



Pannon Egyetem



Intézményi Tudományos Diákköri Konferencia
2009

Folytonos és diszkrét kockázati modellek számítógépes összehasonlítása

Készítette: Lucz Lóránd

Témavezető: dr. Mihálykó Csaba, Mihálykóné dr. Orbán Éva

Műszaki Informatikai Kar, Matematika Tanszék

Bevezető

Napjainkban az élet szinte minden területén találkozhatunk biztosításokkal, amelyek az előre nem látható, de bekövetkező események kárai ellen védenek minket. A biztosítások lényege a kollektív tartalék képzés és a biztosítási díjakból felhalmozott tartalék felhasználása a bekövetkező károk fedezésére. A biztosítások két fontosabb ágra oszthatóak: élet és nem-élet biztosításokra. Az életbiztosítások magukban foglalják a hagyományos életbiztosításokat, házassági, születési biztosításokat. A nem-élet biztosításokba tartoznak a baleseti, betegség, valamint az elemi károkkal kapcsolatos biztosítások, de a felsorolás korántsem teljes. A biztosítások tárgyát sok minden képezheti, ez függhet magától az országtól, ahol a biztosítást megkötik. A biztosítások minden esetben valamilyen kockázatra fedezetet nyújtó szolgáltatások, ezek a kockázatok lehetnek gazdasági, társadalmi vagy akár politikai jellegű kockázatok.

A biztosítás résztvevői a biztosító intézet, a biztosított, a biztosítást kötő fél, valamint a kedvezményezett. A biztosító a biztosítást kötő fél helyett vállalja a biztosításban rögzített esemény kockázatát, a biztosított érdekeit védi a biztosítás, a biztosítást kötő fél a biztosítást megköti a biztosítóval, valamint a biztosítás díját fizeti, a kedvezményezett pedig a biztosított esemény bekövetkezésekor a biztosító szolgáltatására jogosult.

A biztosító szolgáltatása, hogy egy bizonyos rendszeres összegért cserébe átvállalja a szerződésben rögzített kockázatot, bizonyos, szintén a szerződésben rögzített feltétel alapján. A biztosítási esemény bekövetkezésekor a biztosító a biztosításban megadott kedvezményezettnek térít egy bizonyos összeget. A biztosítási díjak a nem-élet biztosítások esetén a biztosított esemény által okozott kárral arányosak, életbiztosítások esetén pénzbeli értéket nem lehet pontosan meghatározni, így ezekben az esetekben a biztosítás összegét a biztosító és a biztosítást kötő fél a szerződésben közösen határozza meg.

A biztosító igyekszik minél nagyobb összeget felhalmozni a folyamatosan érkező befizetésekből annak érdekében, hogy ne következhesen be egy esetleges csőd. Csődnek azt az eseményt tekintjük, amikor a biztosító fizetéseképtelenné válik, azaz nem képes kifizetni a beérkező kárigényeket. A biztosító kasszáját felfoghatjuk egy átmeneti tárolóként, amibe folytonosan érkeznek befizetések. Előre meg nem határozható időközönként bekövetkeznek károk, melyek esetén a biztosítónak a biztosítási szerződésben rögzítettek szerint ki kell fizetnie a szerződésben rögzített összeget a kedvezményezettnek.

Biztosítók esetében az intézet kasszáját értelmezhetjük úgy, mint egy átmeneti tárolót, mely tárolja a biztosító teljes vagyonát. A folytonos befizetések ebbe a „tárolóba” folynak be, és innen történnek a kifizetések. Egyértelmű tehát, hogy ennek az „átmeneti tárolónak” a kiürülése azonnali csődöt jelent. A biztosítónak tehát úgy kell megkötni szerződéseit, hogy kis valószínűséggel következhesen be a kassza kiürülése. A kassza kiürülése mellett fontos lehet a társaság számára egy összeghatár elérése is, gondoljunk csak arra, hogy a biztosító alaptőkéjét részvényesek investálják be, hogy megkezdhesse működését. Ezek a részvényesek természetesen valamilyen anyagi haszon reményében teszik mindezt, éppen ezért egy összeghatár átlépése számukra nagyon fontos, mert e felett az összeg felett lehetségessé válhat a biztosítóhoz beérkező bevételt részben, vagy egészben szétosztani osztalék formájában. Azonban az osztalékfizetés is fontos tényező lehet a csőd bekövetkezése szempontjából, hiszen egy rosszul megválasztott osztalékfizetési stratégia a társaság gyors bukását eredményezheti, de előfordulhat az is, hogy mindennek pont az ellentéte következik be: a biztosító kasszájában levő összeg folyamatosan növekszik, de a részvényesek egyáltalán

nem, vagy csak nagyon kevés osztalékot kapnak. Ez szintén elkerülendő, hiszen ha a részvényesek elkezdik kivonni tőkéjüket a társaságból az ismét csődhöz vezethet.

Ez a modell vegyi gyárak esetében is alkalmazható. Ekkor az átmeneti tároló egy olyan tartály lehet, amely egy, az előállított anyaghoz szükséges alapanyagot tartalmaz, amelynek rendelkezésre kell állnia a gyártás zavartalan működéséhez. Elképzelhetünk például egy gyárat, ahol egy speciális anyagot állítanak elő, mégpedig az ebben a tartályban tárolt anyag felhasználásával. Ahhoz, hogy a termelésnek ne kelljen leállnia, ebben a tárolóban folyamatosan rendelkezésre kell, hogy álljon a szükséges mennyiség, amit a gyártási folyamat során bármikor letölthetünk onnan. Amennyiben azt akarjuk, hogy ennek a folyamatnak soha se kelljen leállnia, bizonyos időközönként a tartály utántöltésére van szükség. Előfordulhat az is, hogy nem csupán a gyártás zavartalan működése, hanem más előírások miatt is folyamatosan rendelkezésre kell állni a tartályban egy bizonyos anyagmennyiségnek. Gondoljunk csak arra, hogy bizonyos kémiai folyamatok játszódhatnak le a tartályban tárolt anyagban és ennek a folyamatnak a beindítása túl nagy költséggel járna, esetleg annyi időt venne igénybe, hogy az a gyártás szempontjából már elfogadhatatlanul hosszú leálláshoz vezetne. Fontos az is, hogy a tárolt anyag soha ne töltődjön túl. A tartály túltöltődése komoly problémákhoz vezethet, gondoljunk csak arra az esetre, amikor a tartályban valamilyen speciális, nehezen előállítható, ritka vagy nagyon drága anyagot tárolunk. A tartály túlsordulását mindenképpen el kell kerülnünk, aminek oka, hogy a túlsorduló mennyiség felesleges kiadásokat jelent a vállalatnak, sőt az is előfordulhat, hogy súlyosan környezetszennyező a tárolt anyag, így a tartályból való kijutása nem megengedhető.

Áruházak raktárai is tekinthetők átmeneti tárolóknak. A raktárban tárolunk bizonyos mennyiséget egy termékből. Raktárunk mérete limitált, ezért mindenképpen figyelniük kell rá, hogy ne szállítsanak be több árut, mint amennyit tárolni tudunk, ugyanakkor ebben az esetben sem engedhetjük meg, hogy a termék kifogyjon, hiszen ilyen esetekben fennáll a veszélye, hogy vásárlókat veszítünk el.

Egy bankfiókot is tekinthetünk átmeneti tárolónak, mégpedig úgy, hogy az átmenetileg tárolt „anyagnak” az ügyeik mielőbbi elintézésére váró embereket tekintjük. Ebben az esetben már nem játszik fontos szerepet, hogy a tárolóból ne fogyjon ki a tárolt anyag, de az igen, hogy várhatóan mikor fog ki, hiszen mindenki minél előbb végezni szeretne.

Az átmeneti tárolókat csoportosíthatjuk több különböző szempont alapján. Ilyen szempont lehet például, hogy az adott környezetben az jelenti-e a fontos kérdést, hogy kifogy-e a tárolt anyag a tárolóból vagy sem, esetleg túlsordul-e a tároló vagy sem. Egy másik szempont lehet a tárolók osztályozásakor, hogy a tárolt anyag a tárolóba be-, illetve a tárolóból kikerülése előre meghatározott determinisztikus módon történik, vagy véletlenszerű sztochasztikus működést mutat.

A fenti példákból jól látható, hogy a modell, amellyel a dolgozatban foglalkozunk hasznos, és több tudományterületen is felhasználható. A modell azon tulajdonsága, hogy több szakterület problémáinak modellezésére is alkalmas lehetővé teszi, hogy egy-egy elért eredményt más modellek esetében is alkalmazhassunk. A későbbiekben például ismertetünk és fel is használunk olyan egyenleteket, melyeket eredetileg a vegyi gyárak esetében használt modellre írtak fel, de a biztosítási matematikai modell esetében is érvényesek és jól használhatóak.

Az eddigiekben említett modellek közül a biztosítási matematikában felhasznált modell rendelkezik a legszélesebb irodalommal. Ezen belül is a folytonos modellek örvendenek a

legnagyobb népszerűségnek. A diszkrét modellekkel viszonylag kevesebb helyen foglalkoznak annak ellenére, hogy léteznek olyan, ezzel a modellel leírható folyamatok, melyekben a diszkrét modell használata sokkal kézenfekvőbb lenne, bizonyos esetekben még a valóságnak megfelelőbb módon is írják le a vizsgált folyamatot.

A dolgozatban vizsgált probléma a következő. A szakirodalomban megtalálható folytonos modellre felírt integrál-, integro-differenciálegyenletek kezelése nehézkes. Ezzel szemben a diszkrét modellekre könnyebben kezelhető differenciaegyenleteket írtak fel. Amennyiben lehetséges lenne egy-egy folytonos modellnek megfeleltetni egy diszkrétet, úgy leegyszerűsödne a folytonos modellek kezelése. Ha szükségünk lenne egy folytonos modellre, csak meg kellene keresnünk a modell diszkrét megfelelőjét és ezzel a modellel helyettesíteni.

A dolgozat célja tehát, hogy összehasonlítsunk néhány folytonos és diszkrét modellt és megvizsgáljuk, hogy lehetséges-e a folytonos a diszkrétrel történő approximációja. Amennyiben igen, úgy megadnánk azt is, hogy ez milyen esetekben lehetséges, és milyen pontossággal.

Az összehasonlításokat alapjában véve két csoportba sorolhatjuk, kvantitatív és kvalitatív összehasonlításokra. Kvantitatív összehasonlításaink során azt vizsgáljuk, hogy a két modell eredményei mennyire vannak közel egymáshoz, a kvalitatív összehasonlítások során pedig azt, hogy maguk a modellekre felírt egyenletek mennyire feleltethetők meg egymással.

Kvantitatív összehasonlításainkat az alapján végezzük el, hogy a tönkremenés valószínűsége és várható ideje mennyire áll közel egymáshoz adott paraméter együttesek esetén. Ezeknek az értékeknek az összehasonlítását, amennyiben a szakirodalomban felírt egyenleteknek ismert az analitikus megoldása, annak segítségével végezzük el. Ha ilyen megoldás nem ismert, numerikus módszereket használunk fel a szükséges értékek kiszámítására, és amikor ezek a módszerek már nem használhatóak vagy nem adnak elegendően jó eredményt, akkor szimulációs eredmények segítségével végezzük el az összehasonlításokat. Az összehasonlítások elvégzését megkönnyíti, hogy a szakirodalomban írtak fel egyenletet a tönkremenés valószínűségének és várható idejének együttes kezelésére, amit a későbbiekben részletesebben is ismertetünk.

Kvalitatív összehasonlításaink során azt fogjuk megvizsgálni, hogy a két modellre felírt egyenletek mennyire hasonlítanak egymásra. Van-e köztük valamiféle analógia, amelyből arra következtethetnénk, hogy a két modell bizonyos esetekben "megegyezik".

Mivel összehasonlításaink célja, hogy folytonos modellek helyett diszkrétet használhassunk, fontos lehet az is, hogy milyen módon adhatunk meg egy folytonoshoz egy diszkrétet. A folytonos modellekben felhasznált eloszlások egy bizonyos részének létezik jól ismert diszkrét megfelelője. Ez azonban a folytonos eloszlások csak egy kis részére igaz. Abban az esetben, ha nem ismerünk ilyen diszkrét megfelelőt, szükségessé válik, hogy valamilyen módon mi magunk konstruálhassuk meg azt. Ismertetünk egy módszert, amellyel ezt az átalakítást megtehetjük. A módszer ismertetése után egy példán keresztül be is mutatjuk azt, és megvizsgáljuk, hogy az eredeti és a diszkrétizált eloszlás milyen közel van egymáshoz.

A dolgozat felépítése az alábbi.

A dolgozat első részében ismertetjük az alapmodellt, melynek folytonos és diszkrét változatait a későbbiekben összehasonlítjuk. Ezután adunk egy rövid irodalmi áttekintést a Sparre Andersen modellről, amelyet vizsgálunk, valamint annak általánosításairól, illetve kitérünk a

modellel kapcsolatos néhány kutatási eredményre, melyeket a későbbiekben felhasználunk az összehasonlítások elvégzéséhez.

A dolgozat második részében ismertetjük a diszkrét és a folytonos modellt. A modellek bemutatása során leírjuk azokat az egyenleteket, melyek a szakirodalomban ismertek és az összehasonlítások során a későbbiekben felhasználunk. A folytonos modell esetében egy numerikus módszert is megadunk az egyik típusú egyenlet megoldására. Ezt követően ismertetjük, hogy a későbbiekben elvégzett összehasonlítások során milyen szimulációs módszerekkel számítottuk ki az eredményeket olyan esetekben, amikor nem ismert analitikus megoldás és a numerikus módszerek sem adnak elfogadhatóan jó eredményt.

A dolgozat harmadik részében végezzük el a két modell összehasonlítását. Elsőként kvantitatív módon, bizonyos paraméterek esetén kiszámított eredményeket felhasználva. Ezeket olyan eloszlás-párok felhasználásával végezzük el, melyekről ismert, hogy jól közelítik egymást, ilyen például az exponenciális és a geometriai eloszlás vagy a normális és a binomiális eloszlás (bizonyos paraméterek esetén). Az összehasonlítások második felében kvalitatív módszerekkel (sorfejtés, képletek összehasonlítása) adunk magyarázatot a korábbiakban tapasztalt eredményekre.

A dolgozat utolsó részében megadunk egy módszert, amellyel egy folytonos eloszláshoz konstruálhatunk egy diszkrétet, hogy olyan esetekben is megadható legyen diszkrét modell a folytonos helyett, amikor a modellben felhasznált folytonos eloszlásnak nem ismert diszkrét megfelelője. A módszert egy példán keresztül illusztráljuk. Ezt követően röviden összefoglaljuk, hogy milyen következtetéseket sikerült levonni az összehasonlítások során.

1. A vizsgált modell

Összehasonlításaink során kockázati modellekkel dolgozunk, ezért mindenképpen szükséges ezeket röviden bemutatnunk, még mielőtt elkezdenénk használni azokat.

Elsőként induljunk ki a Sparre Andersen kockázati modellből. A modell alapjában véve három fontos elemre bontható: a károk kapcsán kifizetett összegekre (a továbbiakban károk), a biztosítottak által befizetett biztosítási díjakra (ezeket az összegeket valójában nem feltétlenül a biztosítottak fizetik be, hanem lehet ez egy harmadik fél is, aki a biztosítást megkötötte, mint ahogy azt a korábbiakban is említettük, de a továbbiakban csak biztosítottakként hivatkozunk rájuk), valamint az intézet kezdőtőkéjére. A biztosítónál lejátszódó folyamat sztochasztikus elemeket tartalmazó modell segítségével vizsgáljuk, mivel a valóságban a károk bekövetkezésének ideje és a károk nagysága véletlentől függő mennyiségek.

Mivel a károk nagyságai és a bekövetkezésük között eltelt idők véletlenszerűek, a folyamat modellezésére sztochasztikus modelleket használunk. A bekövetkező károk számát megadó $N(t)$ az idő függvénye, ahol t jelenti az aktuális időpillanatot. A károk közt eltelt időket t_i -vel jelöljük és feltesszük, hogy ezek egymástól független valószínűségi változók és közös eloszlásfüggvényük $F(t)$. Jelölje Z_i a biztosítóhoz beérkező i . kárigény összegét, ami véletlentől függő mennyiség. Legyen továbbá $G(z)$ a Z_i valószínűségi változók közös eloszlásfüggvénye. A károk számából valamint a károk nagyságából megadható az S_t kárfolyamat, ami a károk összértékét adja meg a t időpillanatig:

$$S_t = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$$

A biztosító aktuális tőkéjét megadó folyamat – más néven a rizikófolyamat – felírható a kárfolyamat, a kezdőtőke, valamint a biztosító bevételeit megadó K_t folyamat felhasználásával. A rizikófolyamatot jelölje $U(t)$ és legyen

$$U(t) = u + K_t - S_t$$

ahol jelölje

u a kezdőtőke értékét,

$K_t = ct$ a díjbevétel értékét a t időpontig, (ahol c az időegységenkénti bevétel értéke, ami konstans)

S_t pedig a kárfolyamatot.

Sparre Andersen modell esetén általában feltételezzük, hogy $N(t)$ és Z_i függetlenek.

Lépünk tovább egy speciálisabb esethez, még hozzá a klasszikus rizikófolyamathoz. Klasszikus rizikófolyamatról abban az esetben beszélünk, amikor

$N(t)$ Poisson-folyamat λ paraméterrel,

$Z_i, i = 1, 2, \dots$ valószínűségi változók pedig egymástól és az $N(t)$ folyamattól függetlenek.

A későbbiekben az ismertett modellek vizsgálatakor minden esetben élünk azokkal a feltételezésekkel, hogy a károk közt eltelt idők egymástól és a károk nagyságától független, azonos eloszlású valószínűségi változók és ugyanez érvényes a károk nagyságát meghatározó valószínűségi változókra is. Az összehasonlítások során tárgyalunk olyan eseteket, amikor a károk közt eltelt idők eloszlása exponenciális, normális, binomiális, geometriai vagy más eloszlású, a károk nagyságának eloszlása pedig szintén lehet exponenciális, normális,

binomiális, geometriai vagy ettől eltérő. Speciális esetben a károk nagysága egységnyi is lehet.

A modell vizsgálata során a csőd elkerülési valószínűségének meghatározásakor a

$$0 \leq u - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i + ct$$

esemény bekövetkezését vizsgáljuk. Amennyiben ez az egyenlőtlenség teljesül minden $t \geq 0$ esetén, akkor nem ürül ki a biztosító társaság pénztára.

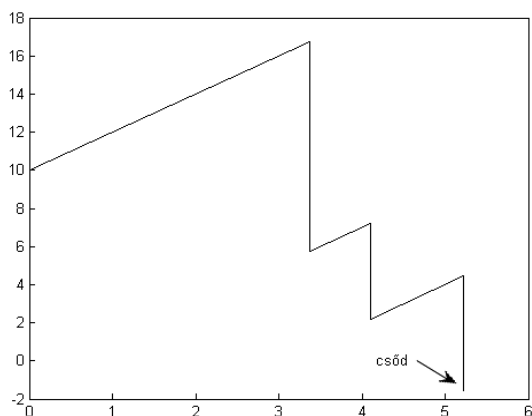
A csőd elkerülésének valószínűsége tehát

$$P\left(\left\{0 \leq u - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i + ct, \forall t \geq 0\right\}\right)$$

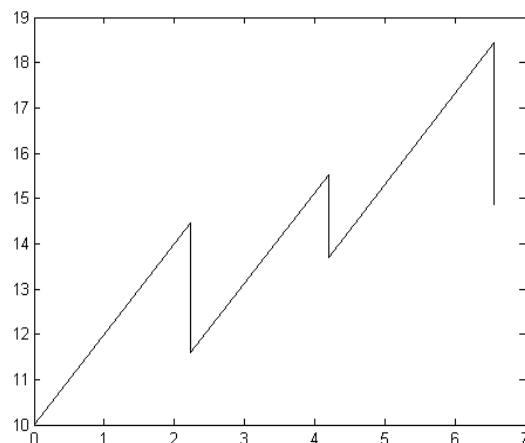
Amennyiben ismerjük a csőd elkerülésének valószínűségét, akkor ismerjük a csőd bekövetkezésének valószínűségét is. A csőd elkerülésének valószínűsége mellett fontos továbbá a bekövetkezés ideje is. A tönkremenés idejét jelölje $T_U(u)$, és u kezdőtőke mellett legyen

$$T_U(u) = \begin{cases} \inf \{t \geq 0: U(t) < 0\} & \text{ha létezik } t \geq 0: U(t) < 0, (U(0) = u) \\ \infty & \text{ha } U(t) \geq 0, \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Az 1.1 és az 1.2 ábra a klasszikus rizikófolyamat egy-egy realizációját szemlélteti. Az ábrákon látható realizációban a károk közt eltelt idők eloszlása exponenciális eloszlású $\lambda = 0.3$ paraméterrel. A károk eloszlása szintén exponenciális eloszlású $\mu = 5$ várható értékkel, $1/\mu$ paraméterrel. Az időegységenkénti díjbevétel értékét $c = 2$ -re választottuk és a folyamatot $u = 10$ kezdőtőkével indítottuk. Az 1.1 ábra egy olyan realizációt szemléltet, amelyben a folyamat során bekövetkezik a csőd, tehát a pénztárban levő pénzmennyiséget leíró függvény 0 alá kerül.



1.1. ábra A klasszikus rizikófolyamat egy realizációja csőddel



1.2. ábra A klasszikus rizikófolyamat egy realizációja

Az ábrákon látható lineárisan növekvő részek mutatják a befizetéseket, ahol a díjbevétel folyamatos. A függvényérték ugrásszerű csökkenése jelzi a károk bekövetkezését. A csőd akkor következik be, amikor a kasszában levő tőke értéke nulla alá csökken, ami az 1.1 ábrán a $t \approx 5.1$ időpontban következik be.

2. Irodalmi áttekintés

Az alábbiakban rövid irodalmi áttekintést adunk a korábbiakban ismertetett modellekről. Az irodalom ismertetését elsőként a Sparre Andersen modell folytonos és diszkrét változatainak bemutatásával kezdjük, majd röviden bemutatjuk a modell különböző általánosításait.

A biztosítási matematikával a huszadik században kezdtek foglalkozni, bevezető műnek Lundberg doktori értekezését tekinthetjük az 1920-as évekből. Ő állította fel a klasszikus modellt. Ennek általánosítása a Sparre Andersen modell, amelyet 1957-ben ismertetett Sparre Andersen egy nemzetközi kongresszuson (Sparre Andersen, 1957). A mai kutatások legjelentősebb része máig ezzel a modellel foglalkozik. A legtöbb explicit eredmény mostanáig a klasszikus modellel kapcsolatos. Itt megjegyezzük, hogy hazánkban ezzel a modellel, illetve egyáltalán ezzel a témakörrel nagyon kevesen foglalkoznak, viszont annál többen külföldön.

A modellel kapcsolatban leggyakrabban felmerülő kérdések a csőd valószínűségének megadása és a csőd várható idejének meghatározása. A csőd valószínűségének meghatározására klasszikus rizikófolyamat esetén már a század első felében felírták a megfelelő integrálegyenletet. Ez az egyenlet fellelhető Karlin és Taylor sztochasztikus folyamatokról szóló klasszikus könyvében (Karlin & Taylor, 1975). Az egyenlet megoldását megtalálhatjuk Mihaletzky György Kockázati folyamatok című jegyzetében (Mihaletzky, 2001). A klasszikus modell esetén véges időintervallumon vizsgálva a tönkremenési problémát, a tönkremenési valószínűsége Thorin állította fel a megfelelő integrálegyenletet és módszer adott meg az analitikus megoldás meghatározására (Thorin, 1982). Módszere az úgynevezett Wiener-Hopf féle faktorizációs eljárás, amely rendkívül összetett és sok analízisbeli ismeretet igényel.

Nagy fejlődést hozott a kutatásokban, amikor bevezettek egy olyan függvényt, amely segítségével egységesen lehet kezelni a tönkremenés valószínűségét és a tönkremenési idő várható értékét. Ez az úgynevezett Gerber-Shiu féle diszkontált büntetőfüggvény várható értéke (Gerber & Shiu, 1998), ami még további általánosításokra is alkalmas. Az irodalomban az utóbbi tíz évben íródott publikációk nagy része ennek a függvénynek a meghatározásával illetve tulajdonságainak elemzésével foglalkozik. Nagy hangsúlyt fektetnek arra, hogy különböző speciális esetekben analitikus formulát találjanak az említett Gerber-Shiu féle diszkontált büntetőfüggvényre. Erlang(2) illetve Erlang(n) eloszlást feltételezve a károk közt eltelt időkre, valamint exponenciális eloszlást feltételezve a kárigények nagyságára Dickson és Hipp valamint Li és Garrido adtak meg explicit formulát (Dickson & Hipp, 2001; Li & Garrido, 2004). Az explicit megoldások keresése napjainkban is folyik, a közelmúltban jelent meg az interneten Albrecher és munkatársainak publikációja, amelyben olyan feltételezés mellett keresik az explicit megoldásokat, hogy a káresemények közt eltelt idők, valamint a kárigények sűrűségfüggvényének Laplace-transzformáltja racionális törtfüggvény. Explicit megoldást ugyan nem sikerült adniuk, de megoldási módszert javasolnak, amelyek matematikai programcsomagok használatát teszik szükségessé (Albrecher et al., 2009).

A tönkremenési idő eloszlására írt fel formulát Borovkov és Dickson, exponenciális eloszlású kárigények esetén (Borovkov & Dickson, 2008). A formula kiszámításához egy végtelen függvényt sor kiszámítására lenne szükség, ami csak speciális eloszlású kárigények között eltelt idők esetén lehetséges, mint például gamma és kevert exponenciális eloszlás. Amennyiben a végtelen sort nem tudjuk kiszámítani, a szerzők által felírt formula alapján a

végteles függvénysort egy véges részösszeggel közelítve a keresett eloszlásfüggvénynek egy approximációját kaphatjuk.

Azokban az esetekben, amikor a felírt integrálegyenleteknek nem tudják meghatározni az analitikus megoldását, akkor a megoldás bizonyos tulajdonságainak bizonyítására törekednek. Ilyen tulajdonság lehet például a határértéknek, aszimptotikus korlátoknak a megadása, illetve a konvergencia rendjének bizonyítása. Ezekben az esetekben a sűrűségfüggvények bizonyos speciális tulajdonságait feltételezik, de nem feltétlenül korlátozzák ezeket konkrét esetekre. Klasszikus rizikófolyamat esetén a tönkremenési valószínűségekre exponenciális felső korlátot találunk Mihaletzky György jegyzetében szubexponenciális eloszlású kárigények esetén (Mihaletzky, 2001). Exponenciális felső korlát található a tönkremenési valószínűségekre Albrecher publikációjában olyan általánosított Sparre Andersen modellben, amely nem feltételezi a kárigények és a kárigények között eltelt idők függetlenségét (Albrecher & Teugels, 2006).

A folytonos modellben használt rizikófolyamatnak léteznek diszkrét megfelelői. A diszkrét modellekben azt feltételezik, hogy mind a kárigények közt eltelt idők, mind a kár nagysága diszkrét eloszlású valószínűségi változóval adható meg, sőt természetes feltételezés az is, hogy ezek a valószínűségi változók nemnegatív egész értékeket vehetnek fel. A diszkrét modellek közül elsőként az összetett binomiális modell jelent meg (Gerber, 1988; Shiu, 1989). Az összetett binomiális modellben minden egyes egész időpillanatban p valószínűséggel érkezik kárigény, és $1 - p$ valószínűséggel nem.

A modellt leíró két cikkben a tönkremenés valószínűségét vizsgálják végtelen idő intervallumon és adnak meg rekurziót kiszámítására. Véges intervallumon történő vizsgálatokkal találkozhatunk Willmot munkájában, aki a kárigény összegek momentumgeneráló függvényének ismeretében ír fel (analitikus) formulát a tönkremenési valószínűségekre (Willmot, 1993). A folytonos modell esetében említett diszkontált büntetőfüggvénynek létezik a diszkrét modellre felírt változata is (Cheng, Gerber, & Shiu, 2000). Az összetett binomiális modellre érvényes differenciaegyenleteket megtaláljuk Li és Garrido művében (Li & Garrido, 2002), és geometriai eloszlású kárigények esetén analitikus megoldást is megadnak. A diszkontált büntetőfüggvényre felírt differenciaegyenleteket találhatunk általános esetben (Orbán-Mihálykó, Mihálykó, & Lakatos, 2009), ahol a differenciaegyenletek megoldásának tulajdonságait is elemezték. Amikor a károk között eltelt idők geometriai eloszlásúak, a károk pedig szintén geometriaiak vagy egységnyiiek, akkor analitikus megoldásokat is adtak.

Az összetett binomiális kockázati modellt javasolják Cossette és társai a folytonos kockázati modellek közelítésére (Cossette, Landriault, & Marceau, 2004). Módszerük lényege, hogy az időt diszkrétizálják, majd minden egyes kialakított időintervallumban eldöntik a szintén diszkrétizált eloszlás alapján, hogy érkezik-e kárigény vagy nem, és numerikus algoritmust javasolnak a tönkremenési valószínűségek kiszámítására. Az algoritmussal kapott eredményeket numerikusan összehasonlítják a folytonos modellek szimulációjából származó eredményekkel. Megállapítják, hogy az időintervallum csökkentésével (vagyis a diszkrétizációs pontok sűrítésével) a diszkrét modellből származó eredmények egyre jobban közelítik a folytonos modell szimulált eredményeit. A diszkrétizált eloszlás meghatározása a folytonos eloszlásfüggvény megváltozása alapján történik, ami azonban nem biztosítja a diszkrét eloszlás várható értékének az eredeti folytonos eloszlás várható értékével való egyenlőségét, ami pedig fontos lenne a később bevezetendő nettó haszon feltétel szempontjából.

A Sparre Andersen alapmodellnek léteznek általánosításai, melyek különböző tényezőkkel bővítik ki a modellt. Általában ezeket folytonos modellek esetén vizsgálják. Tsai és Willmot 2002-ben például megadott egy olyan módosított modellt, amelyben az állandó rögzített nagyságú befizetések helyett Wiener folyamattal jellemezhető ingadozás van a beérkező díjösszegekben (Tsai & Willmot, 2002). Felírták a felújítási egyenletet a csőd várható idejének diszkontált büntetőfüggvényére és egy aszimptotikus formulát adtak meg rá.

Léteznek olyan modellek is, ahol számításba veszik az adót is, és a pénztárban levő pénz után adót kell fizetni (Albrecher, Borst, Boxma, & Resing, 2009).

A modell egy gyakori módosítása, amikor a pénztárba befizetett pénz valamely részét kifizetik a biztosító társaság részvényeseinek. Ebben az esetben kérdés a tönkremenés valószínűsége és várható ideje, de igen gyakran vizsgálják a részvényeseknek kifizetett pénz várható értékét is, sőt cél lehet ennek maximalizálása. A különböző stratégiák esetén a részvényeseknek kifizetett diszkontált összeg várható értékére a korábbiakhoz hasonló integrál-, és integro-differenciál egyenletek adhatóak meg. Albrecher és Thonhauser 2008-ban arra a kérdésre keresik a választ, hogy milyen osztalékfizetési stratégia felhasználásával maximalizálható a kifizetett osztalék összege egy olyan módosított modellben, ahol a kasszában levő tőkét kamatoztatják (Albrecher & Thonhauser, 2008). Egy példát is megadnak Erlang(2)-es eloszlású kárigények esetére, mely esetben – csak úgy, mint a legáltalánosabb esetben is – azt az eredményt kapták, hogy az optimális osztalék fizetési stratégia a band típusú osztalékfizetés. A cikkben megadott becslések általánosításával, néhány ismert stratégia bemutatásával és a folytonos és diszkrét modell analógiájával foglalkozik a (Mihálykóné, Mihálykó, & Lucz, 2009) publikáció.

Egy másik általánosításban az osztalékfizetés mellett felvetették annak lehetőségét, hogy ha az intézet tőkéje egy megadott határ alá csökken, akkor az intézet felvesz egy bizonyos összeget és mindaddig nem jelent csődöt, amíg ennek a kölcsönnek a kamatait fizetni tudja a díjbevételekből. Ha a csőd a kölcsön ellenére bekövetkezik, akkor ez az esemény az abszolút csőd (Yuan & Hu, 2008).

Az abszolút csóddal és osztalékfizetéssel találkozhatunk a (Yuen, Zhou, & Guo, 2008)-ben is, melyben integro-differenciál egyenleteket adnak meg az abszolút csőd bekövetkezése előtt kifizetett osztalék diszkontált értékére. Ezután explicit kifejezéseket adnak meg a kifizetett osztalék összegének és az optimális osztalékfizetési korlátnak meghatározására. Ez a korlát maximalizálja a kifizetett osztalék értékét.

Mint már említettük, vannak a modellnek olyan általánosításai is, melyekben az $N(t)$ és a Z_k értékek egymástól nem teljesen függetlenek. (Albrecher & Teugels, 2006; Ambagaspitiya, 2009). Az utóbbi cikkben a szerző megadja a kárigények bekövetkezési gyakoriságának és a károk nagyságának modellezésére használt kétváltozós eloszlások két különböző osztályát, majd végül explicit kifejezéseket a csőd bekövetkezési valószínűségére Wiener-Hopf faktorizációval.

Mint bevezetőnkben említettük, a modell mérnöki környezetben is alkalmazható, közbülső tartályok méretezési és kezdő anyagmennyiség meghatározási problémáinak vizsgálatára. Az egyenletek némileg különbözők, a felmerülő kérdések azonban lényegében hasonlóak a biztosítási modellben felmerülő problémákhoz. A kérdések vizsgálatában elért eredményeinket 2009-ben a Műszaki Kémiai Napok '09 konferencián publikáltuk (Mihálykóné, Lakatos, Mihálykó, & Lucz, 2009) és folyóiratban való megjelentetése is folyamatban van (Mihálykóné, Lakatos, Mihálykó, & Lucz).

3. A folytonos és diszkrét modellek ismertetése

3.1 A folytonos modell

Az alábbiakban ismertetjük, hogy a szakirodalomban a folytonos modellre milyen egyenleteket adtak meg a csőd bekövetkezési valószínűségének meghatározására, ismertetjük azokat a speciális eseteket, amikor a károk nagysága egységnyi, azaz a folyamat Poisson-folyamat. Majd ezek után ismertetjük a csőd bekövetkezésének várható idejének és a csőd bekövetkezési valószínűségének együttes kezelésére megadott egyenleteket. Az utóbbi megoldására ismertetünk egy numerikus módszert is.

A csőd elkerülésének valószínűségére bevezetjük az $R = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ függvényt, melyet az alábbi módon írhatunk fel:

$$R(u) = P\left\{0 \leq u - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i + ct, \forall t \geq 0\right\} \quad (3.1.1)$$

Az (3.1.1)-ben megadott $R(u)$ valószínűség meghatározására található integrálegyenlet a szakirodalomban (Karlin & Taylor, 1975). Abban a speciális esetben amikor a károk között eltelt idők valamint a károk nagyságának eloszlása egyaránt exponenciális, a szakirodalomban található analitikus megoldás (Mihaletzky, 2001). Legyen λ a t_i egymástól független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók paramétere μ_f pedig a várható értékük, és jelölje μ_g a szintén egymástól független, folytonos eloszlású Z_i valószínűségi változók várható értékét. Általános folytonos eloszlású t_i valószínűségi változók esetén az integrálegyenlet a következő:

3.1.1 Tétel (Orbán-Mihálykó & Lakatos, 2004):

Legyenek a $Z_i, i = 1, 2 \dots$ valószínűségi változók folytonos eloszlásúak, sűrűségfüggvényüket jelölje a $g(y)$ függvény. Ekkor $R(u) = 0$ ha $u < 0$ és bárhogyan választjuk is a paramétereket, $R(u)$ bármely u esetén kielégíti az alábbi integrálegyenletet:

$$R(u) = \int_0^{\infty} \int_0^{u+ct} R(u+ct-y)f(t)g(y)dydt \quad (3.1.2)$$

Ha $\frac{\mu_g}{c\mu_f} \geq 1$, akkor $R(u) = 0$, minden valós u esetén, ha pedig $\frac{\mu_g}{c\mu_f} < 1$, akkor $R(0) = 1 - \frac{\mu_g}{c\mu_f}$, és ha $u \rightarrow \infty$, akkor $R(u) \rightarrow 1$. $\square$

Megjegyezzük, hogy az $R(u) = 0$, ha $c\mu_f > \mu_g$ feltétel fontos. A feltétel lényegében azt jelenti, amennyiben károk nagyságának várható értéke kisebb, mint a folytonos díjbevétel várható értéke, akkor pozitív valószínűséggel kerülhető el a csőd (ellenkező esetben a csőd elkerülésének valószínűsége bármely u kezdőtőke esetén 0). A szakirodalomban ezzel a feltétellel nettó haszon feltétel néven (*net profit condition*) találkozhatunk.

3.1.2 Tétel (Karlin & Taylor, 1975):

Ha $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ esetén, akkor a (3.1.2) egyenlet $\frac{\lambda\mu_g}{c} < 1$ esetén az alábbi alakba írható:

$$R(u) - R(0) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u R(u-y)(1-G(y))dy, u \geq 0 \quad (3.1.3)$$

$$\text{és } R(0) = 1 - \frac{\lambda\mu g}{c}.$$

□

Megjegyezzük, hogy a (3.1.3) egyenlet egy Volterra típusú integrálegyenlet.

Abban a speciális esetben, amikor a Z_i és a t_i valószínűségi változók eloszlása egyaránt exponenciális, megadható a (3.1.3) egyenlet analitikus megoldása.

3.1.3 Tétel (Mihaletzky, 2001): Ha a $Z_i, i = 1, 2 \dots$ exponenciális eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel, azaz $1/\mu$ paraméterrel, valamint a t_i értékek szintén exponenciális eloszlású valószínűségi változók, akkor a (3.1.3) egyenlet megoldása $\frac{\lambda\mu}{c} < 1$ és $u \geq 0$ esetén az alábbi alakba írható:

$$R(u) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} e^{-\frac{c-\lambda\mu}{\mu c}u} \quad (3.1.4)$$

$$\text{Ha } \frac{\lambda\mu}{c} \geq 1, \text{ akkor } R(u) \equiv 0.$$

□

Egységnyi károk esetén is (ami szintén egy speciális eset) létezik pontos megoldás, mégpedig:

3.1.4 Tétel (Mihálykóné, 2003):

Ha $Z_i = 1$ minden $i = 1, 2 \dots$ esetén és a károk között eltelt idők eloszlása exponenciális eloszlás, akkor bárhogyan választjuk is a paramétereket, $R(u)$ bármely nemnegatív u esetén kielégíti az alábbi integrálegyenletet:

$$R(u) = \begin{cases} \int_0^{\frac{1-u}{c}} R(u+ct-1)\lambda e^{-\lambda t} dt, & \text{ha } 0 \leq u \leq 1 \\ \int_0^{\infty} R(u+ct-1)\lambda e^{-\lambda t} dt, & \text{ha } 1 < u \end{cases}$$

Ez az integrál az alábbi alakba transzformálható, azaz $R(u)$ minden $u \geq 0$ érték esetén kielégíti a következő késleltetett differenciálegyenletet:

$$R'(u) = \frac{\lambda}{c} (R(u) - R(u-1)) \quad (3.1.5)$$

Megjegyezzük, hogy a (3.1.5) egyenlőség negatív u értékek esetén az $R(u) \equiv 0$ miatt nyilvánvalóan teljesül.

$$\text{Ha } \frac{\lambda}{c} < 1, \text{ akkor } R(0) = 1 - \frac{\lambda}{c}.$$

$$\text{Ha } \frac{\lambda}{c} \geq 1, \text{ akkor } R(u) = 0 \text{ minden valós } u \text{ esetén.}$$

A (3.1.5) differenciálegyenlet megoldása explicit módon is megadható, az $R(u) = 0$, ha $-1 \leq u < 0$ és $R(0) = 1 - \frac{\lambda}{c}$ kezdeti feltételek felhasználásával.

Ekkor a (3.1.5) egyenlet megoldása az alábbi függvény:

$$R(u) = \left(1 - \frac{\lambda}{c}\right) \sum_{i=0}^n \frac{e^{\frac{\lambda}{c}(u-i)} (i-u)^i \left(\frac{\lambda}{c}\right)^i}{i!}, n < u \leq n+1 \quad (3.1.6)$$

ahol n természetes szám és $R(0) = 1 - \frac{\lambda}{c}$. □

Lépünk tovább egy másik szakirodalomban megtalálható megoldáshoz. Az alábbiakban ismertetünk egy függvényt, melyet a csőd bekövetkezési valószínűségének és a csőd bekövetkezésének várható idejének együttes kezelésére írtak fel, általános $N(t)$ esetére.

A csőd bekövetkezési valószínűségének és a csőd bekövetkezésének várható idejének meghatározásához szükségünk van egy büntetőfüggvényre. Jelölje ezt a függvényt $w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, valamint vezessük be a δ jelölést az infláció mértékére.

Legyen $w(x, y)$ egy nemnegatív függvény $x \geq 0$ és $y \geq 0$ paraméterrel. Legyen $\phi(u, \delta)$ egy diszkontált és várható értékben tekintett büntetőfüggvény, ami általános esetben

$$\phi(u, \delta) = E(w(U(T_U^-(u)), |U(T_U(u))|) \cdot e^{-\delta T_U(u)} 1_{T_U(u) < \infty}) \quad (3.1.7)$$

Jelölje $U(T_U^-(u))$ az $U(t)$ bal oldalról vett határértékét, azaz a pénztárban levő tőke mennyiségét a tönkremenést megelőző időpillanatban.

A dolgozatban felhasznált számítások során rögzített $w \equiv 1$ konstans függvénnyel dolgoztunk.

Rögzített $w \equiv 1$ esetén a (3.1.7) összefüggés felírható az alábbi alakba:

$$\phi(u, \delta) = E(e^{-\delta T_U(u)} 1_{T_U(u) < \infty}) \quad (3.1.8)$$

Ez lényegében a tönkremenési idő sűrűségfüggvényének Laplace transzformáltja. $\delta = 0$ esetén $\phi(u, 0) = E(1_{T_U(u) < \infty}) = P(T_U(u) < \infty) = 1 - R(u)$, valamint

$$\left. \frac{\partial \phi(u, \delta)}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} = -E(T_U(u))$$

3.1.5 Tétel (Gerber & Shiu, 1998):

A $\phi(u, \delta)$ függvény kielégíti az alábbi integrálegyenletet:

$$\phi(u, \delta) = \int_0^\infty \int_0^{u+ct} \phi(u+ct-y, \delta) e^{-\delta t} f(t) g(y) dy dt + \int_0^\infty \int_{u+ct}^\infty e^{-\delta t} f(t) g(y) dy dt$$

Ez az integrálegyenlet az alábbi integro-differenciálegyenletté transzformálható, $\phi(0, \delta) = 1$ kezdőértékkel, ha $N(t)$ Poisson-folyamat:

$$\frac{\partial \phi(u, \delta)}{\partial u} - \frac{\lambda + \delta}{c} \phi(u, \delta) = -\frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \phi(u-y, \delta) g(y) dy + \int_u^\infty g(y) dy \right)$$

□

Térjünk át a modell egy speciális esetére. Ebben a speciális esetben legyen a károk nagysága egységesen egységnyire rögzítve, tehát legyen minden kár értéke azonosan egy.

3.1.6 Tétel (Mihálykóné, Mihálykó, & Lakatos, 2009):

Abban a speciális esetben, amikor a $Z_i \equiv 1, i = 1, 2, 3 \dots$

$$\phi(u, \delta) = \begin{cases} \int_0^{\frac{1-u}{c}} e^{-\delta t} \phi(u + ct - 1, \delta) f(t) dt + \int_0^{\frac{1-u}{c}} e^{-\delta t} f(t) dt, & \text{ha } u < 1 \\ \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \phi(u + ct - 1, \delta) f(t) dt, & \text{ha } u \geq 1 \end{cases} \quad (3.1.9)$$

és $\phi(0, \delta) = \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{1 - e^{-\mu_0}}{\mu_0}$, ahol μ_0 a $\mu - \frac{\lambda + \delta}{c} + \frac{\lambda}{c} e^{-\mu} = 0$ karakterisztikus egyenlet egyetlen pozitív valós gyöke.

Klasszikus rizikófolyamat esetén pedig

$$\frac{\partial \phi(u, \delta)}{\partial u} = \begin{cases} \frac{\lambda + \delta}{c} \phi(u, \delta) - \frac{\lambda}{c}, & \text{ha } 0 < u < 1 \\ \frac{\lambda + \delta}{c} \phi(u, \delta) - \frac{\lambda}{c} \phi(u - 1, \delta), & \text{ha } u \geq 1. \end{cases}$$

Ezt $u \leq 2$ esetén megoldva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \phi(u, \delta) &= \\ &= \begin{cases} \left(\phi(0, \delta) - \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \right) e^{\frac{\lambda + \delta}{c} u} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta}, & \text{ha } 0 < u \leq 1 \\ \left(\phi(0, \delta) - \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \right) e^{\frac{\lambda + \delta}{c} u} + \left[\left(\phi(0, \delta) - \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \right) \frac{\lambda}{c} (1 - u) + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \right) \right] e^{\frac{\lambda + \delta}{c} (u-1)} + \\ + \frac{\lambda^2}{(\lambda + \delta)^2}, & \text{ha } 1 < u \leq 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

□

Az $u > 2$ esetén egyre bonyolultabb kifejezéseket kapunk, melyeknek zárt alakját még nem sikerült megadni.

A csőd várható idejének kiszámításához a $\phi(u, \delta)$ függvény δ szerinti deriváltjának (-1) szorzására van szükségünk a $\delta = 0$ -ban.

A $\phi(u, \delta)$ függvénynek csak nagyon speciális esetekben ismert pontos analitikus alakja, de numerikus módszerek konstruálása lehetséges egyes esetekben, például amikor a károk között eltelt idők exponenciális eloszlásúak.

Az alábbiakban ismertetjük az

$$\frac{\partial \phi(u, \delta)}{\partial u} - \frac{\lambda + \delta}{c} \phi(u, \delta) + \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^u \phi(u - y, \delta) g(y) dy + 1 - G(u) \right) = 0 \quad (3.1.11)$$

egyenlet numerikus megoldását, a Crank-Nicholson séma alapján.

A (3.1.11) egyenlet átalakításával, $u = n \cdot h$ helyettesítéssel kaphatjuk, hogy

$$\frac{\partial \phi(nh, \delta)}{\partial u} - \frac{\lambda + \delta}{c} \phi(nh, \delta) + \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^{nh} \phi(nh - y, \delta) g(y) dy + 1 - G(nh) \right) = 0$$

$u = (n - 1) \cdot h$ helyettesítéssel pedig

$$\frac{\partial \phi((n - 1)h, \delta)}{\partial u} - \frac{\lambda + \delta}{c} \phi((n - 1)h, \delta) + \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^{(n-1)h} \phi((n - 1)h - y, \delta) g(y) dy + 1 - G((n - 1)h) \right) = 0$$

Összeadva őket következik, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{\partial \phi(nh, \delta)}{\partial u} + \frac{\partial \phi((n - 1)h, \delta)}{\partial u}}{2} - \frac{\lambda + \delta}{c} \frac{\phi(nh, \delta) + \phi((n - 1)h, \delta)}{2} \\ & + \frac{\lambda}{c} \left(\frac{\int_0^{nh} \phi(nh - y, \delta) g(y) dy + \int_0^{(n-1)h} \phi((n - 1)h - y, \delta) g(y) dy}{2} \right) + 1 \\ & - \frac{G(nh) + G((n - 1)h)}{2} = 0. \end{aligned}$$

A fent említett Crank-Nicholson séma hibájának megállapításához szükség van az alábbi két összefüggésre.

Ha $k(x)$ x -szerint háromszor folytonosan differenciálható, akkor a

$$\begin{aligned} \frac{k(x) + k(x - h)}{2} &= k\left(x - \frac{h}{2}\right) + k''(\xi_1(x)) \frac{h^2}{2} \quad \text{és} \\ \frac{k(x) - k(x - h)}{h} &= k'\left(x - \frac{h}{2}\right) + k'''(\xi_2(x)) h^2 \end{aligned}$$

összefüggések fennállnak. Ezért, ha $\phi(u, \delta)$ u szerinti harmadrendű parciális deriváltja folytonos, akkor

$$\begin{aligned} \frac{\phi(nh, \delta) - \phi((n - 1)h, \delta)}{2} &= \frac{\partial \phi\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)h, \delta\right)}{\partial u} + K_1(n, h)h^2 \quad \text{és} \\ \frac{\lambda + \delta}{c} \cdot \frac{\phi(nh, \delta) + \phi((n - 1)h, \delta)}{2} &= \frac{\lambda + \delta}{c} \phi\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)h, \delta\right) + K_2(n, h)h^2. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy a trapézsabály hibája ch^2 -nek adódik, elmondható, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{\phi(nh, \delta) - \phi((n - 1)h, \delta)}{h} - \frac{\lambda + \delta}{c} \cdot \frac{\phi(nh, \delta) + \phi((n - 1)h, \delta)}{2} \\ & + \frac{\lambda}{2c} \left(\sum_{i=0}^n \phi((n - i)h, \delta) g(ih) a_i^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} \phi((n - 1 - i)h, \delta) g(ih) b_i^{(n)} \right) \\ & + \frac{\lambda}{c} \left(1 - G\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)h\right) \right) = K(n, h)h^2 \end{aligned}$$

ahol $|K(n, h)|$ n -től és h -tól független korlát alatt marad és

$$a_i^{(n)} = \begin{cases} \frac{h}{2} & \text{ha } i = 0, \text{ vagy } i = n \\ h & \text{ha } i = 1, 2 \dots n-1 \end{cases} \quad \text{és} \quad b_i^{(n)} = \begin{cases} \frac{h}{2} & \text{ha } i = 0, \text{ vagy } i = n-1 \\ h & \text{ha } i = 1, 2 \dots n-2 \end{cases}$$

Ebből már felírható a „Crank-Nicholson séma”

$$\begin{aligned} \phi(n) &= \\ &= \frac{\phi(n-1) \left(\frac{1}{h} + \frac{\lambda + \delta}{2c} \right) - \frac{\lambda}{2c} \left(\sum_{i=1}^n \phi(n-i) g_i a_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \phi(n-1-i) g_i b_i^{(n)} \right) - \frac{\lambda}{c} \left(1 - G\left(n - \frac{1}{2}\right) \right)}{\left(\frac{1}{h} - \frac{\lambda + \delta}{2c} + \frac{\lambda}{2c} g_0 \frac{h}{2} \right)} \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

ahol $g_i = g(ih)$ és $\phi(n)$ -el jelöljük a $\phi(nh, \delta)$ közelítő értékét.

A módszer használatához a $\phi(0, \delta)$ érték ismerete szükséges. Ezt az értéket a $\phi(0, 0)$ esetben egyszerűen meghatározhatjuk az alábbi módon

$$\phi(0, 0) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{\delta}{c\rho} \right) = \frac{\lambda \mu_g}{c}$$

Abban az esetben, amikor a δ érték nem 0, a kezdőpontot a $\phi(0, \delta) = 1 - \frac{\delta}{c\rho}$ módon határozzuk meg, ahol a ρ érték a

$$\frac{\lambda + \delta}{c} - \rho - \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-\rho u} g(u) du = 0$$

egyenlet egyetlen pozitív gyöke.

A ρ gyök kiszámítását a Newton módszer módosításának segítségével végeztük el úgy, hogy az integrált Gauss-Laguerre kvadratura formulák segítségével közelítettük. Tehát a

$$\rho_{n+1} = \rho_n - \frac{\frac{\lambda + \delta}{c} - \rho_n - \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty e^{-\rho_n u} g(u) du}{-1 + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty u e^{-\rho_n u} g(u) du}$$

Newton módszer szerinti számítást az alábbi módosítással végeztük el:

$$\rho_{n+1} = \rho_n - \frac{\frac{\lambda + \delta}{c} - \rho_n - \frac{\lambda}{c} \sum_{i=1}^{19} a_i \frac{1}{\rho_n} g\left(\frac{x_i}{\rho_n}\right)}{-1 + \frac{\lambda}{c} \sum_{i=1}^{19} a_i \frac{x_i}{\rho_n^2} g\left(\frac{x_i}{\rho_n}\right)}$$

ahol az x_i értékek jelölik a módszerhez szükséges abszcisszákat, az a_i értékek pedig az ezekhez szükséges súlyokat. A 19-ed fokú Gauss-Laguerre polinomokra alapozott kvadratura formulával végzett számításokhoz szükséges 19 abszcisszát és súlyt a http://www.efunda.com/math/num_integration/findgausslaguerre.cfm oldalról töltöttük le.

3.2 A diszkrét modell

Ahogy a korábbiakban már említettük, a szakirodalomban elsősorban a folytonos modellel kapcsolatos kutatásokkal találkozhatunk, a diszkrét modellel pedig jóval kevesebbszer. Azonban a diszkrét modellre szükségünk van, mivel a folyamatok egy része pontosabban modellezhető a diszkrét modellek segítségével. A biztosítók esetében gondolhatunk például arra az esetre, hogy a károk bekövetkezésekor ezeknek a károknak az értéke valamilyen egész szám, valamint a kár bekövetkezésének idejét is valamilyen egész számmal határozzuk meg. Lehet ez nap, óra, perc, stb. Ugyan lehetne pontosabb értékeket használni ezek kifejezésére, de ennek a modell szempontjából nem lenne értelme, hiszen a biztosítónak nem számít, hogy az adott károk egy perc melyik tized vagy századmásodpercében következtek be. Előfordulhat az is, hogy a károk bekövetkezésének napját elegendő tudnunk.

A diszkrét modellek fontosságának másik oka, hogy a folytonos modellek integrál, integro-differenciálegyenleteivel szemben a diszkrét modellek esetében differenciaegyenleteket kell megoldanunk. Ez megkönnyíti a modell kezelését, hiszen a differenciaegyenletek megoldása sokszor egy rekurzió kiszámítását jelenti, ezért ha a két modell eredményeinek eltérése elegendően kicsi, akkor a diszkrét modell kiválthatná a folytonost, ezzel megkönnyítve, felgyorsítva a számításokat.

Az alábbiakban ismertetjük, hogy a szakirodalomban milyen egyenleteket adtak meg a csőd bekövetkezési valószínűségének, valamint a csőd várható idejének meghatározására, kitérünk azokra a speciális esetekre, amikor a károk nagysága egységnyi, valamint amikor a károk nagyságainak és a köztük eltelt időknek eloszlása egyaránt geometriai.

A korábbiakban ismertetett folytonos modellhez képest a diszkrét modell esetében annyi változtatást kell tennünk, hogy a (3.1.1)-ben ismertetett valószínűséget kiegészítjük annyival, hogy $\forall t \in \mathbb{N}$ és az időpillanatonkénti bevétel értéke minden esetben $c = 1$.

A bevezetésben leírt $U(t)$ rizikófolyamat, valamint a $T_U(u)$ a csőd bekövetkezésének ideje a diszkrét modellben is érvényes, ezért ezeket nem írjuk le újra.

Csőd alatt a diszkrét modellek esetében is azt értjük, hogy a pénztárban levő pénzmennyiség nulla alá csökken. A csőd bekövetkezésének valószínűségét jelölje $u(n)$, n kezdőtőke esetén, az alábbi módon:

$$u(n) = P\left(m - \sum_{k=1}^{N(m)} Z_k + n < 0, \quad \text{valamely } m = 0, 1, 2 \dots - re\right)$$

Jelölje $p(n, m)$ annak valószínűségét, hogy a tönkremenés az m . időpillanatban történik, n kezdőtőke esetén. Legyen tehát

$$p(n, m) = P\left(m - \sum_{k=1}^{N(m)} Z_k + n < 0 \text{ és } s - \sum_{k=1}^{N(s)} Z_k + n \geq 0, 0 \leq s < m\right)$$

Megjegyezzük, hogy $p(0, 0) = 0$.

Jelölje $f(j) = P(t_k = j)$, $j = 0, 1 \dots$ a károk közt eltelt idők, $g(i) = P(Z_k = i)$, $i = 1, 2 \dots$ pedig a károk nagyságának eloszlását.

3.2.1 Tétel (Orbán-Mihálykó, Mihálykó, & Lakatos, 2009):

Az $u(n)$, $n \in N$ kielégíti az alábbi differenciaegyenletet:

$$u(n) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n+j} u(n+j-i) f(j) g(i) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=n+j+1}^{\infty} f(j) g(i) \quad (3.2.1)$$

□

Bevezetjük az imént definiált $p(n, m)$ érték z -transzformáltját, minden rögzített n érték esetén. A $(p(n, m))_{m \geq 0}$ sorozat z -transzformáltja a

$$\varphi(n, z) = \sum_{m=0}^{\infty} p(n, m) z^{-m}, z \geq 1 \quad (3.2.2)$$

A megadott z -k esetén a fenti sor konvergens.

A folytonos modellek esetében bevezetett $\phi(u, \delta)$ függvényhez hasonlóan a $\varphi(n, z)$ -ről is elmondható, hogy z szerinti deriváltjának -1 -szeresével meghatározható a csőd bekövetkezésének várható ideje, tehát

$$\left. \frac{\partial \varphi(n, z)}{\partial z} \right|_{z=1} = -E(T_U(n)) \text{ és } \varphi(n, 1) = u(n)$$

Vagyis a tönkremenés valószínűségét is megkaphatjuk $\varphi(n, z)$ segítségével.

3.2.2. Tétel (Orbán-Mihálykó, Mihálykó, & Lakatos, 2009):

Az imént ismertetett $\varphi(n, z)$ függvényről elmondható, hogy bármely $z \geq 1$ esetén kielégíti az alábbi egyenletet:

$$\varphi(n, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n+j} \varphi(n+j-i, z) f(j) g(i) z^{-j} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=n+j+1}^{\infty} f(j) g(i) z^{-j} \quad (3.2.3)$$

Legyen $f(j) = (1-f)f^j, j = 0, 1, 2, \dots$ és $0 < f < 1$. A (3.2.3) egyenlet átírható az alábbi alakba:

$$\varphi(n, z) = \frac{z}{f} \varphi(n-1, z) - \frac{1-f}{f} z \left(\sum_{i=1}^{n-1} \varphi(n-i-1, z) g(i) + \sum_{i=n}^{\infty} g(i) \right) \quad (3.2.4)$$

A (3.2.4) egyenletről megjegyezzük, hogy $\varphi(0, z)$ ismeretében a többi $\varphi(n, z)$ rekurzívan számolható.

Legyen $f(j) = (1-f)f^j, j = 0, 1, 2, \dots, 0 < f < 1$ és $g(i) = (1-g)g^{i-1}, i = 1, 2, \dots, 0 < g < 1$. Ha $z > 1$, akkor a (3.2.4) egyenlet egyértelmű korlátos megoldása a

$$\varphi(n, z) = \frac{\frac{z + fg - \sqrt{(z + fg)^2 - 4z(1-f)f(1-g) - 4fgz}}{2f} - g}{1 - g} \cdot \left(\frac{z + fg - \sqrt{(z + fg)^2 - 4z(1-f)f(1-g) - 4fgz}}{2f} \right)^n \quad (3.2.5)$$

Ha a $z = 1$ és $\frac{1}{1-g} \frac{1-f}{f} < 1$ (ami a nettó haszon feltételnek felel meg ennek a diszkrét modellnek az esetében), akkor az (3.2.1)-ben definiált függvény értéke

$$\varphi(n, 1) = u(n) = \frac{1 + fg - \frac{|1 - 2f + fg|}{2f} - g}{1 - g} \left(\frac{1 + fg - |1 - 2f + fg|}{2f} \right)^n \quad (3.2.6)$$

Ha a $z = 1$ és $\frac{1}{1-g} \frac{1-f}{f} \geq 1$, akkor $\varphi(n, 1) \equiv 1$.

A folytonos modellhez hasonlóan most is ismertetjük azt a speciális esetet, amikor a károk nagysága egységnyi.

Legyen $f(j) = (1 - f)f^j, j = 0, 1, 2, \dots, 0 < f < 1$ és $g(i) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$. Ebben az esetben az (3.2.4) felírható az alábbi alakban:

$$\varphi(n, z) = \begin{cases} \frac{z}{f} \varphi(0, z) - \frac{1-f}{f} z, & \text{ha } n = 1 \\ \frac{z}{f} \varphi(n-1, z) - \frac{1-f}{f} z \varphi(n-2, z), & \text{ha } n = 2, 3, \dots \end{cases}$$

A $z > 1$ és $f(0) < 1$ feltételek teljesülése esetén a fenti egyenlet egyértelmű megoldása

$$\varphi(n, z) = \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 4z(1-f)f}}{2f} \right)^{n+1} \quad (3.2.7)$$

A (3.2.7)-t z szerint deriválva felírható, hogy

$$\frac{\partial \varphi(n, z)}{\partial z} = (n+1) \cdot \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - 4z(1-f)f}}{2f} \right)^n \cdot \left(\frac{1}{2f} - \frac{2z - 4(1-f)f}{4\sqrt{z^2 - 4z(1-f)f} \cdot f} \right)$$

Ez alapján a $z = 1$ helyettesítéssel felírható a tönkremenési idő várható idejének (-1) -szerese:

$$\left. \frac{\partial \varphi(n, z)}{\partial z} \right|_{z=1} = (n+1) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4(1-f)f}}{2f} \right)^n \cdot \left(\frac{1}{2f} - \frac{2 - 4(1-f)f}{4\sqrt{1 - 4(1-f)f} \cdot f} \right) \quad (3.2.8)$$

□

3.3 Felhasznált szimulációk

Mivel bizonyos esetekben nem ismert analitikus megoldás, és az ismertetett numerikus módszer nem alkalmazható, ezért szükség van a folyamatok direkt szimulációjára.

Szimulációinkat a MATLAB és a Maple matematikai programcsomagokkal valósítottuk meg.

A szimulációk során a csőd elkerülés valószínűségét - a (3.1.1) valószínűséget, illetve általánosabban a (3.1.8) képlettel definiált képlettel definiált várható értéket határozzuk meg. A valószínűség közelítésére a relatív gyakoriságot, a várható érték közelítésére az átlagot használjuk. Ahhoz, hogy a relatív gyakoriságot kiszámítsuk, azt kell megvizsgáljunk, hogy a kasszában levő pénz értéke nem csökken-e nulla alá.

A (3.1.1)-ben megadott esemény bekövetkezését azonban nem szükséges folytonosan minden időpillanatban ellenőrizni, mivel a biztosító kasszájában negatív irányú változás csak kár kifizetése esetén történhet, így csupán a $\sum_{i=1}^k t_i$ időpontokban ($k = 1, 2, \dots$) vizsgáljuk a feltételt. A szimulációk során azonban számolnunk kell azzal a korlátozással, hogy a feltétel bekövetkezését nem vizsgálhatjuk végtelen intervallumon, csupán egy rögzített T_{MAX} időpillanatig. Az így meghatározott relatív gyakoriság tehát a $P(\{0 \leq u - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i + ct, \forall t \ 0 \leq t \leq T_{MAX}\})$ valószínűséget közelíti. Ez a közelíteni kívánt $P(\{0 \leq u - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i + ct, \forall t \ 0 \leq t\})$ valószínűség felülről történő becslése, de elegendően nagy T_{MAX} választása már nem okoz érzékelhető eltérést. A T_{MAX} érték meghatározásáról bővebben (Rosca & Rosca, 2007) cikkében olvashatunk.

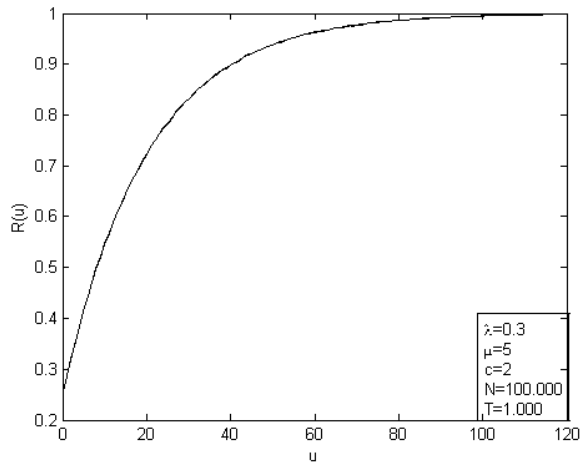
A (3.1.8) képlettel megadott $\phi(u, \delta) = E(e^{-\delta T_U(u)} 1_{T_U(u) < \infty})$ várható érték közelítő meghatározására szükségünk van a $T_U(u)$ tönkremenési idők szimulációval történő megadására. Tönkremenés csupán a $\sum_{i=1}^k t_i$ időpontok ($k = 1, 2, \dots$) valamelyikében történhet. Most is csupán egy T_{MAX} időpontig vizsgáljuk a folyamatot, amennyiben addig nem történik tönkremenés, akkor a tönkremenési időt végtelennek tekintjük. Ha a folyamat realizációja során véges tönkremenési időt kapunk, akkor ezt δ -val szorozzuk és vesszük az exponenciális függvényét, a kapott értékeket pedig átlagoljuk. Ez az átlag lesz a $\phi(u, \delta)$ becslése. A $\phi(n, z)$ becslésénél hasonlóan járunk el.

A tönkremenési idő várható értékét a szimulációval kapott véges $T_U(u)$ -k átlagolásával is megkaphatjuk.

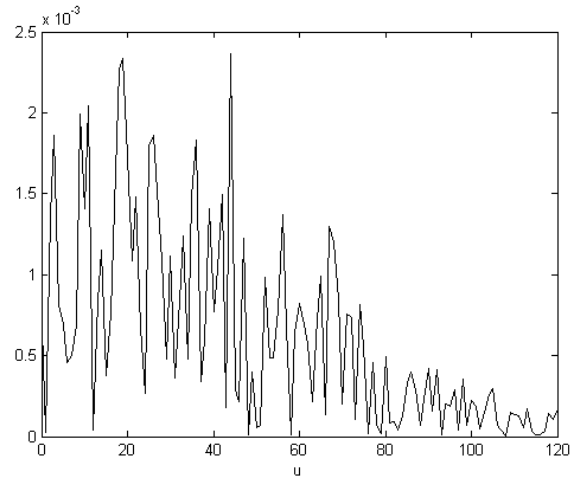
A szimulációk elvégzéséhez szükségünk van különböző eloszlású valószínűségi változók generálására.

Exponenciális eloszlás esetén a károk közt eltelt időket és a károk nagyságát úgy közelítettük, hogy $[0,1]$ -en egyenletes eloszlású valószínűségi változókat - amelyeket a MATLAB beépített véletlen szám generátorának segítségével kaptunk - behelyettesítettük az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvényének inverz függvényébe, az $F^{-1}(x) = \frac{\ln(1-x)}{-\lambda}$ függvénybe. Az így kapott valószínűségi változók exponenciális eloszlásúak λ paraméterrel. Arra a speciális esetre, amikor a károk között eltelt idők és a károk nagyságai egyaránt exponenciálisak, a korábbiakban már ismertettünk analitikus megoldást. Az alábbi ábrán a (3.1.4) -ben megadott megoldás és egy szimuláció eredményei láthatóak $\lambda = 0.3, \mu = 5$ és $c = 2$ paraméterválasztás mellett, abban az esetben, amikor a kezdőtőke értéke a $[0,120]$ intervallumból kerül ki $h = 1$ lépésközzel és $N = 100.000$ szimulációt végzünk minden egyes kezdőmennyiséggel a

$T_{MAX} = 1.000$ időpillanatig. A 3.3.1 ábra mutatja a tönkremenés elkerülésének valószínűségét az analitikus és a szimulációs módszerrel meghatározva. Folytonos vonallal jelöltük az analitikus, szaggatott vonallal a szimuláció eredményeit, melyek szinte egybeesnek. A 3.3.2 ábra mutatja a pontos megoldás és a szimuláció eredményeinek eltérését, amely ezred nagyságrendű és kisebb, mint a szimuláció hibája.



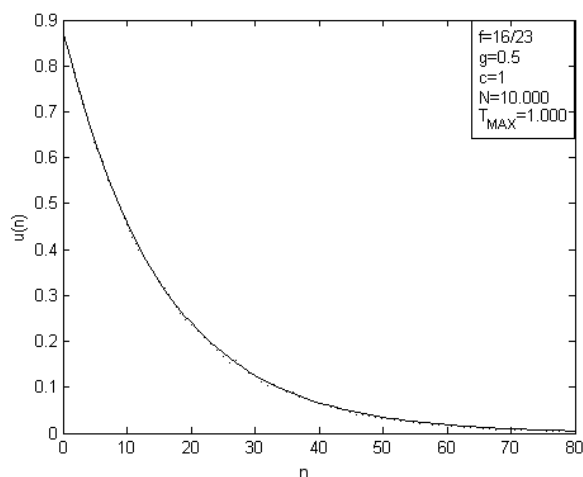
3.3.1. ábra $R(u)$ analitikus és szimulációs módszerrel meghatározott eredményei



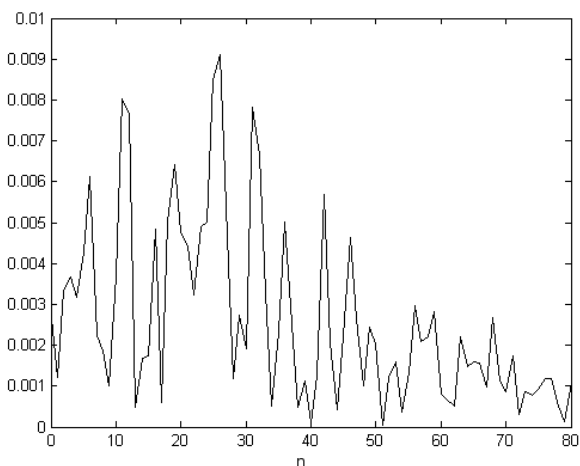
3.3.2. ábra $R(u)$ analitikus és szimulációs módszerrel meghatározott eredményeinek eltérése

Normális eloszlású valószínűségi változókat a centrális határeloszlás-tétel alapján generálunk, mégpedig úgy, hogy generálunk tizenkét darab $[0,1]$ -en egyenletes eloszlású véletlen számot, ezeket összeadjuk és kivonunk belőle hatot. A kapott szám közelítőleg standard normális eloszlású véletlen szám, amit megszorozva σ -val és hozzáadva m -et, (m, σ) paraméterű normális eloszlású véletlen számmá alakíthatunk, vagyis az így kapott valószínűségi változók jó közelítéssel normális eloszlásúak m várható értékkel és σ szórással. Ugyan MATLAB-nak létezik normális eloszlású szám-generátora, ennek alkalmazása azonban a szimulációs programok futási idejét jelentősen megnövelte.

Geometriai eloszlású valószínűségi változókat úgy generálunk, hogy $[0,1]$ -en egyenletes eloszlású x véletlen számokat helyettesítünk a $\left[\frac{\ln(1-x)}{\ln(f)} \right]$ képletbe. Az így kapott valószínűségi változók geometriai eloszlásúak f paraméterrel. Arra a speciális esetre, amikor a károk nagyságai és a köztük eltelt idők egyaránt geometriai eloszlásúak a korábbiakban ismertettünk analitikus megoldást. Az alábbi ábrákon a (3.2.5)-ben megadott analitikus megoldás, valamint a szimulációink eredményei és azok különbsége látható az $f = \frac{16}{23}, g = 0.5, c = 1$ paraméterválasztás mellett. A kezdőtöke értéke a $[0,80]$ intervallumból került ki. $N = 10.000$ szimulációt végzünk minden egyes kezdoménnyiséggel a $T_{MAX} = 1000$ időpillanatig. A 3.3.3. ábra illusztrálja az analitikus megoldás és a szimuláció eredményét, folytonos vonallal jeleztük az analitikus megoldás, szaggatottal pedig a szimuláció eredményét. A két módszerrel számított értékek szinte teljesen egybeesnek, a két megoldás különbségét szemlélteti a 3.3.4. ábra. Az eltérések kisebbek 0.01-nél, amely hiba a szimuláció hibájából származik.



3.3.3. ábra Az $u(n)$ analitikus megoldással és szimulációval számított értékei



3.3.4. ábra Az $u(n)$ analitikus megoldással és szimulációval meghatározott eredményeinek eltérése

Az n, p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változókat úgy generáljuk, hogy generálunk n darab $[0,1]$ -en egyenletes eloszlású véletlen számot amelyekről egyesével ellenőrizzük, hogy kisebbek-e a megadott p értéknél, és megszámloljuk, hányszor teljesül ez az esemény. A kapott egész érték binomiális eloszlású véletlen szám n, p paraméterrel.

Felhasználtunk továbbá tangenshiperbolicus eloszlású valószínűségi változókat amelyeket szintén egyenletes eloszlású valószínűségi változóknak az eloszlás függvény inverzébe történő helyettesítésével generáltunk. A diszkrét megfelelőjét a szokásos diszkrét eloszlású valószínűségi változók generálásának megfelelően végeztük.

4. A folytonos és diszkrét modellek összehasonlítása

A dolgozat célja, hogy összehasonlítsuk a folytonos és diszkrét modelleket. A összevetéseket ebben a fejezetben fogjuk elvégezni. A modelleket elsőként kvantitatív módon vetjük össze a korábbiakban ismertetett egyenletek, numerikus módszerek és szimulációk segítségével. Ezt követően kvalitatív módon hajtjuk végre az összehasonlítást, egyenletek és megoldások egymásnak való megfeleltetésével.

4.1 Összehasonlítás kvantitatív módon

Elsőként kvantitatív összevetéseket végzünk a modellekre felírt egyenletek eredményeinek összehasonlítására. Ezeket három alfejezetre osztottuk.

Az első alfejezetben a károk közt eltelt idők eloszlása folytonos esetben exponenciális, míg diszkrét esetben geometriai, a károk nagysága pedig szintén exponenciális illetve geometriai eloszlású vagy egységnyi. Az összehasonlításokat analitikus és numerikus megoldások eredményein keresztül végezzük el.

A második alfejezetben olyan esetekben végezzük el az egybevetést, amikor a károk közti idők nagyságai exponenciális illetve geometriai eloszlásúak, a károk nagyságai pedig normális illetve binomiális eloszlásúak. Ebben az esetben szimuláció segítségével számítjuk ki az összehasonlítani kívánt eredményeket.

A harmadik alfejezetben olyan eseteket vetünk össze, amikor a károk közti idők normális és binomiális eloszlásúak, a károk nagyságai pedig szintén normális és binomiális eloszlást követnek vagy állandóak. Ebben az esetben számításainkat sajnos nem tudtuk olyan pontosan végezni, mint a korábbiakban. Korlátozott erőforrásaink miatt ugyanis időnként nem tudtunk olyan kis lépésközzel olyan sok szimulációt végezni, mint a korábbi esetekben, mivel a normális eloszlású valószínűségi változók generálása több mint tízszer annyi ideig tart, mint például egy exponenciális eloszlású valószínűségi változóé. Amíg például egy szimuláció, amiben exponenciális eloszlású véletlen számokat használtunk fel, csak két-három órát vesz igénybe, addig egy normális eloszlást tartalmazó szimuláció akár húsz-harminc órát is igénybe venne, ha ugyanannyi szimulációt végeznénk el pontonként, ugyanazzal a lépésközzel. Itt megjegyezzük, hogy olyan szimulációt is végeztünk, amelyben a károk közti idők és a károk nagyságának eloszlása is normális volt, ami megduplázza a szükséges futási időt.

Összehasonlításaink során a tönkremenés valószínűségének értékeit, valamint a tönkremenés várható idejének értékeit hasonlítottuk össze a folytonos és a diszkrét modellben és igyekeztünk ezeket a lehető legtöbb paraméter alapján megtenni.

A folytonos eloszlásokhoz azért így választottuk meg a diszkrét eloszlásokat, mert ezek jól ismert összetartozó eloszlás-párok. Ebben a fejezetben végig ilyen eloszlás-párokat használunk fel. Az előnye ezeknek a választásoknak, hogy a folytonos és a megfelelő diszkrét eloszlás alakja hasonló, ami mélyebb valószínűségszámítási összefüggésekből fakad, továbbá az eloszlást jellemző egy, illetve kettő paraméter lehetővé teszi, hogy várható értéküket, illetve emellett a szórásukat is egyenlővé tehetjük. Az előbbi a nettó haszon feltétel miatt rendkívül fontos. Abban az esetben, amikor egy folytonos eloszláshoz nem ismerünk ilyen diszkrét párt, egy a későbbiekben ismertetendő módszerrel konstruálhatjuk meg a diszkrét megfelelőjét.

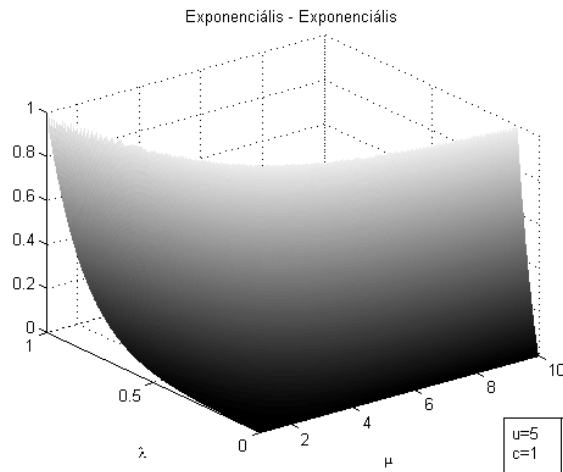
4.1.1 A folytonos és diszkrét modell eredményeinek összehasonlítása a károk nagyságának exponenciális illetve geometriai eloszlása valamint a károk nagyságának exponenciális illetve geometriai eloszlása, vagy egységnyi nagysága esetén

A modell diszkrét és folytonos esetei közül az alábbiakban azokat fogjuk összehasonlítani egymással, amikor a károk közt eltelt idők eloszlása folytonos esetben exponenciális, a diszkrét esetben pedig ennek megfelelő (geometriai) eloszlású, a károk nagysága pedig szintén ezeket az eloszlásokat követi, vagy állandó (egységnyi) nagyságúak. Az összehasonlítás során a csőd bekövetkezési valószínűségét és egy esetben a csőd bekövetkezésének várható idejét vetjük össze a modellekben. Elvégezzük továbbá a $\phi(u, \delta)$ és a $\varphi(n, z)$ diszkontált büntetőfüggvények egymással való összehasonlítását is, bizonyos paraméter értékek mellett. A felhasznált értékeket – amennyiben rendelkezésre áll analitikus megoldás – analitikus módon határozzuk meg. Ha ilyen megoldást nem ismerünk, akkor numerikus módszert alkalmazunk.

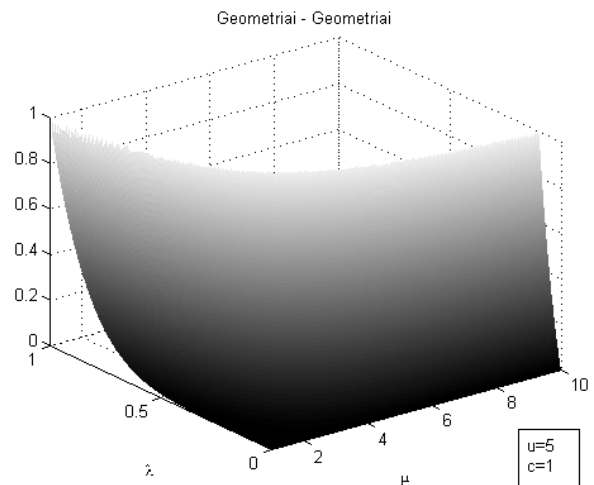
Az első összehasonlítás során a csőd valószínűségét határoztuk meg a folytonos esetben, majd ugyanezekkel (a megfelelő módon átalakított) értékekkel kiszámítottuk ennek valószínűségét a diszkrét esetben is. Összehasonlításaink során törekedtünk rá, hogy a felhasznált folytonos és diszkrét eloszlások várható értéke és (esetleg) szórása megegyezzen, ennek alapján állapítjuk meg az egyik eloszlás paramétereit a másik eloszlásnak megfelelőre. Az összehasonlítást a folytonos eset eloszlásainak paramétereit alapján végeztük el, a diszkrét eset paramétereit az $f = \frac{1}{1+\lambda}$ és $g = 1 - \frac{1}{\mu}$ módon alakítottuk át. A csőd valószínűségét a korábbiakban ismertetett (3.2.5) és (3.1.4) képletek segítségével számítottuk. Az ábrákon nem jelöljük azokat a pontokat, ahol teljesül, hogy $\frac{\lambda\mu}{c} \geq 1$, mivel a 3.1.3 tétel alapján ezekben a pontokban a csőd valószínűsége azonosan 1. Az összehasonlításhoz felhasznált értékeket az alábbi paraméterek felhasználásával kaptuk: az exponenciális eloszlás λ illetve μ paramétereit a $[0,1]$ illetve $]1,10]$ intervallumból választottuk ki $h_\lambda = 0.001$ és $h_\mu = 0.01$ lépésközzel. A lépésközök eltérésének oka, hogy a μ esetén egy nagyobb tartományból kerülnek ki az értékek. Az időegységenkénti bevétel értékét $c = 1$ -re választottuk, a kezdőtőke értéke pedig $u = 5$ volt.

A kiszámított eredményeket szemlélteti az 4.1.1.1. és a 4.1.1.2. ábra.

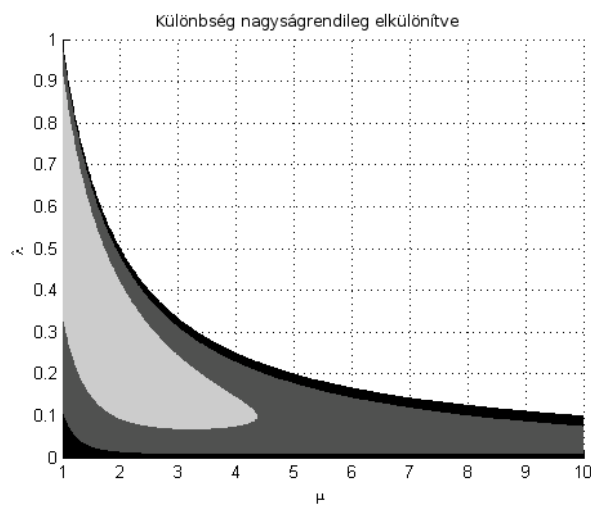
A két megoldás eredményeinek eltérését nagyságrendileg ábrázolja a 4.1.1.3. ábra. Fekete színnel jelöltük azokat a tartományokat, ahol a megoldások különbsége kevesebb, mint 0.001. Sötétszürkével ábrázoltuk azokat a részeket, ahol a megoldások különbsége $[0.001, 0.01]$ -béli, és világosszürkék a $[0.01, 0.031]$ -béli eltéréssel rendelkező tartományok. A 4.1.1.4. ábrán a megoldások tényleges eltérése látható.



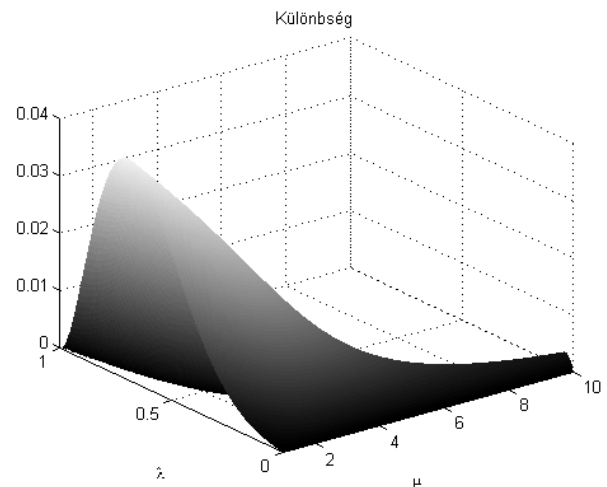
4.1.1.1. ábra Az 1-R(5) tönkremenési valószínűség értékei



4.1.1.2. ábra Az u(5) tönkremenési valószínűség értékei



4.1.1.3. ábra Az 1-R(5) és az u(5) eredményeinek nagyságrendi eltéréseinek megoszlása



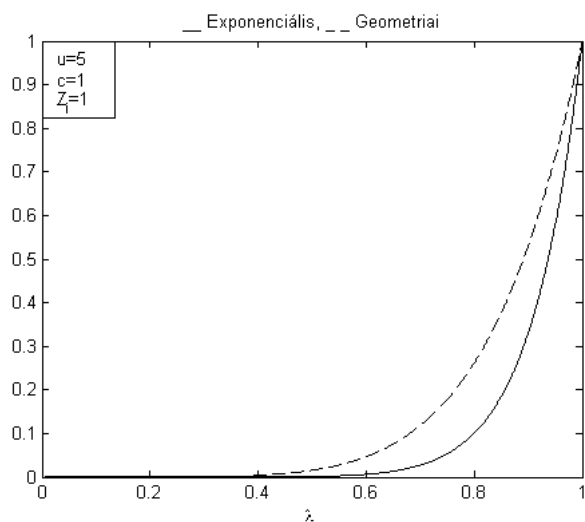
4.1.1.4. ábra Az 1-R(5) és az u(5) eredményeinek eltérése

A 4.1.1.3. és a 4.1.1.4. ábra jól mutatja, hogy a két megoldás eredményeinek különbsége kicsi, csak helyenként közelít 0.031-hez. A 4.1.1.3. ábráról leolvasható, hogy az eltérés akkor a legkisebb, ha a megoldások eredményeinek értéke az 1-hez közelít.

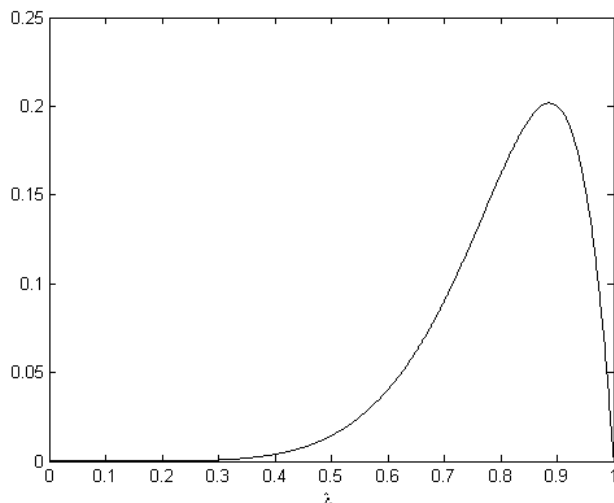
Második összehasonlításunkban olyan folyamatokat hasonlítottunk össze, ahol a károk nagysága egységnyi. Az értékek számítása közben a csőd bekövetkezésének valószínűségét számítottuk ki. A paraméter, ami alapján az összehasonlítást elvégeztük a károk közt eltelt idők eloszlásának paramétere a folytonos esetben. A diszkrét modell paramétereit a korábbiakban ismertetett módon határoztuk meg a folytonos modell paramétereiből. Az összehasonlított értékeket a korábbiakban megadott (3.1.6) és (3.2.7) képletek segítségével számítottuk ki.

Az eredmények számítása során az alábbi paramétereket használtuk fel: a kezdőtőke értéke $u = 5$, az időegységenkénti bevétel értéke pedig $c = 1$ voltak. A λ értékek a $[0,1]$ intervallumba estek, és $h_\lambda = 0.001$ lépésköznként vizsgáltuk őket. A károk nagysága egységnyi volt.

Az összehasonlított eredményeket ábrázolja a 4.1.1.5. ábra, amin folytonos vonal jelöli a folytonos és szaggatott a diszkrét modell esetében kiszámított eredményeket. A két megoldás értékei közti különbséget szemlélteti a 4.1.1.6. ábra.



4.1.1.5. ábra 1-R(5) és u(5) kiszámított eredményei

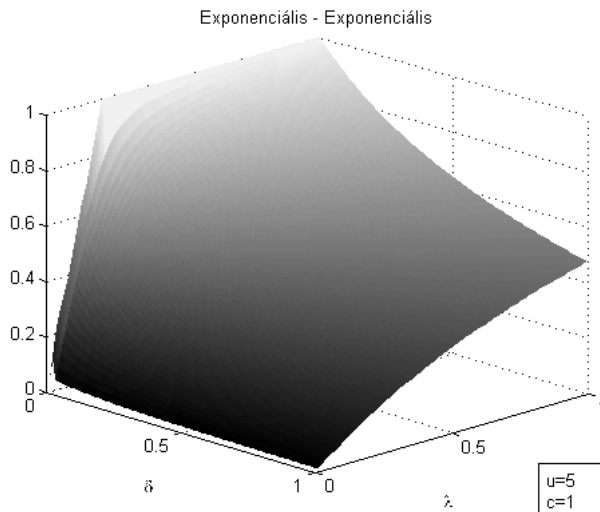


4.1.1.6. ábra 1-R(5) és u(5) eredményeinek eltérése

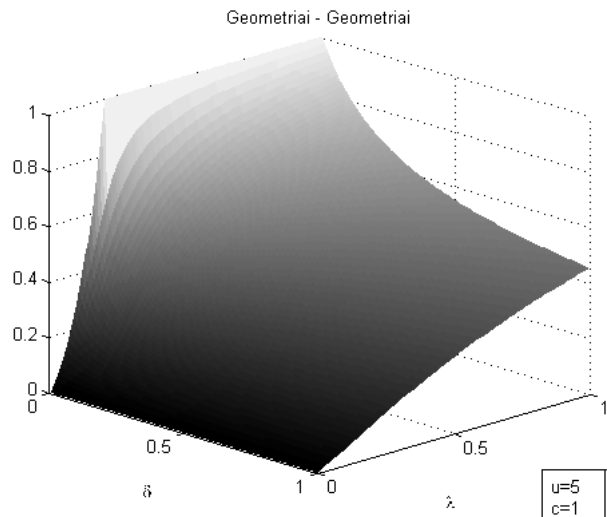
A 4.1.1.6. ábráról leolvasható, hogy a két megoldás eltérése a $\lambda \approx 0.9$ pontban a legnagyobb. Az eltérés mértéke a $\lambda > 0.98$ és a $\lambda < 0.63$ értékek esetén kevesebb, mint 0.05.

A harmadik összehasonlítást a λ és δ értékek alapján végeztük el, a $\phi(u, \delta)$ és a $\varphi(n, z)$ értékei alapján. A folytonos modell esetében a korábbiakban ismertetett Crank-Nicholson sémával kiszámított közelítő értékeket használtuk fel.

Az összehasonlított eredményeket az alábbi paraméterek felhasználásával számítottuk: a λ értékeket a $[0,1]$ intervallumból vettük, a $h_\lambda = 0.01$ lépésközzel. A δ értékek a $[0,1]$ intervallumból kerültek ki, $h_\delta = 0.01$ lépésközzel. A károk nagyságának várható értéke $\mu = 5$ volt. Az időegységenkénti bevétel értéke $c = 1$, a kezdőtőke pedig $u = 5$ volt. A diszkrét modell paramétereit az $f = \frac{1}{1+\lambda}$, a $g = 1 - \frac{1}{\mu}$ és a $z = 1 + \delta$ összefüggések szolgáltatták. A folytonos modell eredményeit a 4.1.1.7, a diszkrétét pedig a 4.1.1.8. ábra szemlélteti $n = u = 5$ esetén.

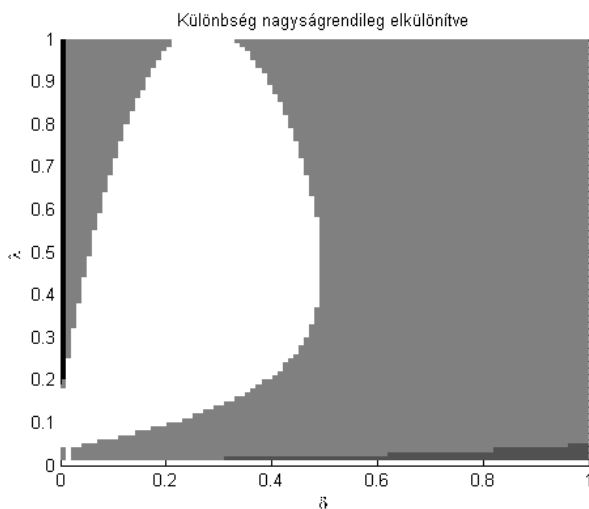


4.1.1.7. ábra $\phi(5, \delta)$ függvény értékei

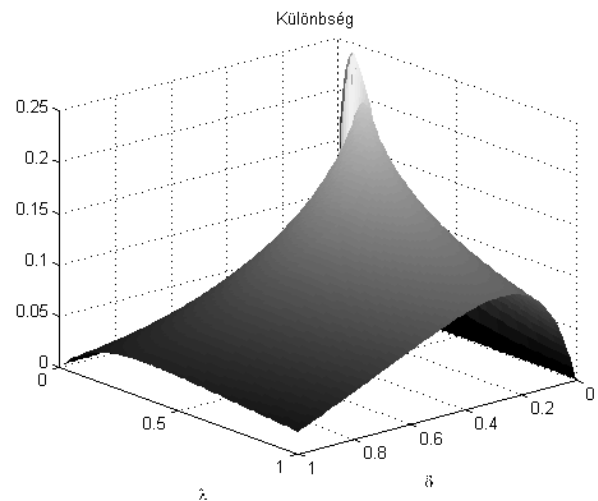


4.1.1.8. ábra $\phi(5, z)$ függvény értékei

A megoldások különbségét szemlélteti a 4.1.1.9. és a 4.1.1.10 ábra. Megjegyezzük, hogy a könnyebb szemléltetés érdekében az 4.1.1.9. ábrát a vizsgált esetekhez képest más szögben mutatjuk, és árnyalása is más. A korábbiakhoz hasonló módon: fekete színnel jelöljük azokat a tartományokat, ahol a megoldások különbsége kevesebb, mint 0.001. Sötétszürkével ábrázoltuk azokat a részeket, ahol a megoldások különbsége $[0.001, 0.01]$ -béli, és világosszürkék a $[0.01, 0.1]$ -béli eltéréssel rendelkező tartományok. Az ennél nagyobb eltéréssel rendelkező tartományokat fehérrel jelöltük.



4.1.1.9. ábra $\phi(5, \delta)$ és $\phi(5, z)$ nagyságrendi eltérése



4.1.1.10. ábra $\phi(5, \delta)$ és $\phi(5, z)$ tényleges eltérése

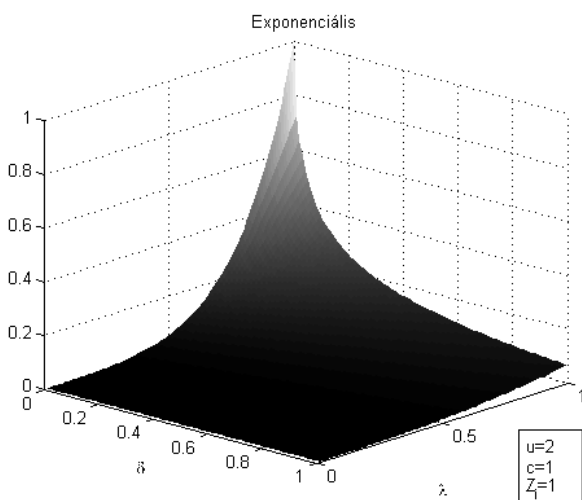
Az ábrákról leolvasható, hogy a két megoldás eredményeinek eltérése abban az esetben a legkisebb, ha $\delta = 0$. A legnagyobb eltérés $\delta \in]0, 0.5]$ értékek esetén figyelhető meg. Látható

továbbá egy keskeny sáv amelyben az eltérés még elfogadhatóan kicsi, abban az esetben amikor a $\lambda \leq 0.05$, és ez a sáv a δ érték növelése esetén növekszik.

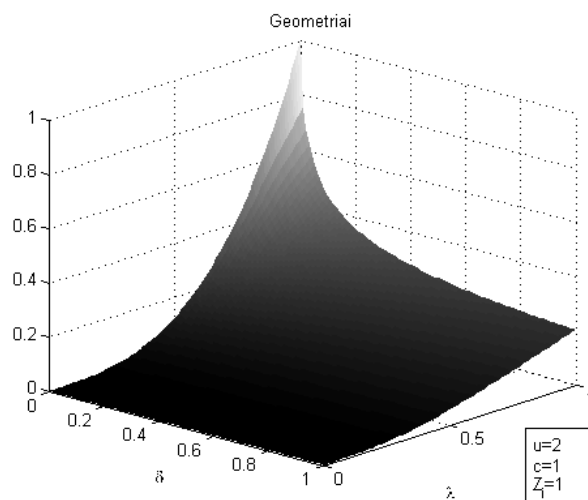
Negyedik összehasonlításunk során ismét állandó (egységnyi) nagyságú károk esetében vizsgáljuk a folyamatot. A paraméterek, amelyek alapján az összehasonlítást végezzük a folytonos modell esetében a károk között eltelt idők eloszlásának paramétere, amit a diszkrét modell esetén az $f = \frac{1}{1+\lambda}$ módon számítottunk át. A diszkontálási faktort $z = 1 + \delta$ módon írjuk fel a diszkrét modell esetében. Az összehasonlított értékeket folytonos esetben a (3.1.10) egyenlet, a diszkrét esetben a korábbiakban ismertetett (3.2.7) képlet segítségével határoztuk meg.

Az összehasonlított eredményeket az alábbi paraméterek felhasználásával számítottuk: a λ értékeket a $[0, 1]$ intervallumból vettük, a $h_\lambda = 0.01$ lépésközzel. A δ értékek a $[0, 1]$ intervallumból kerültek ki, $h_\delta = 0.01$ lépésközzel. Az időegységenkénti bevétel értéke $c = 1$, a kezdőtőke pedig $u = 2$ volt.

Eredményeinket ábrákkal szemléltetjük, külön-külön, majd újabb ábrák segítségével megmutatjuk ezek különbségét is. A 4.1.1.11. ábra illusztrálja a folytonos modell esetében kiszámított megoldást, a 4.1.1.12. ábra pedig a diszkrét modell esetében számítottat.

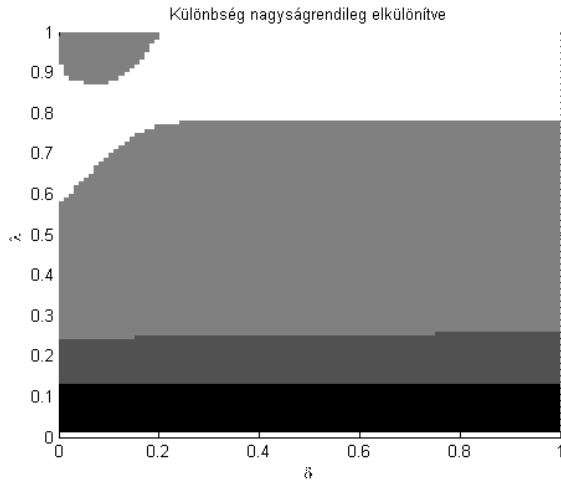


4.1.1.11. ábra $\phi(2, \delta)$ eredményei

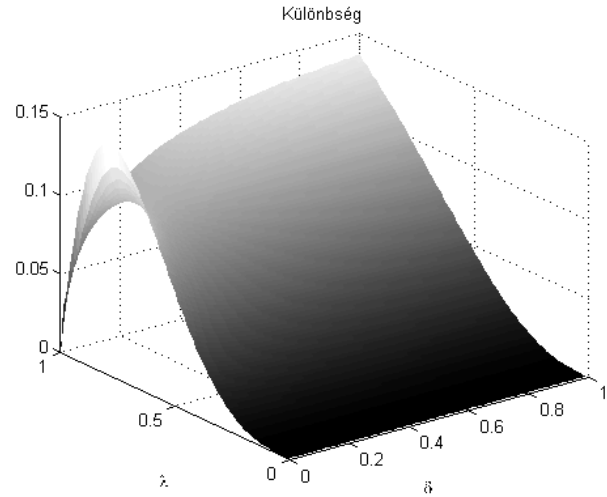


4.1.1.12. ábra $\phi(2, z)$ eredményei

A megoldások különbségét mutatja a 4.1.1.13. és a 4.1.1.14. ábra. Megjegyezzük, hogy a könnyebb szemléltetés érdekében az első ábrát a vizsgált esetekhez képest más szögben mutatjuk, és árnyalása is más. A korábbiakhoz hasonló módon: fekete színnel jelöljük azokat a tartományokat, ahol a megoldások különbsége kevesebb, mint 0.001. Sötétszürkével ábrázoltuk azokat a részeket, ahol a megoldások különbsége $[0.001, 0.01]$ -béli, és világosszürkék a $[0.01, 0.1]$ -béli eltéréssel rendelkező tartományok, az ennél nagyobb eltéréseket fehér színnel jelöltük.



4.1.1.13. ábra A $\phi(2,\delta)$ és a $\phi(2,z)$ eredményeinek nagyságrendi eltérése



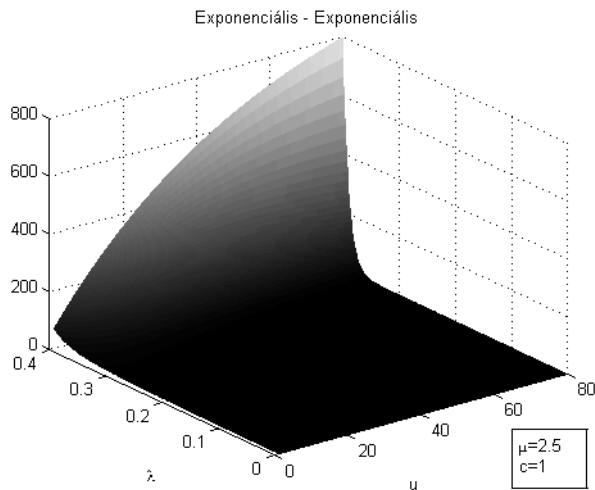
4.1.1.14. ábra A $\phi(2,\delta)$ és a $\phi(2,z)$ eredményeinek különbsége

Ez alapján láthatjuk, hogy a két megoldás azokban a pontokban van a legközelebb egymáshoz, amikor a $\lambda \leq 0.1$. Szintén kis (0.01-nél kisebb) eltérés mutatkozik azokban a pontokban, ahol a $\lambda \in [0.1, 0.2]$. A legnagyobb eltérés abban az esetben mutatkozik, amikor a $\lambda \geq 0.8$ és $\delta \geq 0.3$, valamint amikor a $\delta \in [0, 0.25]$ és $\lambda \in [0.6, 0.85]$.

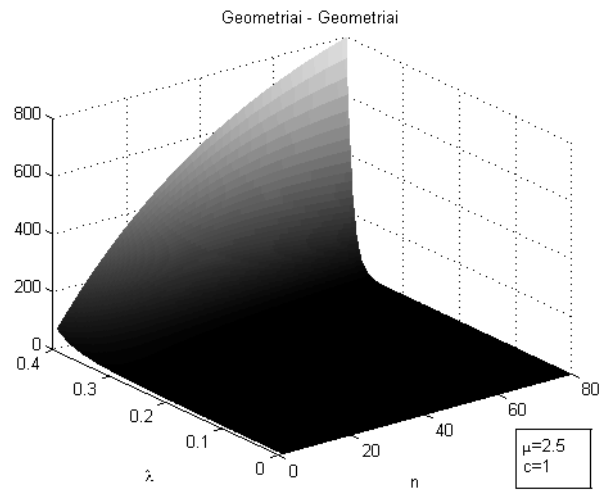
Ötödik összehasonlításunkat a tönkremenés várható ideje alapján végeztük exponenciális illetve geometriai eloszlású kárigények közt eltelt idők és kárnagyságok esetén. Az eredményeket a folyamat kezdőtőkéje és a károk közti idők eloszlásának paramétere függvényében ábrázoltuk. A folytonos és a diszkrét modell esetében az analitikus megoldások eredményeinek numerikus deriválásával határoztuk meg az összehasonlított értékeket.

Az összehasonlított értékeket az alábbi paraméterek felhasználásával kaptuk. A károk nagyságának paraméterét $\mu = 2.5$ -re választottuk. A károk közt eltelt idők paramétere a $\lambda \in [0, 0.4]$ intervallumból került ki $h_\lambda = 0.001$ lépésközzel. Azért nem használtunk nagyobb λ értékeket, mert abban az esetben nem teljesülne a $\frac{\lambda \mu g}{c} < 1$ nettó haszon feltétel. A díjbevétel értékét $c = 1$ -re választottuk. A kezdőtőke értéke az $u \in [0, 60]$ intervallumból került ki $h = 0.01$ lépésközzel.

A 4.1.1.15. ábrán láthatóak a folytonos modell, a 4.1.1.16 ábrán a diszkrét modellre kiszámított megoldások.

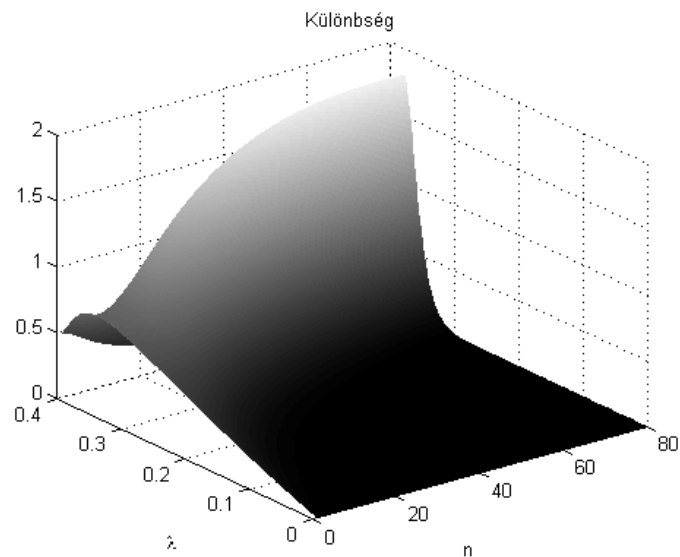


4.1.1.15. ábra A tönkremenési idő várható értéke a folytonos modell esetében



4.1.1.16. ábra A tönkremenési idő várható értéke a diszkrét modell esetében

A két modell eredményeinek eltérését mutatja a 4.1.1.17. ábra. Ebben az összehasonlításban nem szemléltetjük a két megoldást nagyságrendileg, mivel a két megoldás értékeinek nagyságához képesti eltérések olyan kicsik, hogy a tényleges eltérést mutató ábráról is könnyedén leolvasható ez az eltérés.



4.1.1.17. A folytonos és diszkrét modell tönkremenési ideje várható értékének eltérése

A 4.1.1.17. ábráról leolvasható, hogy a két modell eredményei viszonylag közel vannak egymáshoz. Amennyiben a λ értéke a $[0.3, 0.4]$ intervallumba esik az eltérés a kezdőtőke növelésével növekszik. Abban az esetben, ha λ kevesebb, mint 0.3 úgy a kezdőtőke növelésével az eltérés csökken.

Az elvégzett összehasonlításokat összegezve elmondható, hogy a tönkremenés valószínűségét tekintve a két modell abban az esetben áll a legközelebb egymáshoz, amikor a károk nagyságának eloszlása exponenciális. Ebben az esetben a legnagyobb eltérés 0.031, de ez az eltérés a paraméterek csak egy kisebb halmaza esetén mutatkozik, egyébként az eltérés mértéke sok esetben 0.01 alatti, így a diszkrét modellt használhatnánk a folytonos közelítéseként.

Az eltérés egységnyi nagyságú károk esetén erőteljesen megnövekszik. Ekkor a legnagyobb eltérés értéke 0.2. Ebben az esetben a diszkrét modell eredményeit már általában nem használhatjuk a folytonos helyett, de helyenként még közelítésére sem.

Azokban az esetekben amikor a δ paraméter nem nulla, a két modell legnagyobb eltérése 0.25 ami a korábbiakhoz hasonlóan csak egy bizonyos tartomány esetében lép fel, de ebben a tartományban ($\delta \in]0,0.3]$ és $\lambda \in [0,0.3]$) az eltérés mértéke nagyobb, mint 0.1, ami szintén túlzottan nagy ahhoz, hogy a diszkrét modell eredményeivel közelíthető legyen a folytonos modell.

Egységnyi károk esetén az eltérés legnagyobb értéke kevesebb, mint 0.15, de ez az eltérés a $\lambda < 0.5$ esetben 0.05 alatti. Ekkora eltérés esetén a folytonos modell eredményeit még nem helyettesíthetjük a diszkrét modell eredményeivel, de tekinthetjük azt közelítésként.

A tönkremenés várható idejével végzett összehasonlítás alapján azt mondhatjuk, hogy a két modell eredményeinek eltérése olyannyira kicsi, hogy a diszkrét modell eredményeit használhatjuk a folytonos helyettesítésére.

4.1.2 A folytonos és diszkrét modell eredményeinek összehasonlítása a károk között eltelt idők exponenciális illetve geometriai eloszlása, és a károk nagyságának normális illetve binomiális eloszlása esetén

Az előző alfejezetben végig a folytonos eloszlások paramétereire igazítottuk a diszkrét eloszlások paramétereit, azonban ez ebben az alfejezetben félig, a következőben pedig teljesen fordítva történik. Ennek oka, hogy összehasonlításaink így szemléletesebbek lesznek, jobban megmutatják, hogy a két modell mennyire egyezik egymással. Ha a normális eloszlás paramétereire alakítottuk volna a binomiális eloszlás paramétereit, akkor azzal a problémával szembesülnénk, hogy néhány paraméter együttes esetében a binomiális eloszlás nem lenne alkalmazható, mert nem kapnánk egész értéket a binomiális eloszlás n paraméterére, így az ábra helyenként hiányossá válna.

Az alábbiakban a folytonos és diszkrét modell azon eseteit fogjuk összehasonlítani, amikor a károk között eltelt idők a folytonos esetben exponenciálisak, a diszkrétben pedig geometriaiak. A károk nagysága folytonos esetben normális, diszkrét esetben pedig binomiális eloszlású. Az összehasonlítás során a korábbiakhoz hasonlóan először csak a csőd bekövetkezésének valószínűségét vizsgáljuk, ezután rátérünk a diszkontált büntetőfüggvény várható értékére, majd végül a csőd bekövetkezésének várható időit is összevetjük.

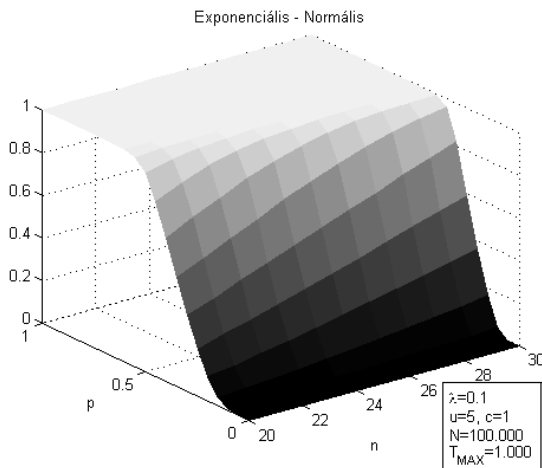
Szimulációs eredményeink számításakor a lehető legtöbb szimulációval dolgoztunk, de erőforrásaink végeessége miatt nem minden esetben sikerült egyforma mennyiségű szimulációval elvégezni a különböző esetek eredményeinek számítását.

Mivel a szimulációk során normális eloszlást is felhasználunk, fontos megemlítenünk, hogy ez az eloszlás felvehet negatív értékeket is, ami nem fordulhatna elő a károk nagyságai és a közöttük eltelt idők esetén, de igyekeztünk a paramétereket úgy megválasztani, hogy a negatív értékek előfordulásának valószínűsége elhanyagolhatóan kicsi legyen. Ha mégis negatív értéket kaptunk, akkor azokat figyelmen kívül hagytuk.

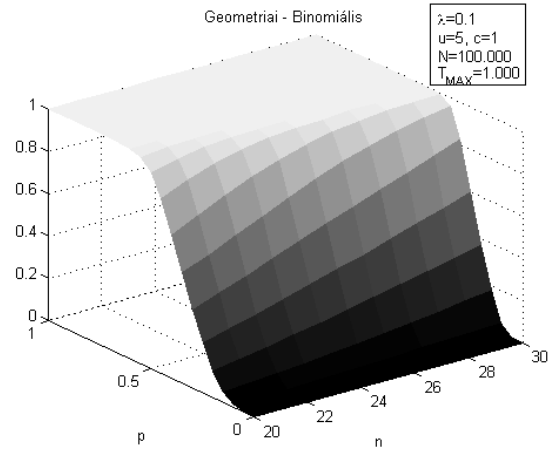
A modellek adott esetein végzett első összehasonlításunk során a csőd bekövetkezésének valószínűségével foglalkoztunk. Az összehasonlítást a binomiális eloszlás n és p paraméterei alapján végeztük el, a folytonos esetben ennek megfelelő normális eloszlás paramétereit az $m = n \cdot p$ és $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ módon határoztuk meg.

Az összehasonlított értékeket az alábbi paraméterek esetén kaptuk: a λ értékét 0.1-re választottuk, amit a diszkrét modell esetében az $f = \frac{1}{1+\lambda}$ módon alakítottuk át a felhasznált eloszlásnak megfelelőre. Az n értékek az $[20,30]$ intervallumból kerültek ki $h_n = 1$ lépésközzel, a p értékek pedig a $[0,1]$ intervallumból a $h_p = 0.05$ lépésközzel. Az időegységenkénti bevétel értéke $c = 1$, a kezdőtőke pedig $u = 5$ volt. Pontonként $N = 100.000$ szimulációt végeztünk a $T_{MAX} = 1.000$ időpillanatig.

A csőd bekövetkezési valószínűségeit ábrákon szemléltetjük, külön-külön, majd a harmadik és negyedik ábra segítségével illusztráljuk ezek különbségét is. Az 4.1.2.1. ábra mutatja a folytonos modell eredményeit, a 4.1.2.2 pedig a diszkrétét.



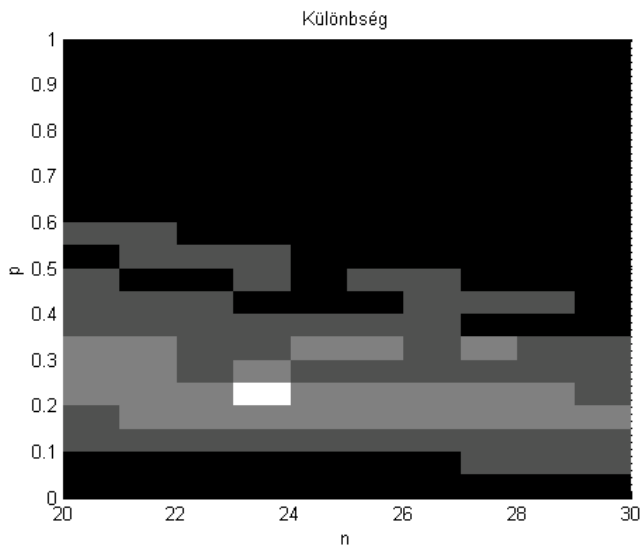
4.1.2.1. ábra Az 1- R(5) tönkremenési valószínűség értékei



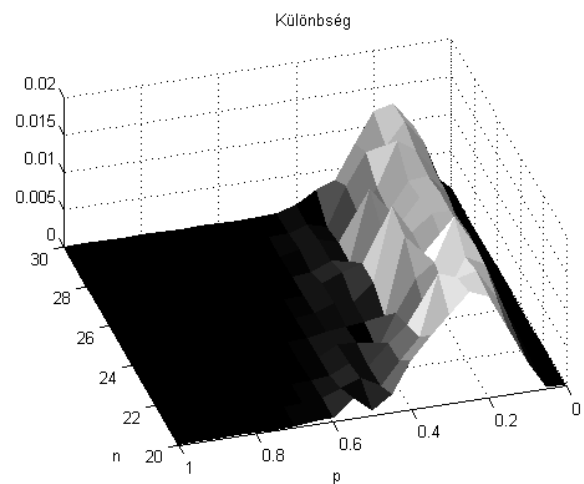
4.1.2.2. ábra Az u(5) tönkremenési valószínűség értékei

A két megoldás eltérését szemlélteti a 4.1.2.3 és a 4.1.2.4 ábra.

A 4.1.2.3 ábrán az eddigiekhez hasonló módon: fekete színnel jelöljük azokat a tartományokat, ahol a megoldások különbsége kevesebb, mint 0.001. Sötétszürkével ábrázoltuk azokat a részeket, ahol a megoldások különbsége $[0.001, 0.01]$ -béli, és világosszürkék a $[0.01, 0.02]$ -béli eltéréssel rendelkező tartományok.



4.1.2.3. ábra Az 1-R(5) és az u(5) nagyságrendi eltérése



4.1.2.4. ábra Az 1-R(5) és az u(5) eltérése

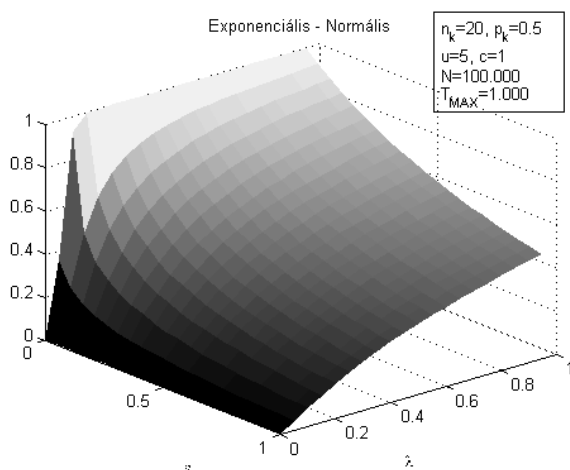
Látható, hogy a két megoldás eredményeinek különbsége akkor a legkisebb, amikor mindkét eredmény a 0-hoz vagy az 1-hez közelít, és akkor a legnagyobb, amikor a p értéke ≈ 0.2 . A

4.1.2.3. ábra egyetlen tartományon mutat 0.02-nél nagyobb eltérést a két eredmény között, méghozzá abban az esetben, amikor $0.2 \leq p \leq 0.25$ és $23 \leq n \leq 24$.

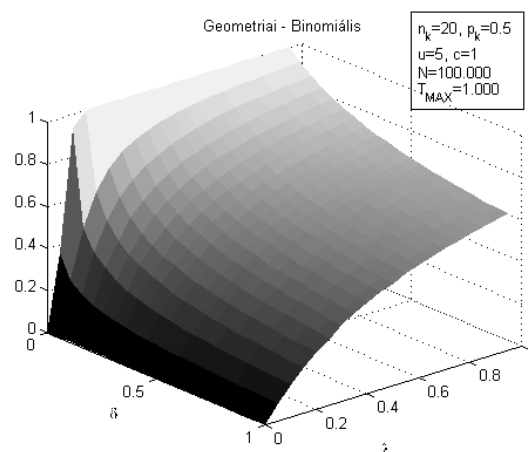
Második összehasonlításunk során a csőd bekövetkezési valószínűsége mellett a $\phi(u, \delta)$ és a $\varphi(n, z)$ függvények eltéréseivel foglalkozunk. Az összehasonlítást a λ és δ (valamint a diszkrét modell esetén neki megfelelő $f = \frac{1}{1+\lambda}$ és $z = \delta + 1$) értékek szerint végeztük el. Az összehasonlított értékeket mindkét esetben szimulációk segítségével számítottuk ki.

Az összehasonlított értékeket az alábbi paraméterek felhasználásával számítottuk: a λ értékek a $[0,1]$ intervallumból kerültek ki $h_\lambda = 0.05$ lépésközzel, a δ értékek szintén a $[0,1]$ intervallumból kerültek ki, és ugyancsak a $h_\delta = 0.05$ lépésközt használtunk. A binomiális eloszlás paraméterei $n = 20$ és $p = 0.5$ voltak. A normális eloszlás paramétereit az korábbiakhoz hasonlóan az $m = n \cdot p$ és $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ módon határoztuk meg. Az időegységenkénti bevétel értéke $c = 1$, a kezdőtőke pedig $u = 5$ volt. Pontonként $N = 100.000$ szimulációt végeztünk a $T_{MAX} = 1.000$ időpillanatig.

Eredményeinket ábrákkal szemléltetjük, külön-külön, majd újabb két ábra segítségével illusztráljuk ezek eltérését is. Az 4.1.2.5. ábra mutatja a folytonos, a 4.1.2.6. ábra pedig a diszkrét modell eredményeit.

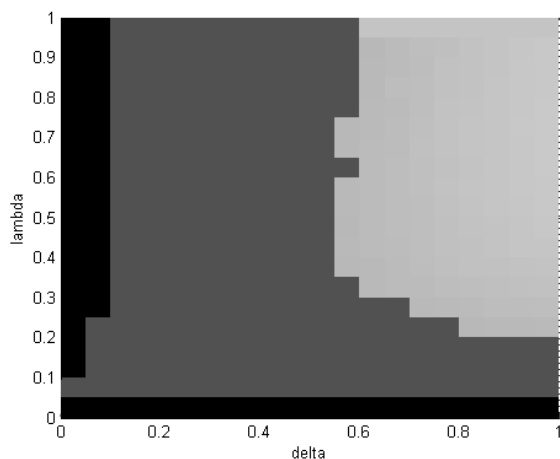


4.1.2.5. ábra $\phi(5, \delta)$ függvény értékei

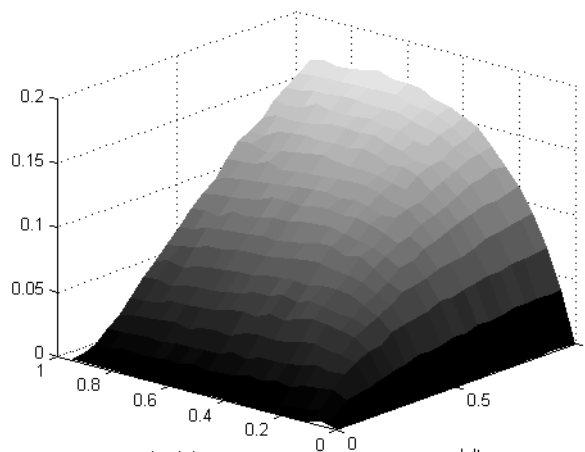


4.1.2.5. ábra $\varphi(5, z)$ függvény értékei

A megoldások különbségét a korábbiakhoz hasonlóan ábrákkal szemléltetjük. Az eddigieknek megfelelő módon: fekete színnel jelöljük azokat a tartományokat, ahol a megoldások különbsége kevesebb, mint 0.001. Sötétszürkével ábrázoltuk azokat a részeket, ahol a megoldások különbsége $[0.001, 0.01]$ -béli, és világosszürkék a $[0.01, 0.16]$ -béli eltéréssel rendelkező tartományok.



4.1.2.6. ábra A $\phi(5, \delta)$ és a $\varphi(5, z)$ nagyságrendi eltérése



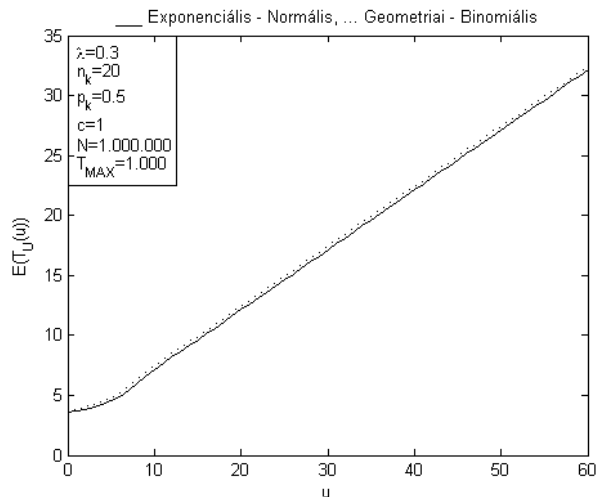
4.1.2.7. ábra A $\phi(5, \delta)$ és a $\varphi(5, z)$ eredményeinek tényleges eltérése

Látható, hogy a két megoldás eredményeinek eltérése akkor a legnagyobb, amikor a $\delta > 0.5$ és $\lambda > 0.2$. A legkisebb eltérés azokban az esetekben mutatkozik, amikor a $\delta < 0.1$.

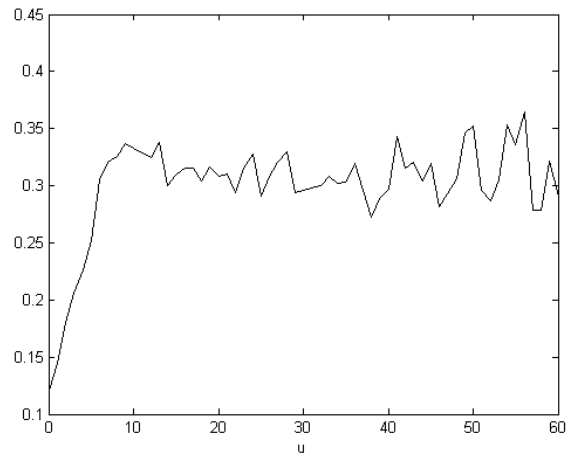
Harmadik összehasonlításunk a tönkremenés várható ideje alapján történt. A paraméter, amely alapján az összehasonlítást elvégeztük a folyamat kezdőtőkéje volt. A folytonos és a diszkrét modell esetében egyaránt szimulációk segítségével határoztuk meg az összevetni kívánt értékeket.

Az összehasonlításhoz felhasznált értékeket az alábbi paraméterek választásával kaptuk. A károk közt eltelt idők paramétere – folytonos esetben - $\lambda = 0.3$ volt, melyet az $f = \frac{1}{1+\lambda}$ módon alakítottunk át a diszkrét esetben felhasznált geometriai eloszlásnak megfelelő alakba. A károk nagyságának paraméterei – a diszkrét modell esetében - $n = 20$ és $p = 0.5$ voltak, melyeket az $m = n \cdot p$ és $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ módon alakítottunk át a folytonos modell esetében felhasznált normális eloszlásnak megfelelőre. A díjbevétel értékét $c = 1$ -re választottuk. A kezdőtőke értéke az $u \in [0,60]$ intervallumból került ki $h = 1$ lépésközzel. Minden egyes kezdőtőke esetében $N = 1.000.000$ szimulációt végeztünk a $T_{MAX} = 1.000$ időpillanatig.

A 4.1.2.8. ábrán láthatóak a két modell esetében kiszámított értékek. A folytonos modell eredményét folytonos vonallal jelöltük, a diszkrét modellét pedig pontozottal. A 4.1.2.9. ábra mutatja a két modellben a tönkremenési idők várható értékeinek különbségét.



4.1.2.8. ábra Az tönkremenési idők várható értéke a folytonos és diszkrét modellek esetében



4.1.2.9. ábra A folytonos és diszkrét modellben a tönkremenési idők várható értékének eltérése

A 4.1.2.9. ábráról leolvasható, hogy a két modell eredményei nagyon közel vannak egymáshoz. A kezdőtőke mennyiségét növelve az eltérés egészen az $n = 8$ kezdőtőke eléréséig növekszik, majd onnantól – a szimuláció hibáitól eltekintve - megközelítőleg 0.33 körül állandósul. Ez a különbség az $u = 60$ értékig lényegében folyamatosan fennáll, és nem romlik.

Összegezve az elvégzett összehasonlításokat elmondhatjuk, hogy a két megoldás a szimulációs hibák ellenére is nagyon kis eltéréssel rendelkezik, amennyiben a $\delta = 0$. Mivel a legnagyobb eltérés értéke 0.02 – ami a szimuláció hibájából is adódhat - a diszkrét modellt tekinthetjük a folytonos modell egy jó közelítésének. A δ érték növelésével a két modell eltérése is növekszik. A $0 < \delta \leq 0.5$ intervallumban az eltérés mértéke egészen 0.1-ig növekszik, majd a $0.5 < \delta \leq 1$ intervallumban ez az eltérés majdnem 0.17-ig nő, így ez utóbbi az esetekben a diszkrét modell már nem alkalmas a folytonos modell közelítésére. A tönkremenés várható időivel kapcsolatban csak egy összehasonlítást végeztünk, de az ebből kapott eredményekből jól látszik, hogy a két modell a tönkremenés várható idejét tekintve közel van egymáshoz és a diszkrét modell eredményeit tekinthetjük a folytonos modell eredményei egy jó közelítéseként.

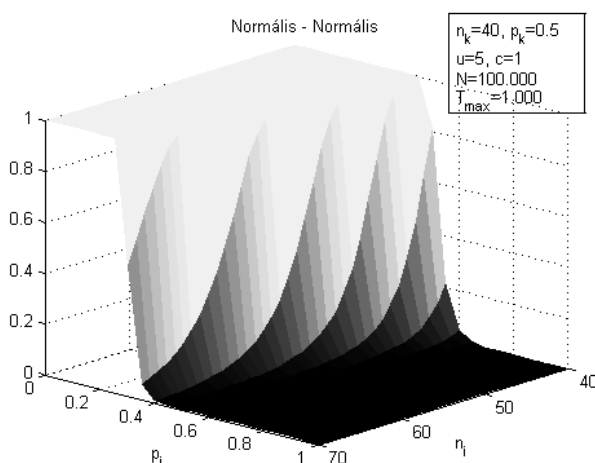
4.1.3 A folytonos és diszkrét modell eredményeinek összehasonlítása a károk között eltelt idők normális illetve binomiális eloszlása illetve a károk nagyságainak szintén normális és binomiális eloszlása vagy egységnyi nagysága alapján

Az alábbiakban összehasonlítjuk a diszkrét és folytonos modell esetei közül azokat az eseteket, amikor a károk közt eltelt idők és a károk nagyságának eloszlása folytonos esetben egyaránt normális, diszkrét esetben pedig ennek megfelelő (binomiális). Megvizsgáljuk azt a speciális esetet is, amikor a károk állandó, egységnyi nagyságúak. Az összehasonlítások során először csak a csőd bekövetkezésének valószínűségét vizsgáljuk, majd rátérünk a diszkontált büntetőfüggvény várható értékére, és végül a csőd bekövetkezésének várható időit hasonlítjuk egymáshoz. Az összehasonlításokat többféle paraméter alapján is elvégezzük. Az összehasonlításhoz felhasznált értékeket szimulációk segítségével számítjuk ki, mivel ebben az esetben nem áll rendelkezésre sem analitikus, sem numerikus megoldás.

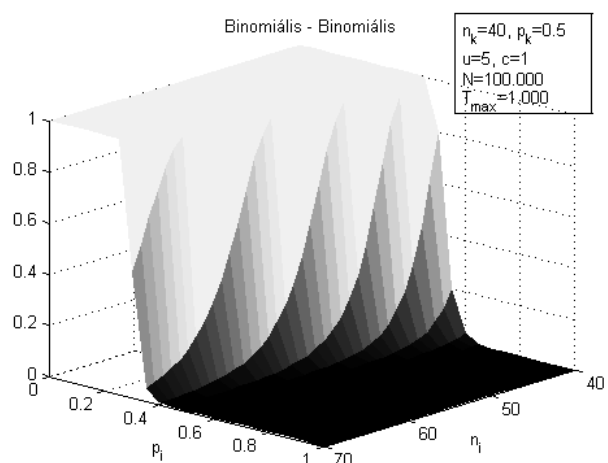
Az első összehasonlítás során a csőd bekövetkezésének valószínűségét számítottuk ki a diszkrét modellben a károk nagyságának eloszlására felhasznált eloszlás paramétereinek változtatásával. A folytonos eset paramétereit az $m = n \cdot p$ és $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ módon határoztuk meg.

Első összehasonlításunk alkalmával a paraméterek a következőképpen alakultak: a károk nagyságát meghatározó eloszlás paraméterei $n_k = 40$ és $p_k = 0.5$ voltak, a károk között eltelt idők paraméterei az $n_i \in [40, 70]$ és $p_i \in [0, 1]$ intervallumokból kerültek ki $h_{n_i} = 1$ és $h_{p_i} = 0.05$ lépésközökkel. Az időegységenkénti bevétel értéke $c = 1$, a kezdőtőke pedig $u = 5$ voltak. Paraméter együttesenként $N = 100.000$ szimulációt végeztünk a $T_{MAX} = 1.000$ időpontig.

A kapott eredményeket ábrákkal szemléltetjük, külön-külön, majd egy harmadik és negyedik ábra segítségével illusztráljuk a két megoldás különbségét is. Az 4.1.3.1. ábra a folytonos, a 4.1.3.2 ábra a diszkrét modell eredményeit szemlélteti.

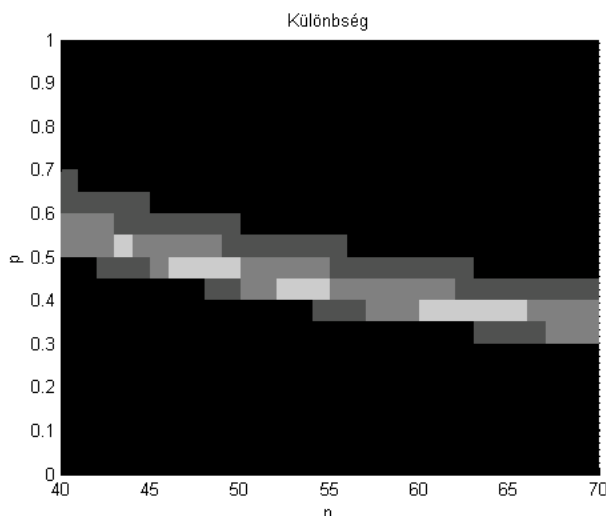


4.1.3.1 ábra Az 1-R(5) tönkremenési valószínűség értékei

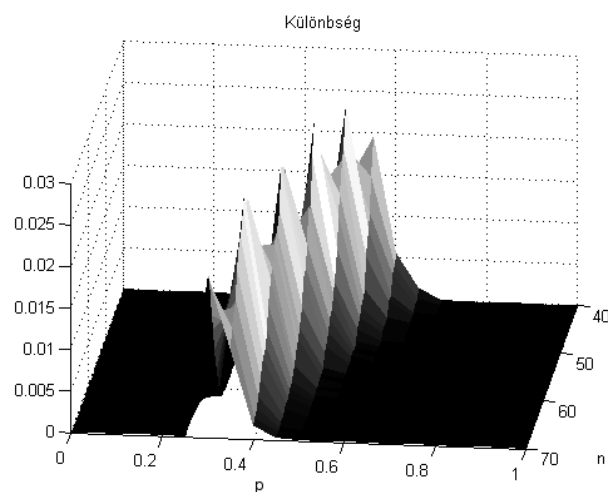


4.1.3.2 ábra Az u(5) tönkremenési valószínűség értékei

A megoldások különbségét a korábbiakhoz hasonló módon ábrákkal szemléltetjük. Az eddigiekhez hasonló módon: fekete színnel jelöljük azokat a tartományokat, ahol a megoldások különbsége kevesebb, mint 0.001. Sötétszürkével ábrázoltuk azokat a részeket, ahol a megoldások különbsége $[0.001, 0.01]$ -béli, és világosszürkék a $[0.01, 0.026]$ -béli eltéréssel rendelkező tartományok.



4.1.3.3. ábra Az 1-R(5) és az u(5) szimulációinak nagyságrendi eltérése

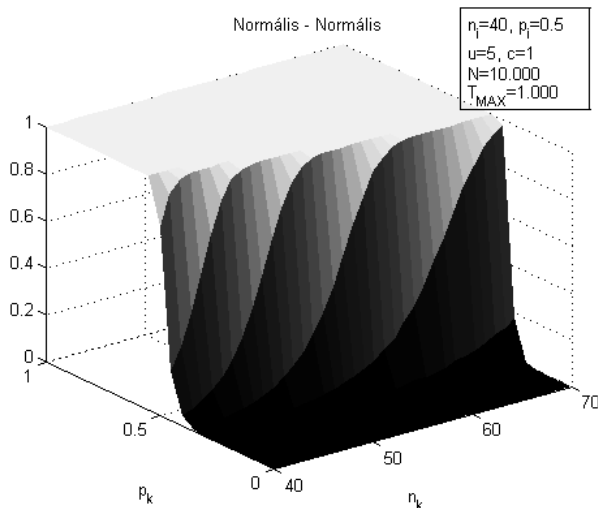


4.1.3.4. ábra Az 1-R(5) és az u(5) szimulációinak tényleges eltérése

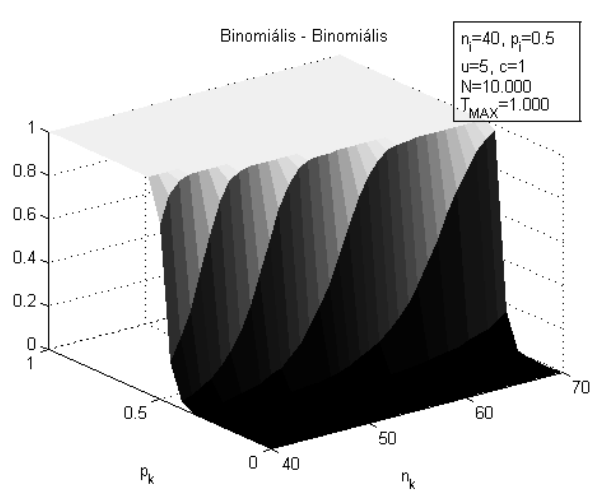
A 4.1.3.3. ábra és a 4.1.3.4. ábra alapján leolvasható, hogy a két megoldás eltérése akkor a legkisebb, amikor a megoldások értéke 1-hez közelít. A legnagyobb eltérések a $p = 0.4$ és ehhez az értékhez közeli értékek esetében tapasztalhatóak, és az $n \in [43, 44], [46, 50], [52, 55], [60, 65]$ intervallumokban a legnagyobbak.

Második összehasonlításunkat a károk nagyságának paraméterei alapján végeztük el, méghozzá az alábbi paraméterekkel: a károk között eltelt idők paraméterei – diszkrét esetben - $n_i = 40$ és $p_i = 0.5$ voltak, melyeket a korábban megadott módon alakítottunk a folytonos esetnek megfelelőekre. A károk nagyságát meghatározó eloszlás paraméterei az $n_k \in [40, 70]$ és $p_k \in [0, 1]$ intervallumokból kerültek ki $h_k = 1$ és $h_{p_k} = 0.05$ lépésközzel. Az időegységenkénti bevétel értékét $c = 1$ -re, a kezdőtőkét pedig $u = 5$ -re választottuk. Paraméter együttesenként $N = 10.000$ szimulációt végeztünk a $T_{MAX} = 1.000$ időpontig.

Az alábbi ábrákon láthatóak a szimulációk eredményei. Az 4.1.3.5 ábrán a folytonos, az 4.1.3.6 ábrán pedig a diszkrét modell szimulációjának eredményei láthatóak.

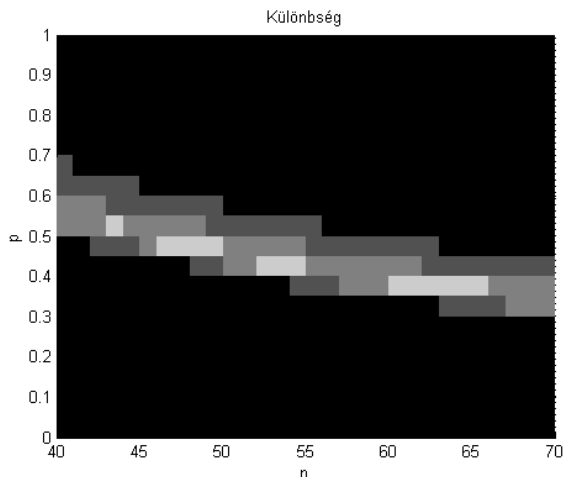


4.1.3.5. ábra Az $1-R(5)$ tönkremenési valószínűség értékei

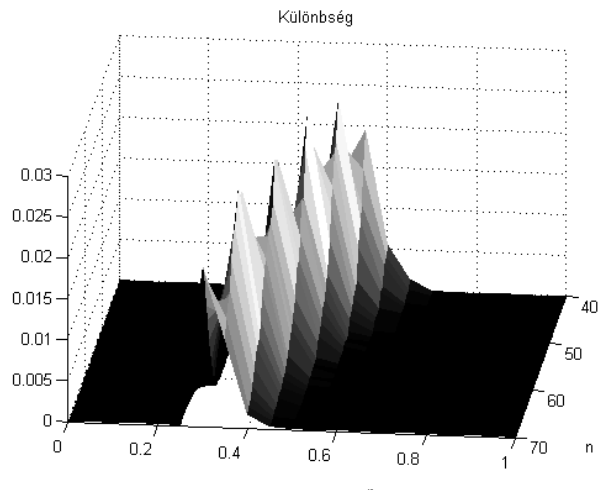


4.1.3.6. ábra Az $u(5)$ tönkremenési valószínűség értékei

A két megoldás különbségét szemlélteti a 4.1.3.7. és a 4.1.3.8. ábra. A 4.1.3.7. ábrán az eddigiekhez hasonló módon: fekete színnel jelöljük azokat a tartományokat, ahol a megoldások különbsége kevesebb, mint 0.001. Sötétszürkével ábrázoltuk azokat a részeket, ahol a megoldások különbsége $[0.001, 0.01]$ -béli, és világosszürkék a $[0.01, 0.035]$ -béli eltéréssel rendelkező tartományok.



4.1.3.7. Az $1-R(5)$ és az $u(5)$ eredményeinek értékeinek nagyságrendi eltérése



4.1.3.8. Az $1-R(5)$ és az $u(5)$ értékeinek tényleges eltérése

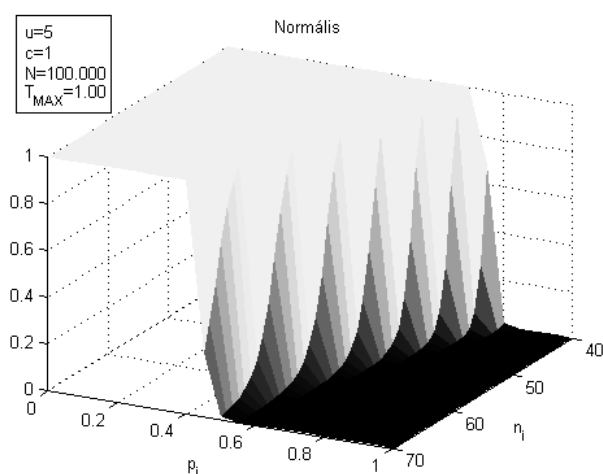
A 4.1.3.7. ábrán a két megoldás eltérését csupán nagyságrendileg jelöltük, hogy elkülöníthetők legyenek a különböző tartományok az eltérésük nagysága alapján. A következő ábra illusztrálja a megoldások tényleges eltérését.

A 4.1.3.7. és 4.1.3.8. ábra alapján elmondható, hogy a megoldások eltérése akkor a legkisebb, amikor a megoldások értéke 1-hez, vagy 0-hoz közelít. Az eltérés akkor a legnagyobb, amikor a $p \approx 0.4$ és $n \in [42, 45], [46, 49], [54, 57], [60, 65], [68, 69]$.

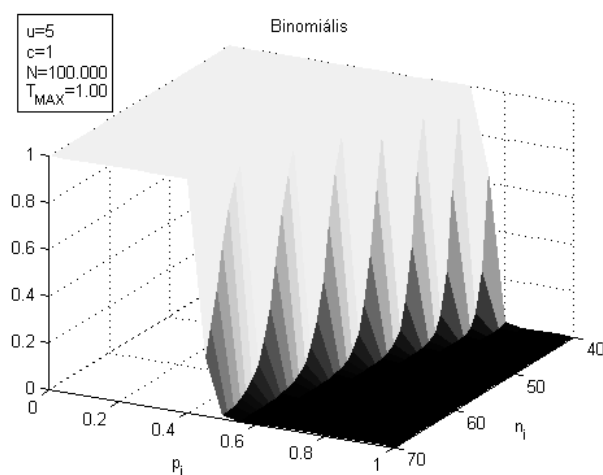
Harmadik összehasonlításunkat állandó, egységnyi nagyságú károk esetén végeztük, a károk között eltelt idők paramétereit alapján (a diszkrét modellben), a folytonos modell paramétereit pedig a korábbiakban ismertetett módon alakítottuk át ezeknek megfelelően.

Paramétereink az alábbi módon alakultak: a károk közt eltelt idők paramétereit $n_i \in [40,70]$ és $p_i \in [0,1]$ voltak, $h_{n_i} = 1$ és $h_{p_i} = 0.05$ paraméterekkel. A károk nagysága állandó volt, nagysága egységnyi. Az időegységenkénti bevétel értékét $c = 1$ -re, a kezdőtőkét pedig $u = 5$ -re választottuk. Pontonként $N = 100.000$ szimulációt végeztünk a $T_{MAX} = 1.000$ időpontig.

Az összehasonlítások eredményeit külön-külön szemléltetjük, majd újabb ábrákkal illusztráljuk azok különbségét. Az első ábrán a folytonos, a másodikon a diszkrét eset eredményei láthatóak.

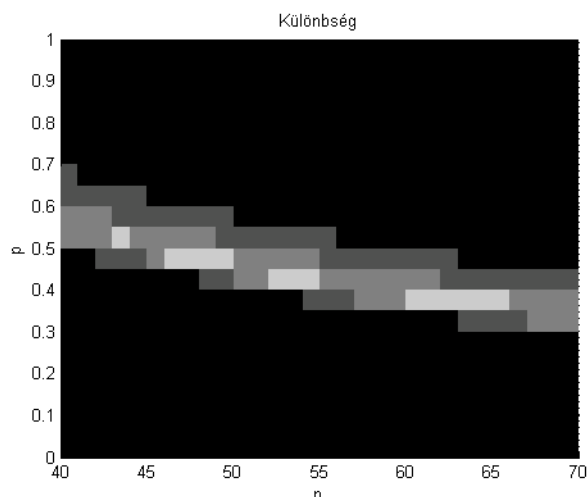


4.1.3.9. ábra Az 1-R(5) tönkremenési valószínűség értékei

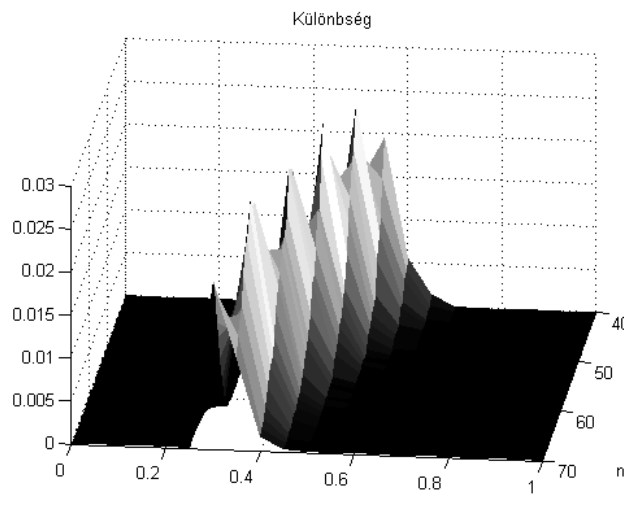


4.1.3.10. ábra Az u(5) tönkremenési valószínűség értékei

A két szimuláció különbségét láthatjuk a következő ábrán, a megszokott jelölésekkel. Az eddigiekhez hasonló módon: fekete színnel jelöljük azokat a tartományokat, ahol a megoldások különbsége kevesebb, mint 0.001. Sötétszürkével ábrázoltuk azokat a részeket, ahol a megoldások különbsége $[0.001, 0.01]$ -béli, és világosszürkék a $[0.01, 0.034]$ -béli eltéréssel rendelkező tartományok.



4.1.3.11. ábra 1-R(5) és u(5) értékeinek nagyságrendi eltérése



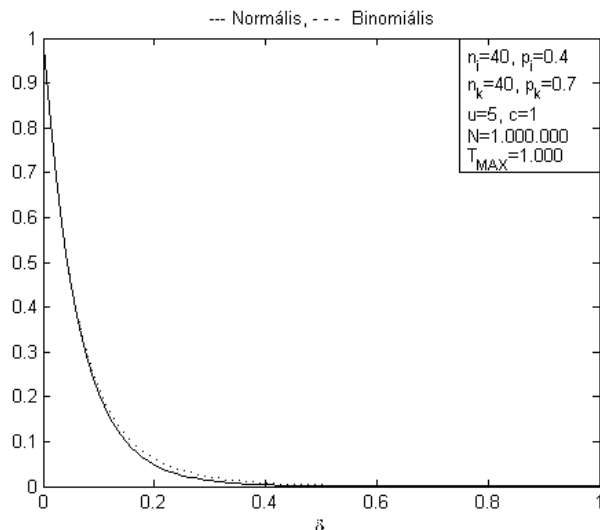
4.1.3.12 ábra 1-R(5) és u(5) értékeinek tényleges eltérése

A 4.1.3.11. és a 4.1.3.12. ábra alapján láthatjuk, hogy a két megoldás eltérése akkor a legkisebb, ha a megoldás értéke a 0-hoz vagy az 1-hez közelít. Megjegyezzük, hogy a legnagyobb eltérés mértéke 0.035, amely valószínűleg jórészt a szimuláció hibájából fakad, a szimulációval közelített értékek eltérése valójában sokkal kisebb.

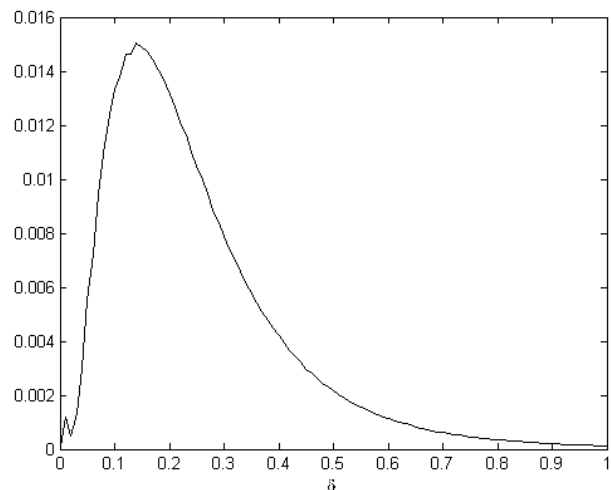
Negyedik összehasonlításunkat az általános esetre felírt megoldással, a δ értékek alapján végeztük el. Mind a károk közt eltelt idők, mind a kárösszegek nagyságai normális illetve binomiális eloszlásúak voltak.

A kiszámított eredményeket az alábbi paraméterek felhasználásával kaptuk: a δ értékét a $[0,1]$ intervallumban vizsgáltuk $h_\delta = 0.01$ lépésközzel. A károk között eltelt idők eloszlásának paraméterei $n_i = 40$ és $p_i = 0.4$ voltak. A károk nagyságát meghatározó eloszlás paramétereit $n_k = 40$ -re és $p_k = 0.7$ -re választottuk. A normális eloszlás paramétereit ezekből az értékekből határoztuk meg. Az időegységenkénti bevétel értéke $c = 1$, a kezdőtőke pedig $u = 5$ voltak. Pontonként $N = 1.000.000$ szimulációt végeztünk a $T_{MAX} = 1.000$ időpillanatig.

Az 4.1.3.13. ábrán látható a szimulációk eredménye. Folytonos vonallal jelöltük a folytonos modell eredményeit, és pontozott vonallal pedig a diszkrét modellét. A két megoldás különbségét az 4.1.3.14. ábra szemlélteti.



4.1.3.13. ábra A $\phi(5, \delta)$ és a $\phi(5, z)$ függvények szimulációval kapott értékei



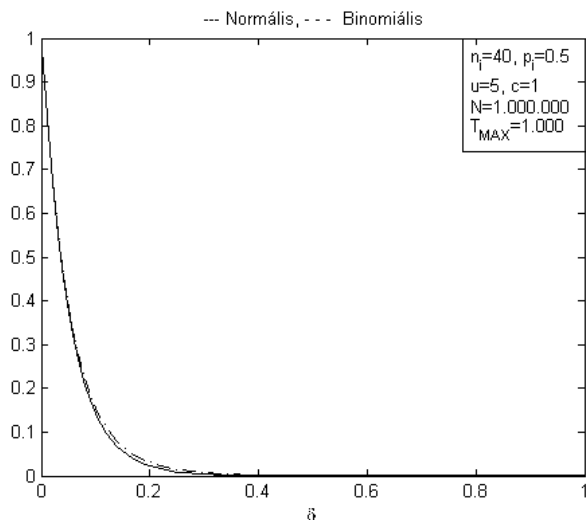
4.1.3.14. ábra A $\phi(5, \delta)$ és a $\phi(5, z)$ függvények eltérése

A 4.1.3.14. ábra alapján elmondható, hogy a két megoldás eltérése a $\delta \approx 0.15$ pontban a legnagyobb. A $\delta \leq 0.03$ és a $\delta \geq 0.5$ pontokban pedig kevesebb, mint 0.002.

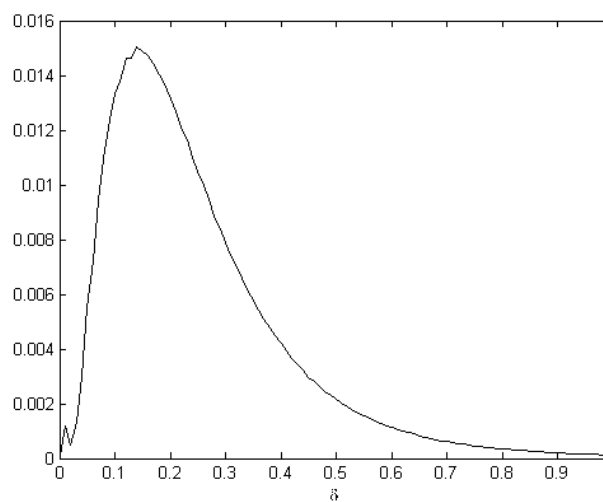
Ötödik összehasonlításunk során egységnyi károk esetében vizsgáljuk a folyamatot, normális illetve binomiális eloszlású kárigények közt eltelt időt feltételezve. Az összehasonlítást ebben az esetben is a δ értékek alapján végeztük el.

Az összehasonlított eredményeket mindkét esetben szimulációk segítségével határoztuk meg, a következő paraméterek felhasználásával: a δ értékeket a $[0, 1]$ intervallumon vizsgáltuk, $h_\delta = 0.01$ lépésközzel. A binomiális eloszlás paraméterei $n_i = 40$ és $p_i = 0.5$ voltak, a díjbevétel értéke $c = 1$, a kezdőtőke pedig $u = 5$ voltak. Pontonként $N = 1.000.000$ szimulációt végeztünk, a $T_{MAX} = 1.000$ pontig.

A szimulációk eredményét a következő ábra szemlélteti. Folytonos vonallal jelöltük a normális, pontvonallal pedig a binomiális időközökkel megvalósított folyamatot. A két megoldás különbségét szemlélteti a 4.1.3.16. ábra.



4.1.3.15. ábra A $\phi(5, \delta)$ és a $\phi(5, z)$ függvények szimulációval kapott értékei



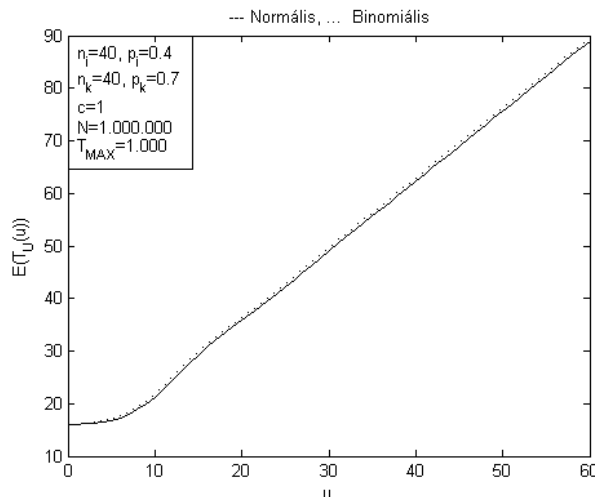
4.1.3.16. ábra A $\phi(5, \delta)$ és a $\phi(5, z)$ függvény értékeinek eltérése

A 4.1.3.16. ábra alapján elmondhatjuk, hogy a két megoldás eredményeinek eltérése a $\delta \approx 0.18$ pontban a legnagyobb. A két megoldás eltérése a $[0, 0.8] \cup [0.2, 1]$ intervallumban kisebb, mint 0.01. A $[0, 0.01] \cup [0.4, 1]$ intervallumban pedig kevesebb, mint 0.002.

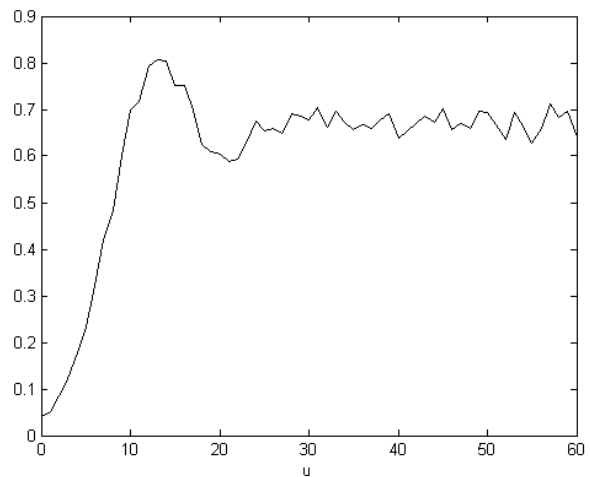
Hatodik összehasonlításunk a tönkremenés várható ideje alapján történt, normális illetve binomiális eloszlást feltételezve a kárigények közt eltelt időre valamint a kárigények nagyságára. A paraméter, amely alapján az összehasonlítást elvégeztük a folyamat kezdőtőkéje volt. A folytonos és a diszkrét modell esetében egyaránt szimulációk segítségével határoztuk meg az összehasonlított értékeket.

Az összehasonlított értékeket az alábbi paraméterek felhasználásával kaptuk. A károk közt eltelt idők paraméterei – diszkrét esetben - $n_i = 40$ és $p_i = 0.4$ voltak, melyet az $m_i = n_i \cdot p_i$ és $\sigma_i = \sqrt{m_i(1 - p_i)}$ módon alakítottunk át a folytonos esetben felhasznált normális eloszlásnak megfelelő alakba. A károk nagyságának paraméterei – a diszkrét modell esetében - $n_k = 40$ és $p_k = 0.7$ voltak, melyeket az károk közt eltelt idők paramétereinél felhasznált módon alakítottunk át. A díjbevétel értékét $c = 1$ -re választottuk. A kezdőtőke értéke az $u \in [0, 60]$ intervallumból került ki $h = 1$ lépésközzel. Minden egyes kezdőtőke esetében $N = 1.000.000$ szimulációt végeztünk a $T = 1.000$ időpillanatig.

A 4.1.3.17. ábrán láthatóak a két modell esetében kapott értékek. A folytonos modell eredményét folytonos vonallal jelöltük, a diszkrét modellt pedig pontozottal. A 4.1.3.18. ábra mutatja a két modell esetében a tönkremenési idő várható értékeinek különbségét.



4.1.3.17. ábra A tönkremenési idők várható értéke a folytonos és diszkrét modell esetében



4.1.3.18. ábra A folytonos és diszkrét modell tönkremenési idők várható értékének eltérése a folytonos és a diszkrét modell esetén

A 4.1.3.18. ábráról leolvasható, hogy a két modell eredményei nagyon közel vannak egymáshoz. A kezdőtöke mennyiségét növelve az eltérés egészen az $n = 12$ kezdőtöke eléréséig növekszik, majd onnantól némi csökkenés után – a szimuláció hibáitól eltekintve - megközelítőleg 0.7 körül állandósul. Ez a különbség az $n = 60$ értékig folyamatosan fennáll, és nem romlik.

Az elvégzett összehasonlításokat összegezve elmondhatjuk, hogy a két modell nagyon jól közelíti egymást. Első két összehasonlításunkból jól látszik, hogy a két modell eltérésének legnagyobb értéke 0.03, ami független a károk közt eltelt idők és a károk nagyságának eloszlásától. A korábbiakkal ellentétben az egységnyi károkkal végzett összehasonlítás során is jól közelíthető volt a folytonos modell a diszkréttel, mivel az eltérés legnagyobb értéke itt sem volt nagyobb, mint 0.03.

Az összehasonlításokat a δ paraméter alapján elvégezve elmondhatjuk, hogy a két modell közti eltérés ebben az esetben sem nőtt, sőt a korábbiakhoz képest csökkent. Ebből arra következtethetünk, hogy a korábbiakban tapasztalt maximum 0.03 eltérés valószínűleg a szimuláció hibájából adódott, mivel nagyobb N értéket felhasználva és az összehasonlítást a δ paraméter alapján végezve a két modell különbsége 0.016 alá csökkent.

Egységnyi nagyságú károk esetén szintén hasonló javulást tapasztalhattunk. Ebben az esetben az eltérés értéke 0.014 alá csökkent.

A tönkremenési idő várható értékével kapcsolatban csak egy összehasonlítást végeztünk, de az ebből kapott eredményekből jól látszik, hogy a két modell a tönkremenés várható idejét tekintve nagyon közel van egymáshoz és a diszkrét modell eredményeit tekinthetjük a folytonos modell eredményeinek jó közelítéseként.

Ezekből az eltérésekből látható, hogy a diszkrét modell ebben az esetben nagyon jól közelíti a folytonost és elegendően nagy N esetén helyettesítésére is felhasználható.

4.2 Összehasonlítás kvalitatív módon

A szakirodalom alapján néhány esetben elmondható, hogy a folytonos modellre felírt egyenlethez nagyon hasonló egyenletet találunk a diszkrét modellre esetében. Ennek oka, hogy ezek az egyenletek ugyanarra az analógiára készültek, ugyanazt írták le bennük, csak az egyikben folytonos eloszlásokhoz szükséges matematikai eszközökkel, a másikon pedig diszkrét eloszlásokhoz szükségesekkel. Ezek közül az egymáshoz nagyon hasonló egyenletek közül kiemelünk párat, hogy megmutassuk ezen analógiákat, valamint megindokoljuk az előző fejezetben megmutatott hasonlóságokat, amiket még egy-egy megoldás összehasonlításával is megerősítünk.

4.2.1 Az $R(n)$ és az $u(n)$ összehasonlítása egyenleteik segítségével

A korábbi fejezetekben megmutattuk, hogy a diszkrét és folytonos esetben kiszámított értékek mennyire közel esnek egymáshoz. Ebben a részben az összehasonlítást az egyenletek megfeleltetésével fogjuk elvégezni úgy, hogy megpróbáljuk a két egyenletet részenként megfeleltetni egymásnak. Elsőként az $1 - R(u)$ és $u(n)$ -re felírt egyenleteket hasonlítjuk össze, majd áttérünk a $\phi(u, \delta)$ -ra és a $\varphi(n, z)$ -re felírt egyenletek összevetésére.

Az első összehasonlításban vizsgált egyenletek tehát a (3.1.2)-ből származtatott

$$1 - R(u) = \int_0^{\infty} \int_0^{u+t} (1 - R(u + t - y)) f(t) g(y) dy dt + \int_0^{\infty} \int_{u+t}^{\infty} f(t) g(y) dy dt$$

egyenlet és a (3.2.1)-beli

$$u(n) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n+j} u(n + j - i) f(j) g(i) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=n+j+1}^{\infty} f(j) g(i)$$

egyenlet lesznek.

A két egyenletről könnyen láthatjuk, hogy formailag nagyban hasonlítanak egymásra, minden tagjuk rendelkezik megfelelővel a másik tagjai között. Haladjunk sorban a folytonos eset tagjain, és vizsgáljuk meg, hogy minek felelnek meg ezek a diszkrét esetben.

Elsőként láthatjuk, hogy a folytonos esetben szereplő kettős integrálok a diszkrét esetben megfeleltethetőek egy-egy kettős szummának. Az első kettős integrál külső integrálját t szerint számítjuk a $[0, \infty]$ intervallumon. Ennek a t értéknek a diszkrét esetben a j felel meg, amit a természetes számok halmazán szummázunk. A külső integrál a bal oldali téglalap szabály felhasználásával szummává alakítható. A belső integrált nullától $u + t$ -ig számítjuk, ebben az esetben az u (a kezdőtőke) a diszkrét modell n -jének felel meg, a t pedig a diszkrét eset j értékének. A jobboldali téglalapszabály szerint a belső integrált szummává alakítjuk. Az integrálandó (diszkrét esetben a szummázandó) értékeket összehasonlítva ugyancsak azt láthatjuk, hogy a két eset szinte ugyanaz. A korábbiakban ismertetett helyettesítésekkel ($n=u$, $j=t$, $i=y$) láthatjuk, hogy az integrálban és a szummában levő kifejezések megegyeznek. Az $f(t)$ függvény a folytonos modell esetén a károk közt eltelt idők sűrűségfüggvényét jelöli, a $g(y)$ pedig a károk nagyságának sűrűségfüggvényét. A diszkrét esetben az $f(j)$ adja meg annak a valószínűségét, hogy a károk közt eltelt idő értéke éppen j , $g(i)$ pedig annak a

valószínűségét, hogy a kár nagysága éppen i . Ezekről szintén elmondható, hogy egymásnak megfeleltethetők.

A második kettős integrálnál is hasonló a helyzet. A külső integrált egyértelműen megfeleltethetjük az külső szummának (bal oldali téglalap szabály), a belsőt pedig a második szummának (jobb oldali téglalap szabály).

Következő összehasonlításunkat a diszkontált büntetőfüggvényre felírt egyenletekkel fogjuk elvégezni. Az előzőekben összehasonlított egyenletekhez képest egy változóval több szerepel az egyenletekben. Ez a paraméter folytonos modell esetén a δ , diszkrét modell esetén pedig a $z = 1 + \delta$. Az összehasonlított egyenletek a folytonos modell esetében a

$$\phi(u, \delta) = \int_0^{\infty} \int_0^{u+t} e^{-\delta t} \phi(u+t-y, \delta) f(t) g(y) dy dt + \int_0^{\infty} \int_{u+t}^{\infty} e^{-\delta t} f(t) g(y) dy dt$$

egyenlet, a diszkrét modell esetében pedig a

$$\varphi(n, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n+j} \varphi(n+j-i, z) f(j) g(i) z^{-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=n+j+1}^{\infty} f(j) g(i) z^{-j}$$

egyenlet.

A korábbiakhoz hasonlóan láthatjuk, hogy a folytonos eset integráljai a diszkrét esetben szummaként jelennek meg. Az u értéknek a diszkrét esetben az n felel meg, a t -nek pedig j . Az integrálokban szereplő $e^{-\delta t}$ tényezőnek diszkrét esetben z^{-j} a megfelelője. A diszkrét modellben a z érték felel meg a folytonos eset δ értékének. Az y értéknek, amely a károk nagyságát adja meg, a diszkrét modell esetében az i felel meg. Ezen analógia alapján az előző esethez hasonlóan minden tagnak van megfelelője a másik oldalon.

Végül hasonlítsunk össze ismét két olyan egyenletet, amely a tönkremenés bekövetkezésének valószínűségére vonatkozik. Ezek az egyenletek a korábbiakban ismertetett 3.1.11. és 3.2.4. egyenletekből származnak. Az időegységenkénti bevétel értéke mindkét egyenlet esetén $c = 1$, és a várható értékek egyenlősége miatt legyen $\lambda = \frac{1-f}{f}$.

A 3.2.4. egyenlet a $z = 1$ esetben a $\varphi(n, 1) = u(n)$ egyenlőség miatt némi átalakítással felírható az alábbi alakban:

$$u(n) - u(n-1) = \frac{1-f}{f} u(n-1) - \frac{1-f}{f} \left(\sum_{i=1}^{n-1} u(n-1-i) g(i) + \sum_{i=n}^{\infty} g(i) \right).$$

A 3.1.11. egyenlet a $\delta = 0$ esetben az alábbi formára hozható:

$$\frac{\partial \phi(u, 0)}{\partial u} = \lambda \phi(u, 0) - \lambda \left(\int_0^u \phi(u-y, 0) g(y) dy + \int_u^{\infty} g(y) dy \right)$$

Vegyük sorra a két egyenlet tagjait és vizsgáljuk meg, hogy a korábbi egyenletekhez hasonlóan ezek is megfeleltethetők-e egymásnak!

Az $u = n-1$ helyettesítéssel a két egyenlet bal oldala megfeleltethető egymásnak, mivel az implicit differencia séma alapján

$$\frac{\partial \phi(n-1, 0)}{\partial u} \sim \phi(n, 0) - \phi(n-1, 0)$$

Az $\frac{1-f}{f}u(n-1)$ és $\lambda\phi(u, 0)$ tagokról szintén látszik, hogy megfelelnek egymásnak.

A folytonos modell egyenletének megmaradt tagjait a jobb oldali téglalap szabály alkalmazásával a diszkrét modell megmaradt tagjaivá alakíthatjuk, az alábbi módon

$$\int_0^{n-1} \phi(n-1-y, 0)g(y) \sim \sum_{i=1}^{n-1} u(n-1-i)g(i)$$

$$\int_{n-1}^{\infty} g(y)dy \sim \sum_{i=n}^{\infty} g(i).$$

Ezzel a két egyenletet tehát szintén megfeleltethettük egymásnak.

Összefoglalva elmondhatjuk tehát, hogy a folytonos és a diszkrét modellre felírt egyenletek tulajdonképpen (a vizsgált esetekben) megegyeznek és bizonyos módszerekkel megfeleltethetők egymásnak. Ez indokolja tehát az előző fejezetben tapasztalt hasonlóságokat. Ez mindenképpen fontos, mert mint láthattuk a folytonos modell egyenleteinek integráljai megfeleltethetők a diszkrét modell egyenleteinek szummáinak, amelyek kiszámítása könnyebb feladat, mint a folytonos modell integráljainak meghatározása.

4.2.2 Az $1-R(n)$ és az $u(n)$ összehasonlítása sorfejtéssel

Ebben az alfejezetben azt mutatjuk meg, hogy nem csak az egyenletek között van analógia, hanem az egyenletek megoldásai is egymásba alakíthatóak megfelelő módon. Ez az egyenletek között fennálló analógiáknak köszönhető. Erre a korábbiakban megadott analitikus megoldások közül a (3.1.6) képlet szerinti folytonos megoldás és a (3.2.7) képletből $z = 1$ helyettesítésből származó $u(n) = \varphi(n, 1)$ megoldás diszkrét megoldás segítségével adunk meggyőző bizonyítékot.

Az összehasonlítás során a c értékét 1-re választottuk. Az összehasonlított eredmények számításakor a károk közt eltelt idők a folytonos modell esetében exponenciális eloszlásúak, a diszkrét modell esetében geometriai eloszlásúak voltak, a károk nagysága pedig mindkét esetben egységnyi. Ezért a folytonos esetben a (3.1.6) képlet, míg a diszkrét modellben az adott paraméterek mellett ennek megfelelő $u(n) = (\frac{1-f}{f})^{n+1}$ megoldás segítségével mutatjuk be az analógiát, felhasználva azt, hogy a károk közt eltelt idők várható értékének egyenlősége folytán $\lambda = \frac{1-f}{f}$.

Az összehasonlítás során a folytonos eset képletében szereplő exponenciális függvényeket Taylor polinomjaikkal helyettesítjük.

Kezdjük az $1-R(1)$ és az $u(1)$ összehasonlításával. Az $n = 1$ érték $R(n)$ -be való helyettesítésével kapjuk, hogy:

$$R(1) = (1 - \lambda)e^\lambda$$

amely az e^λ sorfejtésének első két tagjával való helyettesítésével az alábbi alakba írható:

$$R(1) \approx (1 - \lambda)(1 + \lambda) = 1 - \lambda^2.$$

Az $n = 1$ esetben az $u(n)$ képletébe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$u(1) = (\frac{1-f}{f})^2$$

Az $\frac{1-f}{f}$ -ről elmondottak szerint kapjuk, hogy $u(1) = \lambda^2$.

Ezek alapján tehát azt mondhatjuk, hogy $1 - R(1) \approx u(1)$.

Továbbá az $R(2)$ és $u(2)$ összehasonlításához: az $n = 2$ esetben kapjuk, hogy:

$$R(2) = (1 - \lambda)(e^{2\lambda} - e^\lambda \lambda),$$

amely az e^λ sorfejtésének első két tagjával és az $e^{2\lambda}$ sorfejtésének első három tagjával való helyettesítésével az alábbi alakba írható:

$$R(2) \approx 1 + 2\lambda + 2\lambda^2 - (1 + \lambda)\lambda - \lambda(1 + 2\lambda + 2\lambda^2) + (1 + \lambda)\lambda^2 = 1 - \lambda^3.$$

Az $n = 2$ esetben az $u(n)$ képletbe való behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$u(2) = (\frac{1-f}{f})^3$$

A $\lambda = \frac{1-f}{f}$ helyettesítés után látható, hogy $u(2) = \lambda^3$.

Ezek alapján tehát azt mondhatjuk, hogy $1 - R(2) \approx u(2)$.

Az $n = 3$ esetben azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} R(3) &= (1 - \lambda) \left(e^{3\lambda} - 2e^{2\lambda}\lambda + \frac{1}{2}e^{\lambda}\lambda^2 \right) \\ &= (e^{\lambda})^3 - 2\lambda(e^{\lambda})^2 + \frac{1}{2}e^{\lambda}\lambda^2 - \lambda(e^{\lambda})^3 + 2\lambda(e^{\lambda})^2 - \frac{1}{2}e^{\lambda}\lambda^3 \end{aligned}$$

amely az e^{λ} sorfejtésének első két tagjával, az $e^{2\lambda}$ sorfejtésének első három tagjával és az $e^{3\lambda}$ sorfejtésének első négy tagjával való helyettesítése után az alábbi alakba írható:

$$R(3) \approx 1 + 3\lambda + \frac{9}{2}\lambda^2 + \frac{9}{2}\lambda^3 - 2\lambda(1 + 2\lambda + 2\lambda^2) + \frac{1}{2}(1 + \lambda)\lambda^2 = 1 - \lambda^4.$$

Az $n = 3$ esetben az $u(n)$ egyenletbe való behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$u(3) = \left(\frac{1-f}{f} \right)^4$$

A $\lambda = \frac{1-f}{f}$ helyettesítés után látható, hogy $1 - R(3) \approx u(3)$.

Az (3.1.6) képlet alapján tehát

$$R(n+1) = (1 - \lambda) \sum_{i=0}^n \frac{e^{\lambda(n+1-i)} (i - n - 1)^i \lambda^i}{i!}$$

Ha az előbbieken alkalmazottaknak megfelelően az $e^{k\lambda}$, $1 \leq k \leq n+1$ függvényt k -adfokú Taylor polinomjával helyettesítjük, azt kapjuk, hogy

$$R(n+1) \approx (1 - \lambda) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n+1-i} \frac{(\lambda(n+1-i))^j (i - n - 1)^i \lambda^i}{i! j!} = 1 - \lambda^{n+1}.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség igazolásához be kell bizonyítani, hogy a jobb oldalon lévő kifejezésben λ^k együtthatója 1, ha $k = 0$, és -1 ha $k = n+1$ és az összes többi esetben 0. Ez Dr. Koltay László módszere szerint haladva teljes indukcióval megmutatható. Ennek leírásától azonban helytakarékosági okokból eltekintünk.

Tehát általánosan bármely pozitív egész szám esetén elmondható, hogy jó közelítéssel $1 - R(n) = u(n)$ -nel.

Egy érdekessége még a fenti analógiának, hogy a (3.1.5) késleltetett differenciál egyenlet $R(u)$ megoldása olyan, hogy szakaszonként javul differenciálhatóság szempontjából, azaz nullában még csak jobbról folytonos, egyben már jobbról folytonosan differenciálható, kettőben már kétszer is folytonosan differenciálható és így tovább, aminek nyilvánvalóan köze van a megoldás átalakításakor használt Taylor-polinomok fokszámához.

5. Folytonos eloszlások diszkretizálása

A korábbi fejezetekben elvégeztünk néhány összehasonlítást különböző eloszlásokat felhasználva, melyekből láttuk, hogy a folytonos és diszkrét modellek eredményei a legtöbb esetben elég kis mértékben térnek el egymástól. Az összehasonlítások mindegyikénél jól ismert eloszlás-párokat használtunk fel. Azonban felmerülhet a kérdés, hogy mi a teendő, amikor nem ismert egy adott folytonos eloszláshoz tartozó diszkrét eloszlás. Erre a felmerülő kérdésre mintegy válaszként az alábbiakban megadunk egy módszert, amellyel diszkretizálhatóak az ilyen folytonos eloszlások, azaz megkonstruálható az $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel megadott folytonos eloszláshoz az $f_d(m)$ valószínűségekkel meghatározott diszkrét eloszlás-pár.

Mielőtt rátérnénk a módszer leírására, röviden ismertetjük, hogy mire fontos figyelni, amikor egy folytonos és egy diszkrét eloszlást hasonlítunk össze. Az első és legfontosabb szempont, hogy a vizsgált eloszlások várható értéke egyezzen meg. Ez mindenképpen szükséges, hiszen a nettó haszon feltétel teljesülése vagy nem teljesülése alapvetően befolyásolja a tönkremenési valószínűségek értékét és a nettó haszon feltétel teljesülése éppen a várható értékektől függ. Amennyiben lehet, a megfeleltetett eloszlások második és esetleges további momentumai is egyezzenek meg.

Ha nincs a vizsgált folytonos eloszláshoz ismert diszkrét eloszlás-pár, úgy megadhatunk egyet az alábbi módszer alapján.

A folytonos eloszlás diszkretizálásakor a másik fontos szempont, hogy az eredeti és a diszkretizált eloszlás „alakját” tekintve hasonló legyen. Ezt leginkább úgy tudjuk megfogni, hogy a folytonos eloszlás sűrűségfüggvénye hasonlítson alakját tekintve a diszkrét eloszlás sűrűségdiagramjához. Ez azért fontos, mert különböző a viselkedése olyan valószínűségi változóknak, melyek más-más értékeket vesznek fel „szívesen”.

A várható értékre vonatkozó feltétel felírható az alábbi alakba

$$\int_0^{\infty} 1 - F(x) dx = E(\xi_{folytonos}) = E(\xi_{diszkrét}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty} f_d(j).$$

Ezt átalakítva megkapjuk, hogy a

$$P(\xi_{diszkrét} = m) = f_d(m) = \sum_{j=m}^{\infty} f_d(j) - \sum_{j=m+1}^{\infty} f_d(j) = \int_m^{m+1} F(x) dx - \int_{m-1}^m F(x) dx \quad (5.1)$$

($m \geq 0$) diszkrét eloszlást rendelhetjük az $F(x)$ folytonos eloszláshoz.

Szükséges továbbá, hogy az így kapott $f_d(m)$ sorozat valószínűség-eloszlást adjon meg, azaz teljesüljön, hogy $f_d(m) \geq 0$ és

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_d(j) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m f_d(j) = 1.$$

Ez utóbbi azonban az integrálközépérték-tétel miatt teljesül. Az $f_d(m)$ nemnegativitását pedig az $F(x)$ függvény monotonitása biztosítja.

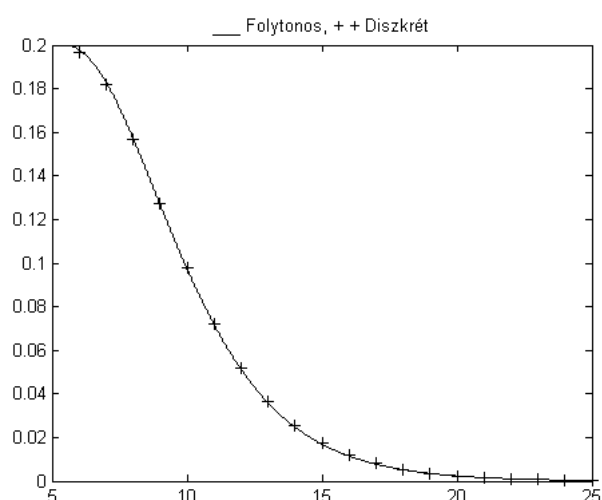
A módszer működését bemutatjuk egy példán keresztül. Legyen a diszkrétizálandó folytonos eloszlás a tangenshiperbolicus eloszláscsalád egy tagja, legyen

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 5.5 \\ th\left(\frac{t}{5} - 1.1\right), & \text{ha } t \geq 5.5 \end{cases}$$

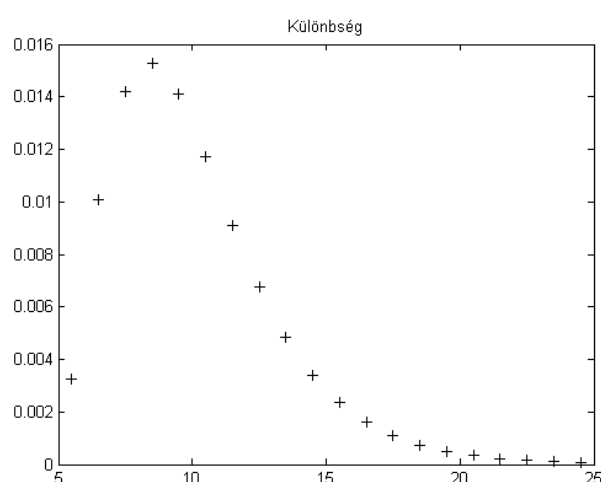
Példaként azért választjuk a tangenshiperbolicus eloszláscsaládot, mert rendkívül rugalmas és segítségével jól közelíthető nagyon sok folytonos eloszlás (Blickle, Lakatos, Mihálykó, & Ulbert, 1998).

Az 5.1 képlet alapján felírható az $F(t)$ -hez tartozó $f_d(m)$ diszkrét eloszlás. A két eloszlás várható értéke a megadott módszer felhasználása miatt megegyezik. Alakjuk hasonlóságát pedig az alábbi két ábra segítségével mutatjuk meg.

A folytonos eloszláshoz tartozó sűrűségfüggvényt és a diszkrét eloszláshoz tartozó sűrűségdiagramot ábrázolja az 5.1 ábra. Folytonos vonallal jelöltük a folytonos, csillaggal a diszkrét eloszlást a $[5, 25]$ intervallumon.



5.1. ábra A $th\left(\frac{t}{5} - 1.1\right)$ eloszlás sűrűségfüggvénye és az ismertetett módszerrel megadott diszkrét eloszlás sűrűségdiagramja



5.2. ábra A $th\left(\frac{t}{5} - 1.1\right)$ eloszlás sűrűségfüggvényének és diszkrétizált eloszlás sűrűségdiagramjának eltérése

Az 5.2 ábra alapján látható, hogy a folytonos eloszlás sűrűségfüggvénye és a diszkrét eloszlás nagyon közel van egymáshoz. Az ábráról leolvasható, hogy a legnagyobb eltérés mértéke kevesebb mint 0.016.

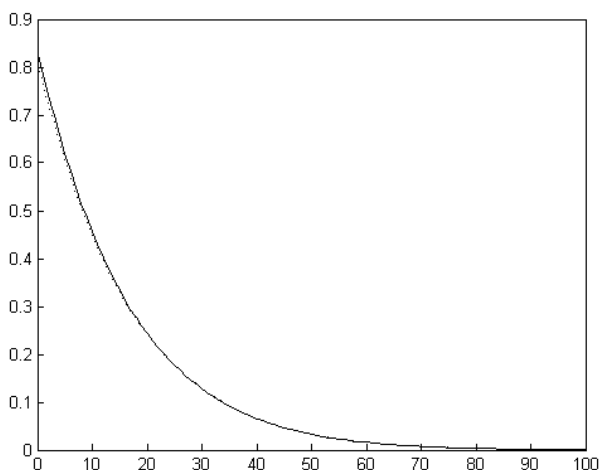
Ezek alapján láthattuk, hogy a diszkrétizálási módszer működik. Vizsgáljuk meg, hogy az ezzel a módszerrel megadott eloszlásokat felhasználó rizikófolyamatok eredményei milyen pontossággal közelítik az eredeti eloszlásokkal megvalósított rizikófolyamat eredményeit.

Legyen $F(t)$ a károk közt eltelt idők eloszlása, $G(y)$ pedig a károk nagyságaié és ezek legyenek:

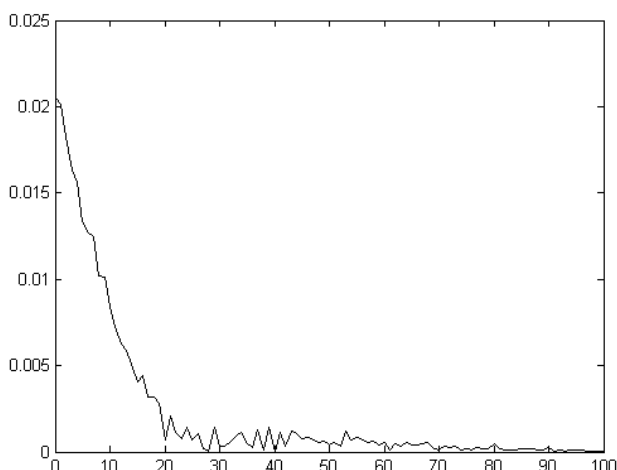
$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 5.5 \\ th\left(\frac{t}{5} - 1.1\right), & \text{ha } t \geq 5.5 \end{cases} \quad \text{és} \quad G(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } y < 5 \\ th\left(\frac{y}{5} - 1\right), & \text{ha } y \geq 5 \end{cases}$$

A korábban ismertetett módon meghatározható, hogy milyenek lesznek a megfelelő $f_d(j)$ és $g_d(i)$ eloszlások.

A tönkremenés valószínűségére vonatkozó összehasonlított eredményeket szimulációk segítségével számítottuk ki. Az időegységenkénti bevétel értéke $c = 1$ volt. A kezdőtőke értéke az $u \in [0,100]$ intervallumból került ki $h = 1$ lépésközzel. Minden különböző kezdőtőke esetén $N = 1.000.000$ szimulációt végeztünk a $T_{MAX} = 1.000$ időpillanatig. A szimulációk eredményeit mutatja az 5.3 ábra, az eredmények eltérései az 5.4 ábrán láthatóak. A folytonos modell eredményeit folytonos, a diszkrét modellét szaggatott vonallal jelöltük, de ez a megoldások közelsége miatt nem igazán látszik, mivel a két görbe szinte egybeolvad.



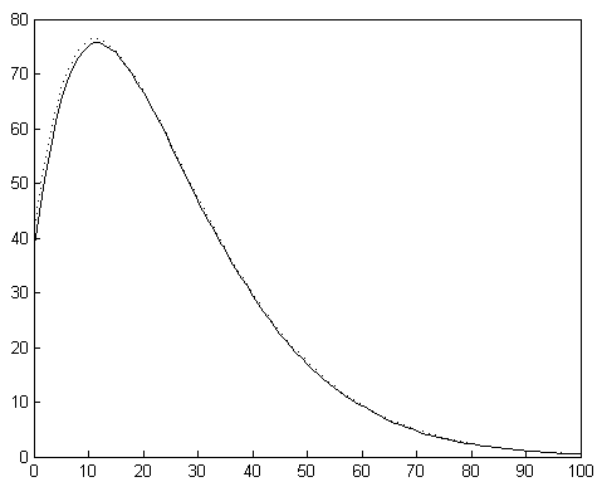
5.3. ábra Az $1-R(u)$ és $u(n)$ szimulációval kapott értékei



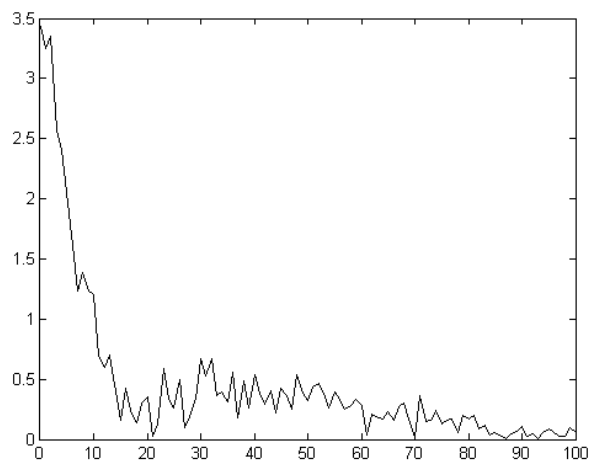
5.4. ábra Az $1-R(u)$ és az $u(n)$ szimulációval kapott értékeinek eltérése

Az 5.4. ábráról leolvasható, hogy a két megoldás eltérése alapvetően kicsi. A legnagyobb eltérés abban az esetben mutatkozik, amikor a kezdőtőke értéke nulla. Ekkor az eltérés megközelítőleg 0.02, de ez az eltérés a kezdőtőke növelésével csökken. Az $u = 20$ esetben már kevesebb, mint 0.005.

Az összehasonlítást elvégeztük a tönkremenési idő várható ideje alapján is, ugyanazokkal a paraméterekkel. Ennek eredményeit mutatja az 5.5 ábra. A két szimuláció eltérése pedig az 5.6 ábrán látható.



**5.5. ábra A folytonos és a diszkrét modell
tönkremenésének várható idejének szimulációi**



**5.6. ábra A folytonos és a diszkrét modell
tönkremenésének várható idejének szimulációinak
eltérése**

Az 5.6 ábráról leolvasható, hogy a szimulációk eredményei a korábbiakhoz hasonlóan ebben az esetben is jól közelítik egymást. A legnagyobb eltérés az $u = 0$ paraméter esetén tapasztalható, majd az $u \geq 15$ esetben az eltérés megközelítőleg kevesebb, mint 0.5.

Összefoglalás

A dolgozat témája az egymásnak megfeleltetett folytonos és diszkrét kockázati modellek összehasonlítása volt. Ennek során arra a kérdésre kerestük a választ, hogy a diszkrét modell tekinthető-e a folytonos modell approximációjának, illetve hogy a modellek paraméterei miként befolyásolják az approximáció jóságát.

Az összehasonlított modellek ismertetése után kvantitatív és kvalitatív összehasonlításokat végeztünk.

A kvantitatív összehasonlítások érdekében az egyenletek megoldására numerikus módszert, illetve számítógépes véletlen szimulációs eljárásokat dolgoztunk ki.

Kvantitatív összehasonlításaink során azt tapasztaltuk, hogy általában a két egymásnak megfeleltetett modell eredményei nagyon kicsivel tértek el egymástól a vizsgált paramétertartományok nagy részében.

A megoldások jellegüket tekintve minden esetben megegyeztek. Eltéréseket csak olyan mértékben tapasztaltunk, hogy még azokban az esetekben is, amikor viszonylag nagyobb volt a különbség, a diszkrét modell akkor is jól használható első közelítésként, mintegy „durva” előrejelzésként, míg az esetek nagyobb részében olyan kis eltérés mutatkozott az eredmények között, hogy a folytonos modell nagyon pontos közelítését adta a diszkrét modellnek, így annak helyettesítésére is felhasználható.

Például ilyen esetek voltak azok az összehasonlítások, amikor a károk között eltelt idők eloszlása normális illetve binomiális volt. Ebben az esetben minden összehasonlítás során azt tapasztaltuk, hogy az eltérések mértéke nagyon kicsi. A tönkremenési időkre vonatkozóan elvégzett összehasonlítások során azt tapasztaltuk, hogy a két modell eredményei minden esetben kis mértékben tértek el egymástól, így elmondható, hogy a folytonos modell tönkremenési ideje várható értékének helyettesítésére felhasználhatjuk a diszkrét modellt.

Kvalitatív összehasonlításaink során néhány példával megindokoltuk, hogy a korábbiakban összehasonlított modellek eredményei miért vannak olyan közel egymáshoz, rámutatva részint arra, hogy a számítandó mennyiségekre felírt egyenletek analógiái egymásnak, részint pedig arra, hogy a diszkrét modell analitikus megoldása - bizonyos esetekben – formailag is a folytonos modell analitikus megoldása diszkrét verziójának tekinthető.

Végül megadtunk egy módszert folytonos eloszlások diszkretizálására, hogy olyan esetekben is konstruálható legyen diszkrét modell a folytonos modellhez, amikor nincs a folytonos modellben felhasznált eloszlásoknak diszkrét eloszlás-párjuk.

A módszer segítségével megadtunk egy példát is, ahol a folytonos modellben szereplő két folytonos eloszlást diszkretizáltuk, majd összehasonlítottuk ezután a két modell eredményeit a tönkremenés valószínűsége és a tönkremenés várható ideje alapján.

Ez esetben is azt tapasztaltuk, hogy a diszkrét modell nagyon jól használható a folytonos modell közelítésére, helyettesítésére.

Az eddigiekben elvégzett munka több irányba is továbbfejleszthető. Egy lehetséges továbblépés az összehasonlítások során felhasznált eloszlások körének bővítése például a lognormális, az Erlang(n), stb. eloszlásokkal. Másik elképzelhető fejlesztési irány lehet az, hogy újabb, a folyamatot befolyásoló tagot veszünk hozzá az alap Sparre Andersen modellhez, például az adó-, vagy osztalékfizetést.

Irodalomjegyzék

1. Albrecher, H., & Teugels, J. L. (2006). Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory. *Journal of Applied Probability*, 257-273.
2. Albrecher, H., & Thonhauser, S. (2008). Optimal dividend strategies for a risk process under force of interest. *Insurance: Mathematics and Economics*, 134-149.
3. Albrecher, H., Borst, S., Boxma, O., & Resing, J. (2009). The tax identity in risk theory - a simple proof and an extension. *Insurance: Mathematics and Economics*, 304-306.
4. Albrecher, H., Constantinescu, C., Pirsic, G., Regensburger, G., & Rosenkranz, M. (2009). An algebraic operator approach to the analysis of Gerber-Shiu functions. *doi:10.1016/j.insmathco.2009.02.002*.
5. Ambagaspiya, R. S. (2009). Ultimate ruin probability in the Sparre Andersen model with dependent claim sizes and claim occurrence times. *Insurance: Mathematics and Economic*, 464-472.
6. Blickle, T., Lakatos, G. B., Mihálykó, C., & Ulbert, Z. (1998). The hyperbolic tangent distribution family. *Powder Technology* 97, 100-108.
7. Borovkov, K. A., & Dickson, D. C. (2008). On the ruin time distribution for a Sparre Andersen process with exponential claim sizes. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1104-1108.
8. Cheng, S., Gerber, H. U., & Shiu, E. S. (2000). Discounted probabilities and ruin theory in the compound binomial model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 239-250.
9. Cossette, H., Landriault, D., & Marceau, E. (2004). Compound binomial risk model in a Markovian environment. *Insurance: Mathematics and Economics*, 425-443.
10. Dickson, D. C., & Hipp, C. (2001). On the time to ruin for Erlang(2) risk process. *Insurance: Mathematics and Economics*, 333-344.
11. Gerber, H. U. (1988). Mathematical fun with compound binomial process. *Astin Bulletin*, 161-168.
12. Gerber, H. U., & Shiu, E. S. (1998). On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, 48-78.
13. Karlin, S., & Taylor, H. M. (1975). *A First Course in Stochastic Processes*. Academic Press.
14. Li, S., & Garrido, J. (2004). On ruin for the Erlang(n) risk process. *Insurance: Mathematics and Economics*, 391-408.
15. Li, S., & Garrido, J. (2002). On the time value of ruin in the discrete time risk model. *Working paper 02-18, Business Economics, University Carlos III of Madrid*, 1-28.
16. Mihaletzky, G. (2001). *Kockázati folyamatok*. Budapest: Eötvös Kiadó.
17. Mihálykóné, O. É. (2003). *Közbülső tárolók méretezése szakaszos*

folyamatrendszerekben sztochasztikus környezetben. PhD értekezés, Veszprémi Egyetem, Veszprém.

18. Mihálykóné, O. É., Lakatos, G. B., Cs., M., & Lucz, L. ((Elküldve)). Probability and the expected time of emptying of intermediate storages under stochastic operation conditions. *Hungarian Journal of Industrial Chemistry* .
19. Mihálykóné, O. É., Lakatos, G. B., Mihálykó, C., & Lucz, L. (2009). Az anyagelfogyás valószínűségének és várható idejének meghatározása átmeneti tárolók esetében sztochasztikus működési feltételek mellett. *Pannon Egyetem, Műszaki Kémiai Napok'09 Konferenciakiadványa*, Veszprém, 112-116.
20. Mihálykóné, O. É., Mihálykó, C., & Lakatos, G. B. (2009). *Folytonos és diszkrét modellek a kockázati folyamatok vizsgálatában.* (Kézirat).
21. Mihálykóné, O. É., Mihálykó, C., & Lucz, L. (2009). Optimális osztalékfizetési stratégiák kockázati folyamatok esetében. *XXVIII. Magyar Operációkutatási Konferencia*. <http://www.gazdasagmodellezes.hu/>.
22. Orbán-Mihálykó, É., & Lakatos, G. B. (2004). Intermediate storage in batch/continuous processing systems under stochastic operation conditions. *Computers & Chemical Engineering*, 2493-2508.
23. Orbán-Mihálykó, É., Mihálykó, C., & Lakatos, B. G. (2009). Difference equations for sizing intermediate storages in discrete stochastic models and their mathematical generalization. *Proceedings of MATHMOD'09 Vienna*, 2167-2177.
24. Rosca, A. V., & Rosca, N. C. (2007). Theoretical analysis and simulation of a risk process with a logarithmic dividend barrier. *P.U.M.A.* , 137-159.
25. Shiu, E. S. (1989). The probability of eventual ruin in the compound binomial model. *Astin Bulletin*, 179-190.
26. Sparre Andersen, E. (1957). On the Collective Theory of Risk in the Case of Contagious between the Claims. *Transactions of the XV Intern. Congress*.
27. Thorin, O. (1982). Probabilities of ruin. *Scand. Actuarial J.*, 65–102.
28. Tsai, C., & Willmot, G. (2002). A generalized defective renewal equation for the surplus process perturbed by diffusion. *Insurance: Mathematics and Economics*, 51-66.
29. Willmot, G. E. (1993). Ruin Probabilities in the compound binomial model. *Insurance: Mathematics and Economics*, 133-142.
30. Yuan, H., & Hu, Y. (2008). Absolute ruin in the compound Poisson risk model with constant dividend barrier. *Statistics & Probability Letters*, 2086-2094.
31. Yuen, K., Zhou, M., & Guo, J. (2008). On a risk model with debit interest and dividend payments. *Statistics & Probability Letters*, 2426-2432.