövetés szempontjából, azaz nincsenek benne zajos résztartományok és nincsenek benne ún. min–max váltások. Szükséges feltétel, hogy a tartomány ne tartalmazzon umbilikus pontokat, amely kizárná, hogy a tartományt egy összefüggő görbületi rácsstruktúrával paraméterezzük.

Előfordulhat, hogy a létrehozandó görbületi rács vonalai a minimális görbületek mentén haladnak, majd a maximális görbületi irányba váltanak át — ezt nevezzük min–max váltásnak. Ezt az állapotot szemlélteti a 4.1. ábra, ahol látszólag nem lehet egy egységes rácsstruktúrát létrehozni. A vonalkövetési eljárások terminálni fognak, hiszen a min–max váltások határán a görbületi irányok becslése nagyon bizonytalan (4.2. ábra). Ezen probléma elkerülésének egy lehetséges megoldása, hogy detektáljuk a min–max váltás határát, majd a vonalkövetés során azt „átugorjuk”. Egy másik lehetséges megoldás, amelyet a következőkben részletezni fogunk, hogy felismerjük a régiók határát és eldöntjük, hogy a továbbiakban a minimális vagy maximális görbületi vektormező szerint kell haladnunk. Mindezt a 4. ábrán látható képsorozat szemlélteti.

Definíció szerint (ld. később) a *gyenge görbületű* (instabil) tartományok esetén a vektormezőnek nagy az irány szerinti szórása, azaz elegendően közel esnek egymással nagy szöget bezáró vektorok. (A közelség és a szög itt paraméterként szerepel, ez tipikusan a háromszöghálón 1 vagy 2 sugarú legyező, illetve a szögeltérés nagyobb, mint 30° .) A fentieknek megfelelően a min–max váltások határa mindig gyenge görbületű. A továbbiakban két egymáshoz közel levő vektor állását akkor tekintjük azonosnak, ha az általuk bezárt szög kisebb mint 90° .

A következő fejezetekben bemutatásra kerülő vektortérjavító algoritmus négy szakaszra bontható:

1. Gyenge görbületű tartományok detektálása
2. A min–max váltások felismerése és a résztartományok besorolása min. vagy max. görbület szerint
3. A vektormező egységesítése a fentiek alapján
4. A vektormező simítása a tartományok határán és a gyenge görbületű részekben

2.4. Görbület-stabilitás szűrő

A görbület-stabilitás szűrő megkeresi a felület azon pontjait, ahol a becsült, lokális görbületi irányok nagyjából egy irányba állnak. Ezeket nevezzük erős görbületű pontoknak. Minden más esetben a pontot gyenge görbületű (instabil) pontnak nevezzük; az ilyen pontokban a görbületi vonalkövetés elakadna, vagy rossz eredményt adna (3. ábra). Jelölje $\kappa_{\min}$ a min. görbületi irányokat kijelölő egységvektor mezőt. Vegyük egy adott p pont szomszédainak n -elemű $\Omega(p, n)$ halmazát, ahol el szeretnénk dönteni, hogy a görbület stabil-e egy előírt ε tűréshatáron belül. A p pont erős görbületű, ha

$$\forall p_u, p_v \in \Omega(p, n) : \langle \kappa_{\min}(p_u), \kappa_{\min}(p_v) \rangle > 1 - \varepsilon.$$

2.5. Régiók osztályozása

A görbületi rácsok elkészítéséhez szeretnénk egy olyan egységes görbületi vektormezőt létrehozni, amelyben nincsenek gyenge görbületű régiók, azaz lokálisan a vektorok tűréshatáron belül egy irányba néznek. Előfordulhat, hogy a felület egyes különálló min–max váltások által határolt tartományain belül létrehozható a rács, de globálisan nem. Min–max váltások mentén a határolt tartományok vektormezői merőlegesek egymásra, ezért ezeket a tartományokat összehangoljuk úgy, hogy egy kiinduló minimális görbülethez tartozó tartományhoz hangoljuk a többi, és a tartományok pontjait halmazokba ($V_{\min}, V_{\max}$) rakjuk aszerint, hogy azokhoz a $\kappa_{\min}$ vagy $\kappa_{\max}$ vektormezőt használjuk az összehangolás után.

Első lépésben egy p_0 kiindulópontot választunk $V_{\min}$ -be, majd szélességi bejárással minden erős görbületű p pontról eldöntjük, hogy $\kappa_{\min}(p)$ a szomszédai közül eddig bejárt pontokon a $V_{\min}$ vagy $V_{\max}$ -beli $\kappa_{\min}$ vektorokkal áll-e együtt tűréshatáron belül. A pontok bejárása után minden erős görbületű pontot besoroltunk vagy a $V_{\min}$, vagy a $V_{\max}$ halmazba.

2.6. Vektormezők egységesítése és a gyenge görbületű részek simítása

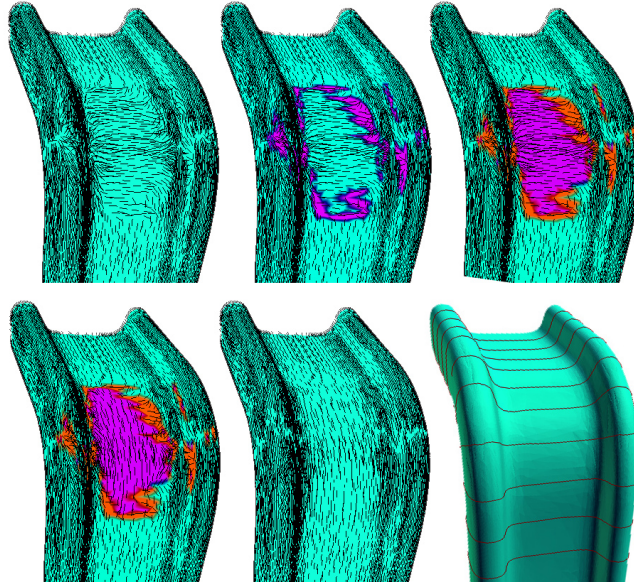
Az előzőekben leírt algoritmus alapján már létrehozható egy egységes vektormező, ahol $\kappa_{\min-\max}$ a $V_{\min}$ régiókhoz tartozó pontokhoz a $\kappa_{\min}$ -t, a $V_{\max}$ régiókhoz tartozókhöz pedig a $\kappa_{\max}$ -ot rendeli. $\kappa_{\min-\max}$ -ot a gyenge görbületű részekben is értelmezzük. Legyen p egy gyenge görbületű pont, és jelöljük $\Omega(p, m)$ -mel azon pontok halmazát p körül, amelyek erős görbülettel rendelkeznek. Ezen pontok $\kappa_{\min-\max}$ értékeinek átlaga:

$$A(p) = \sum_{q \in \Omega^+(p, m)} \frac{\kappa_{\min-\max}(q)}{m}.$$

A fentiek alapján

$$\kappa_{\min-\max}(p) = \begin{cases} \kappa_{\min}(p), & \text{ha } p \in V_{\min}(p) \\ \kappa_{\max}(p), & \text{ha } p \in V_{\max}(p) \\ A(p), & \text{egyébként} \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy a fenti lépéseket érdemes lehet megismételni, azaz még egyszer lefuttatni a gyenge görbület szűrést az új $\kappa_{\min-\max}$ vektormezőn, és újra elvégezni az átlagolást a gyenge görbületű pontokra. Az elkészült egységes $\kappa_{\min-\max}$ vektormező most már alkalmas lesz görbületi vonalak létrehozására (4.5. ábra).



4. ábra. Vektormező stabilizálása: 1. Lokálisan becsült vektormező, 2. Gyenge görbületű tartományok kijelölése és 3. osztályozása, 4. Egységesítés, 5. Összevonás és simítás, 6. Profilgörbe sorozat.

3. Görbületi vonalak és görbületi rácsok

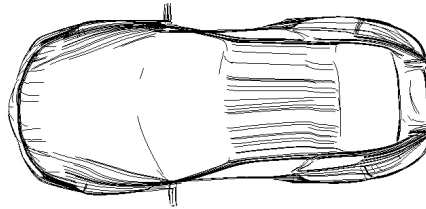
3.1. Görbületi vonalak

Adott egy háromszögháló, és mindegyik csúcsában egy görbületi irány. Ez a diszkrét vektormező folytonosan kiterjeszthető a háromszögek éleire és belső pontjaira is, ha a csúcsbeli görbületvektorokat a háromszög baricentrikus koordinátái szerint súlyozzuk. Célunk egy olyan felületi görbét találni, amelynek deriváltja mindig a vektormező irányába mutat, azaz meg kell oldanunk a $\dot{\varphi} = \kappa_{\min}$ vagy $\dot{\varphi} = \kappa_{\max}$ differenciálegyenletet. A háromszögelt felületen egy törtvonalat állítunk elő, melynek pontjai a háromszögháló élein vagy a háromszögek belsejében lehetnek. A törtvonal — $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ — mindig paramétrezhető ívhossz vagy a görbületi skalármező szerint. G pontjait $V(G) = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$, éleit $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ jelöli, ahol e_k a p_{k-1} és p_k pontok között fut.

A vonalkövetés esetén élről élre lépünk, de a törtvonal tartalmazhat belső háromszögpontokat is. A maximális lépéshossz legyen $s_{\max}$. Vegyünk egy p_i pozíciót, amely az l_i élen és/vagy a h_i háromszögben van. A következő p_{i+1} pont

meghatározásához vegyük a p_i -ben becsült felületi normálist n_i -t, és metsszük el h_i éleit a p_i -n átmenő $n_i \times \kappa(p_i)$ normálvektorú síkkal. Így egy új q metszéspontot kapunk, feltéve, hogy $|q - p_i| < s_{\max}$; egyébként az új p_{i+1} pont a háromszög belsejében lesz. Az eljárást az ismert Runge–Kutta módszerrel finomíthatjuk. Határozzuk meg a következő q pontot a fenti algoritmus segítségével, majd definiáljunk egy közbülső $q^* = \frac{p_i + q}{2}$ pontot, majd q^* -ből kiindulva számoljuk ki p_{i+1} -et.

Belső pontok esetén a vonalkövetés két ellentétes irány szerint indul, és a két darabot a későbbiekben egybe kell építeni. A vonalkövetés terminálódik, ha kiérünk a tartomány szélére, vagy ha zajos, gyenge görbületű régióba érünk. A tartományok széle ez esetben természetesen magában foglalja a lyukak által keletkezett határokat is. Egy zajos görbületi vonalsereget szemléltet a 5. ábra.

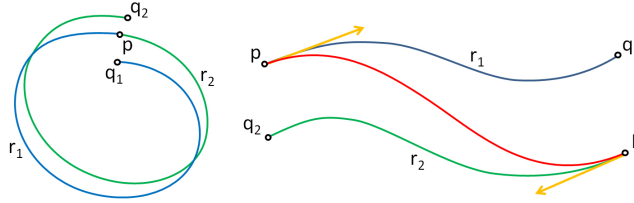


5. ábra. Görbületi vonalak egy autómodellen

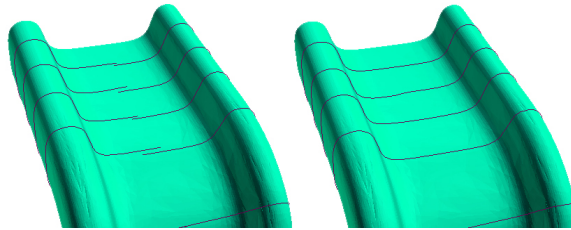
Külön figyelmet érdemel a zárt görbék követése. Tételezzük fel, hogy egy topológiailag hengerverszerű felületen szeretnénk létrehozni egy zárt görbületi vonalat, de a p pontból elindított vonalkövetés nem biztos, hogy visszajut p -be a vektormező zajossága és a becslések bizonytalansága miatt. Ugyanakkor zárt görbék esetén is elvárható, hogy a görbe törtvonala a kiinduló pont ε sugarú környezetébe kerüljön, és ezt a szituációt könnyű felismerni. Formálisan, a görbét zártnak minősítjük, ha találunk egy q_1 pontot, melyre $p \neq q_1$, és $|p - q_1| < \varepsilon$. Feltételezzük, hogy amikor p -ből a másik irányba indulunk el, akkor hasonlóképpen találunk egy másik közeli q_2 pontot is, ezt szemlélteti a 6. ábra. Tételezzük fel, hogy két parametrizált görbét, $r_1(u)$ -t és $r_2(u)$ -t össze akarunk simítani oly módon, hogy a keletkező $r(u)$ görbe örökölje az r_1 kezdőpontbeli, illetve az r_2 végpontbeli pozícióját és érintőjét. Ekkor harmadfokú Hermite súlyfüggvények alkalmazásával

$$r(u) = r_1(u)H(u) + r_2(u)H(1 - u), \text{ ahol } H(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1$$

Ugyanezt a logikát alkalmazzuk zárt görbék előállítására; ha $r_1(u)$ p -ből q_1 -be fut, és $r_2(u)$ q_2 -ből p -be, az összesített $r(u)$ görbe p -ből indul és p -be érkezik, valamint megőrzi az eredeti p -beli irányvektort is. Ezt az eljárást szemlélteti a 7. ábra: baloldalt a numerikusan nem zárodó vonalak, jobboldalt a javított vonalak láthatók.



6. ábra. Pontatlan zárt görbék és ezek összesímítése



7. ábra. Zárt görbék korrekció előtt és után

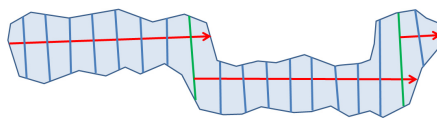
3.2. Görbületi rácsok

Görbületi rácsnak nevezünk egy négyzetrácsszerűen elhelyezkedő vonalsereget, amely egy görbületi vektormező $R_v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ és a rá merőleges vektormező $R_h = \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$ görbéiből áll. A görbületi rácsok elvárt tulajdonsága, hogy a görbék eloszlása megfeleljen a görbületi skalármezőnek, azaz nagyobb görbületű részekben a vonalak sűrűbbek, a kisebbekben ritkábbak legyenek. A görbületi rács lokálisan mindenhol létezik, de általános esetben egy egységes összefüggő rács nem mindig hozható létre a felületen található umbilikus pontok miatt.

Söpört felületek esetén a rács mindig létezik, de a lyukak jelenléte miatt a rácsnak csak egy részhalmazát tudjuk előállítani. Az R_v görbék fussanak keresztirányban a profilok mentén, az R_h görbék pedig hosszanti irányban a vezérgörbével „párhuzamosan”. Paraméterezzünk egy kiválasztott R_h hosszanti vonalat a görbületi skalármező segítségével, és generáljuk a v_i keresztirányú vonalakat hozzávetőlegesen a hosszanti görbületek szerinti osztás alapján. Vegyük a hosszanti görbe egy e szakaszát, és legyen $l(e) = |e|(c + \kappa(e))$, ahol $\kappa(e)$ jelöli a becült felület e iránymenti normálgörbületét, c pedig egy korrekciós konstans. A korrekcióra azért van szükség, mert közel síkszerű felületeken a görbület közel 0, így ott túl ritka lenne a görbületi rács, továbbá azért is hasznos, mert a zajosságból eredő görbületi bizonytalanságokat jól kompenzálja, így a paraméterezés stabilabb lesz. A fenti képlet alapján számoljuk a keresztirányú görbületi vonalak sűrűségét is.

Ha egy tartomány nem tartalmaz lyukakat, elégséges csak egy hosszanti segédgörbét meghatározni, és erre merőlegesen fel lehet fűzni a keresztirányú görbületi vonalak sorozatát. Azonban fel kell készülnünk arra is, hogy a felületeken

lyukak találhatóak, ld. 1. ábra. Ezen belül azzal az esettel foglalkozunk, amikor a söpört felületen nincsenek lyukak egymással szemben, azaz a söprő sík által kimetszett görbe mindig összefüggő. Ilyen esetben több segédgörbe felhasználásával fűzzük össze a keresztirányú görbületi vonalakat, amit a 8. ábra szemléltet. Az első segédgörbe terminálódik, amint egy lyukhoz értünk. Ekkor az utolsó felfűzött keresztirányú görbén több új kiinduló ponttal kísérletezünk a következő segédgörbe elindításához, és azt az induló pontot választjuk, ahol az új segédgörbe a leghosszabb összefüggő szakaszt állítja elő. Az egész struktúrát tehát egy váltakozó „segédgörbe–keresztirányú görbe...” sorozat írja le.

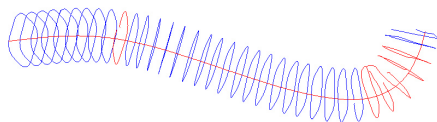


8. ábra. Keresztirányú görbék összefűzése egy többszörösen lyukas tartományon

4. A profil- és a vezérgörbe meghatározása

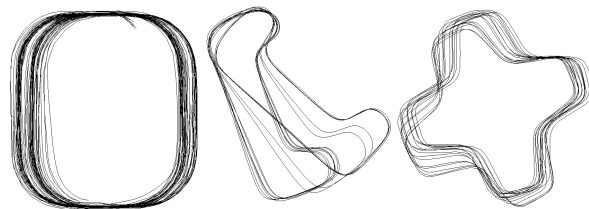
A hosszanti segédgörbe (segédgörbék) alapján rendelkezésre állnak a keresztirányú görbületi vonalak. Hosszirányban görbület szerint paramétereztünk, keresztirányban egyelőre közelítő ívhossz szerinti paraméterezést alkalmazunk. Az optimális reprezentáció létrehozásához először (i) a keresztirányú görbékét síkgörbékkel helyettesítjük, majd (ii) egy munkasíkba vetítjük az összes profiljelöltet. Ezek (iii) összeillesztéséből és (iv) átlagolásából határozzuk meg az optimális profilgörbét, amit (v) visszatranszformálunk a korábbi mintavételezés szerinti söprő síkokba és (vi) meghatározzuk ezek lehető legjobb illeszkedését az eredeti háromszögtartományra. (vii) Az így kapott profilgörbék egy kijelölt referenciapontja 3D-ben egy pontsorozatot határoz meg, ennek összesítmásából számítjuk a végleges vezérgörbét.

A keresztirányú görbékét értékelnünk kell *síkszerűségük* szerint. A legjobb síkot, a síktól mért négyzetes távolságok minimalizálása alapján számoljuk [2], így a sík normálvektora könnyen meghatározható. A négyzetes távolságok átlaga egy síkszerűségi mutatóként értelmezhető. Ezt szemlélteti a 9. ábra. Ha a keresztirányú görbületi vonalakra nem teljesül a síksöpési kritérium, a tartományt nem lehet söpört felület formájában reprezentálni. Ha viszont teljesül, a görbületi vonalakat síkba vetítjük, és ezeket lokális profiljelöltként kezeljük.



9. ábra. Kék profiljelöltek — szigorú síkszerűségi tűréshatáron belüli profiljelöltek

Elsődleges illesztés. Az előző lépésben létrehozott söprő síkokat és profiljelölteket a segédgörbületi vonal (illetve vonalak) alapján egy közös munkasíkba képezzük és megpróbáljuk ezeket fedésbe hozni. Továbbá feltesszük, hogy a hosszanti vonalak alapján a profiljelölteknek a munkasíkban van egy közös kiindulópontjuk. Ez egyszerű eltolás, majd forgatás transzformációk alapján valósul meg — ld. 10. ábra. Az ábra szemlélteti, hogy a profilgörbék — mért adatok és numerikus görbekövetés mellett — nem illeszkednek megfelelően, viszont ez a görbesereg jó kiinduló helyzetet teremt arra, hogy az ismert ICP algoritmus segítségével kiszámítsuk az optimális profilgörbét, mivel feltehetjük, hogy két egymást követő profilgörbe elmozdulása kismértékű, így a kiinduló megfeleltetést adottnak tekintjük.



10. ábra. Profiljelöltek az elsődleges illesztés után

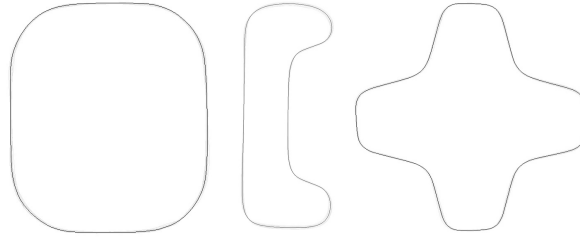
Pontos illesztés, az ICP eljárás. Az ICP (Iterative Closest Point) eljárás célja, hogy megkeressük két adott ponthalmaz A és B legjobb illeszkedését. Először minden $a \in A$ ponthoz megkeressük a hozzá legközelebb eső $cl(a) \in B$ pontot. Ezek után megkeressük a legjobb olyan eltolást és forgatást amivel az A ponthalmazt transzformálva, egy olyan ponthalmazt kapunk, amivel ez, valamint az A pontjaihoz legközelebb eső B -beli pontok ($cl(A)$) átlagos távolsága minimális. A transzformációt A -ra alkalmazva az algoritmust ismételtén végrehajtjuk. Ennek van értelme, hiszen minden új lépés során általában más B -beli pontok lesznek a legközelebb A pontjaihoz. Az iteráció a két ponthalmaz legjobb illesztéséhez konvergál. Az ICP eljárással összeillesztett profilok a 11. ábrán láthatóak.

Az egyes iterációs lépések során megkeressük a legjobb lineáris transzformációt, majd ebből csak a forgatást és az eltolást tartjuk meg. Ez az egyes lépésekben kevésbé ad pontos eredményt, mintha kiszámolnánk a legjobb egybevágósági transzformációt, viszont jóval gyorsabban számítható, és megfelelő számú iteráció esetén ez a pontatlanság nem számít [4]. Ez az algoritmus részleges profilok összerendelésére is alkalmas, amint azt a 11. ábrán baloldali profilsereg szemlélteti. Az outlier-ek kiküszöbölését egy kétpasszos szűrő segítségével lehetett javítani.

Az ICP algoritmus tehát megadja két ponthalmaz optimalizált fedésbe hozását a legközelebbi pontok négyzetes távolságának minimalizálásával. A transzformációs mátrixra a későbbiekben még szükség lesz.

A görbék átlagolása. Az ICP eljárás után a görbék átlagolásával kapjuk meg a végső profilgörbét. Vegyük a leghosszabb profiljelöltet (ne feledjük, tipikusan részgörbék halmazáról van szó), és ennek megfelelően paraméterezzük át a többi

profiljelöltet is. Vegyük a leghosszabb profiljelölt egy δ szélességű sávjában található pontok átlagértékét, és ez alapján határozzuk meg a végső profil pontjait. Az így kapott törtvonalat általában egy sima B-spline görbével közelítjük. Az eljárás eredményét a 11. ábra szemlélteti.



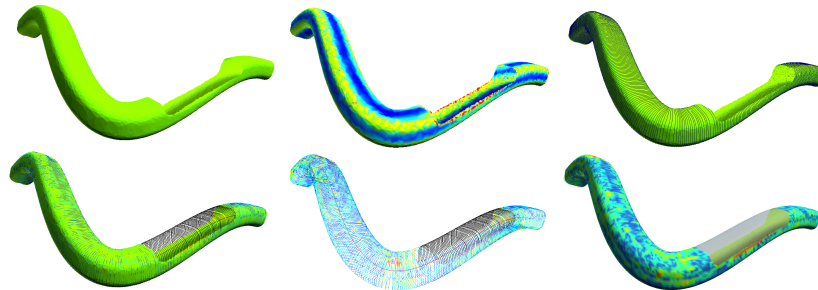
11. ábra. Átlagolt profilgörbék

A vezérgörbe meghatározása. A söpört felület teljes reprezentációjának meghatározásához szükségünk van a vezérgörbére és a rotációs függvény kiszámítására is. Ehhez a profil illesztése során meghatározott transzformációkat használjuk fel. Minden egyes keresztirányú görbületi vonalhoz megőriztük, hogy azt milyen transzformáció hozta legjobban fedésbe az optimális profillal. Ennek a transzformációnak az inverzével a profil minden egyes söprő síkban visszahehelyezhető a felületre, így a profil mindenhol lokálisan illeszkedni fog az aktuális görbületi vonalhoz. Ha megfelelően sűrűn vesszük fel a görbületi rácsot, a visszahelyezett profilgörbék egy adott referencia pontja egy 3D pontsorozatot definiál, ami alapján kiszámolhatjuk a vezérgörbét.

Formálisan: az optimális P profilgörbe meghatározásakor a G_i görbületi vonalakat fedésbe hoztuk, majd átlagoltuk. A G_i -hez tartozó transzformáció legyen T_i . Ekkor a becsült profilt minden G_i -hez visszailleszthetjük a felületre, így $T_i^{-1}P$ görbe a felületre is jól illeszkedik (12.5. ábra). Ezzel a vezérgörbe pontjai is meghatározhatók: legyen $v \in \mathbb{R}$ tetszőleges, ekkor a $p_i = T_i v$ pontok megadják a vezérgörbe törtvonalának pontjait $\{p_1, p_2, \dots\}$, amelyeket általában egy folytonos B-spline görbével approximálunk. A rotációs függvény diszkrét pontjait pedig az $r_i = T_i^{-1}(1, 0, 0)^T$ pontok adják. A transzformációs mátrix ugyancsak felírható folytonos formában a hosszanti v paraméter függvényében, ha a mátrix elemeire hajtunk végre egy többdimenziós B-spline illesztést.

5. Az eredmények kiértékelése

A digitális alakzatrekonstrukció során optimális felületreprezentációk felderítésére törekszünk. (i) Az ismert algoritmus lépései során a *síkszerűségi* tolerancia alapján eldönthető, hogy a keresztirányú görbületi vonalak síkgörbék-e — ha igen, a söprő síksereg jellemezhető egy folytonos vezérgörbével. (ii) Eldönthető az is, hogy a felület egy optimalizált profilgörbe söprése által jól approximálható-e, feltéve, hogy ez a profilgörbe és a mért adatokból származtatott profiljelöltek



12. ábra. A rekonstrukció lépései: 1. Kiinduló tartomány, 2. Átlaggörbület-térkép, 3. Söprő síkok, 4. Profilgörbék a felületen, 5. Optimalizált profil és vezérgörbe, 6. Távolagsáttérkép

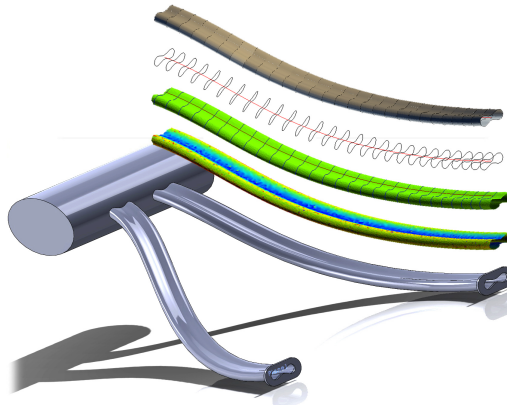
között a különbség egy *profil* tolerancián belül marad. (iii) Végző soron a reprezentáció megfelelő voltát, azaz a „söpört felület hipotézis” elfogadását vagy elutasítását, oly módon döntjük el, hogy kiértékeljük az illesztett felület és az adatpontok közötti legkisebb távolságokat. Általában az adatpontok egy nagyon kis százalékát mérési hibának tekintik (outlier percentage) és a maradék pontokra határozzák meg a *maximális* vagy az *átlag* eltéréseket. Ha ezek az értékek az előírt tolerancián belül maradnak, a söpört felület reprezentációt megfelelőnek tekintjük.

A rekonstruált modell és az eredeti mért adatok viszonyát az ún. távolagsáttérkép (deviation map) segítségével szemléltetjük, amely vizuálisan kimutatja az eltérések eloszlását és előjelét, valamint hogy hol jelentkezik a maximális eltérés. A 12.6. ábrán egy ilyen távolagsáttérkép látható; a szürke szín jelzi a felület azon részét, ahol a tartományban szereplő lyukak miatt a távolagsáttérkép nem értelmezhető.

6. Összefoglalás, további célok

Az ismertetett algoritmus segítségével egy állandó profilú söpört felület optimális matematikai reprezentációját lehet előállítani, ily módon megoldást kínálunk a digitális alakzatrekonstrukció egy fontos részfeladatára. A felület zajos és hiányos mért adatokat közelít. Az algoritmus egy konzisztens, simított görbületi vektormezőre épít, amelyen egy görbületi rácsot hozunk létre. Ez alapján meghatározható egy söprő síksereg, valamint az optimális profilgörbe és vezérgörbe. Megvizsgáltuk, hogy a létrejövő felület mennyire jól illeszkedik az adatpontokra, és hogy a reprezentáció eleget tesz-e a söpört felület kritériumának. Az algoritmust mért adatokon is teszteltük.

További kutatási cél, hogy amennyiben a fenti hipotézis nem teljesül, megvizsgáljuk, hogy a felület leírható-e egy skálázott profillal. Ha ez a hipotézis is megdől, lehetséges, hogy a tartomány egy változó profilú söpört (lofted) felülettel közelíthető. Ha a síksöpörési tulajdonság érvényben marad, célszerű ezt felhasználni általános szabadformájú felületek adatpontjainak paraméterezéséhez.



13. ábra. Teszt: kipufogó dob és rekonstruált csövek

Köszönetnyilvánítás

Jelen kutatást az Országos Tudományos Kutatási Alapprogram (Ref. 101845) és a TÁMOP-4.2.2.B-10/1-2010-0009 támogatta.

Hivatkozások

1. P. Alliez, D. Cohen-Steiner, O. Devillers, B. Lévy, M. Desbrun, *Anisotropic polygonal remeshing*, ACM Transactions on Graphics (TOG), **22**, (2003), 485-493
2. P. Benkő, T. Várady, *Segmentation Methods for Smooth Point Regions of Conventional Engineering Objects*. In: Computer-Aided Design, **36**, Elsevier, (2004)
3. M. Botsch, L. Kobbelt, M. Pauly, P. Alliez, B. Levy, *Polygon Mesh Processing*, AK Peters, (2010)
4. D.W. Eggert, A. Lorusso, R.B. Fisher: Estimating 3-D rigid body transformations: a comparison of four major algorithms, *Machine Vision and Applications* **9**, (1997), 272-290.
5. G. Farin, *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design. A Practical Guide*, Academic Press, 5th Edition, (2002)
6. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical PTVF92 in C*. Cambridge University Press, 2nd Edition, (1992)
7. Zs. Terék, *Curve Networks to Segment Polygonal Meshes for Digital Shape Reconstruction*. In: Periodica Polytechnica – Electrical Engineering, **55**, (2010)
8. T. Várady, R. Martin, *Reverse Engineering*, G. F02, J. Hoschek, M. S. Kim, Handbook of Computer Aided Geometric Design, Chapter 26, Elsevier, (2002)
9. Z. Zhang: Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces, *International Journal of Computer Vision* **13**, (1994), 119-152.