

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR
MŰSZAKI MECHANIKAI TANSZÉK

NÉMETH NÁNDOR
SZAKDOLGOZAT

Nem köralakú fogaskerekek méretezése

Konzulens:

Dr. Laczik Bálint
adjunktus

Témavezető:

Dr. Bachrathy Dániel
adjunktus

Budapest, 2014

TARTALOM

1. Bevezetés	5
2. Általánosított osztógörbék.....	7
2.1. Fix tengelytávú fogaskerek osztógörbéjének származtatása	7
2.2. A fogaskerek mozgásának általánosítása	8
2.2.1. A módszer alkalmazása rögzített tengelytávú fogaskerek esetén	12
2.2.2. A módszer alkalmazása fogaskerék-fogasléc kapcsolódásra.....	14
2.3. Zárt gördülőgörbék	15
2.4. Az osztógörbék kiszámítása a gyakorlatban	16
3. A fogazóléc előállítása.....	19
3.1. Az alapprofil	19
3.2. A fogméret korlátozó tényezői.....	21
3.2.1. Görbületből adódó korlátozás	22
3.2.2. Anyagvastagságból adódó korlátozás	23
3.2.3 Az osztógörbék érintő irányú relatív mozgásából adódó korlátozás	24
3.3. A profileltolás és a modul pontonkénti meghatározása	25
3.3.1. A gördületből adódó korlátozás összefüggései szabványos fogprofil esetén	25
3.3.2. A maximális fejmagasság meghatározása kompenzált fogazat esetén	25
3.3.3. A fogprofil általánosítása	27
3.4. A pontonként számított eredmények korrekciója	29
3.4.1. A fogfejmagasságok javítása	30
3.4.2. A profileltolás-függvény szakadási helyeinek javítása	31
3.5. A fogazóléc előállítása	33
3.6. A fejmagasságok előállítása	35
4. A fogazás	36

4.1. Jelenlegi módszerek a fogazat generálására.....	36
4.1.1. A Maag-féle foggyalulás elvén működő módszer	36
4.1.2. A Fellows-féle metszőkerékkel történő lefejtés.....	39
4.2. A fogazás folyamata.....	39
5. Szilárdsági vizsgálatok.....	42
5.1. Kapcsolószám ellenőrzés	42
5.2. Fogtőszilárdság	44
5.2.1. A fogtővek meghatározása.....	45
5.2.2. A fogakat terhelő erők statikai egyensúlya	46
5.2.3. A szilárdságtani összefüggések.....	48
5.2.4. A fogak merevségeinek meghatározása	52
5.3. Hertz-feszültség	54
6. Utómunkálatok.....	56
7. További fejlesztési lehetőségek	57
8. Összefoglalás.....	59
9. Summary.....	60
Felhasznált irodalom	61

Köszönetnyilvánítás

Elsőként szeretném megköszönni Dr. Bachrathy Dánielnek, témavezetőmnek a segítségét a dolgozat megfelelő felépítésében, és a szilárdságtani vizsgálatokban. Köszönöm Dr. Laczik Bálint tanár úrnak, konzulensemnek az ötleteket mind a fogaskerekek előállításához, mind az alkalmazási lehetőségekhez. Sokat segítettek munkámban Póka György és Bendefy András ötletei, javaslatai. És végül szeretném megköszönni családomnak, hogy mellettem álltak a szakdolgozatom írása során.

1. BEVEZETÉS

Nem kör alakú fogaskereket számos gépben használnak. Nemcsak a fegyverekben vagy, az űrtechnikában találkozhatunk velük, jobb ergonómiájú biciklikben, a képlékeny alakítás gazdaságosságát javító speciális présgépekben, de akár hidraulikus motorokban és szivattyúkban is találkozhatunk velük. Elterjedésüket eddig a tervezésük és gyártásuk bonyolultsága akadályozta. A számítástechnika fejlődésének, és a CNC megmunkálások elterjedésének köszönhetően mára megoldott probléma ezeknek a speciális gépelemeknek a gyártása.

A nem köralakú fogaskerek tervezése a legtöbb esetben a hajtó és a hajtott kerék szögsebességeinek arányát definiáló, úgynevezett áttétel függvényre épül. A kapcsolódó osztógörbét ennek az arálynak a segítségével határozhatjuk meg. A gyakorlatban csak az egyik kerék osztógörbéje határozható meg analitikusan, a másik kerék esetén numerikus megoldást kell alkalmazni. Az osztógörbét így diszkrét pontokban tudjuk meghatározni. Ezeknek a pontoknak a sűrűsége befolyásolja a végeredményként kapott fogaskerek hibáját, de hatással van a fogaskerék-geometria kiszámításához szükséges időre is.

Dolgozatomban a fogaskerek mozgásfüggvényeit általánosítottam változó tengelytáv esetére. Ezzel lehetőséget teremtettem arra, hogy ugyanazzal a módszerrel tervezhessünk fogaskerek és fogasléc-fogaskerék közti kapcsolatokat.

Az osztógörbék meghatározása után egy képzeletbeli fogazó szerszám segítségével valamilyen lefejtő eljárással határozhatjuk meg a gépelemek végleges geometriáját. Mivel a legtöbb esetben a nem köralakú fogaskereket párban gyártják, az adott esetre megtervezhető az optimális fogazat. Így a kerület mentén tetszőlegesen változtathatjuk a modult és a profileltolást. Dolgozatomban a fogméret növelésére, és így a terhelhetőség növelésére törekedtem a fogazati interferencia mentesség figyelembevételével.

A fogazatot például Maag-féle lefejtő eljárás alapján hozhatjuk létre. A fogazat elkészülte után több szempontból meg kell vizsgálnunk a kapcsolódó elemek megfelelőségét. Szükség lehet a fogak egymásba akadásának ellenőrzésére. Elképzelhető, hogy a kapcsolószám jelentősen lecsökken. Meg kell vizsgálni, valóban elviselik-e a fogak az az őket érő terhelést. Szükség esetén újra kell generálni a fogaskereket.

Végül a fogaskereket le kell gyártani. Erre a legjobb módszer jelenleg a huzalszikra-forgácsolás, de lézervágással is kialakítható a geometria. Ezt követi a fogaskerek szükség szerinti hőkezelése és köszörülése.

Dolgozatom keretein belül a nem köralakú fogaskerek tervezését, a geometria meghatározását, és a szilárdsági számításokat végeztem el.

2. ÁLTALÁNOSÍTOTT OSZTÓGÖRBÉK

A nem köralakú fogaskerek geometriájának meghatározásához elsőként elő kell állítanunk a kapcsolódó osztógörbét.

2.1. FIX TENGELYTÁVÚ FOGASKEREK OSZTÓGÖRBÉJÉNEK SZÁRMAZTATÁSA

[7]-ben megtalálhatjuk a fix tengelytávú esetben az adott áttétel-függvényhez tartozó osztógörbét leíró összefüggéseket. Ebben az esetben jelölje φ_2 a 2. számú kerék szögelfordulását, és legyen $i_{1,2}(\varphi_2) = \frac{\tilde{\omega}_1(\varphi_2)}{\omega_2(\varphi_2)} = \frac{r_2(\varphi_2)}{\tilde{r}_1(\varphi_2)}$ az áttételfüggvény. A kifejezésben szereplő $\tilde{\omega}_1(\varphi_2)$, illetve $\tilde{r}_1(\varphi_2)$ függvényeken a $\sim$ jellel jeleztem, hogy ezek a függvények a 2. számú kerék szögelfordulásának függvényében adják meg az 1. számú kerék szögsebesség, illetve sugár-értékeit. Ekkor a $T = \tilde{r}_1(\varphi_2) + r_2(\varphi_2)$ tengelytávra felírható összefüggésből a φ_2 szögelforduláshoz tartozó sugár-értékek a következőknek adódnak külső fogaskerék-kapcsolódás esetén:

$$\tilde{r}_1(\varphi_2) = \frac{T}{i_{12}(\varphi_2) + 1}, \quad r_2(\varphi_2) = T - \tilde{r}_1(\varphi_2). \quad (1)$$

A 2. kerék φ_2 szögelfordulása hatására az 1. kerék

$$\varphi_1 = \int_0^{\varphi_2} i_{1,2}(\varphi) d\varphi \quad (2)$$

szögelfordulást végez. Az (1)-ből $r_2(\varphi_2)$ alapl műveletekkel meghatározható a tengelytáv és az áttételfüggvény segítségével. Az 1. kerék geometriáját leíró $r_1(\varphi_1)$ függvény már analitikusan általában nem meghatározható.

$$r_1(\varphi_1) = \tilde{r}_1 \left(\left(\int_0^{\varphi_2} i_{1,2}(\varphi) d\varphi \right)^{-1} (\varphi_1) \right), \quad r_2(\varphi_2) = \frac{i_{12}(\varphi_2) \cdot T}{i_{12}(\varphi_2) + 1}. \quad (3)$$

A (3) kifejezésben szereplő -1 index a függvény inverzét jelöli.

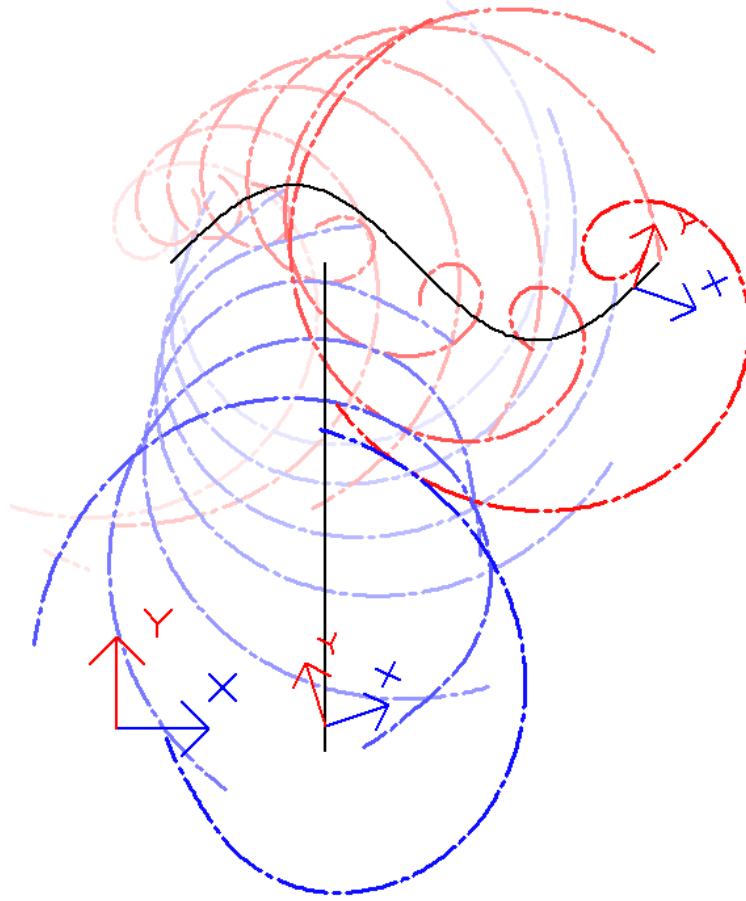
A (3) összefüggést a gyakorlatban nem használják, az (1) és (2) összefüggések segítségével adott φ_2 szögértékekre adják meg az 1. kerék diszkrét helyeken felvett pontjait. Ez egyszerűbb számolást jelent, de általában ebben az esetben is szükségünk van numerikus módszerre az integrál meghatározásához.

2.2. A FOGASKEREKEK MOZGÁSÁNAK ÁLTALÁNOSÍTÁSA

A leggyakoribb esetekben fix tengelytávú fogaskerék-fogaskerék kapcsolatokhoz kell megtalálni a megfelelő osztógörbét. Azonban néha szükségünk lehet fogaskerék-fogasléc kapcsolatok leírására is. Ezekben az esetekben az előzőekben felírt áttétel-függvény értelmetlenné válik, így a megoldás nem származtatható a fenti képletek $T \rightarrow \infty$ -ben vett határértékei alapján. Ezért kerestem egy általánosabb felírást a fogaskerekek mozgására, amely lefedi mind a két előbb említett esetet. A következő sorokban olvasható levezetés megtalálható [9]-ben.

Engedjük meg a fogaskerekek mozgását az x - y síkon. Ekkor a testek egy-egy pontjának idő-függő helyzetével, és az időbeli szögelfordulással definiálhatjuk a keresett két alakzat elvárt mozgását. Ehhez a mozgáshoz keressük az osztógörbét. Elsőként a globális koordináta-rendszerben fogjuk meghatározni a testek azon pontjait, ahol a mozgásuk közben csúszásmentesen legördülhetnek egymáson. Ezt követően pedig kiszámoljuk a pontokat a két testtel együtt mozgó koordináta-rendszerből nézve, így megkapjuk az osztógörbét.

Az 1. ábrán az egyes osztógörbét látjuk különböző időpillanatokban. A két test egy-egy pontja a fekete vonalakon mozog. A legerősebben látható osztógörbe-pár esetén a pontok helyzetét, illetve a szögelfordulásukat egy-egy koordináta-kereszt jeleníti meg. A globális koordináta-rendszer origóját jelenleg a bal alsó sarokban látható koordináta-kereszt jelzi.



1. ábra

A fogaskerek mozgása a globális koordináta-rendszerben

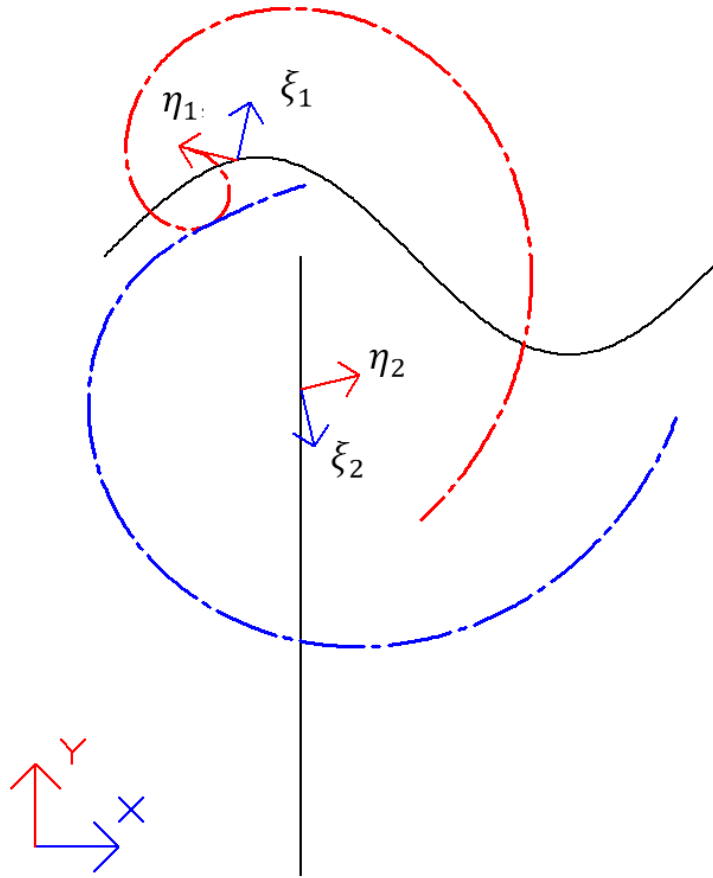
Legyenek az 1. számú fogaskerék mozgását leíró függvények $x_1(t)$, $y_1(t)$, $\varphi_1(t)$, illetve a 2. számú fogaskeréké $x_2(t)$, $y_2(t)$, és $\varphi_2(t)$. Elsőként tehát határozzuk meg az érintkezési pontok $x(t)$ illetve $y(t)$ koordinátáit. A csúszásmentes gördülés feltétele, hogy az érintkezési pontban a két test egyenlő sebességgel mozogjon. A keresett érintkezési pont sebessége az 1., illetve a 2. testből nézve (az idő paramétert az egyszerűség kedvéért elhagyva):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y}_* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} + \dot{\varphi}_1 \begin{bmatrix} y_1 - y \\ x - x_1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y}_* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \dot{\varphi}_2 \begin{bmatrix} y_2 - y \\ x - x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Mivel a baloldalak megegyeznek, a jobboldalaknak is egyenlőknek kell lenniük. Az így kapott egyenlet x_* és y_* megoldásai megadják a kerek álló pólusgörbéit.

$$x = \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1 + x_1\dot{\phi}_1 - x_2\dot{\phi}_2}{\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2}, \quad y = \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2 + y_1\dot{\phi}_1 - y_2\dot{\phi}_2}{\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2}. \quad (5)$$

Az osztógörbék pontjait adjuk meg az $x_1(t)$, $y_1(t)$, $\phi_1(t)$, illetve az $x_2(t)$, $y_2(t)$, $\phi_2(t)$ függvények által meghatározott $\xi_1 - \eta_1$, illetve $\xi_2 - \eta_2$ koordináta-rendszerben (lásd 2. ábra)!



2. ábra

A globális $x - y$, illetve a mozgó $\xi_1 - \eta_1$ és $\xi_2 - \eta_2$ koordináta-rendszerek
A fekete vonalak jelzik a mozgó koordináta-rendszerek mozgását a globális koordináta-rendszerben. A pontvonalak az eredményül kapott osztógörbék

Legyenek a keresett pontok $\xi_1(t)$, $\eta_1(t)$, illetve $\xi_2(t)$, $\eta_2(t)$. Ezek a pontok az $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ pont $\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$ pontokkal való eltolásából, illetve a φ_i szöggel való elforgatásból meghatározhatók ($i = 1, 2$).

$$\begin{bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_i) & \sin(\varphi_i) \\ -\sin(\varphi_i) & \cos(\varphi_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2). \quad (6)$$

Gyakran polárkoordinátarendszerben adjuk meg a pontokat. A (6) jobboldalán álló vektor felírható a következő alakban:

$$\begin{bmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x - x_i}{r_i} & \frac{y - y_i}{r_i} \\ -\frac{y - y_i}{r_i} & \frac{x - x_i}{r_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_i) & \sin(\gamma_i) \\ -\sin(\gamma_i) & \cos(\gamma_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (i = 1, 2). \quad (7)$$

Ahol $0 < r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$, a (7) baloldalán álló vektor hossza. A (7)-ben kapott kifejezést (6)-ba visszahelyettesítve:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi_i) & \sin(\varphi_i) \\ -\sin(\varphi_i) & \cos(\varphi_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\gamma_i) & \sin(\gamma_i) \\ -\sin(\gamma_i) & \cos(\gamma_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi_i + \gamma_i) & \sin(\varphi_i + \gamma_i) \\ -\sin(\varphi_i + \gamma_i) & \cos(\varphi_i + \gamma_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (i = 1, 2). \quad (8)$$

Innen az $(x - x_i, y - y_i)$ pont polárkoordinátákkal megadott alakja $(r_i, \varphi_i + \gamma_i)$.

A (5) összefüggés csak akkor érvényes, ha a testek mozgása során nincs olyan pillanat, amikor a két test szögsebessége megegyezne. Ebben az esetben az (4)-ben szereplő egyenletek rendezéséből vagy ellentmondásra, vagy azonosságra jutunk, azaz a szögsebességek egyezésekor a két testnek vagy minden pontja együtt mozog, így nincs egyértelmű gördülési pont, vagy nincs olyan pontja, amely azonos sebességgel mozogna.

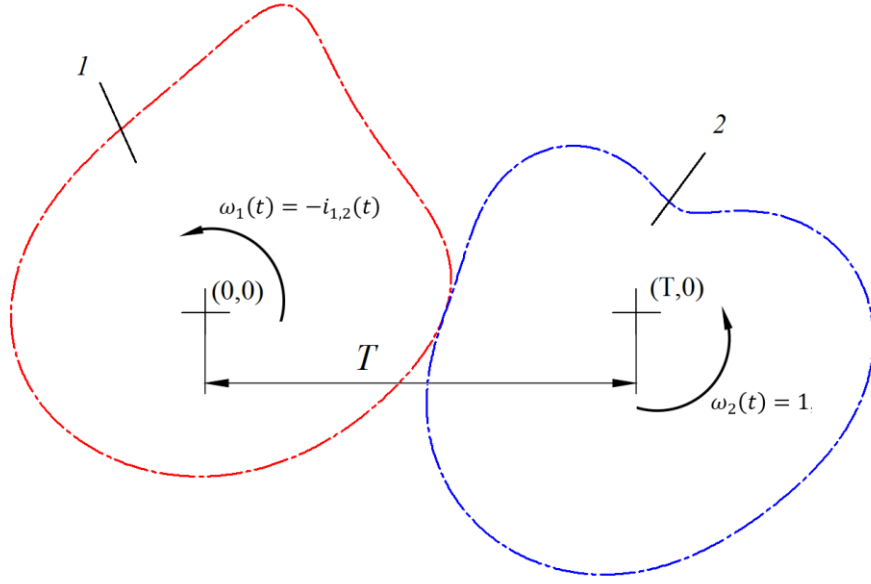
Abban az esetben, ha a két test $\mathbf{P}_1(t)$ és $\mathbf{P}_2(t)$ sebességpólusai léteznek, ismerjük a helyzeteiket, és adott az áttételfüggvény, az érintkezési pontok egy másik módszerrel is kiszámíthatók. Ekkor a sebességpólusok távolságából megkapható a $T(t)$ tengelytáv függvény. Az érintkezési pont rajta lesz a sebességpólusok által meghatározott egyenesen. Így az (1)-ben szereplő sugárértékekhez hasonlóan alapján meghatározható az érintkezési pont. Például, külső fogaskerék kapcsolódás esetén:

$$\begin{bmatrix} \xi_i(t) \\ \eta_i(t) \end{bmatrix} = \mathbf{P}_1(t) + \frac{1}{i_{12}(t) + 1} (\mathbf{P}_2(t) - \mathbf{P}_1(t)). \quad (9)$$

Most alkalmazzuk a két leggyakoribb problémára, a fix tengelytávú fogaskerék-kapcsolódásra, illetve a fogaskerék-fogasléc kapcsolódásra az általánosított módszert!

2.2.1. A MÓDSZER ALKALMAZÁSA RÖGZÍTETT TENGELYTÁVÚ FOGASKEREKEK ESETÉN

Legyen T a tengelytáv, így az 1. számú fogaskerék tengelyét felvehetjük az origóban, 2. számú test tengelyét pedig a $(T, 0)$ pontba. Fogaskerék-fogaskerék kapcsolódás esetén általában a más korábban definiált $i_{1,2}(\varphi_2) = \frac{\tilde{\omega}_1(\varphi_2)}{\omega_2(\varphi_2)}$ áttételfüggvény adott. A geometriai számítások során nem érdekes számunkra a fogaskereknek külön-külön vett forgása. Ezért feltehetjük, hogy a 2. számú kerék állandó 1 szögsebességgel forog, így $\omega_2(t) = 1$, és $\varphi_2(t) := t$ -nek választható. Ebből következik, hogy az 1. számú fogaskerék külső kapcsolódás esetén $-i_{1,2}(\varphi_2) = -i_{1,2}(t)$ szögsebességgel forog, belső fogaskerék-kapcsolódás esetén pedig ellentétes előjellel. Az elrendezést lásd a 3. ábrán.



3. ábra

Fix tengelytávú nem köralakú fogaskerekek kapcsolódása

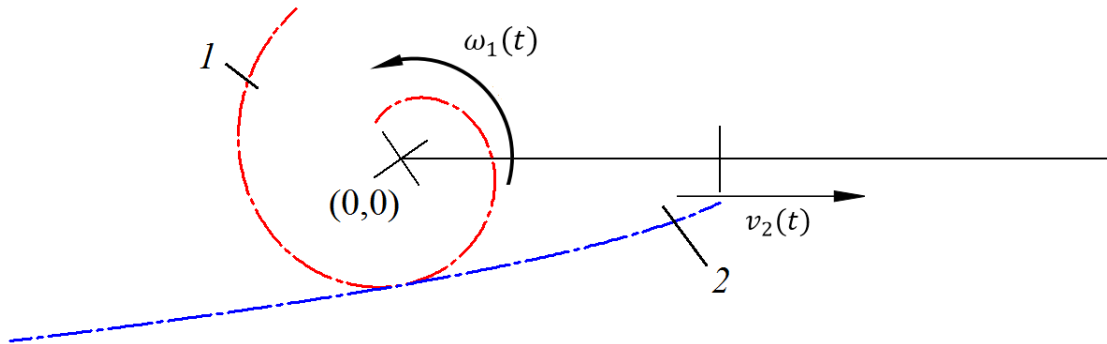
A szögsebesség-függvény integrálásával megkapható φ_1 , ami az előjeltől eltekintve megegyezik a (2)-ben szereplő összefüggéssel. (5)-ba behelyettesítve az $y_*(t) \equiv 0$, illetve az $x_*(t) = \frac{T}{i_{1,2}(t)+1}$ függvények adódnak, azaz az érintkezési pont mindig a tengelyek által meghatározott egyenesre esik. Mivel ekkor a (6) jobboldalán álló vektornak csak az x koordinátája nem nulla, így könnyen megkapjuk a keresett pontok polárkoordinátás alakját. Például külső fogaskerék kapcsolódás esetén a következő eredményeket kapjuk:

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \frac{T}{i_{1,2}(t) + 1}, & \vartheta_1(t) &= - \int_{t_0}^t i_{1,2}(t) dt, \\ r_2(t) &= \frac{i_{1,2}(t)}{i_{1,2}(t) + 1}, & \vartheta_2(t) &= \pi + t. \end{aligned} \quad (10)$$

Az eredmények az elforgatásokat és az előjeleket leszámítva megegyeznek az (1), (2) és (3) egyenletekben megadottakkal.

2.2.2. A MÓDSZER ALKALMAZÁSA FOGASKERÉK-FOGASLÉC KAPCSOLÓDÁSRA

Fogaskerék-fogasléc kapcsolat esetén válasszuk a fogaskerék tengelyének az origót, és tegyük fel, hogy a fogasléc az x tengellyel párhuzamosan mozog. Mivel a fogasléc azon pontjai, amelyek csak az y koordinátaikban különböznek, azonos x irányú mozgást végeznek, a számításokhoz a fogaslécnek vehetjük azt a pontját, amelyik az x tengelyen mozog. Legyen az 1. számú test a fogaskerék. Így $x_1(t) \equiv 0$, $y_1(t) \equiv 0$, $y_2(t) \equiv 0$, $\varphi_2(t) \equiv 0$. Az elrendezést lásd a 4. ábrán.



4. ábra

Fogaskerék-fogasléc osztógörbéinek kapcsolódása

Ekkor az érintkezési pontoknak az $x_* = 0$, $y_* = -\frac{\dot{x}_2}{\dot{\varphi}_1}$ értékek adódnak. A fogaskerék osztógörbéinek polárkoordinátákkal megadott pontjai:

$$(r_1(t), \vartheta_1(t)) = \left(\frac{\dot{x}_2(t)}{\dot{\varphi}_1(t)}, \varphi_1(t) - \frac{\pi}{2} \right) v_2(t). \quad (11)$$

A fogasléc pontjai Descartes-koordinátarendszerben:

$$\xi_2(t) = -x_2, \quad \eta_2 = -\frac{\dot{x}_2(t)}{\dot{\varphi}_1(t)}. \quad (12)$$

2.3. ZÁRT GÖRDÜLŐGÖRBÉK

Számos esetben periodikus mozgásokat szeretnénk előállítani. Periódikus mozgás esetén létezik egy minimális $T > 0$ idő, melyre az $x_i(t)$, és az $y_i(t)$ ($i = 1, 2$) függvények periodikusak, míg mindkét test egész számú forgást végez. Matematikailag kifejezve:

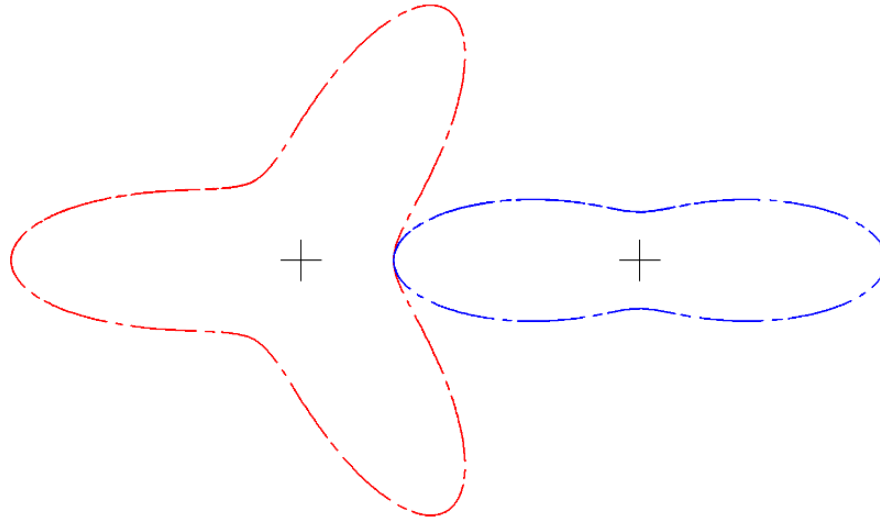
$$\begin{aligned} x_i(t) = x_i(t + T), \quad y_i(t) = y_i(t + T), \quad \varphi_i(t) = \varphi_i(t + T) - 2\pi k_i, \\ k_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (13)$$

Fogaskerek mozgását gyakran áttétel-függvénnyel adjuk meg. Az áttétel-függvényt fix tengelytáv esetén a szögsebességek hányadosaként, fogaskerék-fogasléc kapcsolatban például a fogaskerék szögsebessége és a fogasléc sebessége hányadosaként definiáljuk. A törtek számlálói és nevezői az x_i , y_i , illetve φ_i függvények deriváltjai. Ezekkel a deriváltakkal felírva a (13)-ben szereplő összefüggéseket:

$$\int_t^{t+T} \dot{x}_i(t) dt = 0, \quad \int_t^{t+T} \dot{y}_i(t) dt = 0, \quad \int_t^{t+T} \dot{\varphi}_i(t) dt = 2\pi k_i. \quad (14)$$

Ezekben az esetekben az osztógörbék elég egy választott $[t_0, t_0 + T]$ intervallumban meghatározni, hiszen az osztógörbe T szerint periodikus lesz.

Vannak olyan esetek, amikor bár a testek a T hosszú periódus alatt visszatérnek a kiindulási állapotukba, de a (6)-ben meghatározott osztógörbe-függvények T_1 és T_2 periódusai T -nél kisebbek, adott k_1, k_2 egészekre $T = T_1 k_1 = T_2 k_2$. Klasszikus példa erre egy, z_1 és egy z_2 fogszerű hengeres fogaskerék kapcsolódása, ahol $z_1 \neq z_2$. Legyen l z_1 és z_2 legnagyobb közös osztója. Ekkor, ha a z_1 fogszerű kerék $\frac{z_2}{l}$, míg a z_2 fogszerű kerék $\frac{z_1}{l}$ körbeforgást végez, akkor mindkét kerék minden pontja visszatér eredeti helyére, azonban az osztógörbék előállításához elegendő a fogaskerek egy körbeforgása során figyelni az érintkezési pontokat. Nem köralakú fogaskerek esetén hasonló példát lehet találni ellipszisziből származtatott fogaskerek [8] között (lásd 5. ábra).



5. ábra

A két osztógörbe hossza 2:3 arányú (ellipszisből származtatott osztógörbék)

Az osztógörbék zártságának nem feltétele, hogy a (13)-ben szereplő feltételek teljesüljenek. Ilyen esetek akkor fordulhatnak elő, amikor hibásan választott vonatkoztatási rendszerben írjuk fel az $x_i(t), y_i(t), \varphi_i(t)$, ($i = 1, 2$) függvényeket, például, ha egy autó fogaskerekeinek mozgását a földhöz viszonyítva adjuk meg. Ebben az esetben határozzuk meg az egyik fogaskerékhez rögzített koordinátarendszerben a másik fogaskerék mozgását. Ha létezik olyan T periódusidő, amely szerint a fogaskerék periodikus mozgást végez, akkor az osztógörbéknek zártaknak kell lenniük.

2.4. AZ OSZTÓGÖRBÉK KISZÁMÍTÁSA A GYAKORLATBAN

Számos esetben nem az $x(t), y(t), \varphi(t)$ függvények, hanem a deriváltjaik adottak. A sebesség- és szögsebesség-függvények általában analitikusan nem integrálhatók. Emiatt numerikus módszereket kell keresnünk ahhoz, hogy meghatározhassuk az osztógörbéket. Így az eredményül kapott osztógörbéket csak diszkrét pontokban fogjuk tudni meghatározni.

A generált fogaskerék geometriájának a gyárthatósági hibán belül meg kell közelítenie a fogaskerék elméleti alakját. Emellett gyors algoritmust szeretnénk. Emiatt dolgozatomban keretein belül az osztógörbék pontjait úgy választom meg, hogy a szomszédos pontok közötti

távolságok két határ között mozogjanak. Túl sűrű pontok a teljesítmény, míg a túl ritkák a pontosság rovására mennek.

Legyenek $t_0, \dots, t_n, n \in \mathbb{N}$ azok az időpontok, amelyekben az osztógörbét meghatározó diszkrét pontok érintkeznek egymással. A $t_0 = 0$ pontban meghatározható az érintkezési pont, ha adottak a kezdeti feltételek. Ezt követően tegyük fel, hogy az i -edik időpontig kiszámoltuk az osztógörbék pontjait, és ismerjük $x_1(t_i), y_1(t_i), \varphi_1(t_i)$, illetve $x_2(t_i), y_2(t_i), \varphi_2(t_i)$ értékeket (vagy, közelítéseiket, ha a függvényeknek csak a deriváltjai adottak). Tetszőleges $t > t_i$ időpont esetén ezen függvények $[t_i, t]$ intervallumon vett numerikus integráljának segítségével megkaphatóak $x_1(t), y_1(t), \varphi_1(t)$, illetve $x_2(t), y_2(t), \varphi_2(t)$ közelítései. Például, ha ismert $\varphi_1(t_i)$, és $\dot{\varphi}_1(t)$, ($t \in [t_i, t_{i+1}]$), akkor

$$\varphi_1(t_{i+1}) = \varphi_1(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\varphi}_1(t) dt. \quad (15)$$

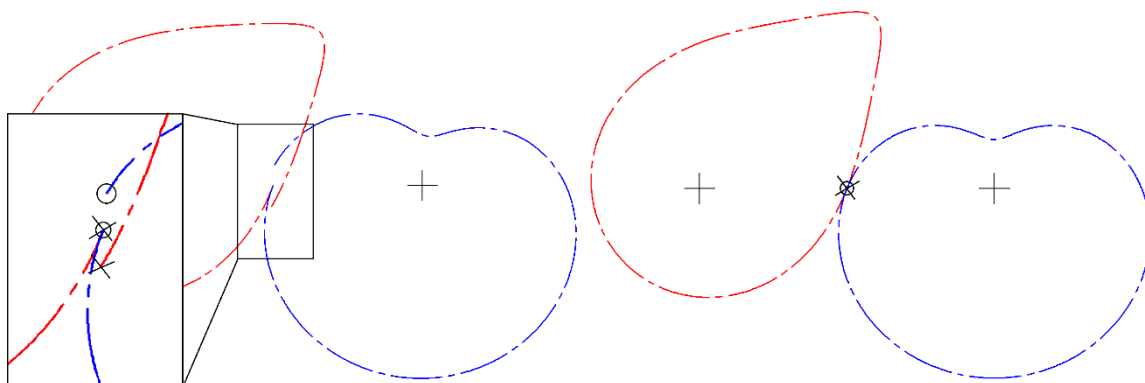
A fogaskerék generáló programomban trapéz-módszert [3] alkalmaztam az integrál kiszámítására. Ahhoz, hogy az osztógörbe pontjait úgy vegyük fel, hogy a köztük lévő távolság valamilyen $[a, b]$ intervallumba essen ($a, b \in \mathbb{R}^+$), t_{i+1} értékét intervallum-felezés módszerével határozhatjuk meg.

A (15)-ben szereplő integrált numerikusan számoltuk ki. Ezek a hibák összeadódnak, így a számolt függvényeket halmozódó hiba terheli. Ez azt eredményezheti, hogy egy zártnak feltételezett osztógörbe első és utolsó pontja között több mm-es távolság lesz. A problémát úgy lehet olvasni, hogy adott $t_0 = t_0^*, \dots, t_k^*, k \in \mathbb{N}$ időpontokban megadhatjuk a fogaskerek mozgását definiáló függvények értékét. Ha a numerikusan számolt módszerrel a függvények értéke a t_j^* , ($j \in \{1, \dots, k\}$) időpontban eltér a megadottól, akkor korrigálnunk kell a numerikusan számolt függvényértékeket a $[t_{j-1}^*, t_j^*]$ intervallumon.

A javítás a következőképpen történik. Legyen a keresett függvény f ($f \in \{x_i, y_i, \varphi_i | i \in \{1, 2\}\}$), és ismert $f(t_{j-1}^*)$ értéke ($j \in \{1, \dots, k\}$). Numerikus módszerrel meghatározzuk f -nek az $\tilde{f}$ közelítését. A fenti sorok alapján tudjuk, hogy $\tilde{f}(t_{j-1}^*) = f(t_{j-1}^*)$, azonban várhatóan $\tilde{f}(t_j^*) \neq f(t_j^*)$. Ekkor definiáljuk az $\hat{f}$ függvény $\hat{f}$ javítását a következőképpen:

$$\hat{f}(t) = \tilde{f}(t) + \frac{(t - t_{j-1}^*)}{(t_j^* - t_{j-1}^*)} (f(t_j^*) - \tilde{f}(t_j^*)), \quad t \in [t_{j-1}^*, t_j^*]. \quad (16)$$

A kapott $\hat{f}$ függvény a t_{j-1}^* és t_j^* pontokban megegyezik az elméleti f függvénnyel, így a halmozódó hiba elkerülhető. A 6. ábrán láthatjuk az osztógörbéket a korrigálás nélkül, és a javítással.



6. ábra

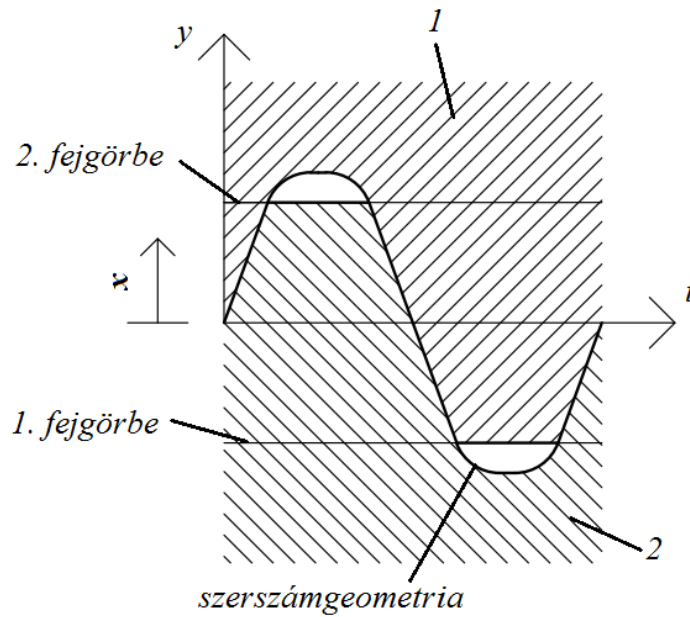
Az osztógörbék numerikus előállítása során fellépő hiba, és a korrigált fogaskerékpár

3. A FOGAZÓLÉC ELŐÁLLÍTÁSA

A fogazat előállításához a Maag-féle lefejtő eljárás, illetve a Fellows-féle metszőkerekes lefejtés elvét [11] alkalmaztam. Első lépésben elő kell állítanunk egy fogazóléceket. A fogazóléc nem gördíthető le a fogaskerek osztógörbéin, ha azok homorú szakaszokat tartalmaznak. Ezért a fogazat előállításához egy közbenső lépést fogok alkalmazni. Definiálni fogok egy fogazó szerszám osztógörbét, ami csak domború, illetve egyenes szakaszokat tartalmazhat, és legördíthető az egyik fogaskeréken. Ez a fogazószerszám a fogazóléc segítségével előállítható. A fogazószerszám egyik fogaskerék osztógörbén történő legördítésével megkapható a fogazat az egyik fogaskeréken. A másik fogaskerék geometriája a már elkészült fogaskerék segítségével előállítható.

3.1. AZ ALAPPROFIL

Dolgozatomban általánosan, szakaszonként megadható alapprofilokkal valósítottam meg a fogazást. Az alapprofilit meghatározza a szerszámgeometria ($f(t)$, π szerint periodikus függvény), illetve a fejpgörbét meghatározó vágó-függvények. A későbbiekben a függvény argumentumát t -vel fogom jelölni, hogy meg lehessen különböztetni az x profileltolástól. Az 7. ábrán láthatjuk a függvényt, ha szabványos alapprofilit alkalmazunk.



7. ábra

A szabványos alapprofil [1]

A továbbiakban tekintsünk úgy az alapprofilra, hogy tőle felfele helyezkedik el az 1. fogaskerék, illetve tőle lefele a 2. fogaskerék. Dolgozatom keretein belül kompenzált fogazatot [11] alkalmaztam, ekkor a fogaskerek profileltolásai csak az előjelükben különböznek egymástól. Emiatt a továbbiakban nem különböztetem meg ezt a két értéket. A későbbi egyértelműség kedvéért definiáljuk az x profileltolás pozitív irányát az 1. fogaskerék felé való eltolás irányának (lásd 7. ábra).

Kompenzált fogazat esetén az 1. és 2. fogaskerék profileltolásának összege nulla:

$$x_1 + x_2 = 0. \quad (17)$$

A fejtörőmagasság a következő képlettel számítható:

$$h_{a,i} = h_{a,i}^* m + x_i = (h_{a,i}^* + x_i^*) m, \quad i = 1, 2. \quad (18)$$

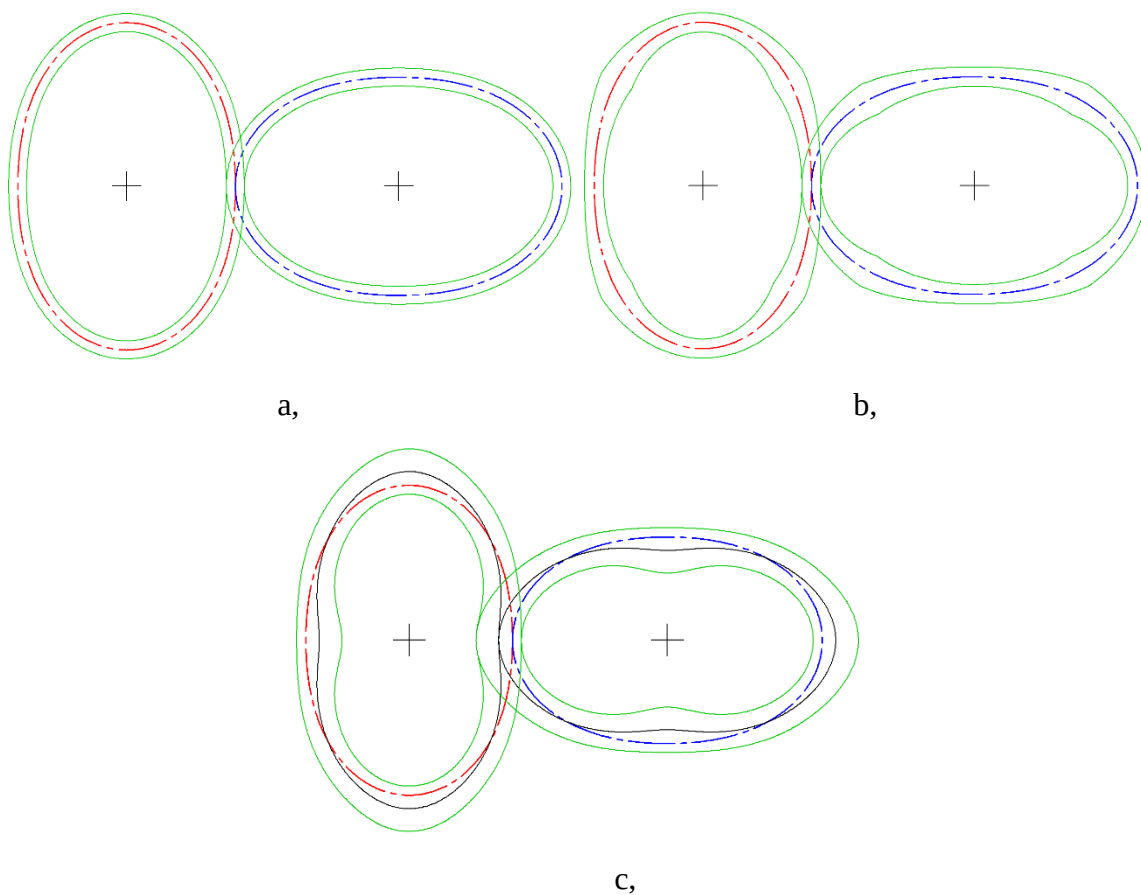
ahol m a modul, h_a^* a fejtörőmagasság-tényező, illetve x^* a profileltolás-tényező.

Dolgozatomban a profileltolás-tényezőt nem fogom használni. A h_a^* fejmagasság-tényezőt a 7. ábrán a fejpgörbék vonalának t tengelytől való távolságaként definiálom.

3.2. A FOGMÉRET KORLÁTOZÓ TÉNYEZŐI

Nem kör alakú fogaskereket általában páronként gyártják, így az alkalmazott fogazóléc geometriájának meghatározásakor nagy szabadságunk van. A fogak profileltolását és a modult a kerület mentén folytonosan változtattam, hogy a fogak a lehető legnagyobb terhelésnek is megfeleljenek.

A 8. a, ábrán látható, hogy nem köralakú fogaskerek esetében állandó fogméretet alkalmazva kis modult kell választanunk az alámetszések elkerüléséhez. Csak lokálisan növelhetjük a fogméretet, ha azt a görbület alapján számítjuk, de profileltolást nem alkalmazunk. Ez néhány esetben nem probléma, ha a fogaskerék fogait a kis görbületű szakaszokon éri a legnagyobb terhelés. A profileltolás változtatásával a fogméret még több helyen növelhető. A 8. c, ábrán látható, hogy közel állandó fogméretet érhetünk el a kerület mentén, és jóval nagyobb modult alkalmazhatunk.



8. ábra

A fej-, illetve lábgörbék, és a profileltolás állandó modul esetén (a),
 változó modul esetén (b),
 illetve a profileltolás változtatásával együtt (c) alámetszés nélkül

A fejmagasságot úgy szeretnénk meghatározni, hogy fogazati interferenciák ne jelenjenek meg. TDK dolgozatomb [10] keretein belül három korlátozó tényezőt állapítottam meg. Ezeket a következő sorokban röviden összefoglalom.

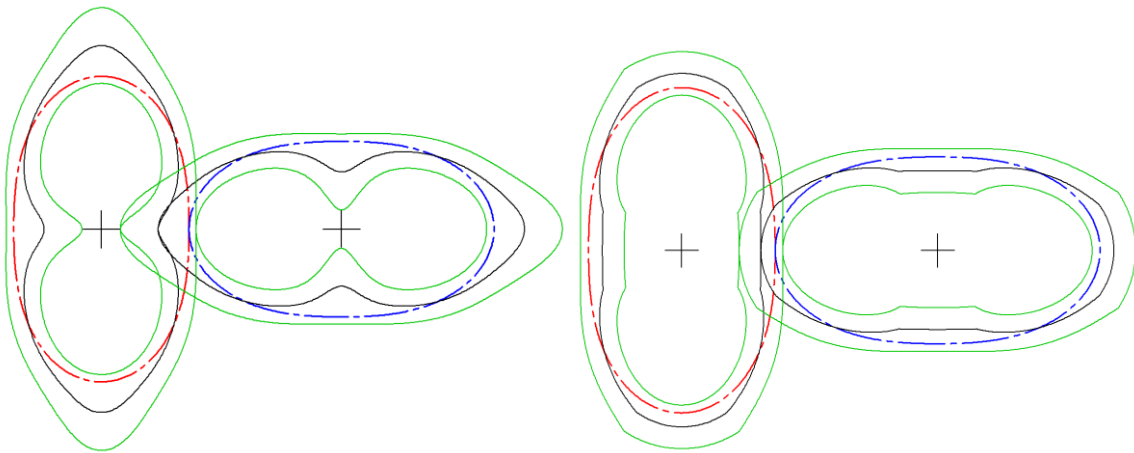
3.2.1. GÖRBÜLETBŐL ADÓDÓ KORLÁTOZÁS

A fogaskerek osztógörbéjének görbülete az alámetszés jelensége miatt korlátozza a fogfejmagasságot. Erre a problémára kör alakú fogaskerek esetén ismertek összefüggések. A dolgozatomban ezzel fogok részletesebben foglalkozni.

A görbület a fogkihegyesedés szempontjából is fontos tényező. A dolgozatomban csak ellenőrizni fogom azt, hogy ez a jelenség a teherbírásban, vagy kapcsolószám-csökkenés miatt okoz-e problémát.

3.2.2. ANYAGVASTAGSÁGBÓL ADÓDÓ KORLÁTOZÁS

A kör alakú fogaskerekkel ellentétben nem köralakú fogaskerek kapcsolódhatnak egymással úgy, hogy a kapcsolódó osztógörbék görbületei kicsik, így a görbületből adódó korlátozás nagy méretű fogakat megengedne, azonban a fogméret mégsem alkalmazható, mert az így kialakuló fogárok túlságosan meggyengítené a fogaskereket, esetleg el is érné a fogaskerek másik oldalán lévő fogárkokat, így a fogaskerek kettéesne. A 9. bal oldali ábrán láthatunk erre példát. A problémát úgy oldottam meg, hogy minden egyes fogaskerek esetén egy fix felső korlátot adtam a fogárok méretének.



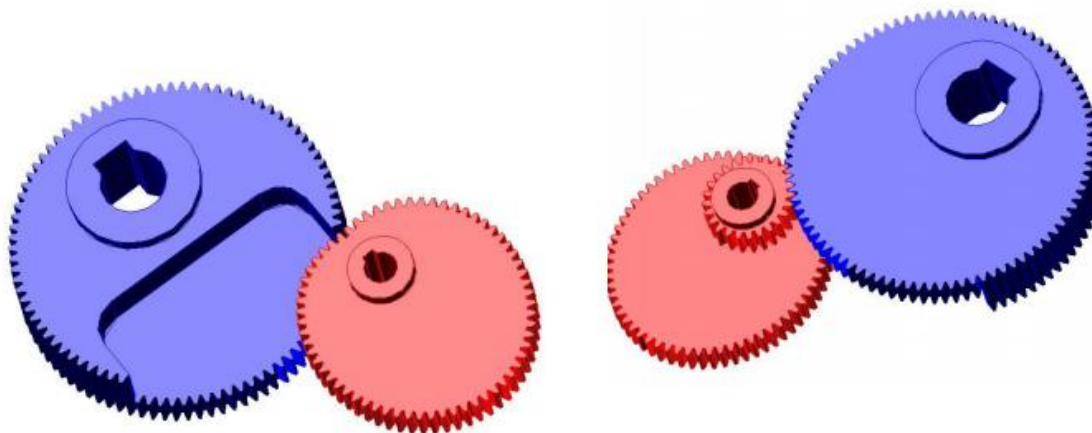
9. ábra

A görbületnek megfelelő fej-, illetve lábgörbék, illetve korrigálásuk
(az ábrán látható, hogy a pontonként kiszámított modul, és profileltolás-értékeket javítani
kell. Lásd 3.3. pont)

3.2.3 AZ OSZTÓGÖRBÉK ÉRINTŐ IRÁNYÚ RELATÍV MOZGÁSÁBÓL ADÓDÓ KORLÁTOZÁS

Az osztógörbék egyenletei nem garantálják azt, hogy az érintkezési ponttól távolabb az osztógörbék ne menjenek egymásnak. Vannak olyan helyzetek, amikor az osztógörbék bár nem ütköznek egymással, annyira megközelítik egymást a mozgásuk során az érintkezési ponttól távolabb is, hogy emiatt nem lehet az adott pontban akkora fogméretet alkalmazni, amekkorát a görbületek alapján kiszámolhatunk. Ezt a hibajelenséget dolgozatomban csak ellenőrizni fogom.

Laczik Bálint tanár úr olyan esetre is adott megoldást, amikor az egyik kapcsolódó osztógörbe önmagát metszette [6]. Az excentrikusan elhelyezett tengelyű kör alakú fogaskerékkel egy olyan ellenkerék párosult, amely kétszer körbefordult, míg a kör alakú egyszer. A megoldás az volt, hogy az osztógörbe egy szakaszát kiemelte az osztógörbe eredeti síkjából.



10. ábra

Excentrikus tengelyű kör alakú fogaskerék, illetve az ellenkerék [4]

A másik megoldás ilyen esetekben, hogy a fogaskerékpárt kicseréljük több fogaskerékpárból álló hajtáslánccra, így elkerülhető a probléma.

3.3. A PROFILELTOLÁS ÉS A MODUL PONTONKÉNTI MEGHATÁROZÁSA

Elsőként határozzuk meg a profileltolást és a modult pontonként, az érintkezési pontokban az osztógörbék görbületei alapján!

3.3.1. A GÖRDÜLETBŐL ADÓDÓ KORLÁTOZÁS ÖSSZEFÜGGÉSEI SZABVÁNYOS FOGPROFIL ESETÉN

A továbbiakban a görbületből adódó korlátozást vizsgálom részletesebben. Kör alakú fogaskerekeknél Maag-féle foggyalulás esetén a fogfejmagasság határa [9] (19.31) és (19.24) képletei alapján elemi fogazat esetén:

$$h_a = h_a^* \cdot m \leq r \sin^2(\alpha). \quad (19)$$

A képlet kimondja, hogy a fogprofil α profilszögű szakasza a fogaskerék osztógörbájén legördülő egyenestől legfeljebb h_a távolságra lehet a fogaskerék irányába. Így az x profileltolást figyelembe véve:

$$h_a = h_a^* \cdot m \leq r \sin^2(\alpha) + x. \quad (20)$$

Azaz, pozitív profileltolást alkalmazva a fogméret növelhető alámetszés nélkül.

3.3.2. A MAXIMÁLIS FEJMAGASSÁG MEGHATÁROZÁSA KOMPENZÁLT FOGAZAT ESETÉN

Nem köralakú fogaskerekeknél kompenzált fogazatot alkalmazok a fogméret növelése érdekében. Elsőként határozzuk meg szabványos fogazatra az alámetszés nélkül elérhető maximális fogfejmagasságot, és a hozzá tartozó profileltolást! A továbbiakban vizsgáljunk

az osztógörbék egy adott érintkezési pontját, ahol az osztógörbék simulókörének sugara r_1 illetve r_2 .

A fogazat előállításának módjából következik, hogy egyenes, vagy homorú fogaskerék-szakaszokon alámetszés jelensége nem alakulhat ki. Ilyen esetekben a fogméretet, illetve a profileltolást a fogkihegyesedés jelensége, és a vele járó kapcsolószám csökkenése korlátozza. Tegyük fel, hogy az 1. kerék osztógörbéjének homorú szakasza érintkezik a 2. kerék domború szakaszával. Ha adott az x_{max} megengedett maximális profileltolás, akkor a fogfejmagasság a (20) képletből számítható az $x := x_{max}$ helyettesítéssel.

Most tegyük fel, hogy mindkét osztógörbe domború a kapcsolódási pontban. Legyen a profileltolás megengedett alsó és felső határa x_{min} illetve x_{max} . Ekkor a fejmagasság maximuma:

$$h_{a_{max}} = \min \left\{ \frac{r_1 + r_2}{2} \sin^2(\alpha), r_1 \sin^2(\alpha) - x_{min}, r_2 \sin^2(\alpha) + x_{max} \right\}. \quad (21)$$

Ha $h_{a_{max}}$ értéke a képlet jobb oldalán szereplő halmaz második, vagy harmadik elemével egyenlő, akkor a profileltolás értékét $x = x_{min}$ -nek, illetve $x = x_{max}$ -nak kell választani a maximális fejmagasság eléréséhez. Ha $h_{a_{max}}$ értéke a halmaz első elemével egyezik meg, akkor az

$$x = \frac{r_2 - r_1}{2} \quad (22)$$

választás esetén alkalmazhatjuk a maximális modult.

A fejmagasság maximumából a modul maximuma már egyszerűen számítható:

$$m_{max} = \frac{h_{a_{max}}}{h_a^*}. \quad (23)$$

3.3.3. A FOGPROFIL ÁLTALÁNOSÍTÁSA

Néhány esetben nem hagyományos fogprofilokat alkalmaznak. Nem szimmetrikus fogak [1] hatékonyak abban az esetben, amikor a kerekék mindig azonos irányba forognak, és így a fogaknak csak az egyik oldalát éri terhelés.

Az egységnyi modulú alapfogprofil általánosabban tekinthetjük egy $f \in C^1[0, \pi]$ folytonosan deriválható, periodikus függvénynek (lásd 7. ábra). Meg szeretnénk határozni a maximális alkalmazható modult ebben az esetben is, illetve a hozzá tartozó profileltolást. A következőkben feltesszük, hogy az érintkezési pontban mindkét fogaskerék domború. Ellenkező esetben a számítások egyszerűsödnek, hasonlóan az előző pontban bemutatotthoz.

Az számítás elve, hogy az f függvényt végtelenül rövid szakaszokra bontva a szakaszok jól közelíthetők az érintőikkel. Minden egyes rövid szakaszra, mint egyenesre alkalmazhatjuk a (19) képletet. A kapott eredményekből meghatározhatjuk azt a profileltolást és fogfejmagasságot, amely esetén a fogprofil-függvény alapján létrehozott fogazóléc nem hozhat létre alámetszést.

Elsőként határozzuk meg a függvény minden $t \in [0, \pi]$ pontjában, hogy az adott pontot az egyik, illetve másik fogaskerék fele milyen határig tolhatjuk el, hogy az adott pont a függvény érintőjének szöge alapján ne okozhasson alámetszést. A pontokból így kapunk egy $f_{max}(t)$, illetve egy $f_{min}(t)$ függvényt.

Tetszőleges t pontban az alaprofil érintőjének a 7. ábra y tengelyével bezárt α szöge:

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \arctg(f'(t)), \quad t \in [0, \pi]. \quad (24)$$

Felhasználva a (19) képletet, a t pontban az $f_{min}(t)$ és $f_{max}(t)$ értékek:

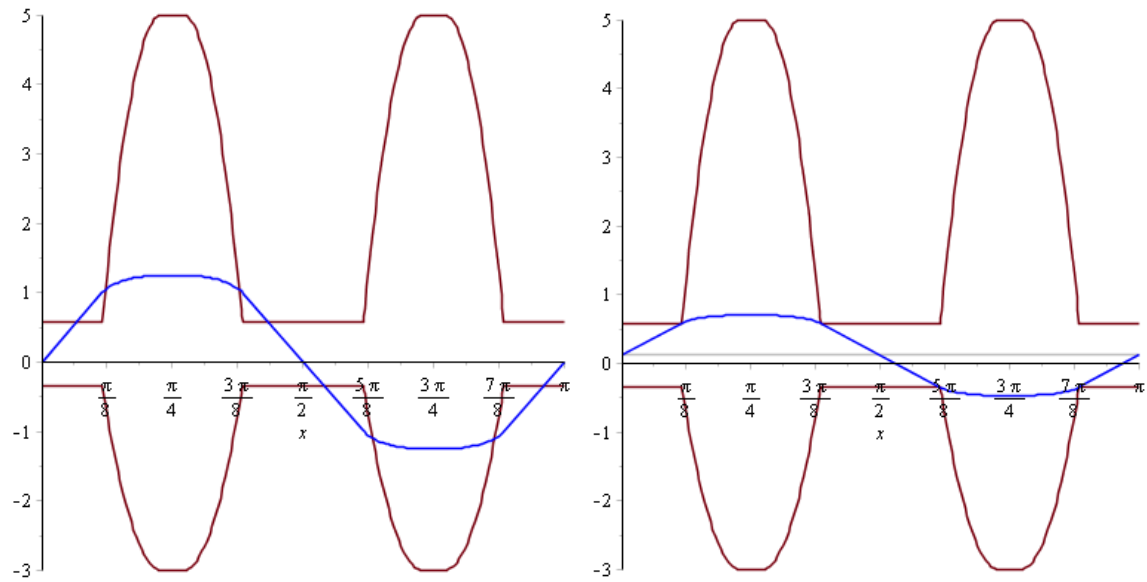
$$f_{max}(t) = r_1 \sin^2(\alpha(t)) = r_1 \cos^2(\arctg(f'(t))), \quad (25)$$

$$f_{min}(t) = -r_2 \sin^2(\alpha(t)) = -r_2 \cos^2(\arctg(f'(t))). \quad (26)$$

A kapott függvények segítségével ezután keressük azt a maximális m modult, és a hozzá tartozó x profileltolást, amelyre teljesül

$$f_{min}(t) \leq mf(t) + x \leq f_{max}(t), \quad t \in [0, \pi]. \quad (27)$$

Mivel f folytonosan deriválható, és periodikus, deriváltja véges. Így $\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, hogy $f_{min}(t) < C_1 < 0 < C_2 < f_{max}(t)$ tetszőleges $t \in [0, \pi]$ -re. A feltétel miatt léteznek az (27) egyenlőtlenséget kielégítő m és x értékek. A szabványos alapprofil esetén az f alapprofil, illetve az f_{min} , és f_{max} függvények a 11. bal ábrán láthatók, míg a jobb oldali ábrán a legnagyobb alkalmazható modullal megszorozott és a hozzá tartozó profileltolással eltolt, $mf(t) + x$ függvényt láthatjuk az f_{min} , és f_{max} függvények között.



11. ábra

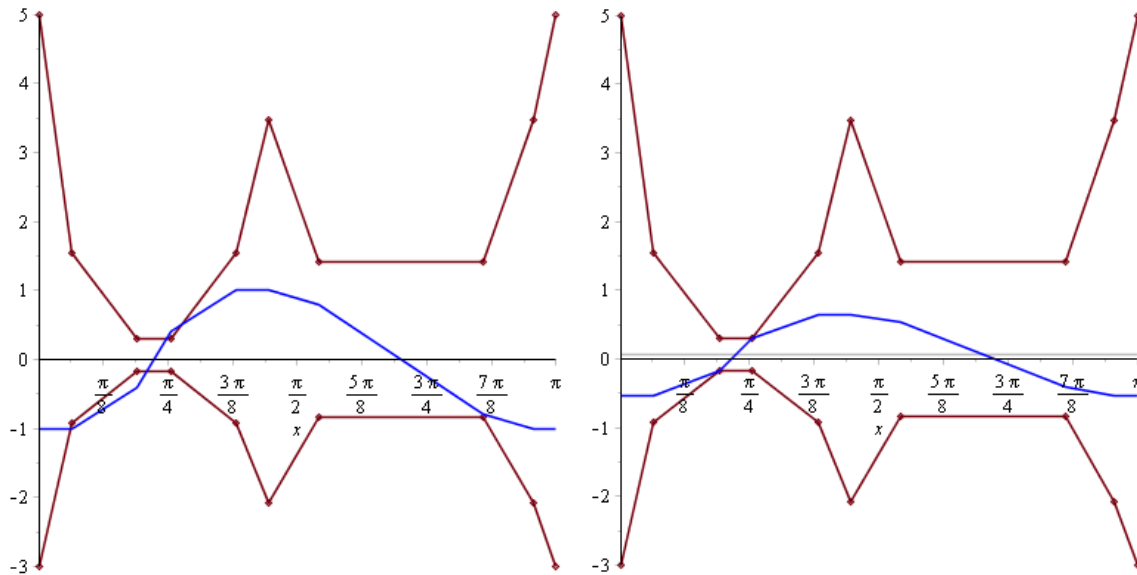
A szabványos evolvens fogazat alapprofilját alkalmazva a modul és a profileltolás meghatározása 5 mm, illetve 3 mm sugarú osztógörbék érintkezési pontjában.

Az eredmények megegyeznek a hagyományos módon számolttal.

Az y tengely lapított az x tengelyhez képest.

A szabványos alapprofil esetén a számítások eredménye megegyezik az elemi úton kiszámolható értékekkel.

A fogaskerek előállításánál egyenes szakaszokból álló alapprofil alkalmaztam. Ebben az esetben elegendő a szakaszok végpontjai alapján számolni. Így adható a maximális modul és a hozzá tartozó profileltolás meghatározására hatékony algoritmus. A 12. ábrán látunk egy példát aszimmetrikus alapprofil esetén az f_{min} -re és f_{max} -ra.



12. ábra

Egy másik, szakaszokkal megadott alapprofil esetén a modul és a profileltolás meghatározása 5 mm, illetve 3 mm sugarú osztógörbék esetén.

Az y tengely lapított az x tengelyhez képest.

3.4. A PONTONKÉNT SZÁMÍTOTT EREDMÉNYEK KORREKCIÓJA

Az előző sorokban alkalmazott módszerekkel meghatározhatjuk tetszőleges pontokban a modult és a profileltolást. Azonban nem kör alakú fogaskerekknél az osztógörbék görbülete változik. Előfordulhat nagyon gyors, esetleg ugrásszerű változás is, amikor hiába felel meg pontonként a modulméret és a profileltolás, mégis alámetszés jön létre. Emiatt a fenti módszerekkel kapott értékeket korrigálni kell.

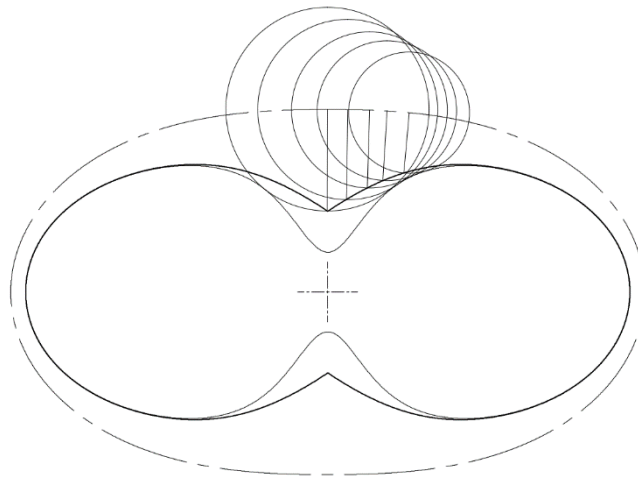
A korrekciót két lépésben hajtottam végre. Először a lábgörbét javítottam, hogy alámetszés véletlenül se jöhessen létre. Ezt követően a profileltolás ugrásszerű változásait korrigáltam.

3.4.1. A FOGFEJMAGASSÁGOK JAVÍTÁSA

A pontonként vett lábgörbe osztógörbétől vett merőleges távolsága megegyezik a kapcsolódó kerék fogfejmagasságával. Ha a pontonként számolt értékekkel dolgoznánk tovább, akkor megjelenhetne az alámetszés, a fogprofil egyes pontjai akár a másik fogaskerék lábgörbéjének legmélyebb pontjával is érintkezhetnek. Amikor ez a fog kigördül a fogárokból, a mozgása során olyan területeket súrolhat, ahol nem megengedett ekkora modul, illetve profileltolás alkalmazása. Hiszen ezeket az értékeket eddig úgy számoltuk, mintha két kör alakú fogaskerék kapcsolódna.

A problémát dolgozatomban egy felső becsléssel fogom orvosolni. Tegyük fel, hogy a fogaskerékkel kapcsolódó másik fogaskerék egy végtelenül kis sugarú kerék. Ebben az esetben a fogak legmagasabb pontjai egy körívet járnak be. Ennek a pályának a fogaskerék lábgörbéjén kívül kell lennie. Így, egy egyszerűen számítható módszert kaptunk a fogfejmagasság korlátozására. A 13. ábrán láthatjuk az algoritmus működését.

A fogméret további növelése érdekében kiszámolhatjuk a fog legmagasabb pontja mozgásának pontos pályáját, és ez alapján kereshetnénk a felső korlátot a fog legmagasabb pontjára. Ezt a módszert a dolgozat nem tárgyalja.

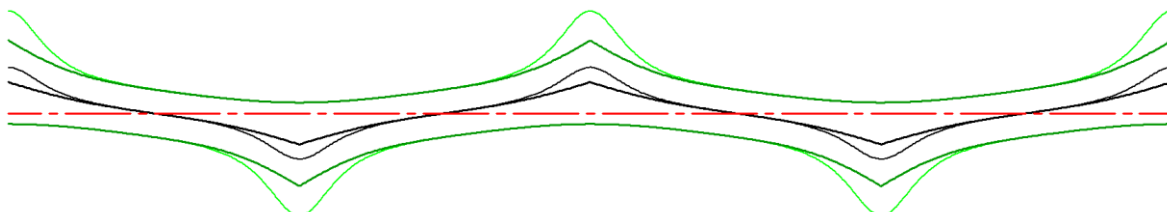


13. ábra

A fogfejmagasságok korrekciója

A pontvonal jelzi az osztógörbét, vastagított vonallal látható a korrigált lábgörbe, vékonyval az eredeti

A fogfejmagasságra adott korlátozás után a modult és a profileltolást is újra kell számolni, mert mind a kettő megváltozhat. Az eredményként kapott fogfejmagasságok és profileltolások a 14. ábrán láthatók a kerület mentén.



14. ábra

A 13. ábrán látható fogfejmagasság-korlát miatt módosuló profileltolások (fekete) és fogfejmagasságok (zöld) a kerület mentén. Pirossal látható az osztógörbe vonala.

Vékonyan látszik az eredeti számításokból adódó, míg vastagon az új értékek.

3.4.2. A PROFILELTOLÁS-FÜGGVÉNY SZAKADÁSI HELYEINEK JAVÍTÁSA

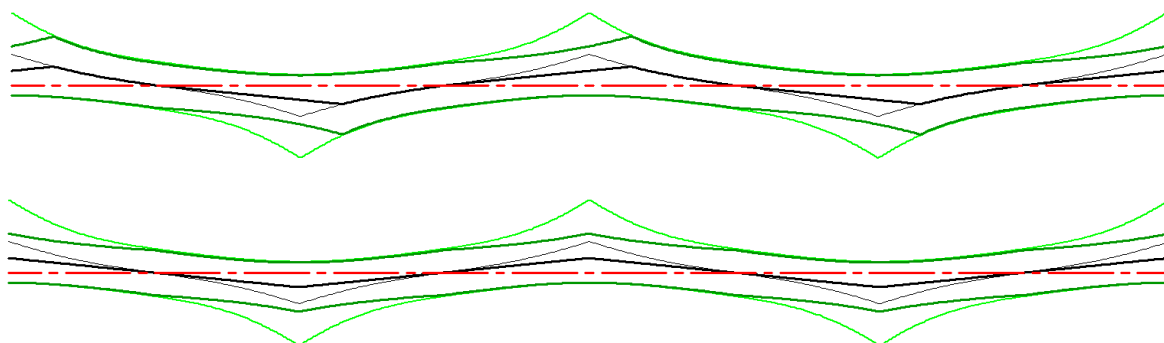
A profileltolás-függvény meredeksége a fogazóléc geometriájának meghatározása során hozzáadódik a fogprofil-t meghatározó szakaszok meredekségéhez. Emiatt a számításaink csak abban az esetben megfelelőek teljesen az alámetszés szempontjából, ha a profileltolás értéke állandó. Ha a profileltolás-függvény meredeksége m egy vizsgált pontban, akkor az ($\ll f_{max} \gg$), illetve az ($\ll f_{min} \gg$) képletek helyett a következővel kell számolnunk:

$$f_{max}(t) = r_1 \sin^2(\alpha(t)) = r_1 \cos^2(\arctg(f'(t) + m)), \quad (28)$$

$$f_{min}(t) = -r_2 \sin^2(\alpha(t)) = -r_2 \cos^2(\arctg(f'(t) + m)). \quad (29)$$

Dolgozatomban egy megadott maximális profileltolást engedélyezve a fenti képletek alapján újra meghatároztam a pontonkénti profileltolást, illetve modult. Ha két kiszámolt szomszédos osztógörbe-pont között a profileltolás nagyobb volt a megengedettnél, akkor ott javítottam a profileltolást. Ilyen módon két menetben elvégezve a javítást, a kívánt

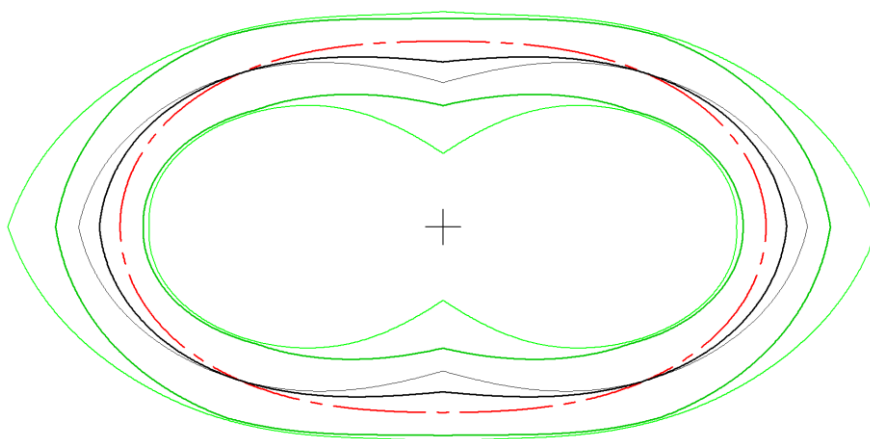
eredményhez jutunk. Először az osztógörbe kiszámolt pontjain az egyik, majd a másik irányban érdemes korrigálni a profileltolást. A 15. felső ábra a javítást félkész állapotban mutatja, amikor a bal oldalról indítva csökkentettem a profileltolások abszolút értékét. A bal oldalon látható profileltolás-csökkenést az okozza, hogy esetünkben zárt osztógörbével dolgozunk, így a jobb oldalt kapott profileltolásnak megfelelően kellett módosítani a bal oldali értékeket. Az alsó ábra a teljesen elkészült javítást mutatja. A 16. ábrán láthatjuk a profileltolás, illetve a fogazószerszám felső, és alsó burkolóinak változását a fogaskereken.



15. ábra

Először balról jobbra haladva (felső), majd jobbról balra haladva (alsó) a profileltolás javítása a kerület mentén

fekete: profileltolás, zöld: fejtörések



16. ábra

A profileltolás javítása a fogaskereken

Végül a generált fogaskerek között nagy jelentősége nem lett a fenti képleteknek, a gyakorlatban nem fordult elő olyan profileltolás-változás, amely miatt 10%-kal kisebb fogméretet kellett volna alkalmazni a (25) és (26) képletekhez képest.

3.5. A FOGAZÓLÉC ELŐÁLLÍTÁSA

A fogazóléc előállítását a TDK dolgozatomhoz [10] hasonlóan végeztem. Legyen a fogaskerek kerülete K , és ismerjük az $m: [0, K] \rightarrow \mathbb{R}^+$ modul-függvényt, ami a kerület mentén megadja a modult. Ekkor a fogak száma a következő képlettel adható meg:

$$n = \frac{1}{\pi} \int_0^K \frac{1}{m(x)} dx. \quad (30)$$

A képletben szereplő π konstans abból adódik, hogy a fogprofil-függvény π széles intervallumban van definiálva.

A (30) képletben kapott eredmény nem biztos, hogy egész szám. Ezért zárt gördülőgörbőjű fogaskerek esetén a fogszámot növelni kell a legközelebbi egész számig. A modul-függvényt minden pontban arányosan csökkentve a következő összefüggést kapjuk:

$$n^* := [n], \quad m^*(x) := \frac{n}{n^*} m(x), \quad n^* = \frac{1}{\pi} \int_0^K \frac{1}{m^*(x)} dx. \quad (31)$$

Tetszőleges $[0, X]$, $0 \leq X \leq K$ intervallumon a fogak száma a következő képlettel határozható meg:

$$n_x = \frac{1}{\pi} \int_0^X \frac{1}{m^*(x)} dx. \quad (32)$$

Ezeknek az összefüggéseknek a segítségével definiálhatjuk a fogazóléc-függvényt:

$$l(X) := m^*(x)f(\pi n_X) = m^*(x)f\left(\int_0^x \frac{1}{m^*(x)} dx\right), \quad X \in [0, K]. \quad (33)$$

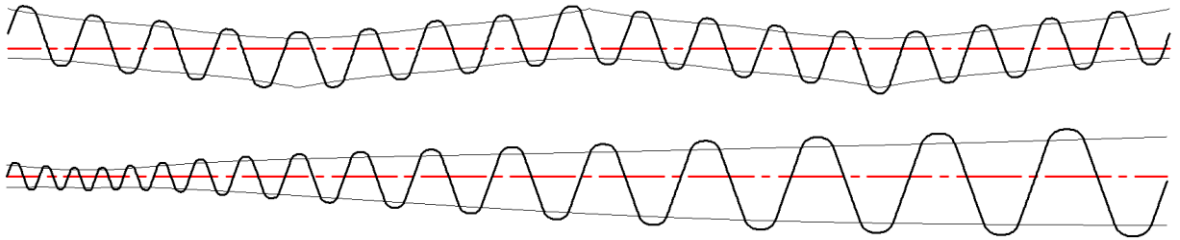
A gyakorlatban az m modul-függvény csak az $0 = x_0, \dots, x_n = K$ pontokban ismert ($x_i > x_{i-1}, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$). A modul-függvény folytonossá tételéhez az ezekben a pontokban ismert függvény-értékek között szakaszonkénti lineáris interpolációt kell alkalmazni. Így tetszőleges $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) intervallumban a modul-függvény a következő alakot ölti:

$$m_{|[x_{i-1}, x_i]}(x) = a_i x + b_i, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (34)$$

Az így definiált modul-függvény már analitikusan integrálható:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{m(x)} dx = \begin{cases} \frac{1}{a_i} (\ln(a_i x_i + b_i) - \ln(a_i x_{i-1} + b_i)), & a_i \neq 0 \\ \frac{1}{b_i} (x_i - x_{i-1}), & a_i = 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (35)$$

A kapott eredmények alapján a fogazóléc-függvényt ki tudjuk számolni. Szakdolgozatom keretein belül a függvényt az $x_0, \dots, x_n$ pontokban értékeltem ki. A 17. ábrán láthatunk két példát lehetséges fogazóléc-függvényekre. A felső fogazóléc a 9. ábrán látható osztógörbékhez készült. Az alsó fogazólécet a 2. ábrán látható osztógörbék alapján számítottam.



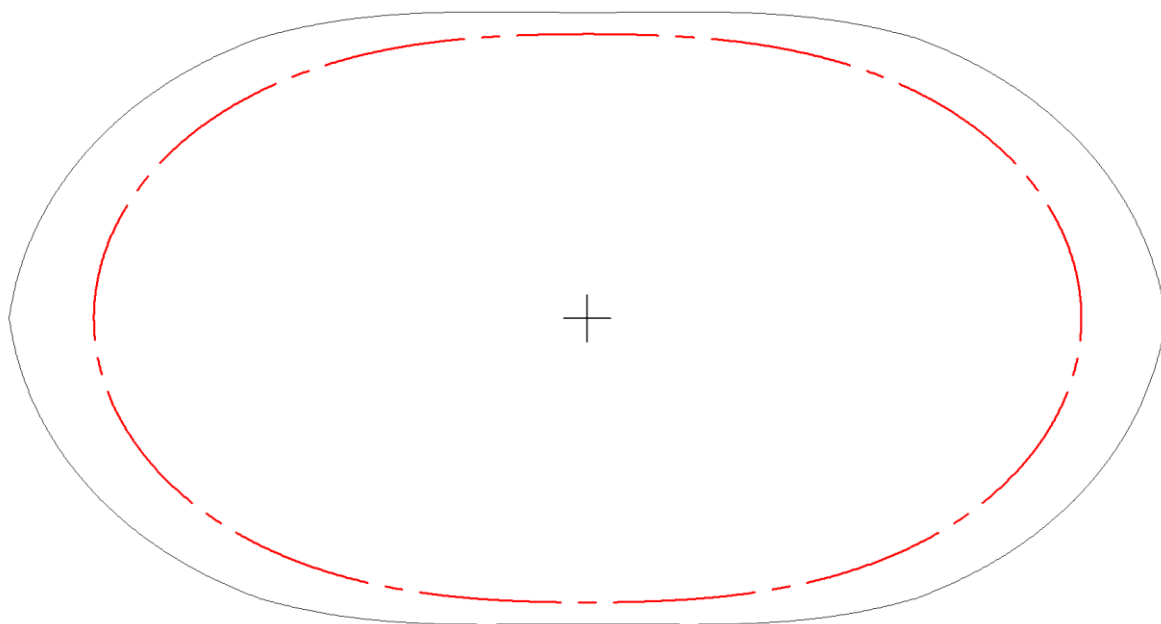
17. ábra

Generált fogazólécek, illetve a fej-görbék a fogazóléchez képest,
szabványos alapprofil esetén

3.6. A FEJGÖRBÉK ELŐÁLLÍTÁSA

Az általam alkalmazott fogazat számító módszer esetén a fogazószerszám osztógörbéken való legördítésével kapott fogazatok között nincs lábhézag. Ezért ki kell számolnunk a fejpgörbéket. A végső fogaskerék-geometriát megkapjuk a már legenerált fogazatok, és a fejpgörbék, mint síkidomok közötti logikai közös rész művelet segítségével. Emiatt elő kell állítanunk a fejpgörbéket.

A fejpgörbék pontjait a fogazóléchez képest hasonlóan kiszámíthatjuk, mint a fogazóléc geometriáját. Így az osztógörbét definiáló pontokhoz tartozó fogfejmagasságok ismertek. Az osztógörbére adott pontokban merőlegest állítva, és azon felmérve az osztógörbétől a fogfejmagasságot, megkapjuk a fejpgörbét (lásd 18. ábra).



18. ábra

A fejpgörbe az egyik fogaskereken (17. ábra, felső)

4. A FOGAZÁS

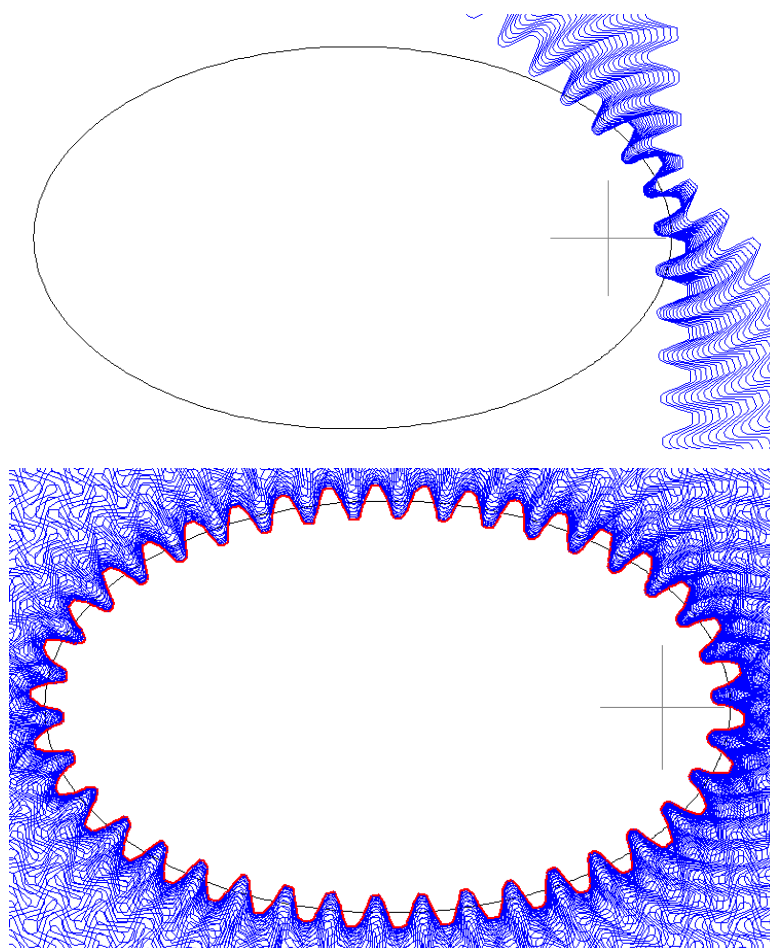
A fogaskereket profilozó, vagy lefejtő eljárással [11] gyártják. Nem kör alakú fogaskereket hagyományos célgépekkel nem tudunk előállítani, bár ellipszis, illetve ellipsziszből származtatott fogaskerekek gyártására készültek célgépek [4]. Ezért a fogaskerék geometriáját meg kell határozni a számítógépen, majd például lézervágással vagy huzalszikra-forgácsolással lehet gyártani a kerekeket. A fejezetben a fogaskerék geometriáját előállító algoritmust mutatom be.

4.1. JELENLEGI MÓDSZEREK A FOGAZAT GENERÁLÁSÁRA

A fogaskerék geometriájának meghatározásához valamelyik lefejtő eljárást kell szimulálni. [2]-ben és [4]-ben két különböző módszert találhatunk, amelyekkel a fogaskerekek geometriáját elő lehet állítani.

4.1.1. A MAAG-FÉLE FOGGYALULÁS ELVÉN MŰKÖDŐ MÓDSZER

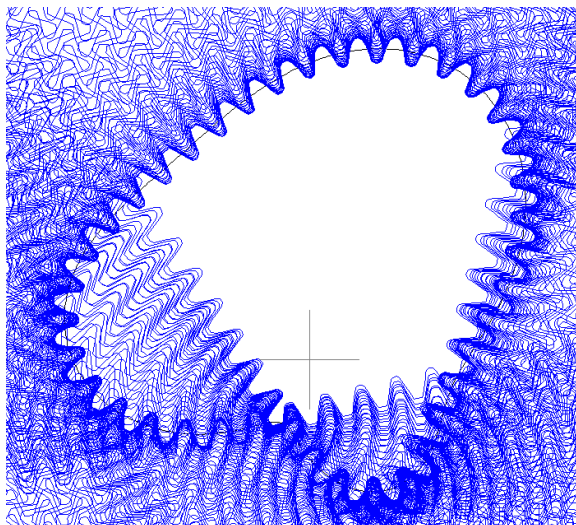
A legegyszerűbben úgy állíthatjuk elő a nem köralakú fogaskerekeket, hogy ugyanazt a fogazóléceket legördítjük mind a két osztógörbén, így a Maag-féle lefejtő módszert [11] szimulálva. A legördítés végén a fogazólécek belső burkolóját véve kapjuk meg a fogaskerék-geometriát (lásd 19. ábra). A módszer egyszerű, és lényegében nincs megkötés a fogazóléc geometriájára. Ha a fogazóléc sok szakaszból áll, egy hatékony algoritmusra van szükség ahhoz, hogy a belső burkoló kiszámítása kivárható időn belül megtörténjen. A futásidő csökkentésére [2]-ben és [10]-ben találhatunk módszereket.



19. ábra

A Maag-féle lefejtő eljárás szimulációjának egy közbenső lépése,
illetve a legenerált fogaskerék

A módszer azonban nem alkalmazható abban az esetben, ha az osztógörbe homorú szakaszt is tartalmaz (lásd 20. ábra).

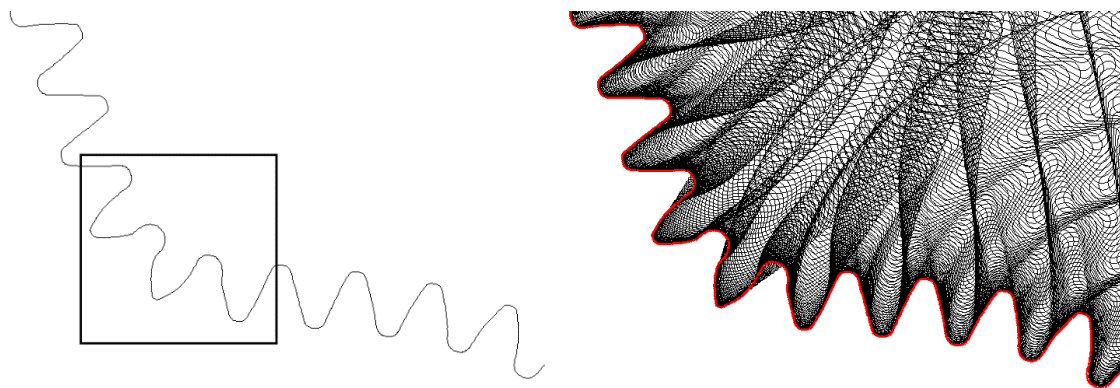


20. ábra

Fogazóléc legördítése homorú szakaszt tartalmazó fogaskereken

A problémára Laczik Bálint tanár úr adott egy lehetséges megoldást [4]. Az ötlet az volt, hogy a fogaskerék homorú szakaszán ugyanúgy gördítsük le a fogazólécet az osztógörbén. A homorú szakaszon a fogazólécnek a külső burkolója eredményezi a keresett fogaskerék-geometriát.

Ebben az esetben azonban garantálni kell, hogy a fogfejmagasság ne haladhassa meg az alámetszés küszöbét. Ha ez nem teljesül, a fogfejen jön létre „alámetszés”, ami a fogfejnél többlet anyagot eredményezne a kapott fogaskeréken, és megakadályozza, hogy a fogárokba a tervezett méretű fog beférjen (lásd 21. bal ábra).



21. ábra

„Alámetszés a levegőben”, illetve a fogak összeakadása ellenőrzéskor

Ha ezt nem garantáljuk, akkor a fogaskerék generálása végén ellenőrizni kell a két fogaskerék kapcsolódását, azaz, egymáson legördítve a két fogaskereket ellenőrizni kell, hogy a fogak egymásba mennek-e, és szükség szerint módosítani kell a fogazólécen, hogy ne jöhessen létre a 21. ábrán látható jelenség.

TDK dolgozatom [11] keretein belül is ezt a megoldást valósítottam meg.

4.1.2. A FELLOWS-FÉLE METSZŐKERÉKKEL TÖRTÉNŐ LEFEJTÉS

Ha ennyi probléma van a fogazóléc legördítése miatt homorú szakaszokon, akkor alkalmazhatnánk a Fellows-féle metszőkerék [11] elvét, amit éppen arra találtak ki, hogy belsőfogazatú kerekeket gyártsanak vele. Ezt az ötletet alkalmazták [2]-ben. Ekkor nem egy egyenes fogazólécet, hanem egy fogazókereket gördítenek le az osztógörbén, és az így kapott görbesereg belső burkolóját vesszük. Megfelelő átmérő esetén az egész fogaskerék geometriája egy menetben legyártható. Mivel a virtuális gyártás folyamán nincsenek erőhatások, a fogásmélységet sem kell folyamatosan növelni a fogak előállításához, így a [9], 103. ábrán látható hibajelenség sem fordulhat elő. A fogtövek erősödnek, mivel az alámetszés határfogszáma csökken a fogazóléccel való gyártáshoz képest [11].

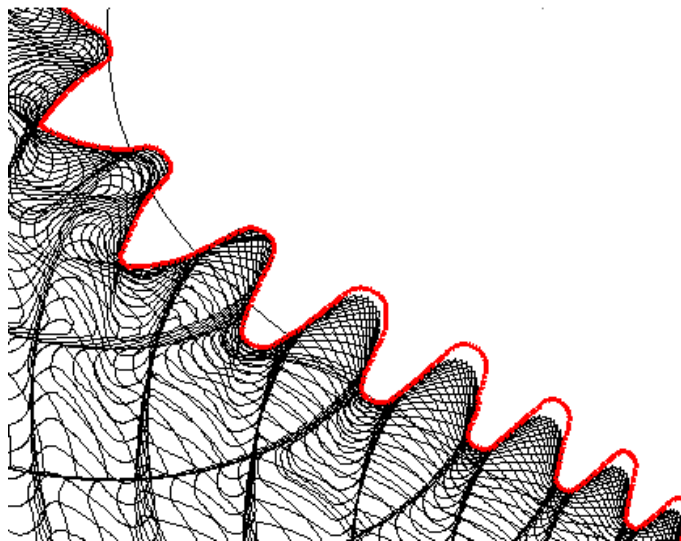
A módszernek azonban vannak hibái. A fogazókerék geometriáját valahogy elő kell állítani. Ezt megtehetjük Maag-féle foggyalulással. A tetszőleges profileltolás és modul miatt a fogazókereket minden esetben újra le kell generálni, ami időigényes. A fogazókeréknek általában kisebb kerületűnek kell lennie a fogazandó kerék osztógörbájének kerületétől, mert az osztógörbe homorú szakaszának sugara miatt túl nagy átmérőjű fogazókerék nem alkalmazható. Például a 3. ábrán látható 1. számú kerék viszonylag nagy átmérőjű fogazókerékkel fogazható, míg a 2. számú jóval kisebbel. Ebben az esetben nem is generálható le egyben a teljes fogazókerék. Ez tovább bonyolítja a fogazás folyamatát.

4.2. A FOGAZÁS FOLYAMATA

Dolgozatomban egy olyan algoritmust terveztem a fogaskerekek előállítására, amely segítségével könnyebbé válik a fogaskerék mind geometriai, mind szilárdságtani ellenőrzése.

Az egyik fogaskereket egy, mindkét irányban meghosszabbított fogazóléc legördítésével állítjuk elő. A másik fogaskerék geometriáját az első fogaskerék legördítésével határozhatjuk meg. A fogazás végén a 3.6. pont alapján legenerált fejtörésszel el kell metszeni a fogaskerekeket.

Mivel az egyik fogaskereket a másik fogaskerék segítségével állítottuk elő, nincs szükség arra, hogy a fogak ütközését vizsgáljuk. Ha mindkét fogaskereket külön-külön állítanánk elő valamilyen lefejtő eljárással, egy másik probléma is előfordulhat. Elképzelhető, hogy az egyik fogaskereken fogkihegyesedés jön létre. Ekkor a másik fogaskereken túl mély fogárkot alkalmazunk, ami fölöslegesen gyengíti a fogtövet. Az algoritmusom esetén ez a probléma sem jöhet elő (lásd, 22. ábra).



22. ábra

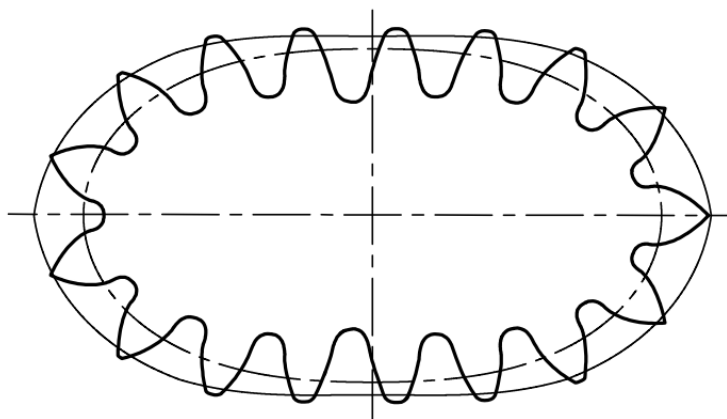
A fogaskerék ellenőrzése során észrevehető fölöslegesen mély fogárkok

Az ok, hogy ugyanazzal a szerszámmal állítottuk elő mindkét kapcsolódó fogaskereket,
azonban az egyik keréken fogkihegyesedés jött létre

Így a geometriai ellenőrzés során elegendő az alámetszést, illetve a fogkihegyesedést vizsgálni. Ha ezt a leírt módszert alkalmazzuk, a fogaskerekek generálása során eltávolíthatjuk a fogaskerekeket meghatározó szakaszokról, hogy a legördülés melyik pillanatában jöttek

létre, és a másik fogaskerék melyik szakaszával érintkeztek ebben a pillanatban. Ezek az adatok a fogaskerék méretezéséhez lesznek nagyon hasznosak.

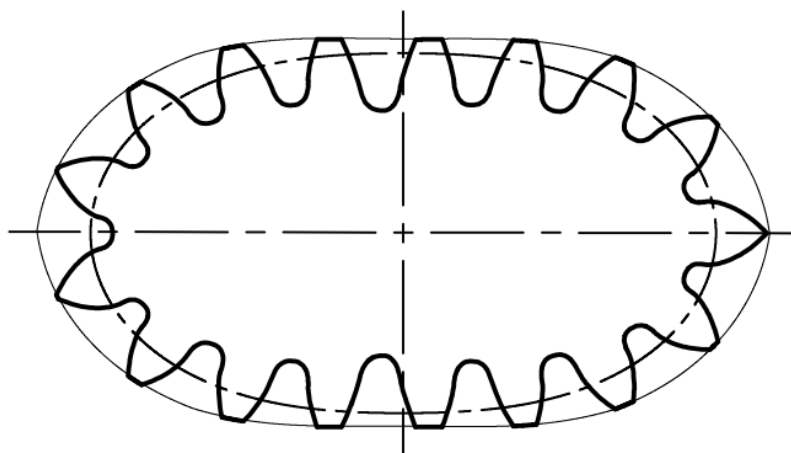
A tervezett algoritmusból dolgozatom keretein belül csak a fogaskerek fogazóléccel való előállítását valósítottam meg. Az eredményül kapott fogaskerék látható a 23. ábrán.



23. ábra

A fejtöréssel még meg nem vágott fogaskerék

A 23. ábrán látható, hogy a fogaskerék fejtörése nem minden esetben éri el a fogakat, így a profileltolást és a fogméretet azokban a pontokban csökkenteni kell a fogkihegyesedés elkerülése érdekében. Végül a fogfej segítségével kialakítható a végleges geometria (lásd, 24. ábra).



24. ábra

A fejtöréssel megvágott fogaskerék

5. SZILÁRDSÁGI VIZSGÁLATOK

A fogaskerek tervezésének végén meg kell vizsgálnunk, hogy működőképes-e a két fogaskerék, és képesek-e átvinni a terhelést. Ezeknek a vizsgálatoknak az alapjául a fogaskerek legyártott geometriáját, illetve a fogaskereket meghatározó szakaszokhoz eltárolt gyártási szimulált adatok szolgálnak.

5.1. KAPCSOLÓSZÁM ELLENŐRZÉS

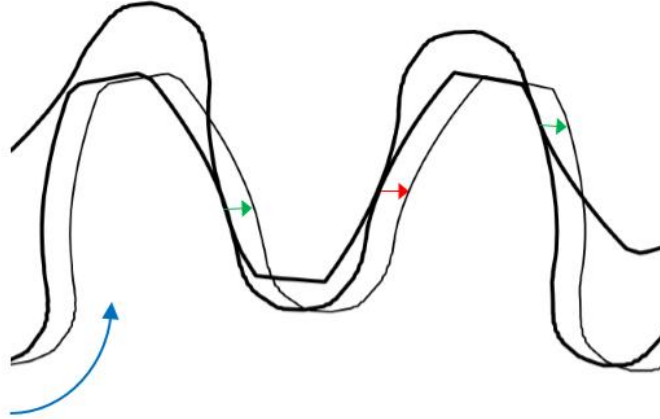
Nem kör alakú fogaskerek esetén, változó modul és profileltolás mellett rendkívül komoly feladat lenne analitikus megoldást adni a pontonkénti kapcsolószám meghatározására. Ehelyett egy egyszerűbb módszerrel ellenőriztem a fogaskereket.

Ha az egyik fogaskereket a másik fogaskerék segítségével állítjuk elő lefejtéssel, akkor minden egyes vágás után tárolhatjuk, hogy a készülő fogaskerék geometriájának adott szakaszát az ellenkerék mely szakasza alakította ki, és mikor. Ezeknek az adatoknak a visszakeresésével megkaphatók az érintkezési pontok, esetünkben az érintkező szakaszok. Előfordulhat, hogy egymáshoz közel több érintkezési pont is kialakul. Így, rögzített kis d távolságnál közelebbi érintkezési pontokat egynek tekinthetjük kapcsolószám szempontjából.

Az ilyen módon meghatározott érintkezési pontok nem feltétlenül segítenek a hajtásban. A foghézag [11] nélkül előállított fogazatok esetén a fogak terheletlen oldalai is érintkeznek egymással. Elképzelhető, hogy a fogfej teljesen bemegy a fogárokba. Alámetszéseket pedig szintén nem számíthatjuk be az erőátviteli pontok közé.

A probléma megoldásához a fogaskerek relatív mozgását használtam fel. A probléma jobb megértéséhez tekintsük a 25. ábrát. Válasszuk ki a hajtó fogaskereket. A fogaskereket meghatározó pontokat a hajtott kerék koordináta-rendszerében a t időpillanatban jelöljük $P_i(t)$ -vel ($i \in [0, n]$). Tegyük fel, hogy a pontok indexei a 25. ábrán, kék nyíllal jelzett irányban nőnek. Tegyük fel, hogy a mozgás során a t_j -edik időpontban a P_k és P_{k+1} pontok által meghatározott szakasz érintkezik a másik fogaskerékkel. Ekkor tekinthetjük például a

k . pont mozgását. Az ábrán kis nyilakkal jelöltem a $v_k(t_j) = \overline{P_k(t_j)P_k(t_{j+1})}$ vektort. Ekkor a $\overline{P_k(t_j)P_{k+1}(t_j)} \times v_k(t_j)$ keresztszorzat harmadik koordinátája előjele alapján eldönthető, hogy az érintkező szakasz hajtja-e a másik fogaskereket. A 25. ábrán látható esetben ha ez az előjel pozitív, akkor a szakasz valóban kapcsolópont (lásd, zöld nyilak), míg, ha az előjel negatív, akkor az érintkezési pont nem kapcsolópont.



25. ábra

Az érintkezési pontok mozgásai

kék: a fogaskereket meghatározó pontok indexeinek növekvő iránya

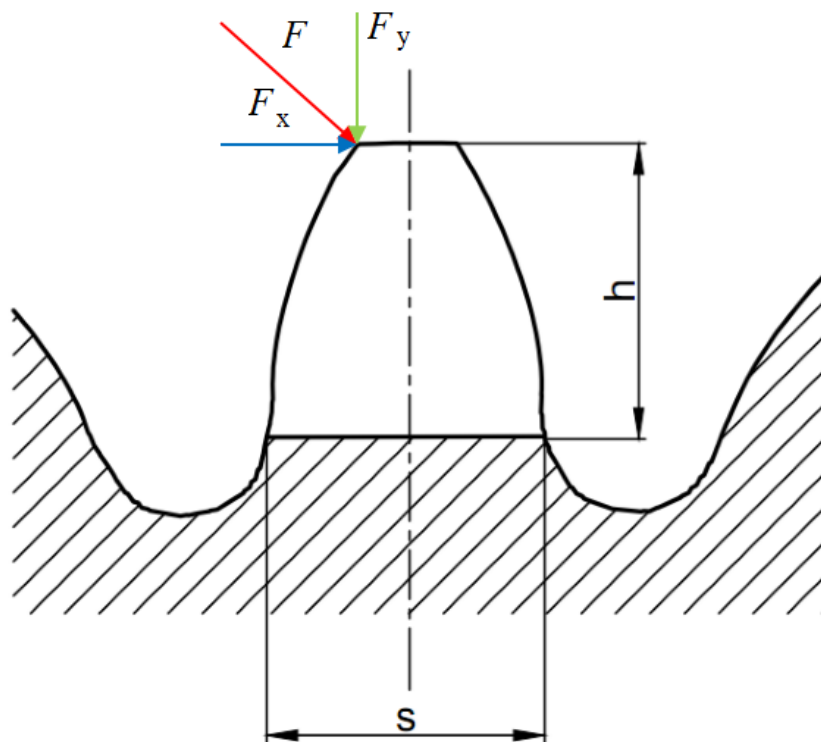
zöld: terhelt pont, piros: terheletlen érintkezési pont

A kapcsolószám tetszőleges időpillanatban meghatározható az így meghatározott érintkezési pontok összeszámolásával.

A további szilárdsági számítások esetén szükségünk van a kapcsolópontok helyzetére. A továbbiakban legyenek az erőátvitelt biztosító szakaszok $\overline{P_{k_l}P_{k_l+1}}$, $(l \in [0, m])$!

5.2. FOGTŐSZILÁRDSÁG

A fogaskerek egyik leggyakoribb tönkremeneteli módja a fogkitörés [11]. Ennek elkerülése érdekében a fogakat ellenőrizni kell fogtőszilárdság szempontjából. Egy fog esetén a fogtőben ébredő feszültségeket a [11]-ben leírt módon számíthatjuk. Legyen adott az F terhelő erő és a terhelés iránya. A terhelést felbonthatjuk az F_x és F_y fog középvonalára merőleges és azzal párhuzamos komponensekre (lásd, 26. ábra).



26. ábra

A fogtőszilárdság meghatározása során használt modell

Ekkor a normál irányú igénybevétel b vastagságot feltételezve:

$$\sigma_N = \frac{F_y}{bs}. \quad (36)$$

A hajlításból származó igénybevétel maximuma:

$$\sigma_H = \frac{M}{K} Y_{F_x} = \frac{6hF_x}{bs^2} Y_{F_x}, \quad M = hF_x, \quad K = \frac{bs^2}{6}. \quad (37)$$

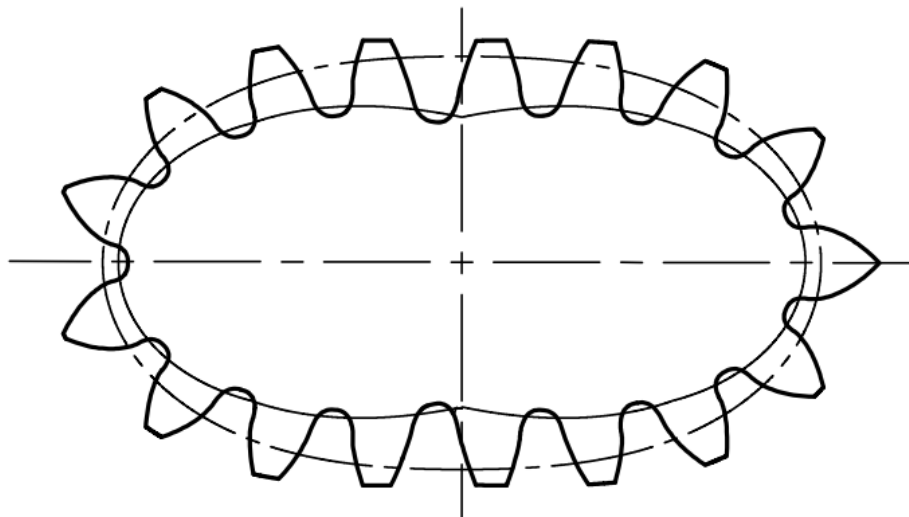
A képletben szereplő Y_{F_x} mennyiség a fog geometriájától függő biztonsági tényező [11]. A veszélyes keresztmetszetben fellépő maximális feszültség:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_H. \quad (38)$$

Nem köralakú fogaskerek esetén a kör alakú fogaskerekkel megegyező módon számíthatjuk a fogtőszilárdságot. Ahhoz, hogy megkapjuk, hogy a fogaskerek a mozgásuk minden időpillanatában megfelelnek-e fogtőszilárdság szempontjából, meg kell határoznunk a terhelés irányát, nagyságát, és a fogtővek elhelyezkedését. Ha a feszültség mindkét fogaskerék esetén kisebb a megengedettnél tetszőleges érintkezési pontban, akkor a fogaskerék megfelel a terhelésnek.

5.2.1. A FOGTŐVEK MEGHATÁROZÁSA

A fogtőszilárdság számításához meg kell határozni minden egyes fogra a fogtő helyzetét, azaz azt a vonalat, amelyen adott irányú terhelés esetén a lehető legnagyobb hajlító feszültség ébred. Ehhez egy új görbét kell definiálni. Az ellenkerék kerület mentén vett fejmagasságait az osztógörbe érintőjére merőlegesen a fog belseje felé kell felmérni. Az így kapott görbe és a fogak metszéspontjai közelítőleg megadják a fogtő két végpontját (lásd, 27. ábra).



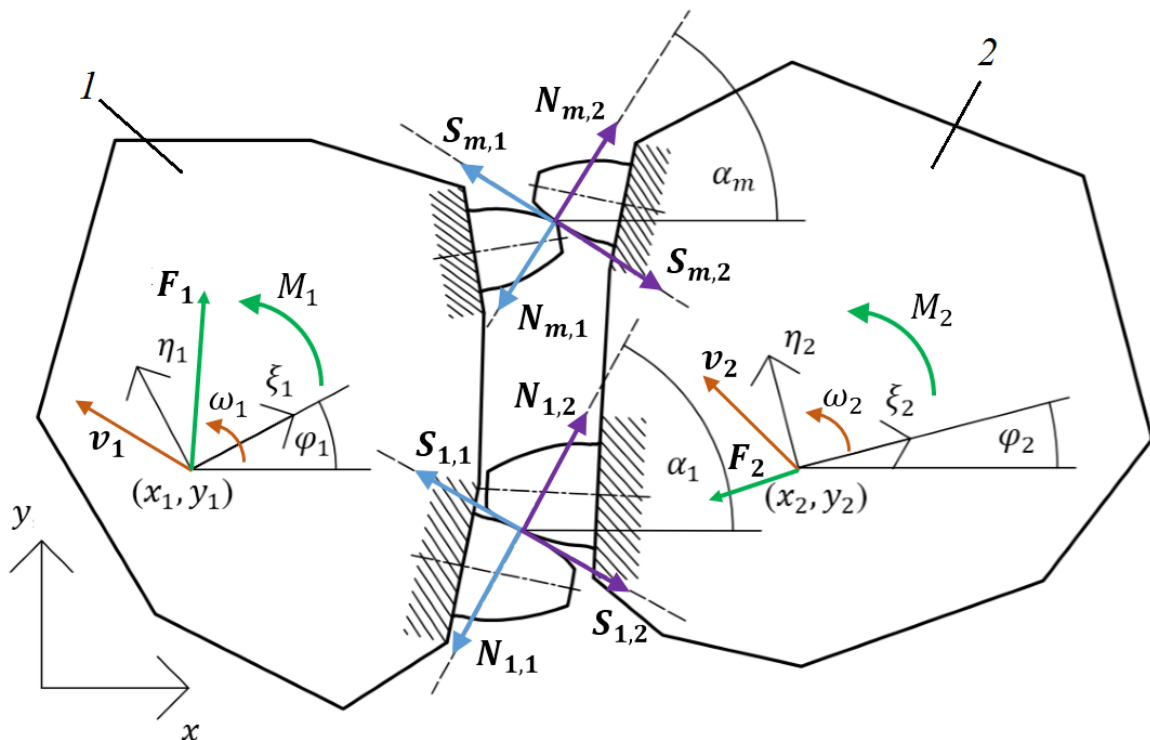
27. ábra

A fogtövek meghatározási módja

A metszéspont nem minden esetben létezik. Ha a lábhézag kicsi, akkor esetleg a numerikus számítások hibája miatt nem éri el az ellenkerék fejgörbéjével érintkező görbe a foglábát. A másik lehetőség, hogy az ellenkeréken olyan nagy mértékű a fogkihegyesedés, hogy a fog nem éri el a fejgörbét. Az ilyen ellenkerék segítségével létrehozott fogazat esetén nyilván nem lesznek megfelelő metszéspontok. Ennek az esetnek a vizsgálatára nem térek ki a dolgozatomban.

5.2.2. A FOGAKAT TERHELŐ ERŐK STATIKAI EGYENSÚLYA

A fogaskerekek kapcsolódásának egy modelljét láthatjuk a 28. ábrán adott t időpillanatban. Legyenek a fogaskerekek sebességei $\mathbf{v}_1$ illetve $\mathbf{v}_2$, szögsebességeik ω_1, ω_2 . Legyenek a fogaskerekek tengelyeire ható erők $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$, míg a rájuk ható nyomatékok M_1, M_2 . A kapcsolódó fogak felületének érintőjével merőlegesen hat a fogakra az $\mathbf{N}_{i,1}$, illetve $\mathbf{N}_{i,2}$ erő, míg a fogak felületének érintőjével egy egyenesen az $\mathbf{S}_{i,1}$ és $\mathbf{S}_{i,2}$ súrlódási erők ($i = 1, \dots, m$). A fogaskerekek gyorsulásait és szöggyorsulásait a számításokban bevettem az erőkbe és nyomatékokba. Hasonlóan, nem foglalkoztam az egyenletekben a forgásból adódó gyorsulások hatásával sem. Az érintkezési pontokat jelölje P_i ($i = 1, \dots, m$).



28. ábra

A fogaskerekre ható erők

Elsőként tegyük fel, hogy a két test nyugalomban van, és írjuk fel az 1. számú fogaskerék statikai egyensúlyát:

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0: \quad F_{1x} + \sum_{i=1}^m (N_{i,1x} + S_{i,1x}) &= 0. \\
 \sum F_y = 0: \quad F_{1y} + \sum_{i=1}^m (N_{i,1y} + S_{i,1y}) &= 0. \\
 \sum M_o = 0: \quad M_1 + \sum_{i=1}^m (k_{n,i} N_{i,1} + k_{s,i} S_{i,1}) &= 0.
 \end{aligned} \tag{39}$$

A képletben szereplő $k_{n,i}$ és $k_{s,i}$ tényezők az egyes erők hatásvonalának, és a $\xi_1 - \eta_1$ koordinátarendszer origójának előjeles távolsága, azaz az erőkar előjeles hossza.

Általában nem áll rendelkezésünkre mind az F_x, F_y, M érték. Gondoljunk például a fogaskerék-fogaskerék kapcsolatra, amikor az átvitt nyomatékok az ismertek, vagy a fogaskerék-fogasléc kapcsolatra, ahol a fogaskerékre ható nyomaték, illetve a fogaslécre ható mozgás irányú erő ismert. Így e három skalármennyiség közül kettő ismeretlen kényszererőként, egy pedig aktív külső erőként jelenik meg. Emellett az $N_{i,1}$ illetve $S_{i,1}$ erők is ismeretlenek. Az erők iránya ismert, így csak a nagyságukat keressük.

Általában a fogak között nem tökéletes gördülés játszódik le, a súrlódási erők és a felületeket összeszorító erők között a következő összefüggés áll fenn:

$$S_{i,1} = \mu N_{i,1}, \quad (i = 1, \dots, m), \quad (40)$$

ahol μ az érintkező felületek közötti mozgási súrlódási tényező. Az $S_{i,1}$ erővektor irányítását az határozza meg, hogy a fogaskeréken lévő kapcsolópont az osztógörbén belül, vagy azon kívül helyezkedik el.

Ha az érintkezési pont a fogaskerek osztagörbéin van, tökéletes gördülés jön létre egy pillanatra, így a fent leírt összefüggéseket nem alkalmazhatjuk. Ebben a pillanatban megszűnik a súrlódó erő, azt nullának véve szintén kapunk egy újabb összefüggést. Habár numerikus számítás során valószínűtlen, hogy ilyen pontot vizsgáljunk.

Összesen tehát $2m + 2$ skalár ismeretlenünk van, és $3 + m$ egyenletünk. Innen $m = 1$ esetén egyértelmű megoldás adódik, nagyobb m értékekre azonban további számítások szükségesek, hiszen a rendszer statikailag határozatlan lesz. Az ismeretlenek meghatározásához írunk fel szilárdságtani összefüggéseket!

5.2.3. A SZILÁRDSÁGTANI ÖSSZEFÜGGÉSEK

A statikai egyenletek nem elegendők az érintkezési pontokban fellépő erők meghatározásához. Ezért, szilárdságtani összefüggésekhez kell fordulnunk. Az alkalmazott modellben feltételezzük, hogy egyedül a fogak alakváltozhatnak rugalmasan.

A továbbiakban tegyük fel, hogy a 2. fogaskerék a hajtó, és az 1. fogaskerék a hajtott. Ideális esetben a fogakhoz rögzített koordinátarendszerek az előírt mozgást végzik. Valójában a hajtott kerék a fogak rugalmassága miatt lemarad az ideális mozgásától. Hogy

ez a lemaradás pontosan milyen irányban történik, írjuk fel a hajtó kerék $\xi_2 - \eta_2$ koordinátarendszerében a hajtott kerék mozgását! Ezzel a modellt megszabadítjuk a közös elmozdulásoktól.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2) & -\sin(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{2,1} \\ \eta_{2,1} \end{bmatrix}. \quad (41)$$

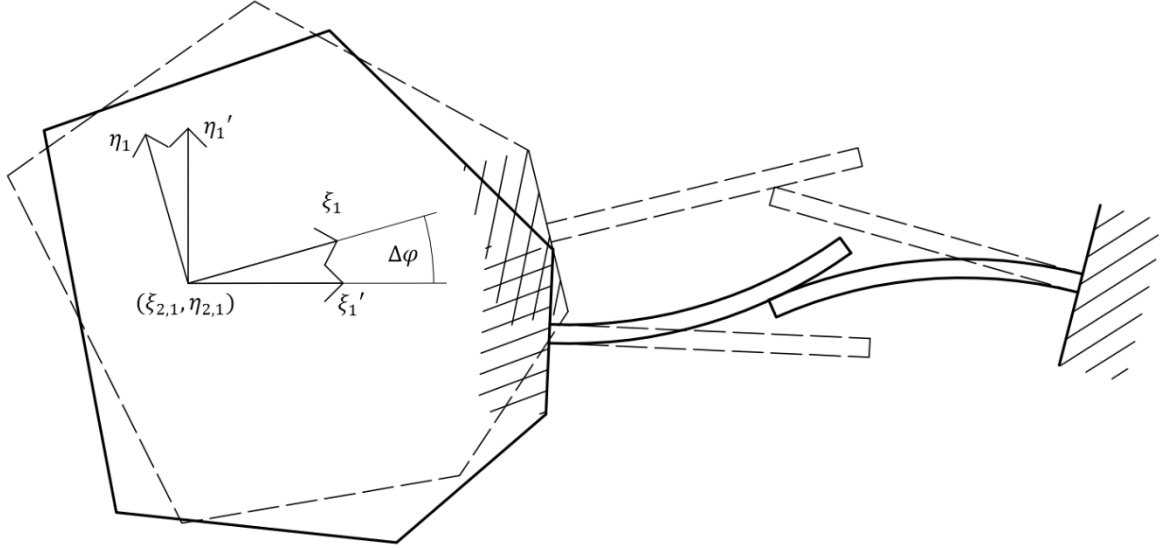
ahol a képletben szereplő $\xi_{2,1}$ és $\eta_{2,1}$ értékek a hajtott kerék $\xi_2 - \eta_2$ koordinátarendszerben felírt koordinátái. (41)-ből a hajtott kerék mozgása kifejezhető:

$$\begin{bmatrix} \xi_{2,1} \\ \eta_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2) & \sin(\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

A hajtott fogaskerék a lemaradás során nem hagyhatja el a pályáját. Például rögzített tengelytávú fogaskerék-fogaskerék kapcsolatban az egyik fogaskeréknek a másik fogaskerékből nézve körpályán kell mozognia. Ha a lemaradás miatt letérne erről a pályáról, az azt jelenti, hogy változott a tengelytávja, ami ellentmondás azzal a kikötéssel, hogy a fogaskerekhez rögzített koordinátarendszerek pályáját ideális kényszerekkel definiáltuk.

Azonban a fogak elhajlása miatt az osztógörbék elcsúszhatnak egymáson (lásd, 29. ábra), ami a $\Delta\varphi$ ideálistól eltérő szöglemaradás miatt jön létre. Ez a szögelfordulás arányos a relatív szögsebességgel, azaz, $\Delta\varphi = a(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)$, ahol a egy felvett ismeretlen arányossági tényező. A továbbiakban szükségünk lesz a $\varphi := \varphi_1 - \varphi_2$ különbségre.

A 29. ábrán a fogakat egyenes rúdként modelleztem. Ideális esetben a szaggatott vonallal jelzett helyzetben lenne a test, azonban a fogak elhajlása miatt a vastag vonallal jelölt helyzetbe került. $(\xi_{2,1}, \eta_{2,1}) \rightarrow (\xi_1', \eta_1')$



29. ábra

A fogak egyenes rúdként modellezve a 2. számú, hajtott kerék koordinátarendszerében

Az 1. fogaskerék P_i ($i = 1, \dots, m$) érintkezési pontjainak helyzete a $\xi_1 - \eta_1$ koordinátarendszerben legyen $(p_{i,\xi_1}, p_{i,\eta_1})$. A számítások során az i indexet elhagytam a koordinátákból, a jobb átláthatóság kedvéért. Határozzuk meg a $\xi_2 - \eta_2$ koordinátarendszerben a pontok helyzetét az ideális esetben, illetve a csúszás esetén!

$$\begin{bmatrix} p_{\xi_2} \\ p_{\eta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{2,1} \\ \eta_{2,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{\xi_1} \\ p_{\eta_1} \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\begin{bmatrix} p_{\xi_2} \\ p_{\eta_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta p_{\xi_2} \\ \Delta p_{\eta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{2,1} \\ \eta_{2,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\varphi + \Delta\varphi) & -\sin(\varphi + \Delta\varphi) \\ \sin(\varphi + \Delta\varphi) & \cos(\varphi + \Delta\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{\xi_1} \\ p_{\eta_1} \end{bmatrix} \quad (45)$$

A két egyenlet különbségéhez bontsuk fel a mátrixban szereplő kifejezéseket!

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \Delta\varphi) &= \cos(\varphi) \cos(\Delta\varphi) - \sin(\varphi) \sin(\Delta\varphi) \\ \sin(\varphi + \Delta\varphi) &= \sin(\varphi) \cos(\Delta\varphi) + \cos(\varphi) \sin(\Delta\varphi) \end{aligned} \quad (46)$$

A (46)-ban szereplő kifejezéseket linearizálva a mátrix a következőképpen írható fel:

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi) - \sin(\varphi)\Delta\varphi & -\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\Delta\varphi \\ \sin(\varphi) + \cos(\varphi)\Delta\varphi & \cos(\varphi) - \sin(\varphi)\Delta\varphi \end{bmatrix} \quad (47)$$

Az érintkezési pont távolsága ideális és terhelt esetben a (44)-ben és (45)-ben kapott két egyenlet különbsége. Ez a következőképpen néz ki, figyelembevéve, hogy $\Delta\varphi = a(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = a\dot{\varphi}$:

$$\begin{bmatrix} \Delta p_{\xi_2} \\ \Delta p_{\eta_2} \end{bmatrix} = a\dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{\xi_1} \\ p_{\eta_1} \end{bmatrix} = a\mathbf{v}_i. \quad (48)$$

A képletben szereplő $\mathbf{v}_i$ vektor tetszőleges eleme meghatározható egyszerű geometriai és kinematikai megfontolások alapján.

A P_i érintkezési pontban keressük az $\mathbf{F}_{i,1} = \mathbf{S}_{i,1} + \mathbf{N}_{i,1}$ vektor nagyságát ($i = 1, \dots, m$). Az erővektor iránya adott. Legyen a fogak $\mathbf{F}_{i,1}$ erő hatásvonalában történő elmozdulásai $f_{i,1}$ és $f_{i,2}$. Tegyük fel, hogy az erő hatásvonala és a $\Delta\mathbf{p}_i = (\Delta p_{\xi_2}, \Delta p_{\eta_2})$ elmozdulás egymással γ_i szöget zár be. Így

$$f_{i,1} + f_{i,2} = \frac{\Delta\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{F}_{i,1}}{F_{i,1}} = \frac{\Delta p_i}{\cos(\gamma_i)} = a \frac{v_i}{\cos(\gamma_i)}. \quad (49)$$

Legyen $s_{i,1}$ illetve $s_{i,2}$ az egyes érintkező fogak merevsége az $\mathbf{F}_{i,1}$ erő irányában. Ekkor

$$F_{i,1} = f_{i,1}s_{i,1} = f_{i,2}s_{i,2}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (50)$$

(49)-et és (50)-et összevetve kifejezhetjük az érintkező felületekre merőleges erő nagyságát:

$$F_{i,1} = a \frac{v_i}{\cos(\gamma_i)} \left(\frac{s_{i,1}s_{i,2}}{s_{i,1} + s_{i,2}} \right), \quad i = 1, \dots, m. \quad (51)$$

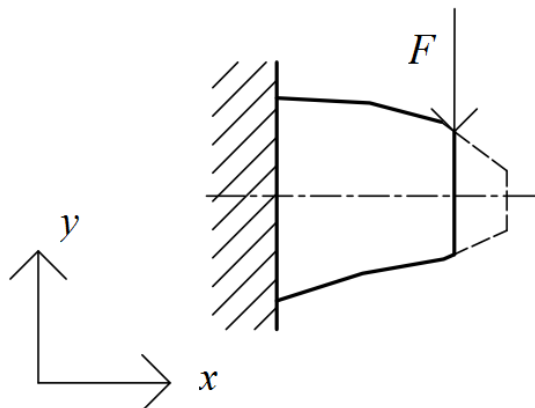
Mivel az (51)-ben szereplő merevség-értékek a geometria alapján meghatározhatók, így m új egyenletet kaptunk, és az a mennyiséggel nőtt az ismeretlenek száma. Így, összesen $2m + 3$ egyenletünk van, és $2m + 3$ ismeretlenünk. Így a lineáris egyenletrendszer megoldható.

5.2.4. A FOGAK MEREVSÉGEINEK MEGHATÁROZÁSA

A fogak merevségének meghatározásakor csak a hajlításból származó merevséget vettem figyelembe. Ismert, hogy a rúd hajlításból származó c rugóállandója a rúdra merőleges f elmozdulás és az őt létrehozó F erő differenciálhányadosából kapható meg, azaz:

$$c = \frac{\partial f(F)}{\partial F}. \quad (52)$$

Az s merevség pedig megegyezik c reciprokéval. Az erőből függő elmozdulás-függvény meghatározható a Castigliano-tétel [12] segítségével (lásd, 30. ábra). A fogtövet meghatározó két ponttal merőlegesen vettem fel a fog tengelyét. A számítások során egyszerűségekként feltételeztem, hogy a fog szimmetrikus, így a keresztmetszetek felírásakor csak a fog y irányú vastagságát használtam fel. Emiatt aszimmetrikus esetben csak közelítő eredményt lehet kapni a fogak szilárdságára. Habár a számítás sok egyszerűsítést tartalmaz (főképp, hogy a fog nem igazán tekinthető rúd-szerű alakzatnak), így egyszerűsített számítások analitikusan elvégezhetők. Ezzel egy gyors közelítő eredményhez juthatunk a tervezéskor, amelyet később akár véges elem szimulációkkal lehet pontosabban ellenőrizni.



30. ábra

Az fog, mint rúdmodell

Így meghatározható a fog tengelyére merőleges irányban vett merevség. Az 5.2.3. pontban szereplő $s_{i,1}$ és $s_{i,2}$ ($i = 1, \dots, m$) merevségek nem a fog tengelyére merőleges merevségek. Ekkor, tetszőleges s' , a rúd tengelyével δ szöget bezáró irányban keresett merevség meghatározható a következő képlettel:

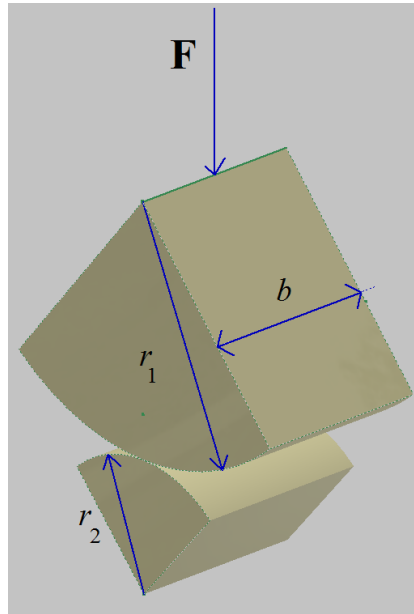
$$s' = \frac{s}{\sin(\delta)}. \quad (53)$$

5.3. HERTZ-FESZÜLTSEG

A Hertz-féle érintkezési feszültség [12] a fogfelület kifáradása szempontjából lényeges mennyiség. Ha egy r_1 és egy r_2 sugarú, b vastagságú hengert F erővel összeszorítunk a párhuzamos tengelyeik által meghatározott síkban, a tengelyekkel merőleges irányban (lásd 31. ábra), akkor a következő képlettel számíthatjuk ki a hengerek közti Hertz-feszültséget:

$$\sigma_{H_{max}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi(1-\nu^2)} \cdot \frac{FE}{br}}, \quad E = \frac{2E_1E_2}{E_1 + E_2}, \quad r = \frac{r_1r_2}{r_1 + r_2}. \quad (54)$$

A képletben ν a Poisson-tényező, míg E_1 , illetve E_2 az egyes kapcsolódó hengerek rugalmassági modulusai.

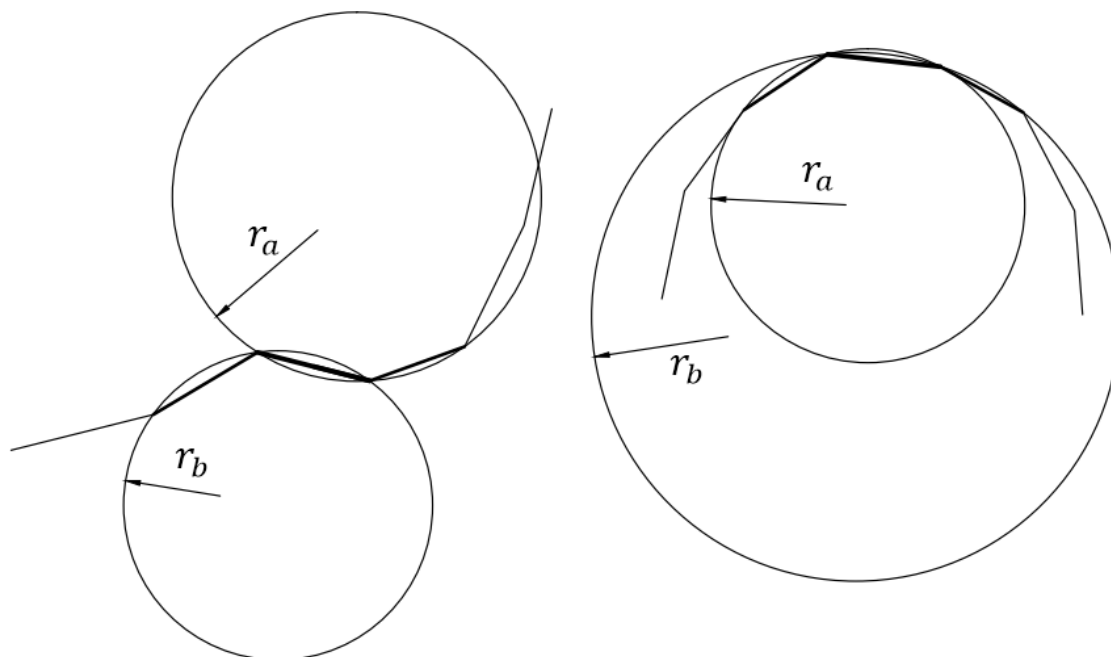


31. ábra

A Hertz-feszültség számításához szükséges geometriai adatok

Fogaskerek esetén a kapcsolópontokban érintkező fogak görbületi sugarai alapján számíthatunk Hertz feszültséget, akár kör, akár nem kör alakú fogaskerek esetén. Dolgozatomban a fogaskerek körvonala szakaszokból áll, és az érintkezési pontok is szakaszok. Ebben az esetben a következőképpen közelíthetjük az adott pontban a fogaskerék

gömbületi sugarát. Tekintsük a 32. ábrán látható, r_a és r_b sugarakat, és vegyük a sugarak minimumát! Így a (46) képlettel felülről becsljük a Hertz-feszültséget.



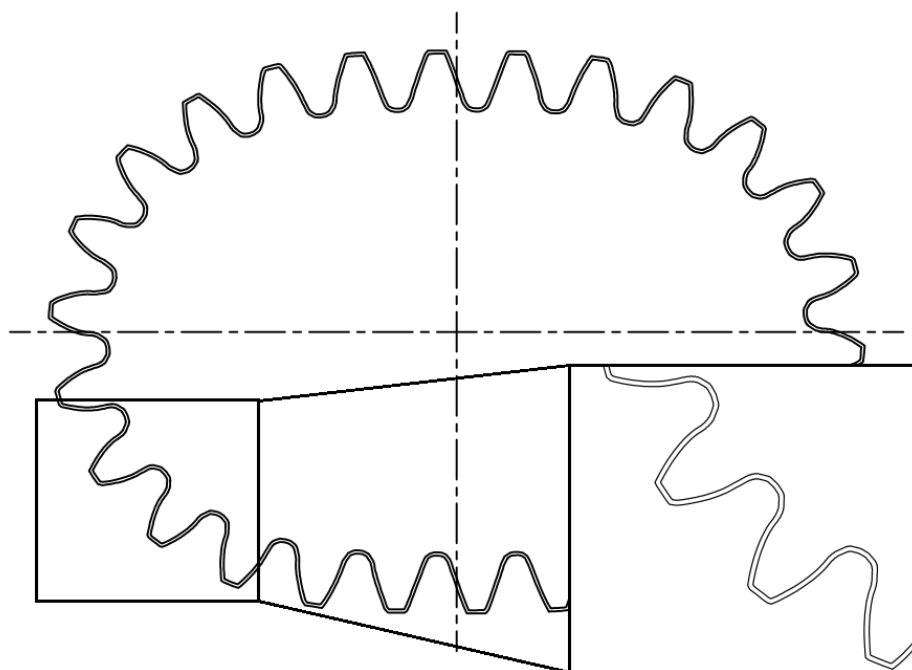
32. ábra

Az érintkezési pontban lévő szakasz két szomszédja segítségével meghatározott
gömbületi sugarak

Az érintkezési pontban fellépő erők az 5.2. pontban leírt módszerrel megegyező módon számíthatók. Ahhoz, hogy a fogaskerékpár megfeleljen Hertz-feszültség szempontjából, minden egyes pontban teljesülnie kell a $p_{meg} > \sigma_{H_{max}}$ egyenlőtlenségnek.

6. UTÓMUNKÁLATOK

A fogaskerekek geometriáján módosítani kell, hogy a gyártás során elkészített fogaskerékpár a tervezett tengelytávon tényleg le tudjon gördülni egymáson, ne alakulhassanak ki nem várt fog-összeakadások vagy szorulások. Ennek a problémának az elkerülése érdekében a fogaskereket meghatározó kontúr vonalakat a gyártás lehetséges hibájától függően beljebb kell mozdítani (lásd, 33. ábra).



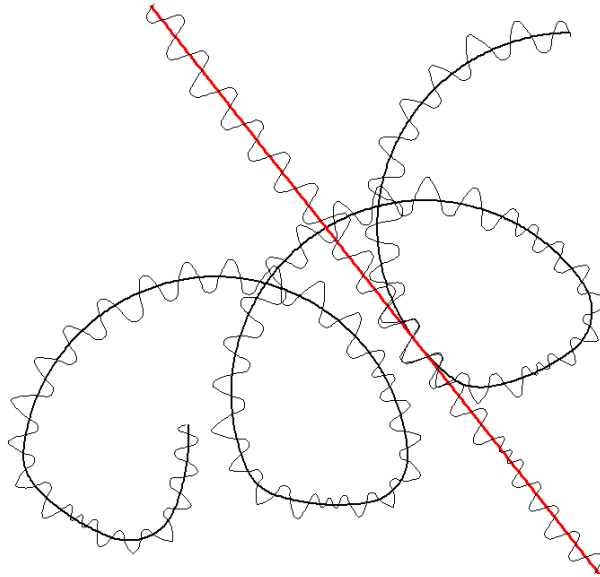
33. ábra

A kiszámolt fogaskerék-geometria, illetve a gyártási hibával befele eltolt, gyártható geometria

Akár lézervágással, akár huzalszikra-forgácsolással állítjuk elő a fogaskerekeket, a gépek egyenletes megmunkálási sebességének tartásához érdemes a fogaskerekek körvonalát spline-okkal közelíteni egyenes szakaszok helyett. A spline-közelítéssel kapott fogaskerék-körvonalnak a gyártási hibánál jobban sehol sem szabad megközelítenie a kiszámolt fogaskerék-geometriát.

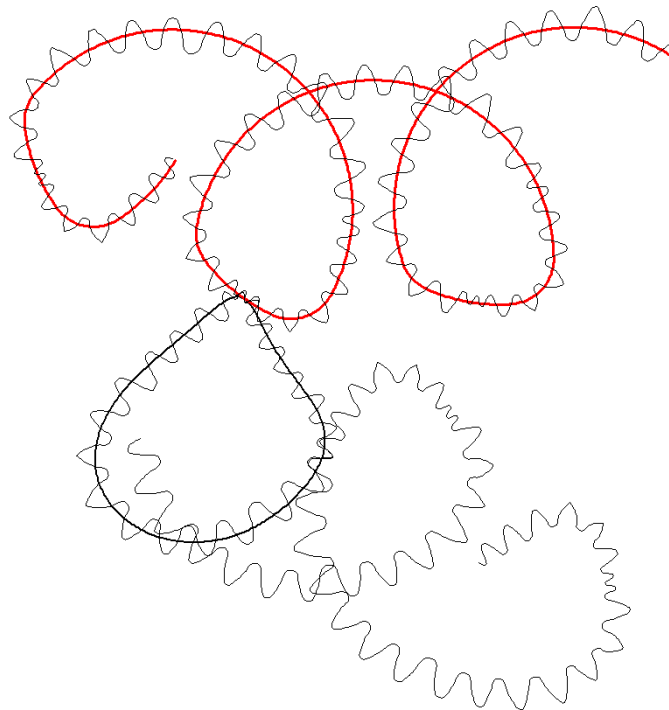
7. TOVÁBBI FEJLESZTÉSI LEHETŐSÉGEK

A szakdolgozat írása során elkészített program nem tudja legenerálni azoknak a fogaskerék-pároknak a fogazását, ahol mindkét fogaskeréken van homorú szakasz. Erre a problémára egy új irányban kezdtem el kutatni, azonban a szakdolgozat leadásáig nem sikerült a módszert megbízhatóvá tenni. Az ötlet az, hogy az elsőnek fogazandó fogaskereket ne fogazóléccel, hanem egy közbenső képzeletbeli fogazó szerszám segítségével gyártsuk le. A fogazó szerszám osztógörbjét határozzuk meg úgy, hogy mind a fogazóléc egyenes osztógörbjén, mind a fogaskerék hol homorú, hol domború osztógörbjén le tudjon görbülni. A fogazó szerszámot úgy definiáltam, hogy a homorú, illetve a domború osztógörbe-szakaszokkal kapcsolódó részei adott r_1 , illetve r_2 sugarú körívekből álljanak. Az így előállított szerszám-osztógörbe nagy valószínűséggel metszi önmagát (lásd 34. ábra). Ezért a szerszám fogazatának generálása során létrejövő metszéspontok közül ki kellett szedni a tévesen felvett metszéspontokat. A módszer működését lásd a 34., és a 35. ábrán. A 35. ábrán látható állapot során a fogaskereket meghatározó vonalláncot önmagával is metszeni kell a megfelelő fogaskerék-geometria előállításához.



34. ábra

A fogazóléc legördülése a közbenő fogazószerszámon



35. ábra

A fogazószerszám legördülése a félkész állapotban lévő fogaskerék-geometrián
A fogaskerékből kilógó vonalak az algoritmus melléktermékei. Ezeket el kell távolítani
a fogaskerék geometriájának meghatározásához.

8. ÖSSZEFOGLALÁS

A nem köralakú fogaskerek tervezése három fő részből áll. Először meg kell határoznunk valamilyen áttétel-függvény ismeretében az osztógörbét. Ezt követően létre kell hoznunk a fogazatot. Végül, ellenőriznünk kell, megfelel-e a fogaskerék az igénybevételeknek. Dolgozatom keretein belül erre a három feladatra kerestünk általánosan használható összefüggéseket, algoritmusokat.

Elsőként az osztógörbét kell meghatároznunk adott áttétel-függvényhez állandó, vagy változó tengelytáv esetén. Az osztógörbék analitikusan nem meghatározhatók. Emiatt numerikus módszerekhez kell folyamodnunk. Dolgozatom keretein belül feltettük, hogy a fogaskerek egy-egy rögzített pontja adott pályán, adott elfordulás-függvénnyel mozog. Ezzel az általánosítással lehetővé vált, hogy azonos összefüggéssel kezeljük a fix tengelytávú fogaskerek, illetve a fogaskerék-fogasléc kapcsolódás problémáját.

Az osztógörbe meghatározása után a fogak geometriáját kell meghatározni. Dolgozatomban evolvens fogazatot alkalmaztunk. A kerület mentén változtattuk a modult és a profileltolást, hogy a lehető legnagyobb fogméretet alkalmazhassam alámetszés nélkül. Az algoritmust tetszőleges fogprofilra megvalósítottuk. A fogazat végső geometriájának előállításához a Maag-féle foggyalulás elvét alkalmaztuk.

A szilárdsági ellenőrzés során elsőként a fogak érintkezési pontjait kell meghatároznunk. Ezt követően meg kell határoznunk, hogy az egyes fogakra mekkora terhelés jut. Ehhez statikai és szilárdságtani egyenleteket kell felírni, hogy a végén megkaphassuk a lineáris egyenletrendszer, aminek a megoldásából megkapjuk a keresett erőket. A fogak ellenőrzését ezután mind fogtőszilárdság, mind Hertz-feszültség szempontjából a kör alakú fogaskerekhez hasonlóan ellenőrizhetjük.

Az elkészült fogaskerek tipikusan huzalszikra-forgácsolással, vagy lézervágással állíthatók elő. Ezen kívül marással is előállítható a fogazat.

9. SUMMARY

The development of non-circular gear pairs consists of three parts. The first step is the designing of the pitch curve. The second is the defining of the tooth shapes. After we defined the geometry of the gear, we need to do geometry and strength analysis.

A pitch curve needs to be found to a given transfer function with fixed or variable axis distance. The curves usually can not be expressed analytically, so numerical solution is applied. In this work, the path and the angle of rotation of the two gears are used to find the pitch curves. Because of the use of variable axis distance, the same equalations can be used for the gear-gear, and the gear-rack linkages.

The second part is the shape design of the geometry of the gear rack. Gear rack can be used with variable teeth module and shift factor, too. In this work, we tried to maximize the module of the teeth to maximize the load capacity. An algorithm was developed to do this with arbitrary teeth profile without undercut.

The shape of the teeth are definable in several ways. The principle of Maag was used to determine the geometry of the gears.

After we have defined the geometry of the gears, we need to check them. At the first, we need to check the contact number. In this work, I developed a method for computing the forces in every contact points. Based ont he contact forces we can determine the strength of the teeth base, and the Hertzian contact stress. If the designed gears are not correspond to the stress conditions, we need to modify the geometry of the gears.

The gears can be manufactured by for example, laser cutting.

FELHASZNÁLT IRODALOM

- [1] **Alexander L. Kapelevich:** *Asymmetric Gears: Parameter Selection Approach*, Gear Technology, 2012 június/július, pp. 48 – 51
- [2] **Bendefy András, Bendefy Zoltán:** *Általános geometriájú fogaskerekek generálása*, TDK dolgozat, 2011
- [3] **Gergő Lajos:** *Numerikus módszerek*, ELTE Eötvös Kiadó, 2010, [332], ISBN-978-963-312-034-7
- [4] **Laczik Bálint:** *Változó áttételű hengeres fogaskerekek*, Doktori disszertáció, BME, 2008
- [5] **Laczik Bálint:** *Design and Manufacturing of Non-Circular Gears by Given Transfer Function*, Proc. of ICT 2007 Miskolc, 2007, pp. 101-109
- [6] **Laczik Bálint:** *Egy Leonardo-vázlathoz... Excentrikus, kör alakú evolvens fogaskerékkel kapcsolódó ellenkerék tervezése és gyártása*, A Dunaújvárosi Főiskola Közleményei, XXVIII, Dunaújváros, 2006, pp. 87-94
- [7] **Ф.Л.Литвин:** *Некруглые зубчатые колеса*, МАШГИЗ, Москва-Ленинград, 1956, [203] (*F. L. Litvin: Nem köralakú fogaskerekek*)
- [8] **F. L. Litvin:** *Noncircular Gears – Design and Generation*, Cambridge, 2009, [204], ISBN-978-0-521-76170-3
- [9] **F. L. Litvin:** *A fogaskerék kapcsolás elmélete*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972, [605], ETO-621.833
- [10] **Németh Nándor:** *Nem köralakú fogaskerekek fejlesztése*, TDK dolgozat, 2013. november
- [11] **Simon, Kozma, Molnár, Karsai, Nguyen Hoang, Király:** *Gépelemek 2.*, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2008.
- [12] **Muttnyánszky Ádám:** *Szilárdságtan*, Műszaki Könyvkiadó, 1981, [744], ISBN-963-10-359-13